LUCIEN GODEAUX

LES GÉOMÉTRIES

COLLECTION ARMAND COLIN

N° 206.

COLLECTION ARMAND COLIN
(Section de Mathématiques)

Les Géométries

par

Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie Royale de Belgique
Professeur à l'Université de Liége

36 Figures

TROISIÈME ÉDITION

LIBRAIRIE ARMAND COLIN
103, Boulevard Saint-Michel, PARIS
1947

AVANT-PROPOS

On ne trouvera pas, dans ce modeste ouvrage, un exposé rigoureux des questions traitées ; il n'est pas destiné aux mathématiciens, notre dessein est plus modeste. Nous avons voulu esquisser à grands traits l'évolution de la géométrie et avons cherché à le faire de manière à pouvoir être suivi par des personnes n'ayant pas une culture plus développée que celle que l'on acquiert dans l'enseignement secondaire. Nous ne nous dissimulons pas toute la difficulté d'une telle entreprise et nous dirons tout de suite que nous sollicitons l'indulgence du lecteur.

Les Grecs nous ont laissé la géométrie élémentaire et c'est par le rappel de leurs découvertes que nous débuterons. Le développement de la géométrie grecque est marqué par les étapes : Pythagore, les Éléates, Euclide, Apollonius. Nous avons ajouté à ce premier chapitre quelques indications sur les théorèmes de Quételet et Dandelin relatifs aux coniques, théorèmes que l'on verrait sans surprise figurer dans le Traité d'Apollonius.

Après la période grecque, il faut attendre le XVII^e^ siècle pour voir apparaître de nouvelles méthodes en géométrie. C'est en premier lieu la méthode des coordonnées de Descartes et Fermat, la géométrie analytique, qui fait l'objet du second chapitre. C'est en second lieu la méthode des projections, qui apparaît, avec Desargues et Pascal, en même temps que la géométrie analytique. Mais l'élaboration de la *géométrie projective sera beaucoup plus lente : ce n'est qu'au début du XVIII^{e} siècle, après Monge et Carnot, qu'elle sera érigée en doctrine autonome par Poncelet et largement développée par Chasles. Cette géométrie fait l'objet du troisième chapitre.*

Nous avons consacré le quatrième chapitre à l'exposé des recherches sur les principes de la géométrie et le cinquième à l'introduction en géométrie de la notion de groupe. On sait que cette notion, due à un mathématicien de vingt ans, Évariste Galois, dont la vie fut aussi brève que tourmentée, a permis à S. Lie et F. Klein une classification rationnelle des géométries ; nous en donnons les grands traits. Le cadre élémentaire que nous nous sommes tracé ne nous a pas permis, autrement que par une brève allusion, d'indiquer la remarquable extension donnée tout récemment aux idées de Lie et Klein par M. Élie Cartan.

Le dernier chapitre a trait à la topologie. Nous avons introduit celle-ci, suivant une idée de M. F. Enriques, en partant de la géométrie élémentaire et en faisant successivement abstraction de la notion de ligne droite, puis de celle de distance. Grâce à un large appel à l'intuition, nous espérons que le lecteur pourra se faire une idée de la nature de cette géométrie.

Quelques indications bibliographiques lui permettront de compléter éventuellement les théories abordées dans les pages qui vont suivre.

Il nous resterait bien des points à traiter. Nous avons brièvement indiqué les géométries hyperspatiales, la géométrie algébrique, et la géométrie infinitésimale classique. Nous avons déjà eu l'occasion de parler des premières dans un autre ouvrage auquel nous nous permettons de renvoyer le lecteur[1]. Celui-ci pourra également consulter l'article sur

1. *La Géométrie* (Bibliothèque scientifique belge). Paris, Hermann ; et Liége, Thone, 1931.

la géométrie dans le tome I de l'Encyclopédie Française.

Nous avons tâché d'écrire le livre que nous eussions voulu lire quand nous avions vingt ans. Puisse-t-il rendre quelque service !

Liége, le 21 décembre 1936.

LES GÉOMÉTRIES

Chapitre premier

LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

1. La naissance de la géométrie. — On attribue généralement aux Égyptiens et aux Babyloniens les premières recherches géométriques.

En Égypte, le retour périodique des inondations du Nil obligeait les harpédonaptes ou arpenteurs à reprendre chaque année le tracé des limites des propriétés. Mais la géométrie des Égyptiens avait un caractère expérimental, les formules étaient empiriques. Ainsi, pour évaluer l'aire d'un quadrilatère de côtés a, b, c, d, ils se servaient de la formule

$$\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2},$$

donnant une valeur d'autant plus approchée que les angles du quadrilatère se rapprochent plus d'angles droits.

De même, l'aire du triangle isocèle de côtés a, a, b était pour eux donnée par la formule

$$\frac{a\,.\,b}{2},$$

qui donne une approximation d'autant plus grande que a est plus grand par rapport à b.

L'aire du cercle de rayon R était calculée par la formule $\left(\frac{16}{9}\right)^2 R^2$, ce qui donnait pour le rapport de la longueur de la circonférence au diamètre la valeur 3,1604....

La majeure partie de ce que nous connaissons des mathématiques égyptiennes provient de la traduction par Eisenlohr du papyrus *Rhind*, qui n'est autre que le *Manuel de calcul du scribe Ahmès* ; il date de 1700 à 2000 avant J.-C. Récemment, la traduction d'un papyrus conservé à Moscou a permis à Struve de constater que les Égyptiens connaissaient le volume du tronc de pyramide et la surface de la sphère.

Les Babyloniens avaient certaines connaissances mathématiques ayant probablement aussi leur origine dans les besoins de l'arpentage et du commerce. Une tablette, conservée au British Museum, remontant probablement à l'an 2000 avant J.-C., porte une série de problèmes se ramenant à la résolution d'équations du second degré et même à une équation bicarrée[1].

Il semble également que les Hindous ont connu, dans certains cas particuliers, le théorème sur le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

Les connaissances mathématiques des Égyptiens et des peuples orientaux parvinrent en Grèce à la faveur des échanges commerciaux. On attribue à Thalès, un des premiers géomètres grecs, vivant vers l'an 600 avant J.-C., l'introduction dans son pays de la géométrie égyptienne.

2. La géométrie pythagoricienne. — Pythagore, né à Samos vers — 572, a fondé à Crotone une école célèbre, où l'enseignement, à la fois philosophique et scientifique, avait au début un caractère mystique et secret. C'est dans cette École que, probablement pour la première

1. F. Thureau-Dangin, L'équation du second degré dans la mathématique babylonienne, d'après une tablette inédite du British Museum (*Revue d'Assyriologie*, 1936, pp. 27-48), Textes mathématiques babyloniens (*Idem*, pp. 65-84).

fois, la géométrie ne fut plus cultivée uniquement en vue de ses applications et fut mise sous forme déductive.

Suivant Paul Tannery, il a probablement existé un traité de géométrie pythagoricienne, dont le cadre était assez semblable à celui d'Euclide. Mais les concepts de point, de lignes, de surfaces étaient d'une nature bien différente. Pour les Pythagoriciens, le point n'était pas encore le point sans dimensions de notre géométrie, c'était un point étendu, conforme à l'intuition empirique du petit grain de sable, qui était appelé monade ou unité ayant une position. Une ligne était conçue comme une suite de monades, sorte de fil plus ou moins ténu ; une surface, engendrée par le mouvement d'une ligne, était une espèce de voile plus ou moins épais.

Dans la géométrie pythagoricienne, les longueurs de deux segments de droites comprenant l'un m monades, l'autre n, étaient dans le rapport $m : n$; toutes les longueurs étaient commensurables et c'est sur cette base que fut construite la théorie des proportions géométriques.

Cependant, le théorème de Pythagore — dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés — allait fournir l'argument ruinant la géométrie construite sur le concept de monade.

Considérons un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse et le côté de l'angle droit soient dans le rapport $m : n$, m et n étant deux nombres premiers entre eux. Le théorème du carré de l'hypoténuse conduit à la relation

$$m^2 = 2n^2.$$

Le nombre m doit être pair et par conséquent m^2 est multiple de 4. Par conséquent n est pair et les deux nombres ne sont pas premiers entre eux, contrairement à l'hypothèse. Cette contradiction montre que l'hypoténuse et le côté de l'angle droit ne sont pas commensurables, ou encore que la diagonale d'un carré et son côté ne sont pas commensurables.

Cette découverte, longtemps tenue secrète, fut divulguée par Hippase de Métaponte. La légende rapporte, qu'expulsé de l'École pour ce fait, Hippase fut puni des dieux en périssant dans un naufrage.

3. Les paradoxes des Éléates. — Élée, ville grecque des bords de la mer tyrrhénienne, fut le siège d'une École dont les principaux représentants furent Parménide et son élève Zénon. Parménide naquit à Élée aux environs de — 500 ; il semble que ce soit lui qui ait le premier reconnu que le point, la ligne, la surface, les figures de la géométrie n'ont qu'une existence idéale. Proclus lui attribue la définition que l'on trouve dans Euclide : le point est ce qui n'a pas de parties.

Zénon, pour défendre les idées de son maître, a énoncé quatre paradoxes restés célèbres, dont les deux premiers concernent uniquement la géométrie et nous occuperont seuls.

1. Pour passer d'un point A à un point B, un mobile doit passer par le milieu C du segment AB, puis par le milieu du segment CB, et ainsi de suite à l'infini. Le mobile n'arrivera jamais en B.

2. Achille au pied léger ne peut atteindre une tortue qui a quelque avance sur lui. En effet, supposons qu'Achille se trouve à 100 mètres de la tortue et aille dix fois plus vite qu'elle. Si au début Achille se trouve en A et la tortue en B, lorsqu'Achille sera parvenu en B, la tortue aura parcouru 10 mètres et se trouvera en C ; lorsqu'Achille se trouvera en C, la tortue aura parcouru 1 mètre ; et ainsi de suite à l'infini.

Suivant Paul Tannery, il faut voir dans ces paradoxes une réduction à l'absurde des idées des Pythagoriciens. Si la monade existe, tout segment est toujours supérieur à une quantité ε et la somme d'une infinité de segments est infinie ; les paradoxes de Zénon montrent l'absurdité de cette hypothèse.

Notons en passant, avec Zeuthen, que les paradoxes de Zénon impliquent la connaissance de la somme d'une progression géométrique. Dans le premier paradoxe, si AB est pris comme unité, on a

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots.$$

Dans le second, on a

$$100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = 100 + \frac{100}{9}$$

ou, en divisant les deux membres par 100,

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = 1 + \frac{1}{9}.$$

La critique des Éléates porta d'ailleurs un coup mortel à la monade, qui devait disparaître bientôt de la géométrie grecque.

4. La Géométrie d'Euclide. — Euclide vivait à Alexandrie vers 300 avant J.-C. Ses *Éléments* constituent un exposé des parties fondamentales de l'arithmétique et de la géométrie, sous forme logique, basé sur un certain nombre d'hypothèses, qui est encore aujourd'hui à la base de notre enseignement.

L'ouvrage d'Euclide est divisé en treize livres : les quatre premiers concernent la géométrie plane, le cinquième contient la théorie générale des grandeurs et de leurs rapports, théorie qui est appliquée, dans le sixième livre, à la géométrie plane. Les trois livres suivants sont consacrés à l'arithmétique, le dixième à la classification des incommensurables et enfin les trois derniers à la géométrie de l'espace.

Les hypothèses sur lesquelles est basée la géométrie d'Euclide sont de trois sortes : les termes ou *définitions*, les *postulats* et les notions communes ou *axiomes*. Nous nous en tiendrons aux hypothèses du premier livre, en somme les plus importantes.

Remarquons tout d'abord que les définitions qu'Euclide donne n'impliquent nullement l'existence des objets définis. Plusieurs de ces définitions sont d'ailleurs obscures. En définissant la droite, par exemple, Euclide dit simplement au fond qu'il existe des lignes appelées droites. Ce n'est que par l'énoncé des premiers postulats que l'on sera renseigné plus amplement.

Voici quelques-unes des définitions d'Euclide.

Le point est ce qui n'a pas de parties.

La ligne est une longueur sans largeur.

Les extrémités d'une ligne sont des points.

La ligne droite est celle qui est semblable à elle-même en tous ses points.

La surface est ce qui a seulement longueur et largeur.

Les extrémités d'une surface sont des lignes.

La surface plane est celle qui est semblable pour toutes les droites qui y sont situées.

Si une droite, menée sur une autre droite, fait des angles adjacents égaux entre eux, chacun des deux angles égaux est droit et la droite menée se dit perpendiculaire à la seconde.

Les parallèles sont les droites d'un plan qui, prolongées indéfiniment, ne se rencontrent pas.

Les postulats sont au nombre de cinq.

I. Mener une ligne droite entre deux points.

II. Prolonger indéfiniment une droite limitée.

III. Décrire un cercle de centre donné et de rayon donné.

IV. Tous les angles droits sont égaux entre eux.

V. Si une ligne droite qui en coupe deux autres, forme d'un même côté avec ces droites des angles internes dont la somme est moindre que deux droits, les deux dernières lignes se couperont, ou leurs prolongements, du côté où la somme des angles est inférieure à deux droits.

Comme nous l'avons dit plus haut, les deux premiers postulats éclairent la notion de ligne droite en précisant que deux points déterminent une droite et qu'une droite est indéfinie.

Le cinquième postulat est connu sous le nom de postulat d'Euclide ; il est célèbre tant par les tentatives qui ont été faites pour le démontrer en se basant sur les postulats précédents que par les conséquences qu'eurent l'échec de ces tentatives sur le développement de la géométrie.

Les axiomes sont communs à toutes les sciences où l'on étudie les grandeurs ; ils sont au nombre de huit.

I. Les choses égales à une même chose sont égales entre elles.

II. Si à des choses égales on ajoute des choses égales, les sommes sont égales.

III. Si à des choses inégales, on ajoute des choses égales, les sommes sont inégales.

IV. Si de choses égales, on soustrait des choses égales, les restes sont égaux.

V. Les doubles des choses égales sont égaux.

VI. Les moitiés de choses égales sont égales.

VII. Les choses qui se superposent l'une à l'autre sont égales.

VIII. Le tout est plus grand que la partie.

En somme, par ces axiomes, Euclide définit l'égalité des grandeurs. En particulier, le septième axiome indique comment se démontrera l'égalité des figures géométriques : par superposition.

5. La trisection de l'angle. — Dès le v^e^ siècle avant J.-C., les Grecs se sont occupés de trois problèmes restés célèbres ; la trisection de l'angle, la duplication du cube et la quadrature du cercle. Ils se sont proposé de résoudre ces problèmes par des constructions effectuées au moyen de la règle et du compas. Ce n'est qu'à une époque récente que l'on est parvenu à démontrer l'impossibilité de telles solutions, mais les recherches des Grecs sur ces objets ne furent cependant pas stériles ; elles les conduisirent notamment à l'étude de certaines courbes. Peut-être est-ce là qu'il faut chercher l'origine de l'étude des sections coniques.

Le problème de la trisection de l'angle a pour objet de diviser un angle donné en trois parties égales. Examinons trois des solutions proposées par les géomètres grecs.

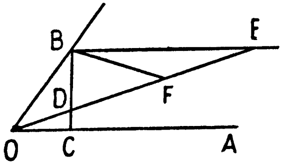

FIGURE 1.

1. Soit (fig. 1) $\widehat{AOB}$ l'angle à diviser en trois parties égales. De B, abaissons BC perpendiculaire sur OA, puis menons par B la parallèle BE à OA et par O une droite OE telle que le segment DE soit égal à 2 . OB. Soit alors F le milieu de DE. On a

$$OB = DF = FE = BF,$$

par conséquent les angles $\widehat{BOE}$, $\widehat{BFO}$ sont égaux. Le dernier est égal au double de l'angle $\widehat{BEF}$, c'est-à-dire au double de l'angle $\widehat{AOE}$. On a par conséquent

$$\widehat{AOE} = \frac{1}{3}\widehat{AOB}.$$

La solution du problème est donc ramenée à l'*intercalation* d'une longueur donnée DE = 2 . OB, entre deux droites BC, BE, sur une droite devant passer par le point O.

Si l'on mène par O une droite quelconque coupant BC en D′ et si l'on porte sur cette droite, à partir de D′ et dans le sens OD′, une longueur D′E′ = 2 . OB, le lieu de E′ est une courbe : la conchoïde de Nicomède, qui coupe BE en E. Le problème est cette fois ramené à l'intersection d'une droite et d'une courbe. Cette dernière pourrait du reste être tracée d'un trait continu au moyen d'un appareil mécanique facile à imaginer.

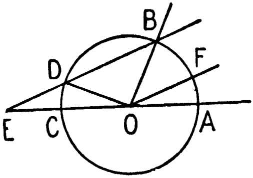

FIGURE 2.

2. Soit encore (fig. 2) $\widehat{AOB}$ l'angle à diviser en trois parties égales. Décrivons de O comme centre un cercle coupant les côtés de l'angle en A, B et le prolongement de AO en C. Menons par B une droite coupant le cercle en D et le prolongement de AO en E, telle que ED = OB. Les triangles OED, BOD étant isocèles, on a

$$\widehat{AEB} = \frac{1}{2}\widehat{ODB} = \frac{1}{2}\widehat{DBO}.$$

Menons par O une parallèle à ED coupant le cercle en F. On a

$$\widehat{AOF} = \widehat{AEB} = \frac{1}{2}\widehat{DBO} = \frac{1}{2}\widehat{BOF} = \frac{1}{3}\widehat{AOB}.$$

Ici également, le problème est ramené à une *intercalation*, celle du segment DE = OB entre la droite AO et le cercle, sur une droite passant par B.

Si par B on mène une droite coupant OA en E′ et si l'on porte sur cette droite, à partir de E′, dans le sens E′B, un segment E′D′ = OB, le lieu de D′ est une seconde conchoïde, coupant le cercle en D.

Les deux conchoïdes que l'on vient de rencontrer sont en quelque sorte complémentaires l'une de l'autre. En changeant de notations, considérons un point O et une droite r ne passant pas par O. Sur une droite p passant par O et coupant r en P, portons de part et d'autre de P des segments PM, PM′ égaux à une longueur donnée. Supposons que le segment PM′ soit porté dans le sens de P vers O. Lorsque la droite p varie, le point M décrit la conchoïde utilisée dans la première construction; le point M′ la conchoïde utilisée dans la seconde.

3. La troisième construction, qui est rapportée par Pappus, fait intervenir non plus une conchoïde, mais une hyperbole équilatère.

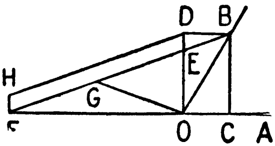

FIGURE 3.

Reprenons (fig. 3) l'angle $\widehat{AOB}$ qu'il s'agit de diviser en trois parties égales. Abaissons de B une perpendiculaire BC sur OA et complétons le rectangle OCBD de côtés OC, BC. Menons par B une droite BF telle que le segment EF intercepté par les droites AO, OD soit égal à 2 . OB. Soit enfin G le milieu de EF. L'angle $\widehat{OFE}$ est égal à la moitié de l'angle $\widehat{OGB}$, c'est-à-dire à la moitié de l'angle $\widehat{OBG}$. D'autre part, les angles $\widehat{OFE}$, $\widehat{DBE}$ sont égaux et enfin l'angle $\widehat{OBD}$ est égal à l'angle donné $\widehat{AOB}$. On en conclut que l'angle $\widehat{OFE}$ est égal au tiers de l'angle $\widehat{AOB}$.

Cela étant, menons par D une parallèle à BF et par F une parallèle à BC ; ces deux droites se coupent en H. Les triangles BCF, BED étant semblables, on a

$$\frac{CF}{BD} = \frac{BC}{DE},$$

d'où l'on déduit

$$CF \cdot FH = OC \cdot CB.$$

OC et BC étant fixés, le point H appartient à une hyperbole γ ayant pour asymptotes CF, CB. Cette hyperbole passe également par le point D, car on a CB = OD. Le segment DH a pour longueur EF = 2 . OB ; d'autre part, le point B étant choisi, le point D est déterminé et le point H se trouve sur le cercle de centre D et de rayon 2 . OB.

Le point H étant déterminé comme intersection de l'hyperbole γ et du cercle en question, le point F est déterminé et le problème est résolu.

Dans cette troisième construction, le problème est comme dans les deux premières ramené en premier lieu à une *intercalation*, en second lieu à la détermination d'un point commun à deux courbes.

6. La duplication du cube. — Dans le problème de la duplication du cube, on se propose de construire un cube de volume double d'un cube donné.

Si l'arête de ce dernier cube est prise comme unité de longueur, l'arête x du second sera donc obtenue en résolvant l'équation

$$x^3 = 2.$$

Hippocrate a ramené ce problème à la construction, plus générale, d'un cube de volume égal à celui d'un parallélipipède droit à base carrée, de côté a et de hauteur b, c'est-à-dire à la résolution de l'équation

$$x^3 = a^2b.$$

Il remarque que la solution s'obtient en insérant deux moyennes proportionnelles x, y entre les segments donnés a, b, c'est-à-dire en résolvant les équations

$$a : x = x : y = y : b. \tag{1}$$

Architas a à son tour ramené ce problème à la construction d'une certaine ligne brisée inscrite dans un angle.

Considérons (fig. 4) un angle $\widehat{AOB}$, abaissons de A la perpendiculaire AX sur OB et en B, élevons la perpendiculaire BY sur OB. Supposons que la droite XY soit perpendiculaire à OA. Les triangles semblables OAX, AXY donnent

$$OA : OX = OX : OY,$$

et les triangles semblables OXY, OYB,

$$OX : OY = OY : OB.$$

Si nous posons $a = OA$, $b = OB$, $x = OX$ et $y = OY$, nous retrouvons les relations (1).

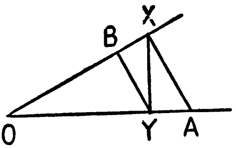

FIGURE 4.

Le problème se ramène donc, les segments OA et OB étant donnés, à trouver un angle $\widehat{AOB}$ tel que l'on puisse y inscrire la ligne brisée AXYB. Pour effectuer cette construction, les Grecs ont imaginé des instruments mécaniques. Descartes devait, beaucoup plus tard, dans sa Géométrie, imaginer un instrument analogue.

Ménechme a résolu le problème des moyennes proportionnelles d'Hippocrate en utilisant des coniques dont il cherche les intersections. Nous traduirons en langage moderne les constructions de Ménechme.

Des relations (1), on tire

$$x^2 = ay, \qquad y^2 = bx, \qquad xy = ab. \qquad (2)$$

Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires. La première des équations (2) représente une parabole de sommet O et d'axe Oy ; la seconde une parabole de sommet O et d'axe Ox ; la troisième une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont Ox, Oy. Le problème d'Hippocrate est résolu par Ménechme soit en considérant l'intersection des deux paraboles, soit en considérant l'intersection de la seconde parabole et de l'hyperbole.

7. La quadrature du cercle. — Le problème de la quadrature du cercle a été envisagé par les Grecs sous deux aspects. D'une part, ils ont cherché à évaluer par le calcul l'aire d'un cercle de rayon donné, ce qui revient à chercher la valeur du rapport de la circonférence à son diamètre. D'autre part, ils ont cherché à construire graphiquement un carré d'aire égale à celle d'un cercle donné.

En ce qui concerne la première manière de comprendre le problème, c'est par la considération des polygones inscrits et circonscrits au cercle que celui-ci fut naturellement abordé. Dans cet ordre d'idées, il faut arriver à Archimède (— 287 à — 212) pour obtenir un résultat précis.

Archimède, dans son *Traité de la Mesure du cercle*, commence par montrer que l'aire d'un cercle est égale à celle d'un triangle ayant pour base une droite de même longueur que la circonférence et pour hauteur le rayon de celle-ci. La quadrature du cercle est ainsi ramenée au calcul du rapport de la longueur de la circonférence à son diamètre, nombre actuellement désigné par π. Dans ce but, Archimède considère deux polygones de 96 côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit au cercle. Le périmètre du premier est supérieur à $3\frac{10}{71}$ fois le diamètre et le périmètre du second est inférieur à $3\frac{1}{7}$ fois le diamètre. Par conséquent π est compris entre $3\frac{10}{71}$ et $3\frac{1}{7}$.

Quant à la seconde manière de considérer le problème, elle a, comme dans les problèmes dont il vient d'être question, conduit les Grecs à introduire des courbes auxiliaires. L'une de celles-ci, appelée *quadratrice*, est une courbe transcendante dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, s'écrit

$$y = x \operatorname{tg}\left(y - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ce n'est qu'en 1882, lorsque Lindeman (1852-1919), en utilisant une méthode d'Hermite[1], eût démontré que le nombre π n'est racine d'aucune équation algébrique, c'est-à-dire est un nombre transcendant, qu'il fut établi que la quadrature du cercle était impossible au moyen de la règle et du compas.

Ces considérations ont conduit les géomètres à examiner les problèmes qui peuvent être résolus graphiquement en n'utilisant que la règle et le compas. Seuls, les problèmes que l'algèbre ramène à la résolution de systèmes d'équations du premier et du second degré rentrent dans cette catégorie. Les autres problèmes exigent, pour pouvoir être résolus graphiquement, l'usage d'appareils plus compliqués, tels que les curvigraphes par exemple, appareils qui permettent de tracer des courbes autres que le cercle. Il en est notamment ainsi des trois problèmes considérés par les Grecs et dont il vient d'être question.

Des recherches modernes ont montré que les problèmes qui peuvent être résolus graphiquement au moyen de la règle et du compas, peuvent également l'être en utilisant seulement une règle à deux bords parallèles, c'est-à-dire une règle ordinaire.

Un ingénieur français, E. Lemoine, bien connu par ses travaux sur la géométrie du triangle, a imaginé, sous le nom de Géométrographie, une méthode d'examen des problèmes résolubles au moyen de la règle et du compas.

Lemoine introduit cinq symboles d'opérations :

R_1 : Faire passer le bord d'une règle par un point donné.

1. Démonstration de la transcendance de la base e des logarithmes népériens.

R_2 : Tracer une droite en suivant le bord d'une règle.

C_1 : Mettre la pointe d'un compas en un point donné.

C_2 : Mettre la pointe d'un compas en un point non désigné d'une droite donnée.

C_3 : Tracer un cercle au moyen d'un compas.

Dans la résolution graphique d'un problème donné, ces opérations interviennent un certain nombre de fois. Supposons qu'elles interviennent respectivement l_1, l_2, m_1, m_2, m_3 fois. La solution considérée aura comme symbole

$$l_1R_1 + l_2R_2 + m_1C_1 + m_2C_2 + m_3C_3.$$

La construction aura comme *coefficient de simplicité* la somme $l_1 + l_2 + m_1 + m_2 + m_3$, faisant intervenir toutes les opérations, et comme *coefficient d'exactitude* la somme $l_1 + m_1 + m_3$, faisant intervenir les opérations qui dépendent le plus de l'habileté du dessinateur.

La meilleure construction sera celle donnant les coefficients de simplicité et d'exactitude les plus petits possible. (Voir E. Lemoine, *La Géométrographie ou art des constructions géométriques*, Paris, 1902.)

8. Les premières recherches des Grecs sur les sections coniques. — Comme nous l'avons vu, les Grecs ont utilisé les sections coniques dans la résolution des problèmes de la trisection de l'angle et de la duplication du cube. Ces courbes furent d'abord définies comme sections d'un cône de révolution.

Considérons un cône de révolution Λ, de sommet S et dont l'angle au sommet est ω. Soient s une génératrice du cône, σ un plan perpendiculaire à s et ne passant pas par S. C'est la section du cône Λ par le plan σ qui est, pour les Grecs, par définition, une section conique γ ; ils ne considèrent pas les autres sections planes de Λ. La courbe γ est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que l'angle ω est aigu, droit ou obtus. Avant

Apollonius d'ailleurs, ces courbes ne portaient pas ces noms, mais étaient appelées sections du cône à angle aigu, droit ou obtus. Et c'est encore sous ce nom qu'Archimède les considère.

Pour étudier les sections coniques, les Grecs déduisaient de leur définition une propriété planimétrique caractéristique. Nous allons indiquer la marche suivie dans le cas de l'ellipse.

L'intersection du plan σ et du plan α mené par la droite s et l'axe du cône, est un axe de symétrie a de la conique γ.

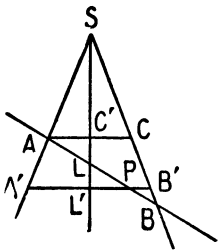

Figure 5.

Représentons (fig. 5) la section du cône par le plan α et soient A, B les points de rencontre du plan σ avec les génératrices du cône situées dans α, la droite SA coïncidant avec s (Les droites SA, AB sont donc perpendiculaires). Les points A, B sont les sommets de l'ellipse situés sur l'axe a de γ. Soit L le point de rencontre de AB avec l'axe du cône.

Considérons un point quelconque P de la droite AB et soit M un des points de rencontre avec le cône de la perpendiculaire élevée en P au plan α. Le point M appartient à la conique γ.

Le plan mené par P perpendiculairement à l'axe du cône coupe celui-ci suivant un cercle γ', de centre L', rencontrant SA en A' et SB en B'. D'après une propriété du cercle, on a

$$\overline{PM}^2 = A'P \,.\, PB'.$$

Menons par A une parallèle à A'B' coupant SB en C et SL en C'. Les triangles APA' et C'AL sont semblables et donnent

$$A'P : LA = AP : AC'.$$

Les triangles PB′B et ACB sont semblables et donnent

$$PB' : AC = PB : AB.$$

On en déduit, en observant que $AC = 2 \,.\, AC'$,

$$\overline{PM}^2 = 2 \frac{AL}{AB} AP \,.\, PB.$$

Les segments AL, AB sont des données de la question et la relation précédente, où

$$AP + PB = AB,$$

traduit la condition pour que le point M appartienne à la section du cône à angle aigu.

Traduisons en langage moderne en posant

$$AL = p, \quad AB = 2a, \quad AP = x, \quad PB = x', \quad PM = y\,;$$

nous avons

$$y^2 = \frac{p}{a} xx', \qquad x + x' = 2a.$$

Dans le cas de la section du cône à angle obtus (hyperbole), on a

$$y^2 = \frac{p}{a} xx',$$

avec

$$x' - x = 2a.$$

Dans le cas de la section du cône à angle droit (parabole), on obtient, par des procédés analogues,

$$y^2 = 2px.$$

Dans les trois cas, le segment $AL = p$ est appelé le demi-paramètre de la courbe.

9. Les sections coniques d'Apollonius. — Apollonius naquit à Perge vers — 262 ; il passa la plus grande partie de sa vie à Alexandrie, parmi les successeurs d'Euclide. Il a écrit un traité des sections coniques en huit livres dont seuls les sept premiers nous sont parvenus. Les quatre premiers livres renferment les éléments de la théorie des sections coniques ; les suivants traitent de questions particulières ; le cinquième par exemple est consacré au problème des normales et en particulier à celui des normales à une conique menées par un point de son plan.

La théorie des coniques doit à Apollonius des progrès importants ; ce géomètre abandonne la définition trop restreinte de ses prédécesseurs et appelle conique une section plane quelconque d'un cône à base circulaire.

Considérons dans un plan σ' un cercle γ' et un point S extérieur à σ'. Menons par S les droites s'appuyant sur le cercle γ' ; nous obtenons ainsi un cône Λ à base circulaire, de sommet S, dont Apollonius considère d'ailleurs les deux nappes. La section du cône Λ par un plan quelconque σ ne passant pas par S est par définition une conique γ. Et le fait qu'Apollonius considère les deux nappes du cône le conduit à étudier simultanément les deux branches de l'hyperbole comme ne constituant qu'une même courbe, ce qui ne se faisait pas avant lui.

Lorsque nous écrivons qu'Apollonius appelle conique la section du cône Λ par un plan quelconque σ, nous omettons cependant une restriction faite par ce géomètre. Celui-ci écarte les sections circulaires du cône Λ et commence donc par déterminer celles-ci. Les plans parallèles à σ' coupent évidemment le cône Λ suivant des cercles, mais il existe une autre famille de plans parallèles jouissant de la même propriété. Appelons axe du cône Λ la droite joignant le sommet S au centre C du cercle γ' ; un plan passant par l'axe et perpendiculaire au plan σ' coupe le cône suivant deux génératrices rencontrant σ' en des points A, B. Considérons deux points A' de SA et B' de SB tels que les triangles SAB et SB'A' soient semblables, les côtés AB et A'B' n'étant pas parallèles (ces droites sont antiparallèles suivant une locution souvent usitée de nos jours). Le plan mené par A'B', perpendiculairement au plan SAB, coupe Λ suivant un cercle et il en est de même de tout plan parallèle à ce plan. C'est ce qu'Apollonius appelle des sections de sens contraire. Ce géomètre démontre que la section du cône par un plan qui n'appartient pas à l'une des familles de plans parallèles qu'on vient de rencontrer, ne peut être un cercle ; cette section est une conique.

Ceci établi, considérons un plan σ coupant le cône Λ suivant une conique γ et le plan σ' du cercle γ' suivant une droite r. Menons le diamètre du cercle γ' perpendiculaire à la droite r et considérons le plan passant par ce diamètre et par le sommet S du cône. Ce plan coupe le cône suivant deux génératrices ; l'une rencontre σ en A et σ' en A', l'autre rencontre σ en B et σ' en B'.

Si par un point M de γ, on mène une parallèle à r rencontrant une seconde fois γ en M', le milieu P du segment MM' est un point de la droite AB. La droite AB est donc un diamètre de γ et les cordes conjuguées sont les parallèles à la droite r.

Une fois ce résultat obtenu, Apollonius arrivera à une propriété planimétrique des coniques par un procédé analogue à celui qui a été utilisé dans le cas du cône de révolution. Traduisons en langage moderne en appelant y le segment MP, x le segment AP, x' le segment PB, $2a$ le segment AB et enfin p le segment AC, C étant le point de rencontre de l'axe du cône avec le plan σ. On a

$$y^2 = \frac{p}{a} xx',$$

avec $x + x' = 2a$ si γ est une ellipse, $x' - x = 2a$ si γ est une hyperbole, ou

$$y^2 = 2px$$

si γ est une parabole.

Apollonius montre ensuite qu'il existe une infinité de diamètres et parmi ceux-ci au moins un diamètre perpendiculaire à ses cordes conjuguées. Cela lui permet d'identifier ses courbes avec les sections du cône de révolution considérées avant lui.

Le traité d'Apollonius contient toutes les propriétés aujourd'hui connues sur les diamètres, les axes, les centres, les asymptotes. Les foyers sont introduits dans le cas de l'ellipse et de l'hyperbole, mais il n'est pas question des directrices. Ce fait explique peut-être pourquoi la notion de foyer de la parabole est absente. En ce qui concerne les foyers de l'ellipse et de l'hyperbole, Apollonius donne la propriété des distances d'un point de la courbe aux deux foyers : La somme des distances d'un point de l'ellipse aux deux foyers est constante ; la différence des distances d'un point de l'hyperbole aux deux foyers est constante.

On pourrait s'étonner que les Grecs ne soient pas arrivés à la notion d'équation d'une section conique, notion qui ne devait apparaître qu'au XVII^e siècle, avec Descartes et Fermat. La raison en est que l'algorithme algébrique leur était inconnu ; chez eux, l'algèbre était géométrique, ils raisonnaient sur des longueurs, des aires, des volumes.

10. Les théorèmes belges sur les coniques. — Bien après Apollonius et les géomètres grecs, les coniques devaient être à nouveau considérées comme sections du cône par Desargues et Pascal, mais ceux-ci devaient introduire dans leur étude de nouvelles méthodes qui conduisirent, comme on le verra plus loin, à la géométrie projective. Au contraire, au siècle dernier, deux géomètres belges, Adolphe Quetelet (1796-1874) et Germinal Dandelin (1794-1847) établirent de nouvelles propriétés des sections coniques par des procédés extrêmement simples, propriétés qui eussent pu figurer dans le traité d'Apollonius sans surprise pour le lecteur. C'est pourquoi il sera question en cet endroit de ces propriétés, ou du moins de la plus saillante.

Considérons un cône de révolution Λ de sommet S et

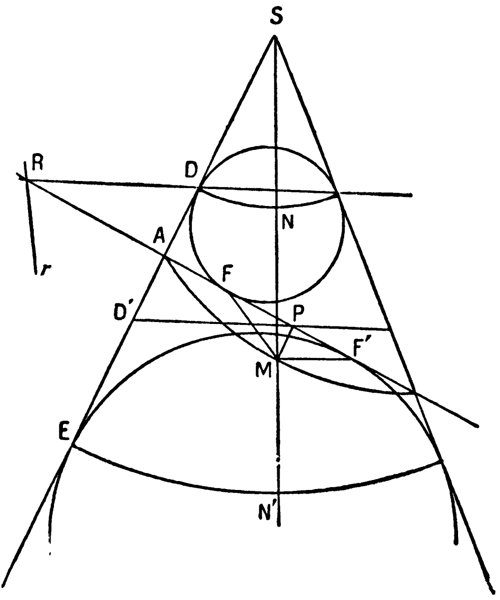

FIGURE 6.

un plan σ coupant ce cône suivant une conique, par exemple suivant une ellipse γ (fig. 6). Il existe deux sphères, Σ, Σ', inscrites dans le cône Λ et tangentes au plan σ respectivement aux points F, F'. La sphère Σ touche le cône suivant un cercle C situé dans un plan α et la sphère Σ' suivant un cercle C' situé dans un plan α'. Les plans α, α' sont évidemment perpendiculaires à l'axe du cône.

Soient M un point de γ et N, N' les points de rencontre de la droite SM respectivement avec les cercles C, C'. On a

$$MF = MN, \qquad MF' = MN',$$

d'où

$$FM + MF' = NM + MN' = NN'.$$

Mais lorsque M varie, la distance NN' ne varie pas ; les points F, F' sont donc les foyers de l'ellipse γ.

On voit d'ailleurs sans difficulté que si A, B sont les points de rencontre de la droite FF' avec le cône, NN' est égal à AB, grand axe de l'ellipse.

Le plan α du cercle C coupe le plan σ suivant une droite r perpendiculaire en R à la droite AB. Cette droite r est la directrice correspondant au foyer F.

Abaissons en effet de M une perpendiculaire MP sur AB. La distance de M à la droite r est égale à PR. Menons par MP et par B des plans perpendiculaires à l'axe du cône et soient D', E les points où ils coupent SA. Soit D le point de rencontre de la droite SA et du plan α. De la similitude des triangles ARD, APD', ABE, on déduit

$$DD' : PR = AE : AB.$$

Mais DD' = MN = MF et AE = FF', donc

$$MF : PR = FF' : AB.$$

En d'autres termes, le rapport des distances d'un point M de l'ellipse au foyer F et à la droite r est égal au rapport de la distance des foyers au grand axe. Ce qui montre que r est bien la directrice correspondant au foyer F.

Ce qui précède s'étend à l'hyperbole et à la parabole. Une sphère inscrite dans un cône de révolution et touchant un plan quelconque, a pour point de contact avec celui-ci un foyer de la section du cône par ce plan. Le plan du cercle de contact de la sphère avec le cône coupe le plan sécant suivant la directrice correspondant au foyer.

11. Transmission de la géométrie grecque aux Occidentaux. — Euclide, Archimède et Apollonius marquent l'apogée de la géométrie grecque. Sans doute, après eux, la géométrie ne cessa d'être cultivée, mais sans que des découvertes de grande importance voient le jour. On trouve encore des géomètres comme Pappus, qui vivait à Alexandrie au IIIe siècle et chez qui l'on trouve la première trace du rapport anharmonique ; Proclus (410-485), commentateur d'Euclide, grâce auquel nous avons pu connaître bien des points de l'histoire de la géométrie grecque.

L'héritage grec nous fut conservé par l'Empire romain d'Orient et par les Arabes. En Occident, le Moyen Age ignora à peu près complètement les œuvres des mathématiciens grecs. Il faut attendre la fondation des Universités (les premières, celles de Paris et de Bologne, furent fondées vers 1150) et la Renaissance, pour les voir pénétrer dans nos régions.

Leonardo Fibonacci, originaire de Pise, qui vivait vers l'an 1200, eut l'occasion, au cours de voyages qu'il fit en Orient, d'étudier les mathématiques. A son retour en Italie, il publia différents ouvrages, dont le *Liber Abaci*, consacré à l'arithmétique et à l'algèbre et une *Practica Geometriae*, qui contient notamment des extraits des livres d'Euclide consacrés à la géométrie solide. Au XIIIe siècle, des traductions d'Euclide commencèrent à devenir plus fréquentes et certains, comme Jordanus de Nemore et l'Anglais Bradwardin firent connaître des recherches personnelles sur les triangles et les polygones.

Plusieurs Maîtres de l'Université de Paris, au XIVe siècle, Jean Buridan, Albert de Saxe, Nicole Oresme, Nicolas de Cues, Dominique Soto, furent les précurseurs de la mécanique moderne. L'un d'eux, Oresme, a entrevu la géométrie analytique.

Les œuvres d'Apollonius pénétrèrent plus lentement encore que celles d'Euclide dans les pays occidentaux. Il faut attendre 1537 pour voir paraître à Venise une traduction latine des quatre premiers livres des coniques, traduction due à Jean-Marie Memus. Une séconde traduction des mêmes livres, fut publiée par Frédéric Commandi en 1566 à Bologne. Au siècle suivant, les traductions furent plus nombreuses, et certaines eurent pour origine des textes arabes.

CHAPITRE II

LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

12. La naissance de la géométrie analytique. — L'idée de fixer la position d'un point du plan par deux segments de droites convenablement disposés, c'est-à-dire en somme par ses coordonnées, était sans doute venue aux Grecs, mais la géométrie analytique ne pouvait naître que par l'interprétation de relations entre ces coordonnées. Ce pas semble avoir été franchi pour la première fois par un Maître de l'Université de Paris, Nicole Oresme, qui était grand-maître du Collège de Navarre en 1356 et qui mourut évêque de Lisieux en 1382.

La Bibliothèque Nationale possède trois manuscrits d'un ouvrage de Nicole Oresme intitulé *Tractatus de figuratione potentiarum et mensurarum difformitatum*, antérieur à 1371, dans lequel celui-ci introduit non seulement les coordonnées rectangulaires (qu'il appelle longitude et latitude), mais aussi l'équation de la ligne droite[1].

Oresme commence par poser le principe de la représentation graphique d'un phénomène, en remarquant d'ailleurs que l'unité de mesure des quantités portées en ordonnées peut être choisie arbitrairement. Il énonce en-

1. P. DUHEM, *Dominique Soto et la scolastique parisienne* (Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux, Bulletin hispanique, 1911, pp. 454-467).

suite la condition pour que trois points soient en ligne droite sous une forme qui, en langage moderne, se traduit par l'équation

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}.$$

Mais Oresme va plus loin encore en passant à l'espace à trois dimensions et même. en fait, comme le remarque Duhem, à quelque chose d'analogue à l'espace à quatre dimensions des géomètres modernes.

Cependant, à l'époque où vivait Nicole Oresme, le symbolisme algébrique restait à créer et la géométrie analytique devait attendre le XVII^e siècle pour prendre une forme pratique. Ce fut l'œuvre de deux savants français : René Descartes (1596-1650) et Pierre de Fermat (1601-1663).

Dans les ouvrages de ces géomètres, on trouve la géométrie analytique sous la forme qui nous est familière. les coordonnées étant rectangulaires. Ainsi, Descartes. dans sa *Géométrie*[1], donne l'équation d'une hyperbole équilatère sous une forme qui, aux notations typographiques près, est

$$y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac.$$

Quant à Fermat, dans son *Introduction aux lieux plans et solides*[2], il écrit l'équation d'une hyperbole équilatère sous la forme $ae = z^{\text{II}}$, où a et e sont l'abscisse et l'ordonnée du point courant, z une constante.

13. La méthode des coordonnées. — Rappelons les principes de la méthode des coordonnées.

1. *La Géométrie*, de René DESCARTES, à Paris, chez Charles Angot, rue Saint-Jacques, au Lion d'Or, M.DC.LXIV. Avec privilège du Roy.

2. *Œuvres de Fermat*, publiées par Paul TANNERY et Charles HENRY. Tome III, pp. 85-108. Paris, 1896.

Considérons une droite x sur laquelle nous avons fixé un sens de parcours que nous conviendrons d'appeler sens positif, l'autre sens de parcours étant le sens négatif. Nous dirons que nous avons une ***demi-droite.*** Deux points A, B étant fixés sur cette demi-droite, convenons d'appeler mesure algébrique du segment AB, d'origine A et d'extrémité B, la mesure de ce segment prise avec le signe $+$ si un mobile allant de A vers B parcourt la demi-droite dans le sens positif, avec le signe — dans le cas opposé.

Cela étant, fixons sur la demi-droite x un point O. A tout point M de la droite, nous pouvons attacher la mesure algébrique x du segment OM. Réciproquement, étant donné un nombre x positif ou négatif, il est la mesure d'un segment OM dont l'extrémité M est bien déterminée.

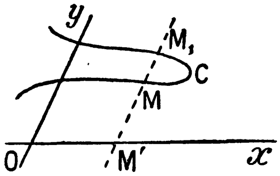

FIGURE 7.

La réunion de la demi-droite x et du point O est appelée *axe* Ox ; le point O est l'origine de l'axe.

Considérons maintenant deux axes distincts, Ox, Oy, de même origine O (fig. 7). M étant un point quelconque du plan, menons par ce point une parallèle à Oy, coupant Ox en M′ et que nous orienterons dans le même sens que Oy. Appelons x, y les mesures des segments OM′, M′M. Le point M détermine complètement les nombres x, y et inversement, si on se donne deux nombres x, y, il existe un seul point M tel que $x = \mathrm{OM}'$, $y = \mathrm{M'M}$. Les quantités x, y sont appelées coordonnées du point M ; x est l'abscisse et y l'ordonnée de ce point. Il existe une correspondance biunivoque entre les points M du plan et les couples de nombres x, y.

Imaginons maintenant une courbe C tracée dans le plan. Donnons-nous une valeur x, c'est-à-dire un point M′

de Ox. La parallèle à Oy menée par ce point va couper la courbe C en des points M, M_1,... dont nous désignerons les ordonnées par y, y_1, ... Se donner la courbe C revient donc à faire correspondre à chaque valeur de x une ou plusieurs valeurs de y. En d'autres termes, se donner la courbe C revient à établir une correspondance entre les valeurs de x et de y, correspondance que nous pouvons représenter symboliquement par l'équation

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

appelée équation de la courbe C.

Inversement, une équation telle que (1) peut être considérée comme l'équation d'une courbe, ensemble des points du plan dont les coordonnées x, y satisfont à cette équation.

L'étude de la courbe C revient donc à celle de l'équation (1) ; c'est en cela que consiste la méthode des coordonnées.

Il convient cependant de faire quelques remarques.

Tout d'abord, la méthode des coordonnées ne sera applicable en pratique que lorsque la fonction $F(x, y)$ pourra s'exprimer au moyen de symboles connus. Ce fut évidemment le point de vue du début de la géométrie analytique ; dans les équations intervenaient des fonctions algébriques, des fonctions circulaires, exponentielles ou logarithmiques. On ne concevait probablement pas l'existence d'autres fonctions et il est vraisemblable que la géométrie analytique a eu une répercussion sur la formation du concept actuel de fonction. C'est sans doute le problème de former l'équation d'une courbe donnée *a priori* qui a conduit à l'élargissement de la notion de fonction.

D'un autre côté, les courbes étudiées au début étaient représentées par des équations simples, facilement maniables, plus aisées à étudier que les courbes. Il n'en fut plus de même lorsque les géomètres s'attaquèrent par exemple aux courbes algébriques quelconques. Il n'est plus exact de dire que l'étude d'une courbe est remplacée par celle de son équation, mais bien que l'étude d'une courbe et celle de son équation se poursuivent parallèlement et se prêtent un mutuel appui.

14. Mesure des angles en géométrie analytique. — Le développement de la géométrie analytique a montré la nécessité d'introduire dans la mesure des angles certaines conventions analogues à celles qui interviennent dans la mesure des segments.

Considérons deux demi-droites a, b se coupant en O (fig. 8). On peut définir l'angle fait par ces demi-droites en faisant tourner l'une d'elles autour de O jusqu'à ce qu'elle vienne coïncider avec l'autre, mais comme il y a deux sens de rotation autour de O, il faut préciser.

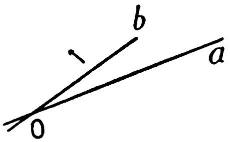

FIGURE 8.

Choisissons un sens de rotation autour de O, par exemple celui qui est indiqué par une flèche sur la figure. Nous l'appellerons le sens positif de rotation, le sens inverse étant appelé sens négatif.

On appelle angle positif de la demi-droite a avec la demi-droite b l'un quelconque des angles dont doit tourner la demi-droite a autour de O, dans le sens positif, pour venir coïncider avec b ; on représente cet angle par la notation $\widehat{(a, b)}$. On appelle angle négatif fait par la demi-droite a avec la demi-droite b l'un quelconque des angles dont doit tourner a autour de O dans le sens négatif pour venir coïncider avec b ; on le représente par $-\widehat{(a, b)}$.

Deux angles $\widehat{(a, b)}$, $\widehat{(a', b')}$ sont dits égaux et de même signe si l'un quelconque des angles positifs faits par a

avec b est égal à l'un quelconque des angles positifs faits par a' avec b' ; ils sont dits égaux et de signes contraires si l'un quelconque des angles positifs faits par a avec b est égal à l'un quelconque des angles négatifs faits par a' avec b'. On écrit dans le premier cas $(\widehat{a, b}) = (\widehat{a', b'})$ et dans le second $(\widehat{a, b}) = -(\widehat{a', b'})$.

Ces définitions paraissent présenter à première vue une certaine ambiguïté. En réalité, cette ambiguïté disparaît si l'on remarque que les angles ne sont définis qu'à un multiple de 2π près, ce qui est sans influence sur les lignes trigonométriques de ces angles. Si nous désignons par ω le plus petit des angles positifs faits par a avec b, nous avons, d'après les définitions précédentes,

$$(\widehat{a, b}) = \omega + 2k\pi, \qquad -(\widehat{a, b}) = 2\pi - \omega - 2k\pi,$$

k étant un entier positif ou nul quelconque.

L'égalité des angles n'est pas non plus une égalité au sens que l'on donne ordinairement à ce mot : deux angles sont égaux lorsqu'ils ne diffèrent que d'un multiple de 2π. Ainsi, on a

$$(\widehat{a, b}) = \omega + 2k\pi, \qquad -(\widehat{b, a}) = -\omega - 2k'\pi,$$

$$(\widehat{a, b}) = -(\widehat{b, a}),$$

ce que l'on écrira

$$(\widehat{a, b}) + (\widehat{b, a}) = 0.$$

15. Différents systèmes de coordonnées. — La méthode des coordonnées consiste au fond à établir une correspondance entre les points du plan et les couples de nombres u, v de telle sorte qu'un couple u, v soit complètement déterminé par un point et qu'inversement, un point soit complètement déterminé par un couple u, v. Les coordonnées cartésiennes sont sans doute les plus simples, mais il existe d'autres systèmes de coordonnées dont l'usage peut, dans certaines questions, introduire des simplifications fort utiles.

Le plus usité de ces systèmes est le système des coordonnées polaires.

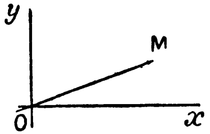

FIGURE 9.

Considérons (fig. 9) un axe Ox et fixons un sens positif de rotation autour de O. Soient M un point du plan, ω le plus petit angle positif fait par Ox avec la demi-droite OM, ρ la mesure absolue de la distance OM. Les coordonnées polaires du point M sont un des angles faits par Ox avec une demi-droite passant par O et M, et la mesure du segment OM sur cette demi-droite. Les coordonnées polaires du point M sont donc

$$u = \omega + 2k\pi, \quad v = \rho, \quad \text{ou} \quad u = \omega + (2k+1)\pi, \quad v = -\rho,$$

k étant un entier quelconque.

Un angle et un segment sont les coordonnées polaires d'un seul point du plan, mais un point possède une infinité de coordonnées polaires. On pourrait éviter ceci en supposant que ω est compris entre 0 et π, ou en supposant que ρ est toujours positif. En pratique, il vaut mieux ne pas faire ces conventions, mais en général, on supposera $k = 0$ dans les formules précédentes.

On a d'ailleurs

$$x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \sin \omega.$$

En coordonnées polaires, l'équation particulièrement simple

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \omega}$$

représente une conique dont le point O est un foyer et Ox

l'axe focal. Cette conique est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que e est en valeur absolue inférieur à l'unité, égal à l'unité ou supérieur à l'unité.

On peut imaginer d'autres systèmes de coordonnées. Soient par exemple, Ox, $O'x'$ deux axes ; fixons des sens positifs de rotation autour des points O, O′ (fig. 10). Nous pouvons appeler coordonnées bipolaires d'un point M les angles ω, ω' faits respectivement par Ox avec la demi-droite OM et par $O'x'$ avec la demi-droite O′M. Un point M a une infinité de coordonnées, mais deux angles sont en général les coordonnées d'un seul point. D'ailleurs, si on impose aux angles ω, ω' la condition d'être inférieurs à 2π, un point aura un seul système de coordonnées.

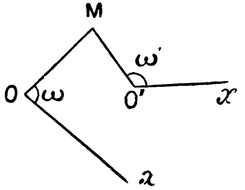

Figure 10.

Il sera évidemment commode de supposer que les axes Ox, $O'x'$ ont pour support commun la droite OO′ et sont dirigés dans le même sens. Remarquons que tous les points de la droite OO′ ont mêmes coordonnées.

Dans le système de coordonnées qui vient d'être défini, l'équation

$$a \cdot \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \omega' + b \cdot \operatorname{tg} \omega + c \cdot \operatorname{tg} \omega' + d = 0$$

représente une conique passant par les points O, O′.

Considérons un système de coordonnées u, v quelconque. Les équations $u =$ const., $v =$ const. représentent des courbes que l'on appelle lignes coordonnées. Deux lignes coordonnées $u = u_0$, $v = v_0$ doivent se couper en un seul point dont les coordonnées sont u_0, v_0.

Dans le système de coordonnées cartésiennes, les lignes coordonnées sont les parallèles $x = x_0$ à l'axe Oy et les parallèles $y = y_0$ à l'axe des x.

Dans le système des coordonnées polaires, les lignes coordonnées sont les demi-droites $\omega = \omega_0$ issues du point O et les cercles $\rho = \rho_0$ de centre O. Dans ce système, l'équation $\rho = 0$ représente le point O.

Dans le système des coordonnées bipolaires, les lignes coordonnées sont les demi-droites $\omega = \omega_0$, $\omega' = \omega_0'$ issues respectivement des points O, O'. Comme nous l'avons déjà remarqué, tous les points de la droite OO' ont mêmes coordonnées. Il se présente ici une ambiguïté qui ne se rencontre pas dans les systèmes précédents.

Considérons encore un exemple de système de coordonnées. Appelons coordonnées d'un point M ses distances ρ, ρ' à deux points fixes O, O'. Les coordonnées d'un point sont bien déterminées, mais il existe deux points, symétriques par rapport à la droite OO', qui ont mêmes coordonnées. Ce système peut cependant être utile si l'on se borne à considérer les points du plan situés d'un côté déterminé de la droite OO', ou si l'on doit étudier des figures symétriques par rapport à cette droite. Les lignes coordonnées sont cette fois les cercles de centres O, O'.

Observons que l'on peut prendre pour coordonnées d'un point M les quantités $u = \rho + \rho'$, $v = \rho - \rho'$. Les lignes coordonnées sont les ellipses $u = u_0$ et les hyperboles $v = v_0$, ayant comme foyers communs les points O, O'. On sait d'ailleurs que ces courbes se coupent à angle droit.

16. La classification des courbes planes. — Revenons aux coordonnées cartésiennes. Nous avons vu qu'à toute courbe du plan on fait correspondre une équation $f(x, y) = 0$ satisfaite par les coordonnées de tout point de la courbe. Bornons-nous à considérer des courbes dont les équations peuvent s'exprimer au moyen des fonctions usuelles de l'analyse ; c'est d'ailleurs le point de vue des géomètres des XVII^e et XVIII^e siècles.

Une classification des courbes revient évidemment à une classification de leurs équations. Mais sur quels critères peut-on baser cette classification ? Si nous supposons une courbe C tracée dans le plan, nous pouvons, pour la représenter analytiquement, choisir arbitrairement le système de référence Oxy. Par conséquent, la classification des courbes, ou de leurs équations, doit être indépendante du choix du système de référence, c'est-à-dire des transformations de coordonnées.

Considérons deux systèmes de référence quelconques Oxy, $O'x'y'$. Pour fixer le second par rapport au premier, nous devrons connaître les coordonnées x_0, y_0 de O' par rapport à Oxy, et les directions des axes $O'x'$, $O'y'$. Pour fixer la position de $O'x'$, menons par O une parallèle à $O'x'$, orientée dans le même sens ; cette demi-droite sera complètement déterminée si nous connaissons les coordonnées l_1, m_1 de celui de ses points P tel que le segment OP ait pour mesure $+ 1$. Ces quantités l_1, m_1 ne sont d'ailleurs pas indépendantes, elles sont liées par la relation

$$l_1^2 + m_1^2 + 2l_1m_1 \cos \widehat{(x; y)} = 1,$$

qui exprime que le segment OP a pour mesure $+ 1$.

Soient de même l_2, m_2 les quantités, liées par la relation

$$l_2^2 + m_2^2 + 2l_2m_2 \cos \widehat{(x, y)} = 1$$

fixant la position de $O'y'$.

Les coordonnées x', y' d'un point M par rapport à $O'x'y'$ sont liées aux coordonnées x, y du même point par rapport à Oxy, par les relations

$$\begin{aligned} x &= x_0 + l_1x' + l_2y', \\ y &= y_0 + m_1x' + m_2y'. \end{aligned} \tag{1}$$

Si une courbe C est représentée, par rapport au système

Oxy, par l'équation $f(x, y) = 0$, son équation par rapport au système $O'x'y'$ s'obtiendra en remplaçant dans $f(x, y) = 0$, x, y par leurs expressions (1) ; on obtiendra ainsi une équation $\varphi(x', y') = 0$. Les caractères de la fonction $f(x, y)$ sur lesquels doit être basée la classification des courbes, doivent se retrouver dans la fonction $\varphi(x', y')$.

On reconnaît immédiatement que les fonctions $f(x, y)$, $\varphi(x', y')$ sont simultanément algébriques ou transcendantes. Par conséquent, on est conduit à répartir les courbes en deux classes ;

a. Les courbes algébriques,

b. Les courbes transcendantes,

suivant la nature de leurs équations.

Observons que si $f(x, y)$ est une fonction algébrique, on peut, par des opérations rationnelles (additions, multiplications, élévations aux puissances), ramener l'équation de la courbe à la forme $F(x, y) = 0$, où $F(x, y)$ est un polynome entier et rationnel en x, y. Dans ces conditions, la substitution (1), effectuée sur $F(x, y) = 0$, conduira à une équation $\Phi(x', y') = 0$ où $\Phi(x', y')$ est un polynome entier et rationnel en x', y', de même degré que $F(x, y)$. Il en résulte que l'on peut classer les courbes algébriques d'après la valeur de ce degré.

On appelle courbe algébrique d'ordre n une courbe algébrique dont l'équation peut se ramener, par des opérations rationnelles, à un polynome de degré n égalé à zéro.

Ainsi, la courbe

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

est algébrique. Par des élévations au carré, son équation se ramène à

$$4xy - (1 - x - y)^2 = 0 ;$$

c'est donc une courbe du second ordre. Tous les points dont les coordonnées vérifient la seconde équation ne vérifient pas la première ; celle-ci ne comprend que les points tels que $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, qui forment un arc de la courbe du second ordre.

Une courbe du premier ordre est une droite et réciproquement, toute droite est représentée par une équation du premier ordre.

Une courbe du second ordre est une section conique. On reconnaît en effet immédiatement que les sections coniques considérées par les Grecs sont représentées par des équations du second ordre. Et la réciproque s'établit sans difficulté.

Il y a là un progrès essentiel dû à la géométrie analytique. Pour les Grecs, l'ellipse, la parabole, l'hyperbole étaient trois courbes distinctes, dont les propriétés étaient étudiées séparément. Grâce à la géométrie analytique, ces trois courbes ne sont plus que les trois genres de courbes du second ordre, représentées par l'équation générale

$$Ax^2 + A'y^2 + Bxy + Cx + C'y + D = 0, \qquad (2)$$

la discrimination étant basée sur la valeur de l'expression $B^2 - 4AA'$.

Mais la géométrie analytique permet encore d'aller plus loin. Certaines propriétés de la courbe (2) subsistent lorsque le premier membre est le produit de deux polynomes du premier degré

$$(Ax + By + C)(A'x + B'y + C') = 0,$$

la courbe étant alors dégénérée en deux droites.

17. Le problème des lieux géométriques. — La géométrie analytique a permis de considérer des lieux géométriques là où les méthodes des anciens étaient impuissantes. Voyons comment s'étudient ces lieux.

Un point M est assujetti à certaines conditions exprimées par des relations géométriques avec certaines données. Si nous faisons abstraction de certaines de ces conditions, nous trouvons que les coordonnées x, y d'un point du lieu satisfont à une relation où certains coefficients sont indéterminés, c'est-à-dire où figurent certains paramètres variables $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Soit

$$f_1(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_k) = 0 \tag{1}$$

cette relation.

Si nous faisons abstraction d'autres conditions, nous trouverons que les coordonnées du point du lieu satisfont à une seconde relation

$$f_2(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_k) = 0. \tag{2}$$

En exprimant les conditions dont il n'a pas été tenu compte, on obtient, si le problème est déterminé, $k - 1$ relations entre les paramètres variables

$$\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_k) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \ldots, \qquad \varphi_{k-1} = 0. \tag{3}$$

L'élimination des paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_k$ entre les équations (1), (2) et (3) donnera l'équation du lieu cherché.

Les équations (3) nous permettent d'exprimer $k - 1$ des paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_k$ en fonction de l'un d'entre eux que nous désignerons par u. En portant ces expressions dans les équations (1) et (2), nous trouverons deux équations

$$F_1(x, y, u) = 0, \qquad F_2(x, y, u) = 0. \tag{4}$$

Chacune de ces équations représente une famille de courbes. Le lieu considéré est l'ensemble des points communs aux courbes des deux familles qui correspondent au même paramètre u.

Pour achever la résolution du problème, nous pouvons éliminer u entre les équations (4) et nous obtiendrons ainsi l'équation du lieu sous la forme

$$F(x, y) = 0,$$

mais nous pouvons aussi résoudre les équations (4) par rapport à x, y. Nous obtiendrons ainsi ce que l'on appelle les équations paramétriques du lieu

$$x = \psi_1(u), \quad y = \psi_2(u).$$

Chaque valeur de u portée dans les équations précédentes nous donnera un point du lieu.

Cette forme des équations d'un lieu géométrique se présente d'ailleurs naturellement lorsque l'on étudie par exemple le mouvement d'un point matériel, la variable u représentant alors le temps.

Observons encore que l'équation d'une courbe peut se mettre sous la forme

$$y = f(x),$$

qui correspond aux équations paramétriques

$$x = u, \qquad y = f(u).$$

18. Le problème des tangentes. — Les Grecs avaient considéré les tangentes au cercle, aux sections coniques et à quelques courbes particulières, mais seule la représentation analytique des courbes pouvait conduire à poser le problème des tangentes dans toute sa généralité.

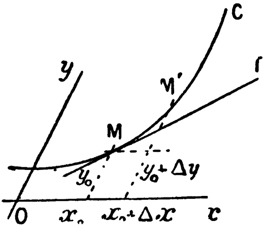

Figure 11.

Considérons une courbe C. On appelle tangente en un point M à cette courbe la limite d'une droite passant par M et par un second point M′ de la courbe tendant vers M, sur la courbe (fig. 11).

Si nous désignons par x_0, y_0, les coordonnées du point M, nous pouvons représenter par $x_0 + \Delta x$, $y_0 + \Delta y$ celles du point M′, choisi suffisamment voisin de M. La droite MM′ a pour équation

$$y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0).$$

Lorsque M′ tend vers M, Δx tend vers zéro et il en est de même de Δy ; le coefficient angulaire de la tangente en M est la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Si l'équation de la courbe est donnée sous la forme

$$y = f(x),$$

le coefficient angulaire de la tangente est donc la limite de l'expression

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

c'est-à-dire la dérivée $f'(x_0)$ de $f(x)$ au point x_0.

Les premiers géomètres qui se sont occupés du problème des tangentes après la création de la géométrie analytique ont considéré des courbes ayant des équations simples, pour lesquelles la limite de l'expression $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pouvait être trouvée par des procédés élémentaires. C'est pourquoi le problème des tangentes a eu une importance considérable dans la découverte du calcul différentiel ; c'est un des problèmes qui ont conduit à la notion de dérivée.

La définition de la tangente donnée plus haut suppose évidemment que cette tangente existe et est bien déterminée. Les mathématiques modernes ont précisé cette définition et délimité son champ d'application.

19. L'intersection des courbes algébriques. — Nous avons vu que les Grecs avaient ramené la solution de certains problèmes à la détermination d'un point commun à deux courbes. Lorsque les géomètres furent en possession d'un procédé leur permettant de considérer des courbes quelconques, ils durent se poser très tôt le problème de l'intersection de ces courbes et en particulier des courbes algébriques.

Considérons deux courbes algébriques, par exemple deux coniques

$$F_1(x, y) = 0, \qquad F_2(x, y) = 0. \tag{1}$$

Pour trouver les coordonnées des points communs à ces courbes, éliminons y entre les équations (1) et soit

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

la résultante de cette élimination.

L'équation (2) est en général du quatrième degré et à chaque racine réelle de cette équation correspond une racine réelle y et en général une seule satisfaisant aux équations (1). Le nombre de racines réelles de l'équation (2) est donc égal en général au nombre de points communs aux coniques (1).

Lorsque les courbes (1) sont des courbes algébriques d'ordres quelconques, la question peut évidemment se traiter de la même manière. Si précisément les courbes (1) sont d'ordres m, n, l'équation (2) sera en général de degré mn et par conséquent deux courbes algébriques planes d'ordres m, n ont en général mn points communs. C'est là le théorème de Bezout (1730-1783).

Le souci d'obtenir des énoncés généraux a conduit les géomètres à amplifier le domaine d'application des équations de la géométrie analytique, en introduisant des points fictifs : les points imaginaires d'une part et les points à l'infini de l'autre.

On peut se rendre compte de la manière dont on fut amené à ces considérations en examinant l'intersection de deux coniques.

Considérons deux coniques C, C′, par exemple deux ellipses. Supposons pour plus de simplicité que si ces deux ellipses ont un point commun, elles n'ont pas même tangente en ce point. Si les axes de coordonnées sont pris d'une manière quelconque, en éliminant y entre les équations des coniques, on sera conduit à une équation (2) du quatrième degré. Les coefficients des équations des coniques étant des quantités réelles, les coefficients de l'équation (2) seront réels.

Ceci posé, supposons que l'équation (2) ait une racine imaginaire

$$x = a + bi.$$

En portant cette valeur dans les équations des coniques C, C', on obtiendra deux équations en y, ayant une racine commune, y'. Il est naturel de dire que les ellipses C, C' ont en commun le point imaginaire de coordonnées $x = a + bi$, y'.

Nous appellerons donc point imaginaire l'ensemble de deux nombres x, y dont l'un au moins est imaginaire. Et à ces points fictifs, nous conviendrons d'appliquer les formules de la géométrie analytique, y compris les formules de transformation des coordonnées.

Observons encore que l'équation (2) ayant des coefficients réels, admet également la racine $x = a - bi$, imaginaire conjuguée de $a + bi$. Nous sommes donc conduits à introduire la notion de points imaginaires conjugués, car si nous portons dans les équations de C, C' la valeur $x = a - bi$, la racine y commune aux deux équations trouvées sera la conjuguée de y'. Deux points imaginaires du plan seront dits conjugués si leurs coordonnées (de même nom) sont imaginaires conjuguées.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant : Deux ellipses ont en commun quatre points : quatre points réels, ou deux points réels et deux points imaginaires conjugués, ou deux couples de points imaginaires conjugués. Deux de ces points peuvent naturellement être confondus, lorsqu'il y a contact entre les ellipses.

Cependant l'introduction des points imaginaires ne suffit pas encore pour donner un caractère général aux énoncés.

Considérons par exemple les deux hyperboles

$$xy = 1, \qquad Ax^2 + Bxy + Cx + C'y + D = 0.$$

L'élimination de y entre ces deux équations conduit à une équation du troisième degré en x,

$$Ax^3 + Cx^2 + (B + D)x + C' = 0,$$

et non du quatrième. La raison en est que les deux hyperboles ont comme direction asymptotique commune l'axe Ox. Si nous convenons de dire que ces deux courbes ont en commun le point à l'infini sur l'axe des x, nous pourrons retrouver un énoncé général et écrire que les hyperboles considérées ont quatre points communs.

Nous admettrons donc que sur toute droite existe un point fictif appelé point à l'infini, deux droites parallèles ayant même point à l'infini. Cette notion, qui remonte à Desargues, ne fut précisée que beaucoup plus tard. Nous y reviendrons dans la suite.

Quoi qu'il en soit, moyennant ces conventions, le théorème de Bezout peut s'énoncer sous la forme : Deux courbes algébriques d'ordre m, n ont en commun mn points, réels ou imaginaires, distincts ou confondus, à distance finie ou à l'infini.

En particulier, une courbe d'ordre n est rencontrée en n points par une droite.

20. Paradoxe de Cramer. — Une droite étant représentée par une équation du premier degré

$$Ax + By + C = 0,$$

il faut, pour déterminer une droite, connaître les rapports de deux des trois coefficients A, B, C au troisième. On connaît ces rapports si l'on exprime qu'une droite passe par deux points.

De même, pour déterminer une conique

$$Ax^2 + A'y^2 + Bxy + Cx + C'y + D = 0,$$

il faut connaître les rapports de cinq des coefficients A, A′, ..., D au sixième. On en conclut qu'une conique est déterminée par cinq de ses points.

L'équation d'une courbe plane du troisième ordre, ou cubique plane, contient dix coefficients et pour déterminer cette courbe, il faut connaître neuf relations entre ces coefficients. Une cubique plane est donc complètement déterminée par neuf de ses points. Cependant, d'après le théorème de Bezout, deux cubiques planes ont en commun neuf points et par conséquent, neuf points ne déterminent pas nécessairement une cubique plane unique.

Plus généralement, l'équation d'une courbe plane d'ordre n contient $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ coefficients et une telle courbe est donc déterminée par $\frac{1}{2}n(n+3)$ de ses points. Mais deux courbes d'ordre n ont en commun n^2 points, nombre qui est supérieur à $\frac{1}{2}n(n+3)$ pour n supérieur à 3. Mac-Laurin (1698-1746) et Cramer (1704-1752), qui firent cette observation, ne parvinrent cependant pas à expliquer ce « paradoxe ». C'est à Lamé (1795-1870) qu'est due cette explication.

Si l'on exprime qu'une courbe d'ordre n passe par $\frac{1}{2}n(n+3)$ points donnés on obtient autant d'équations linéaires par rapport aux coefficients de l'équation de la courbe ; ces équations sont en général indépendantes et déterminent donc les coefficients. Mais si les $\frac{1}{2}n(n+3)$

points sont choisis parmi les n^2 points communs à deux courbes d'ordre n, une des équations obtenues est une conséquence des autres et on obtient seulement $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ équations indépendantes entre les coefficients de la courbe ; un de ceux-ci reste donc indéterminé.

On voit par là que l'étude des courbes planes a conduit à préciser la théorie de l'élimination.

21. La méthode des coordonnées dans l'espace. — La méthode des coordonnées s'étend sans difficulté à l'espace.

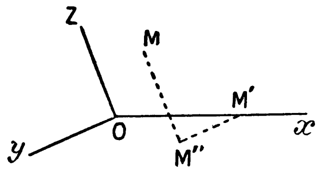

FIGURE 12.

Choisissons trois axes Ox, Oy, Oz non situés dans un même plan et ayant même origine O (fig. 12). Par un point M, menons une parallèle à Oz, orientée dans le même sens et coupant le plan xOy en M''. Par M'', menons une parallèle à Oy, orientée dans le même sens et coupant Ox en un point M'. Le point M détermine complètement les nombres x, y, z, mesures des segments respectifs OM', M'M'', M''M. Inversement, ce point est complètement déterminé par ces nombres. Ceux-ci sont les coordonnées du point M.

Si l'on imagine que le point M décrit une surface, à tout couple de valeurs des nombres x, y, correspondront une ou plusieurs valeurs de z et cette liaison sera représentée par l'équation

$$F(x, y, z) = 0.$$

La surface considérée est constituée par l'ensemble des points dont les coordonnées x, y, z satisfont à l'équation précédente. L'étude de la surface se trouve donc ramenée à celle de son équation.

La classification des surfaces est faite d'après les mêmes principes que celle des courbes planes. Une surface est algébrique ou transcendante suivant que la fonction $F(x, y, z)$ est algébrique ou transcendante. Dans le cas où la surface est algébrique, son équation peut se ramener, par des opérations rationnelles, à un polynome entier et rationnel en x, y, z, égalé à zéro. Le degré de ce polynome est appelé ordre de la surface.

De même que dans le plan, on peut introduire dans l'espace les points imaginaires, dont une au moins des coordonnées est imaginaire, et les points à l'infini. Nous n'insisterons pas sur ces derniers pour l'instant, nous réservant d'y revenir plus loin.

Une surface d'ordre n est rencontrée en n points par toute droite de l'espace qui ne lui appartient pas.

22. Les lieux géométriques de l'espace. — Les lieux géométriques de l'espace sont soit des courbes, soit des surfaces.

La mise en équation d'une surface lieu d'un point M soumis à certaines conditions géométriques peut revêtir deux aspects.

On peut considérer le lieu des points communs à trois surfaces

$$F_1(x, y, z, u, v) = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 = 0 \qquad (1)$$

dont les équations dépendent de deux paramètres variables u, v, ou bien le lieu des courbes communes à deux surfaces

$$F_1(x, y, z, u) = 0, \qquad F_2(x, y, z, u) = 0 \qquad (2)$$

dont les équations dépendent d'un paramètre variable u. Dans les deux cas, l'équation du lieu s'obtiendra en éliminant les paramètres variables, soient u, v entre les équations (1), soit u entre les équations (2).

Le premier cas conduit à une remarque intéressante.

Au lieu d'éliminer u, v entre les équations (1), on peut résoudre ces équations par rapport à x, y, z. On obtient ainsi les équations de la surface sous forme paramétrique

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v). \qquad (3)$$

Donnons à v une valeur déterminée. Les équations (3) représentent une courbe tracée sur la surface et que nous appellerons courbe u. Lorsque v varie, cette courbe engendre la surface. De même, si nous donnons à u une valeur déterminée, les équations (3) représentent une courbe, appelée courbe v, qui engendre la surface lorsque u varie.

Les courbes u et les courbes v forment sur la surface une sorte de réticule tout à fait analogue à celui qui est déterminé par les lignes coordonnées dans le plan. Cette analogie conduit à appeler coordonnées curvilignes d'un point M de la surface les valeurs que l'on doit donner à v et à u dans les équations (3) pour obtenir une courbe u et une courbe v passant par M. En d'autres termes, les coordonnées curvilignes de M sont les valeurs de u, v qui, portées dans les équations (3), fournissent les coordonnées x, y, z du point M.

Il arrivera en général qu'une courbe u et une courbe v se rencontreront en plusieurs points, dont les coordonnées curvilignes seront les mêmes. Mais on peut se limiter à une portion de la surface, suffisamment petite, où les courbes u, v sont unisécantes. On retrouve alors les avantages des systèmes de coordonnées. Ce procédé est particulièrement utile lorsque l'on veut étudier la surface dans le voisinage d'un de ses points ; c'est là le domaine de la géométrie infinitésimale.

L'exemple le plus simple de coordonnées curvilignes est fourni par la représentation paramétrique de la sphère.

Les équations paramétriques d'une sphère de rayon R, ayant pour centre l'origine, peuvent s'écrire

$$x = R \cos u \,.\, \cos v, \qquad y = R \sin u \,.\, \cos v, \qquad z = R \sin v.$$

Les lignes u, v sont ici les parallèles et les méridiens. Les coordonnées u, v sont la longitude et la latitude.

Passons maintenant aux courbes. Le point M est cette fois déterminé comme intersection de trois surfaces

$$F_1(x, y, z, u) = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 = 0 \qquad (4)$$

dont les équations dépendent d'un paramètre u. On peut éliminer successivement ce paramètre entre les trois couples d'équations (4), ce qui donnera les équations de trois surfaces passant par la courbe. Mais on peut aussi résoudre les équations (4) par rapport à x, y, z, ce qui donnera les équations paramétriques

$$x = \varphi_1(u), \qquad y = \varphi_2(u), \qquad z = \varphi_3(u)$$

de la courbe.

23. Les courbes algébriques gauches. — Les courbes de l'espace sont appelées courbes gauches, par opposition aux courbes planes.

La classification des courbes gauches en courbes algébriques et transcendantes présente certaines difficultés du fait qu'une courbe gauche n'est pas toujours l'intersection complète de deux surfaces.

L'exemple le plus simple est fourni par la cubique gauche, courbe dont les équations paramétriques peuvent s'écrire

$$x = u^3, \qquad y = u^2, \qquad z = u.$$

Cette courbe appartient à l'intersection des deux surfaces du second ordre

$$xz = y^2, \qquad y = z^2.$$

Outre la cubique gauche, ces deux surfaces ont encore en commun la droite Ox $(y = z = 0)$.

Pour définir une courbe gauche algébrique, on se reporte à la génération de cette courbe comme lieu d'un point commun à trois surfaces

$$F_1(x, y, z, u) = 0, \quad F_2(x, y, z, u) = 0, \quad F_3(x, y, z, u) = 0 \quad (1)$$

dont les équations dépendent d'un paramètre u.

La courbe est algébrique si

a. les surfaces (1) sont algébriques,

b. les premiers membres des équations (1) sont des fonctions algébriques du paramètre u.

Cette définition présente cependant un inconvénient, que nous ferons comprendre sur un exemple.

Considérons, en axes rectangulaires, un faisceau de surfaces du second ordre.

$$x^2 + y^2 + z^2 + uf(x, y, z) = 1 \qquad (2)$$

et proposons-nous de rechercher le lieu des pieds des normales abaissées de l'origine sur la quadrique (2), lorsque u varie.

On sait que les pieds des normales abaissées de O sur la surface (2) sont situés sur la courbe

$$\frac{x}{2x + u\dfrac{\partial f}{\partial x}} = \frac{y}{2y + u\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{z}{2z + u\dfrac{\partial f}{\partial z}}. \qquad (3)$$

Le lieu cherché s'obtiendra en éliminant u entre les équations (2) et (3). C'est, suivant la définition qui vient d'en être donnée, une courbe algébrique. Or, pour $u = 0$, les équations (2) et (3) se réduisent à

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

représentant la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine. Cette sphère fait donc partie du lieu, fait d'ailleurs géométriquement évident.

Revenant au cas général, nous voyons donc que les surfaces représentées par les équations (1) peuvent avoir, pour certaines valeurs de u, des parties communes, parties qu'il faudra défalquer.

On démontre que la définition d'une courbe gauche algébrique donnée plus haut peut être remplacée par la suivante :

On appelle courbe algébrique le lieu d'un point dont les coordonnées s'expriment en fonctions rationnelles de deux paramètres u, v satisfaisant à une équation algébrique.

Si $f_1(u, v)$, $f_2(u, v)$, $f_3(u, v)$ sont des fonctions rationnelles et $f(u, v)$ un polynome entier et rationnel, les équations

$$x = f_1, \qquad y = f_2, \qquad z = f_3, \qquad f = 0$$

représentent donc par définition une courbe algébrique C.

Interprétons u, v comme coordonnées cartésiennes d'un plan. L'équation $f = 0$ représente dans ce plan une courbe algébrique Γ. A un point de Γ correspond un point de C, mais inversement, un point de C peut provenir de plusieurs points de Γ. On dit que C est une transformée rationnelle de Γ.

L'ordre d'une courbe algébrique est le nombre de ses points de rencontre, réels ou imaginaires, avec un plan quelconque.

24. Cylindres projetants d'une courbe gauche. — Considérons une courbe gauche C et par ses points, menons des parallèles à l'axe Oz. Ces droites engendrent un cylindre dont l'équation s'écrit

$$f(x, y) = 0.$$

Ce cylindre est appelé cylindre projetant la courbe parallèlement à Oz. On peut naturellement considérer les cylindres projetant la courbe C parallèlement à Ox et à Oy.

Nous avons vu qu'une courbe gauche n'est pas nécessairement l'intersection complète de deux surfaces. La considération des cylindres projetant l'intersection de deux surfaces permet de se rendre compte de la nature de cette intersection.

Considérons deux surfaces

$$F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0. \qquad (1)$$

Le cylindre projetant l'intersection de ces deux surfaces parallèlement à Ox aura pour équation la résultante de l'élimination de x entre les équations précédentes. On obtiendra de même les équations des cylindres projetant l'intersection des deux surfaces parallèlement à Oy, Oz en éliminant y ou z entre les équations (1). On obtiendra ainsi trois équations

$$f_1(y, z) = 0, \qquad f_2(z, x) = 0, \qquad f_3(x, y) = 0 \qquad (2)$$

représentant l'intersection des surfaces (1). Il est bien clair que si cette intersection se compose de plusieurs courbes, deux des cylindres (2) seront dégénérés.

Soient par exemple les deux surfaces

$$x - yz = 0, \qquad y^2 - xz = 0.$$

Les cylindres projetant l'intersection de ces deux surfaces ont pour équations

$$y(y - z^2) = 0, \qquad x(x - z^3) = 0, \qquad x^2 - y^3 = 0.$$

Cette intersection est donc dégénérée en une droite, l'axe des z, et une courbe qui n'est autre que la cubique gauche dont il a été question plus haut.

Notons en passant que les trois cylindres projetant une courbe peuvent avoir en commun, en dehors de la courbe, un certain nombre de points.

25. Représentation monoïdale d'une courbe gauche algébrique. — Une représentation assez simple des courbes gauches algébriques a été obtenue par Cayley (1821-1895).

Soit C une courbe gauche algébrique d'ordre n. Choisissons un trièdre de référence $Oxyz$ tel que

a. Le point à l'infini de l'axe des z n'appartienne pas à la courbe ;

b. Une parallèle à l'axe des z menée par un point de la courbe ne rencontre en général plus celle-ci en un second point.

Dans ces conditions, le cylindre projetant la courbe C parallèlement à Oz,

$$f(x, y) = 0,$$

est d'ordre n.

Appelons C′ la courbe d'intersection de ce cylindre avec le plan Oxy. Une parallèle à Oz, menée par un point M′ de C′, rencontre la courbe C en un point M en général unique et dont la cote z sera par conséquent une fonction rationnelle des coordonnées x, y du point M′. Écrivons cette fonction rationnelle sous la forme

$$z = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

φ et ψ étant des polynomes.

Les cylindres $f(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ se rencontrent suivant un certain nombre de droites. Soit P le point de rencontre d'une de ces droites avec la courbe C′. Considérons un point M′ de C′ voisin de P′. Les coordonnées du point M correspondant sur la courbe C sont bien déterminées. Faisons tendre le point M′ vers P′ sur la courbe C′. Les fonctions $f(x, y)$, $\psi(x, y)$ tendent vers zéro et deux cas peuvent se présenter :

a. La fonction $\varphi(x, y)$ est différente de zéro au point P′ ;

b. La fonction $\varphi(x, y)$ tend vers zéro.

Dans le premier cas, la cote z du point M tend vers l'infini quand M′ tend vers P′. Mais cela est en contradiction avec l'hypothèse que le point à l'infini de l'axe Oz n'appartient pas à C.

Reste le second cas, seul possible. Une droite commune aux cylindres $f(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ appartient donc également au cylindre $\varphi(x, y) = 0$.

Le cylindre $f = 0$ est d'ordre n. Soit m l'ordre de la surface

$$z\psi(x, y) - \varphi(x, y) = 0. \tag{1}$$

Le cylindre $\psi(x, y) = 0$ est d'ordre $m - 1$ et a donc $n(m - 1)$ droites en commun avec $f = 0$. Ces droites appartiennent à la surface (1) et par conséquent l'intersection du cylindre $f = 0$ et de la surface (1) se compose de la courbe C et de $n(m - 1)$ parallèles à Oz.

La surface (1) porte le nom de monoïde ; elle possède un point multiple d'ordre $m - 1$ à l'infini sur l'axe des z (c'est-à-dire que toute parallèle à l'axe des z ne la rencontre qu'en un point à distance finie).

26. Remarque sur les fonctions employées en géométrie analytique. — Dans ce qui précède, nous n'avons guère fait d'hypothèses sur les fonctions intervenant dans les équations ; en réalité, nous avons supposé implicitement que toutes les opérations que nous avions à effectuer sur ces fonctions étaient possibles. Ce fut le point de vue des géomètres jusque vers le milieu du siècle dernier et c'est celui qui convient à un premier enseignement de la géométrie analytique.

Le développement de la notion de fonction a conduit les mathématiciens contemporains à élargir ce point de vue élémentaire.

Actuellement, en traitant une question déterminée, les géomètres s'efforcent de faire le minimum d'hypothèses sur les fonctions qui interviennent dans les équations.

D'un autre côté, la représentation analytique d'un ensemble de points correspondant à la notion intuitive de courbe ou de surface fait également l'objet des recherches modernes.

Pour ne pas quitter le point de vue élémentaire où nous nous plaçons dans cet ouvrage, nous nous bornerons à ces indications. Ajoutons cependant que même lorsque l'on se borne à des fonctions algébriques, il reste de nombreux problèmes à élucider.

CHAPITRE III

LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

27. Les recherches de Desargues sur les coniques. — Comme nous l'avons vu, Apollonius avait considéré les coniques comme sections planes d'un cône à base circulaire ; mais pour lui, comme d'ailleurs pour tous les géomètres grecs, l'ellipse, la parabole et l'hyperbole étaient trois courbes bien distinctes, dont l'étude était faite par des procédés particuliers à chaque courbe. Il appartenait au géomètre lyonnais Girard Desargues (1593-1662) de montrer, par la géométrie pure, qu'il était possible d'étudier simultanément ces trois courbes, résultat auquel devait arriver Descartes par la géométrie analytique, vers la même époque.

A l'époque où vivait Desargues, sous l'influence des peintres et des architectes de la Renaissance, la perspective avait fait de grands progrès et on doit d'ailleurs au géomètre lyonnais un ouvrage sur la perspective : *Méthode universelle de mettre en perspective les objets donnés réellement, ou en devis, avec leurs proportions, mesures, éloignements, sans employer aucun point qui soit hors du champ de l'ouvrage*, paru à Paris en 1636. Desargues a également publié un ouvrage sur la coupe des pierres, suivi d'une note sur les cadrans solaires (1640). L'idée de

Desargues fut de transporter en géométrie les méthodes de la perspective.

Considérons un plan α, un cercle γ de ce plan et un point S n'appartenant pas à α. Les droites passant par S et s'appuyant sur γ engendrent un cône Λ. Un second plan α', ne passant pas par S, coupe le cône Λ suivant une conique γ'. Cette conique γ' est la projection du cercle γ sur le plan α', à partir du point S. Toute propriété du cercle γ pourra être transportée à la conique γ', quelle que soit la nature de celle-ci.

Desargues a consacré au développement de cette idée un petit traité intitulé *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan*, paru en 1639, ouvrage très rare et que l'on connaît surtout par ce qu'en disent Pascal et Beaugrand.

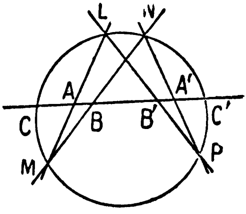

FIGURE 13.

C'est dans ce traité que l'on trouve le théorème suivant, auquel le nom de Desargues est resté attaché. Considérons un quadrilatère LMNP inscrit dans une conique et une transversale coupant les côtés opposés LM, NP du quadrilatère en A, A', les deux autres côtés opposés LP, MN en B, B' et la conique en C, C' (fig. 13). On a la relation

$$\frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'} = \frac{AC \cdot AC'}{A'C \cdot A'C'},$$

que Desargues appelle la *relation d'involution des six points*. De cette relation, on déduit

$$\frac{BA \cdot BA'}{B'A \cdot B'A'} = \frac{BC \cdot BC'}{B'C \cdot B'C'}, \qquad \frac{CA \cdot CA'}{C'A \cdot C'A'} = \frac{CB \cdot CB'}{C'B \cdot C'B'}$$

et chacune de ces trois relations entraîne les deux autres, de sorte que les trois couples de points A et A′, B et B′, C et C′ jouent des rôles symétriques.

Mais Desargues va plus loin ; il considère les cas où les points de certains couples sont confondus. Si par exemple, les points B, B′ sont confondus, les relations deviennent

$$\left(\frac{AB}{A'B}\right)^2 = \frac{AC \cdot AC'}{A'C \cdot A'C'}, \qquad \left(\frac{CB}{C'B}\right)^2 = \frac{CA \cdot CA'}{C'A \cdot C'A'}.$$

Si en outre les points C, C′ sont confondus, on a

$$\left(\frac{AB}{A'B}\right)^2 = \left(\frac{AC}{A'C}\right)^2,$$

relation qui se ramène à la division harmonique du couple BC par le couple AA′.

D'un autre côté, Desargues a remarqué que la conique pouvait être remplacée par l'ensemble de deux droites. Dans ce cas, on retrouve une propriété déjà connue de Pappus.

En obtenant par projection d'un cercle les hyperboles et les paraboles, Desargues devait être conduit à la notion du point à l'infini. Il peut être regardé comme le premier ayant eu conscience nette de cette notion et la considération d'un système de droites parallèles comme cas particulier d'un système de droites concourantes, le point de concours étant à l'infini, lui était familière.

On doit encore à Desargues un théorème qui devait jouer plus tard un rôle important dans la discussion des principes de la géométrie. Si deux triangles ABC, A′B′C′, situés ou non dans un même plan, sont tels que les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un même point, les points de rencontre des couples de côtés opposés BC et B′C′, CA et C′A′, AB et A′B′ sont en ligne droite. Si les deux triangles ABC, A′B′C′ ne sont pas dans un même plan, le théorème se démontre immédiatement. Pour démontrer le théorème dans le cas où les deux triangles sont dans un même plan, Desargues utilisait la théorie des transversales.

28. Les « Essais pour les coniques » de Pascal. — Pascal (1623-1662), lorsqu'il n'avait que seize ans, avait composé un traité des sections coniques resté inédit, et que l'on ne connaît que par une lettre de Leibnitz à Périer (neveu de Pascal) où était indiqué l'ordre dans lequel devaient être classées les matières en vue d'une publication. Mais Pascal avait heureusement publié, en 1640, sous le titre *Essais pour les coniques*, un petit opuscule où il énonçait les principaux théorèmes qu'il avait obtenus. Le plus remarquable de ces théorèmes est celui de l'hexagramme mystique, comme Pascal l'appelait lui-même, qui donnait pour la première fois une relation de position entre six points appartenant à une même conique.

Considérons un hexagone ABCDEF inscrit dans une conique ; les points de rencontre des trois couples de côtés opposés AB et DE, BC et EF, CD et FA sont en ligne droite.

Pascal indique clairement dans ses *Essais* que c'est en utilisant les méthodes de Desargues qu'il a composé son traité et ceci est d'ailleurs confirmé par la lettre de Leibnitz. Il résulte aussi de cette dernière que Pascal utilisait son théorème pour construire une conique déterminée par cinq de ses points.

29. Les travaux de de La Hire et Le Poivre. — Les méthodes de Desargues et de Pascal furent utilisées après eux par plusieurs géomètres parmi lesquels il convient de retenir de La Hire (1640-1718) et Le Poivre (....-1710).

De La Hire a publié en 1685 un ouvrage sur les sections coniques ayant pour titre *Sectiones conicoe in novem libros distributae*. Il est conçu dans l'esprit de Desargues et Pascal ; les coniques y sont considérées comme sections du cône à base circulaire ; la théorie des pôles et polaires y est développée d'une manière purement géométrique et est en quelque sorte à la base du traité.

La proposition fondamentale est la propriété de la polaire d'un point P par rapport à une conique de couper une transversale menée par P au conjugué harmonique de ce point P par rapport aux points de rencontre de la transversale et de la conique.

On trouve dans le traité de de La Hire, les propositions suivantes, que nous énonçons en langage moderne.

Les tangentes aux points de rencontre d'une conique avec une transversale menée par un point P se coupent sur la polaire p du point P. Réciproquement, si par un point de la droite p on mène les tangentes à une conique, la corde de contact passe par le pôle P de la droite p.

La polaire d'un point diagonal d'un quadrangle inscrit dans une conique passe par les deux autres points diagonaux du quadrangle.

Mais la principale contribution de de La Hire à la théorie des coniques est d'une autre nature.

Pour Desargues et Pascal, une conique est la projection d'un cercle sur un plan à partir d'un point extérieur S. Dans un ouvrage publié en 1673 sous le titre *Nouvelles méthodes en géométrie, pour les sections des superficies coniques et cylindriques*, de La Hire a imaginé un procédé permettant de passer d'un cercle à une conique située dans le plan de ce cercle.

Le même procédé a été retrouvé par Le Poivre, qui l'a exposé dans son *Traité des sections du cylindre et du cône considérées dans le solide et dans le plan, avec des démonstrations simples et nouvelles*, publié à Paris en 1704.

Imaginons un cône A de sommet S et ayant pour base un cercle C. Soit α un plan sécant et α' le plan mené par S parallèlement au plan α. Désignons par a, a' les droites sections des plans α, α' par le plan ϖ du cercle C. Menons par un point M de C une droite quelconque r coupant a et a' respectivement en A et A'. La parallèle à A'S menée par A coupe la droite MS en un point M' qui n'est autre que le point de rencontre de cette droite avec le plan α et qui appartient donc à la section C' du cône A par ce plan. Quelle que soit la droite r menée par le point M, on retrouve d'ailleurs le même point M'. Cette construction, qui permet de passer des points du cercle C à ceux de la conique C', reste vraie même si le point S appartient au plan du cercle C, toute la construction étant alors faite dans ce plan et les droites parallèles a, a' étant choisies arbitrairement. Pour le démontrer, il suffit de rabattre le plan ϖ du cercle C sur le plan α comme le faisait de La Hire, ou de projeter la figure de l'espace sur le plan du cercle C comme le faisait Le Poivre.

De La Hire appelait planiconiques les coniques décrites par le procédé qui vient d'être indiqué. Ce géomètre, dans un autre ouvrage publié en 1679, étudie les coniques en partant de la définition focale, soit comme lieu des points tels que la somme ou la différence de leurs distances à deux points fixes soit constante (ellipse ou hyperbole), soit comme lieu des points situés à égales distances d'un point et d'une droite (parabole).

De son côté, Le Poivre, dans un second traité publié à Mons en 1708, utilise, pour étudier les sections coniques, ce que nous appelons actuellement deux plans perspectifs. Ce sont surtout les propriétés des tangentes qui retiennent l'attention de l'auteur.

30. La géométrie descriptive. — De même que les règles de perspective utilisées par les peintres et les architectes conduisirent Desargues à introduire des notions nouvelles en géométrie, le tracé des épures et en particulier des plans de fortifications devait amener Monge (1746-1818) à créer la géométrie descriptive.

On sait en quoi consiste la méthode de Monge. Étant donnée une figure F de l'espace et deux plans rectangulaires α, α' ,on projette la figure F sur le plan α parallèlement au plan α' et sur le plan α' parallèlement au plan α. On rabat alors l'un des plans α, α' sur l'autre et on a ainsi dans un plan deux figures, les projections de la figure F, qui permettent d'exécuter simplement les constructions géométriques qu'il serait impossible de faire aisément dans l'espace. Les plans α, α' sont d'ailleurs en général un plan vertical et un plan horizontal.

Si, par la création de la géométrie descriptive, Monge a rendu un service considérable aux sciences appliquées en ramenant à quelques principes clairs le dessin d'épures qui exigeait avant lui de longs calculs et était plus ou moins empirique, il a rendu un service non moins signalé à la géométrie pure. Ses méthodes furent en effet utilisées comme instruments de recherches des propriétés des figures ; elles eurent une influence certaine sur la création de la géométrie projective, comme Poncelet le reconnaît d'ailleurs explicitement.

La géométrie descriptive conduisit non seulement à étudier les propriétés géométriques de l'espace et particulièrement celles des surfaces du second ordre ou quadriques, mais elle permit également d'obtenir de nouvelles propriétés de géométrie plane.

31. Les propriétés métriques et les propriétés de position. — Les méthodes de Desargues, de Pascal, de Monge, la *Géométrie de position* et l'*Essai sur la théorie des transversales* de Carnot (1753-1823) devaient conduire les géomètres à classer les propriétés géométriques en deux catégories :

a. Les propriétés métriques, dans lesquelles interviennent des mesures de distances et d'angles ;

b. Les propriétés de position ou propriétés descriptives, qui ne font intervenir que la position des éléments géométriques les uns par rapport aux autres.

Le théorème sur le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est évidemment une propriété métrique, tandis que le théorème de Pascal sur l'hexagramme mystique est une propriété de position.

La distinction, au moins dans le cas des figures planes, devait apparaître du fait que par projection, les propriétés de position restent inaltérées, tandis que les propriétés métriques ne subsistent plus en général. Cependant, une propriété de position peut se présenter sous forme métrique et c'est d'ailleurs ce qui s'est passé presque toujours au début. Ainsi, la relation d'involution des six points de Desargues, qui est une propriété de position, pourrait apparaître à première vue comme une proposition métrique.

La géométrie analytique permet de distinguer dans bien des cas les propriétés métriques des propriétés projectives. Les premières conduisent à des calculs plus ou moins compliqués suivant que l'on adopte des coordonnées obliques ou des coordonnées rectangulaires. Au contraire, les calculs se font avec la même facilité dans les deux cas lorsqu'il s'agit d'une propriété de position.

En réalité, on n'a pu établir bien nettement la distinction que récemment, grâce à l'introduction de la notion de groupe en géométrie, comme nous le verrons plus loin.

32. Le Traité des propriétés projectives des figures. — Jean-Victor Poncelet (1788-1867), ancien élève de l'École polytechnique, fut pendant la campagne de Russie attaché au Corps d'Armée du Maréchal Ney. Fait prisonnier le 18 novembre 1812 et amené en captivité à Saratov, il entreprit sans notes ni ouvrage d'aucune espèce, de retrouver ce qui lui avait été enseigné en Géométrie. De ses méditations devait sortir le *Traité des propriétés projec-*

tives des figures, riche d'idées originales, publié à Paris en 1822. La géométrie projective était devenue une doctrine autonome.

L'idée directrice de Poncelet réside dans l'emploi de deux opérations : la projection et la section.

Imaginons une figure plane F formée de points et de droites et projetons-la d'un point S n'appartenant pas au plan de la figure. Nous obtenons ainsi une nouvelle figure F′ formée de droites et de plans passant par S. Les propriétés de position, ou propriétés descriptives, ou encore comme Poncelet les appelle, les *propriétés projectives* de la figure F donneront naissance à des propriétés projectives de la figure F′. Coupons maintenant la figure F′ par un plan ne passant pas par S. Nous obtenons une troisième figure F″, formée de points et de droites, dont les propriétés projectives se déduisent de celles de F′ et par conséquent de celles de F. Les figures F, F″ sont les sections d'une même figure F′. La figure F′ est la projection de F ou de F″.

On peut également imaginer deux figures qui sont les projections, de deux centres distincts, d'une même figure plane. Les propriétés projectives de l'une se déduiront de celles de l'autre.

Voyons, sur un exemple, comment Poncelet utilisait ces opérations.

Considérons un quadrilatère ABCD et une transversale coupant les droites AB et CD en M, M′ ; les droites BC et AD, en N, N′ ; les droites AC et BD en P, P′. Proposons-nous d'établir la relation

$$\frac{\mathrm{MN}\,.\,\mathrm{MN}'}{\mathrm{MP}\,.\,\mathrm{MP}'}=\frac{\mathrm{M'N}\,.\,\mathrm{M'N'}}{\mathrm{M'P}\,.\,\mathrm{M'P'}},$$

qui n'est autre que la relation d'involution des six points de Desargues dans le cas où la conique est formée de deux droites AC, BD.

Poncelet projette la figure sur un plan de manière que dans la nouvelle figure, les côtés AB et CD, AD et BC aient pour homologues des couples de droites parallèles, le quadrilatère étant donc remplacé par un parallélogramme. Dans celui-ci, la propriété envisagée se démontre sans peine par la considération de triangles semblables. La théorie des proportions permet alors de passer facilement à la relation à démontrer pour le quadrilatère ABCD.

On voit donc que Poncelet employait les projections et les sections de manière à remplacer une figure générale par une figure particulière sur laquelle la relation à établir était aisée à démontrer.

Poncelet a également introduit dans son ouvrage la théorie de l'homologie dans le plan et dans l'espace. Soient dans un plan, S un point et *s* une droite passant ou non par ce point. Aux points A, B, ... faisons correspondre des points A′, B′, ... tels que les droites AA′, BB′, ... passent par S et que les droites AB, ... et A′B′, ... se coupent sur *s*. Cette correspondance s'appelle homologie ; S est le centre et *s* l'axe d'homologie.

Dans l'espace, une homologie fait correspondre à des points A, B, ..., des points A′, B′, ... tels que les droites AA′, BB′, ... passent par un point fixe S (centre d'homologie) et que les droites AB, ... et A′B′, ... se coupent dans un plan appelé plan d'homologie.

La théorie de l'homologie se rattache directement aux opérations de projections et de sections. Considérons deux figures planes F, F′ qui soient les sections, par des plans distincts, d'une même figure formée de droites et de plans passant par un même point. Projetons les figures F, F′ d'un point quelconque sur un même plan. Les figures obtenues dans celui-ci sont homologiques et toutes les figures homologiques peuvent d'ailleurs être obtenues par ce procédé.

33. Le principe de continuité. — Deux coniques d'un même plan se rencontrent en quatre points et, comme nous l'avons vu, la géométrie analytique permet de donner une portée générale à cet énoncé en introduisant les points imaginaires.

Soient A, B, C, D les quatre points communs à deux coniques γ, γ' et supposons tout d'abord ces quatre points réels. Parmi les coniques passant par ces quatre points, se trouve une conique dégénérée, formée des droites AB, CD. Laissons les points A, B et la conique γ fixes, et faisons varier d'une manière continue la conique γ'. Pour certaines positions de celle-ci, les points C, D sont imaginaires, c'est-à-dire que les deux coniques γ, γ' n'ont plus que deux points réels en commun. Mais la droite CD continue à exister en tant que droite réelle. Poncelet appelle cette droite corde idéale commune aux deux courbes γ, γ'. Certaines propriétés subsistent lorsque la corde CD devient idéale. Ainsi, les diamètres conjugués à la direction CD dans les coniques γ, γ' se coupent en un même point de CD, que cette corde soit idéale ou non.

Imaginons une figure plane F formée de points, de droites et de courbes et supposons que la figure F se déplace en se déformant d'une manière continue. Supposons que pour une position F′ de la figure, certains de ses éléments soient devenus imaginaires. Une propriété de la figure F qui n'intéresse pas ces éléments, mais qui peut avoir été établie en utilisant ces éléments, subsistera dans la figure F′. C'est en cela que consiste le principe de continuité de Poncelet, bien que celui-ci ne l'ait pas énoncé d'une manière explicite dans son *Traité*.

Sous cette forme très générale, le principe peut évidemment conduire à des résultats inexacts.

La critique moderne a déterminé le champ d'application du principe de continuité ; on peut dire qu'il n'est valable que dans les cas où les propriétés envisagées se traduisent, en géométrie analytique, par des relations algébriques. Il ne semble pas possible, comme a voulu le faire Poncelet, de l'introduire en Géométrie sans le secours de l'Algèbre.

Il est bon de remarquer que la considération des éléments imaginaires en Géométrie, même dans des raisonnements d'apparence purement géométrique, était familière à Monge et à Carnot. Ainsi, pour établir les propriétés de la conjuguée d'une droite par rapport à une quadrique, Monge suppose que l'on peut mener par cette droite deux plans tangents à la quadrique. On sait que ces plans ne sont pas toujours réels. Le procédé de Monge revenait donc à mettre sur le même pied les éléments réels et imaginaires, chose courante aujourd'hui dans la géométrie algébrique.

34. Le principe de dualité. — Considérons dans un plan une conique Γ. A un point P de son plan faisons correspondre sa polaire p par rapport à Γ. Cette droite peut être construite, que les tangentes menées par P à Γ soient réelles ou imaginaires. Menons en effet par P deux droites a, b coupant la conique Γ respectivement en des points A et A′, B et B′. La polaire p passe par les points de rencontre des droites AB et A′B′, AB′ et A′B (théorème dû à de La Hire).

Cette correspondance entre les points P et les droites p du plan jouit d'une propriété importante. Si p est la polaire d'un point P, la polaire d'un point P′ de p passe par le pôle P de p. Il en résulte que si un point décrit une droite, sa polaire passe constamment par le pôle de cette droite. C'est ce que l'on appelle la propriété réciproque des pôles et polaires.

La polarité par rapport à une conique fait correspondre :

1. A un point P une droite p ;

2. Aux points d'une droite p', les droites passant par un point P' ;

3. A un point P d'une droite p' une droite p passant par un point P' dont la droite p' est l'homologue.

Imaginons que nous ayons établi une propriété d'une figure F formée de points et de droites et soit F' la figure que l'on obtient en remplaçant les points et les droites de F par leurs polaires et leurs pôles par rapport à une conique donnée. Obtiendra-t-on une propriété de la figure F' en changeant, dans l'énoncé concernant la figure F, les mots « point » et « droite » respectivement par les mots « droite » et « point » ? Pas nécessairement ; pour qu'il en soit ainsi, il faut que la propriété envisagée ne fasse pas intervenir de notions métriques (mesures de segments et d'angles) ; en d'autres termes, il faut qu'elle soit une propriété de position ou propriété projective.

Nous pouvons donc énoncer avec Poncelet le principe suivant, appelé principe de dualité dans le plan.

A toute propriété de position du plan en correspond une autre dont l'énoncé s'obtient en remplaçant dans l'énoncé de la première les mots « point » et « droite » respectivement par les mots « droite » et « point ».

Et cette propriété n'a plus besoin d'être démontrée, elle l'est implicitement par le fait qu'elle est la transformée de la première dans une polarité par rapport à une conique.

L'utilisation de la polarité par rapport à une conique pour obtenir de nouvelles propriétés géométriques était familière à Monge et à ses élèves. Poncelet l'a systématiquement utilisée et Michel Chasles (1793-1880) lui a donné une grande extension.

Remarquons que l'énoncé du principe de dualité ne fait pas intervenir la troisième propriété de la polarité par rapport à une conique. D'autre part, on peut imaginer d'autres procédés permettant de faire correspondre à tout point une droite de manière qu'aux points d'une droite correspondent les droites passant par un point. Il semble donc que le principe de dualité soit indépendant de la polarité par rapport à une conique. Il en est bien ainsi et le développement ultérieur de la géométrie a permis de préciser ce point.

Le principe de dualité s'étend naturellement à l'espace et il a eu lui aussi pour origine la polarité par rapport à une quadrique, polarité étudiée par Monge et son École. Bornons-nous à l'énoncer.

A toute propriété de position de l'espace en correspond une seconde dont l'énoncé s'obtient en remplaçant dans l'énoncé de la première les mots « point » et « plan » respectivement par les mots « plan » et « point ».

Le mot droite ne doit pas être changé, mais il est à peine besoin de dire que l'expression « droite passant par deux points » doit être remplacée par l'expression « droite intersection de deux plans ».

35. Les éléments à l'infini. — Comme nous l'avons fait remarquer, la notion de point à l'infini remonte à Desargues. Pour ce géomètre, une série de droites parallèles était analogue à une série de droites concourantes, le point de concours étant à l'infini. Mais c'est Poncelet qui remarqua que l'ensemble des points à l'infini devait être considéré comme une droite.

Ces notions peuvent être introduites rigoureusement en géométrie de la manière suivante :

Limitons-nous en premier lieu au plan. Convenons de dire que deux droites parallèles ont même direction. Nous pouvons alors énoncer les propriétés :

Deux points déterminent une droite.

Un point et une direction déterminent une droite (c'est-à-dire, par un point on peut mener une droite parallèle à une droite donnée).

Appelons point proprement dit ou en abrégé point propre un point au sens ordinaire du mot et point improprement dit, en abrégé point impropre, ou point à l'infini, l'expression direction d'une droite. Les deux énoncés précédents peuvent se réunir en un seul :

Deux points, dont l'un au moins est propre, déterminent une droite.

Il y a encore, dans cet énoncé, un cas d'exception. Nous pouvons le faire disparaître en convenant d'appeler droite impropre ou droite à l'infini du plan l'ensemble des points impropres des différentes droites. Nous pouvons alors énoncer que

Deux points déterminent une droite.

Par ces conventions, nous avons défini ce que l'on appelle le *plan projectif*. Il diffère du plan de la géométrie élémentaire par l'adjonction d'une droite fictive : la droite impropre et de points fictifs, les points impropres, appartenant à cette droite.

L'extension à l'espace va de soi. On conviendra en premier lieu de dire que deux plans parallèles ont même orientation, que deux droites parallèles ont même direction et que si une droite est parallèle à un plan, sa direction appartient à l'orientation de ce plan. Nous avons alors les énoncés suivants :

Trois points déterminent un plan.

Deux points et une direction déterminent un plan (c'est-à-dire qu'il existe un plan passant par deux points et parallèle à une droite, évidemment distincte de la droite joignant les deux points).

Un point et deux directions déterminent un plan (c'est-à-dire qu'il existe un plan passant par un point et parallèle à deux droites).

Si nous convenons d'appeler point impropre la direction d'une droite, droite impropre l'orientation d'un plan ; enfin si nous convenons d'appeler plan impropre l'ensemble des points et des droites impropres, nous n'aurons plus qu'un seul énoncé :

Trois points déterminent un plan.

L'adjonction des éléments impropres à l'espace de la géométrie élémentaire donne l'*espace projectif*.

Dans ce qui précède, les expressions *impropres* et *à l'infini* sont synonymes ; nous les utiliserons indistinctement.

36. Le rapport anharmonique. — Considérons quatre points (propres) A, B, C, D situés sur une droite. L'expression

$$(A, B, C, D) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$$

s'appelle rapport anharmonique ou birapport des points A, B, C, D.

On peut déjà trouver trace de cette notion dans Pappus, mais c'est Chasles et Moebius (1790-1868) qui en ont montré l'importance en géométrie projective. De plus, ces géomètres ont étendu cette notion aux systèmes de quatre droites passant par un point et de quatre plans passant par une droite.

Si quatre droites a, b, c, d passent par un même point (propre), le rapport anharmonique de ces quatre droites a pour expression

$$(a, b, c, d) = \frac{\sin (ac)}{\sin (ad)} : \frac{\sin (bc)}{\sin (bd)},$$

(ac), (ad), ... représentant respectivement les angles formés par les droites a et c, a et d, ...

Si quatre plans α, β, γ, δ passent par une même droite (propre), le rapport anharmonique de ces quatre plans est

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{\sin (\alpha\gamma)}{\sin (\alpha\delta)} : \frac{\sin (\beta\gamma)}{\sin (\beta\delta)},$$

$(\alpha\gamma)$, $(\alpha\delta)$, ... représentant les angles dièdres faits respectivement par les plans α et γ, α et δ, ...

Reprenons les quatre droites a, b, c, d passant par un point S et coupons-les par une droite s ne passant pas par S. Si A, B, C, D sont les points de rencontre, on voit immédiatement que l'on a

$$(A, B, C, D) = (a, b, c, d).$$

En effet, on a

$$\frac{\sin(ac)}{AC} = \frac{\sin(as)}{SC}, \qquad \frac{\sin(ad)}{AD} = \frac{\sin(as)}{SD},$$

$$\frac{\sin(bc)}{BC} = \frac{\sin(bs)}{SC}, \qquad \frac{\sin(bd)}{BD} = \frac{\sin(sb)}{SD}.$$

Nous pouvons donc dire que la section des droites a, b, c, d par une sécante s donne quatre points dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre droites ; ou encore que si l'on projette quatre points A, B, C, D d'un point S, on obtient quatre droites dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre points.

On démontre tout aussi simplement que si les quatre plans α, β, γ, δ sont coupés par une droite en quatre points A, B, C, D ou par un plan suivant quatre droites a, b, c, d, on a

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (A, B, C, D) = (a, b, c, d).$$

Ajoutons encore aux définitions précédentes les suivantes :

Le rapport anharmonique de quatre droites ou de quatre plans parallèles est égal au rapport anharmonique des quatre points où ces droites ou plans sont coupés par une sécante.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant, qui montre l'importance du rapport anharmonique en géométrie projective.

Les rapports anharmoniques de quatre points d'une droite (propre) ou de quatre droites passant par un point (propre ou impropre), ou de quatre plans passant par une droite (propre ou impropre), sont égaux lorsque l'on peut passer de l'une de ces figures à une autre par un nombre fini de projections et de sections.

On pourrait encore dire que *le rapport anharmonique est un invariant vis-à-vis des opérations de projection et de section.*

37. Valeurs du rapport anharmonique de quatre points. — Reprenons les quatre points A, B, C, D situés sur une droite. La valeur du rapport anharmonique de ces quatre points dépend de l'ordre dans lequel on les range. Or, quatre points peuvent être rangés de vingt-quatre manières différentes et il peut sembler résulter *a priori* que quatre points donnent autant de rapports anharmoniques. Cependant, ce nombre se réduit à six.

Observons en effet que l'on a

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}} : \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}} : \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} : \frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DB}} = \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DA}} : \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CA}},$$

c'est-à-dire

$$(\mathrm{A, B, C, D}) = (\mathrm{B, A, D, C}) = (\mathrm{C, D, A, B}) = (\mathrm{D, C, B, A}).$$

En d'autres termes, le rapport anharmonique de quatre points ne change pas si l'on échange entre eux simultanément les deux premiers et les deux derniers points, ou si l'on échange les deux premiers et les deux derniers points.

Cela étant, si nous posons

$$\alpha = (\mathrm{A, B, C, D}),$$

nous aurons

$$(\mathrm{A, B, D. C}) = \frac{1}{\alpha}, \quad (\mathrm{A, C, B, D}) = 1 - \alpha, \quad (\mathrm{A, C, D, B}) = \frac{1}{1-\alpha},$$

$$(\mathrm{A, D, B, C}) = \frac{\alpha - 1}{\alpha}, \qquad (\mathrm{A, D, C, B}) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \cdot$$

Ce sont les six valeurs des rapports anharmoniques que l'on peut former avec quatre points.

Avant d'aller plus loin, remarquons que si les quatre points A, B, C, D sont distincts, le nombre α ne peut prendre les valeurs 0, 1 et est d'autre part toujours fini.

Les six valeurs du rapport anharmonique sont en général distinctes, mais pour certaines positions particulières des points A, B, C, D, certaines de ces valeurs peuvent être égales.

Si l'on peut intervertir entre eux les deux premiers points, ou les deux derniers, c'est-à-dire si l'on a

$$(A, B, C, D) = (A, B, D, C),$$

on a $\alpha = -1$. On dit alors que le rapport est *harmonique*, ou que le quaterne ABCD est harmonique, ou encore que les points C, D partagent harmoniquement le couple AB. Les six valeurs du rapport anharmonique se réduisent alors à trois,

$$(A, B, C, D) = -1, \quad (A, C, B, D) = 2, \quad (A, C, D, B) = \frac{1}{2}.$$

Le rapport harmonique se rencontre comme on sait dans la théorie des pôles et polaires par rapport à une conique ; il a été utilisé notamment par de La Hire.

Il existe encore un autre cas où les six valeurs du rapport anharmonique ne sont pas distinctes, c'est celui où α est racine de l'équation

$$\alpha^2 - \alpha + 1 = 0.$$

Les six valeurs se réduisent alors à deux qui sont précisément les deux racines (imaginaires) de l'équation précédente. Le rapport est dans ce cas appelé rapport *équianharmonique* et les quatre points ne peuvent être tous réels.

38. Les formes fondamentales de la géométrie projective. — Les opérations de projection et de section utilisées en géométrie projective ont mis en évidence le rôle joué par certaines figures : on projette d'un point ou d'une droite, on coupe par une droite ou par un plan. De là sont nées les six formes de la géométrie projective. Ce sont :

1. La *ponctuelle*, ou ensemble des points d'une droite.

2. Le *faisceau de rayons*, ensemble des droites (ou rayons) passant par un point et situées dans un plan.

3. Le *faisceau de plans*, ensemble des plans passant par une droite.

4. Le *plan*, ensemble des points et des droites d'un plan.

5. La *gerbe*, que les géomètres italiens appellent étoile (stella), ensemble des droites et des plans passant par un point.

6. L'*espace*, considéré comme ensemble de ses points et de ses plans.

Il importe de remarquer que ces définitions sont données dans l'espace projectif, c'est-à-dire que certains des éléments qui interviennent dans les définitions peuvent être impropres. Ainsi, la droite qui supporte une ponctuelle peut être impropre (et la ponctuelle est alors l'ensemble des directions des droites d'un plan) ; le point commun à toutes les droites d'un faisceau peut être impropre et on a un faisceau de droites parallèles ; le point commun aux droites et aux plans d'une gerbe, point appelé sommet de la gerbe, peut également être impropre et la gerbe est l'ensemble des droites et des plans parallèles à une droite.

On remarquera immédiatement que l'on ne peut pas toujours passer d'une forme à une autre par projection et par section. Lorsque cela est possible, on dit que les deux formes sont de même espèce. D'une manière précise, les trois premières formes sont appelées formes de première espèce ; les quatrième et cinquième, formes de seconde espèce ; la dernière, forme de troisième espèce. On voit par exemple que la projection d'une ponctuelle d'un point (extérieur au support) est un faisceau de rayons ; la projection d'un plan d'un point (extérieur) est une gerbe ; la section d'un faisceau de plans par un plan (n'appartenant pas au faisceau) est un faisceau de rayons, etc.

39. La projectivité entre deux formes. — Desargues et Pascal passaient d'un cercle γ situé dans un plan α à une conique γ' située dans un plan α' en projetant γ sur α' à partir d'un point S n'appartenant ni à α ni à α'. En somme, ils projetaient le plan α du point S et coupaient la gerbe de sommet S par le plan α'.

De La Hire et Le Poivre ont été conduits à supposer le cercle γ et la conique γ' dans un même plan. Comme nous l'avons déjà remarqué, si l'on projette le plan α' d'un point S' n'appartenant ni à α ni à α' sur le plan α, on retrouve la méthode de ces géomètres. Desargues et Pascal considéraient une correspondance entre deux plans distincts, de La Hire et Le Poivre une correspondance entre deux plans confondus (deux plans ayant même support). Les correspondances considérées par les géomètres précédents sont des cas particuliers des projectivités telles que les ont envisagées Poncelet et ses successeurs.

Poncelet dit que deux formes de première espèce sont projectives si l'on peut passer de l'une à l'autre par un nombre fini de projections et de sections ; la correspondance entre les formes est appelée projectivité.

En particulier, deux formes de première espèce sont perspectives si l'une est la projection ou la section de l'autre, ou si les deux formes sont sections ou projections d'une même forme. La correspondance entre les formes est alors appelée perspectivité.

Si l'on veut étendre la définition de Poncelet aux formes de seconde espèce, on dira que deux de ces formes sont projectives lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre par un nombre fini de projections et de sections. Mais cette définition est trop restreinte.

Adoptons-la provisoirement et soient α, α' deux plans projectifs. A un point de α correspond un point de α', aux points d'une droite de α correspondent les points d'une droite de α' ; par conséquent à une droite de α correspond une droite de α' et si un point de α appartient à une droite de α, le point homologue de α' appartient à la droite homologue.

Mais la polarité par rapport à une conique et plus généralement le principe de dualité dans le plan ont montré qu'il existe d'autres correspondances analogues, où à un point correspond une droite et à une droite un point. Il n'est pas possible de faire rentrer de telles correspondances dans la définition de Poncelet. Il a donc fallu modifier profondément celle-ci et la remplacer par la suivante :

Deux plans sont projectifs lorsque

1. A un élément (point ou droite) de l'un correspond un élément de l'autre ;

2. Aux éléments d'une forme de première espèce de l'un correspondent les éléments d'une forme de première espèce de l'autre.

Et la définition de la projectivité de deux gerbes, ou d'un plan et d'une gerbe, est analogue.

La nouvelle définition de la projectivité entre deux plans, beaucoup plus large que la précédente, comprend les deux cas dont il a été question plus haut, mais elle entraîne un autre inconvénient. Dans deux plans projectifs, deux formes de première espèce homologues sont projectives ; la définition de Poncelet de la projectivité entre deux formes de première espèce ne pouvait suffire pour démontrer cette propriété. Nous allons voir comment cette définition a pu être modifiée.

40. Projectivités entre deux formes de première espèce. — Considérons deux formes de première espèce, par exemple, pour fixer les idées, deux ponctuelles r, r', projectives au sens de Poncelet. On peut donc passer de r à r' par un nombre fini de projections et de sections. Par conséquent, si A, B, C, D sont quatre points distincts de r et A′, B′, C′, D′ leurs points homologues sur r', les rapports anharmoniques des quatre premiers points et des quatre derniers sont égaux,

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D').$$

On pourrait donc penser à définir la projectivité entre deux ponctuelles en disant que c'est une correspondance biunivoque entre les points des deux ponctuelles qui conservent les rapports anharmoniques. Mais cette définition ne peut convenir, car le rapport anharmonique de quatre points d'une ponctuelle n'est défini que si la droite support de la ponctuelle est propre et si les quatre points sont propres.

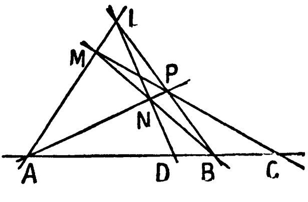

Figure 14.

La difficulté a pu être levée par la remarque qu'un quaterne harmonique d'éléments d'une forme de première espèce peut être défini graphiquement dans tous les cas.

Considérons trois points A, B, C d'une ponctuelle r et menons par ces points trois droites AL, BL, CM ne passant pas par un même point (fig. 14). Joignons le point B au point de rencontre M de AL et CM, le point A au point P où BL rencontre CM, enfin le point L au point N où BM et AP se coupent. La droite LN rencontre r en un point D et le quaterne ABCD est harmonique.

Dans le triangle ALB coupé par la transversale CM, nous avons en effet, d'après le théorème de Ménélaüs,

$$\frac{LM}{AM}\cdot\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BP}{LP}=+1.$$

D'autre part, en appliquant le théorème de Ceva au même triangle, nous avons

$$\frac{ML}{AM}\cdot\frac{AD}{BD}\cdot\frac{BP}{LP}=-1,$$

d'où, par division membre à membre,

$$(A, B, C, D)=-1.$$

On en conclut en particulier que la position du point D ne dépend pas du choix des droites AL, BL, CM.

Cette définition du quaterne harmonique est applicable à tous les cas. Si par exemple la ponctuelle est propre et le point A impropre, il suffit de mener les droites AL, AP parallèles à r. Si la ponctuelle r est impropre, le quadrilatère LMNP est un parallélogramme, LM et NP d'une part, MN et LP d'autre part étant parallèles.

Des procédés analogues permettent de construire dans tous les cas un quaterne harmonique de droites d'un faisceau, ou de plans d'un faisceau.

Cela étant, *deux formes de première espèce sont dites projectives s'il existe entre ces formes une correspondance biunivoque telle qu'à tout quaterne harmonique d'éléments de l'une corresponde un quaterne harmonique d'éléments de l'autre.*

C'est la définition adoptée par von Staudt (1798-1867). Il reste à prouver qu'une projectivité entre deux formes de première espèce est complètement déterminée par trois couples d'éléments homologues ; c'est le théorème fondamental de von Staudt ; nous y reviendrons au chapitre suivant. Bornons-nous pour l'instant à prouver que, ce théorème étant admis, deux formes projectives de première espèce peuvent se déduire l'une de l'autre par un nombre fini de projections et de sections.

Observons en premier lieu que l'on peut toujours supposer que les deux formes envisagées sont des ponctuelles portées par des droites ne se rencontrant pas. On peut en effet toujours remplacer une forme de première espèce quelconque par une ponctuelle au moyen d'un nombre fini de projections et de sections, et ces opérations conservant les quaternes harmoniques, sont des projectivités au sens de von Staudt.

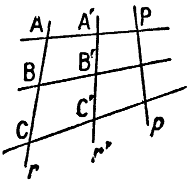

FIGURE 15.

Ceci posé, soient r, r' deux ponctuelles projectives, dont les supports sont deux droites gauches de l'espace (fig. 15). Soient A, B, C, trois points de r et A′, B′, C′ leurs homologues sur r' dans une projectivité. Menons les droites AA′, BB′, CC′ ; elles ne se rencontrent pas deux à deux. Par un point P de AA′, passe une droite p s'appuyant sur BB′ et CC′. Les plans passant par p découpent, sur les droites r, r', la projectivité envisagée.

On voit donc qu'en adoptant la définition de von Staudt, on retrouve comme propriété celle de Poncelet.

41. Projectivités entre deux formes de seconde espèce. — Considérons deux formes de seconde espèce et, pour fixer les idées, supposons que ce soient deux plans ρ, ρ'. Les éléments de ρ, ρ' sont leurs points et leurs droites.

Les plans ρ, ρ' sont dits projectifs si

1. *A un élément de ρ correspond un élément de ρ' ;*

2. *Aux éléments d'une forme de première espèce de ρ correspondent les éléments d'une forme de première espèce de ρ'.*

Si l'on spécifie la nature des éléments envisagés, deux cas peuvent se présenter :

A. A un point de ρ correspond un point de ρ' et aux points d'une ponctuelle de ρ correspondent les points d'une ponctuelle de ρ'. Les plans ρ, ρ' sont alors appelés *homographiques* et l'opération qui permet de passer de l'un à l'autre est appelée *homographie* ou *collinéation.*

B. A un point de ρ correspond une droite de ρ' et aux points d'une ponctuelle de ρ correspondent les droites d'un faisceau de rayons de ρ'. Les plans ρ, ρ' sont dits *réciproques* et l'opération qui fait passer de l'un à l'autre est appelée *réciprocité* ou *corrélation.*

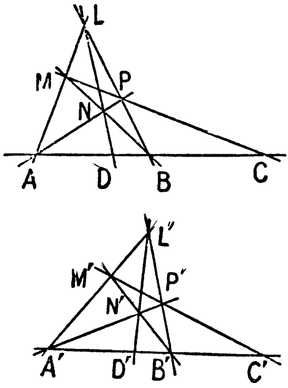

FIGURE 16.

En se basant sur cette définition, on établit sans peine que deux formes homologues de première espèce sont projectives. Bornons-nous à le montrer dans le cas de deux plans homographiques, la démonstration se transportant immédiatement aux autres cas.

Considérons dans le plan ρ une ponctuelle r et un quaterne harmonique ABCD sur cette ponctuelle (fig. 16). Construisons le quadrangle LMNP dont deux côtés opposés LM, NP passent par A, deux autres côtés opposés LP, MN par B, le côté MP par C et par conséquent le dernier côté LN par D.

Soient r' la ponctuelle de ρ' qui correspond à r, A', B', C', D' les points homologues de A, B, C, D. Aux points L, M, N, P correspondent des points L', M', N', P'.

Puisque la droite LM passe par A, la droite homologue L′M′ passe par A′. De même, N′P′ passe par A′, L′P′ et M′N′ passent par B′, M′P′ par C′ et L′N′ par D′. Donc, le quaterne A′B′C′D′ est harmonique. Entre les ponctuelles r, r', nous avons une correspondance biunivoque conservant les quaternès harmoniques, c'est par conséquent une projectivité.

42. Projectivités dans une forme de troisième espèce. — Les éléments de l'espace sont ses points et ses plans. *Une projectivité de l'espace* sera définie par les conditions suivantes :

1. *A un élément de l'espace correspond un élément de l'espace.*

2. *Aux éléments d'une forme de seconde espèce correspondent les éléments d'une forme de seconde espèce.*

Si l'on distingue la nature des éléments, on obtient deux cas :

L'*homographie* ou *collinéation*, qui fait correspondre à un point un point et aux points d'un plan, les points d'un plan.

La *réciprocité* ou *corrélation*, qui fait correspondre à un point un plan et aux points d'un plan les plans d'une gerbe.

Dans une projectivité de l'espace, aux éléments d'une forme de première espèce correspondent les éléments d'une forme de première espèce et cette propriété pourrait d'ailleurs remplacer la seconde condition dans la définition des projectivités.

Il est d'autre part immédiat que deux formes homologues, de première ou de seconde espèce, sont projectives.

On remarquera que dans la définition des projectivités de l'espace, la droite n'est pas intervenue en tant qu'élément. La raison de ce fait est que si trois plans déterminent un point et trois points un plan, par contre il y a deux droites s'appuyant sur quatre droites données. La notion de projectivité, qui repose sur celle de correspondance biunivoque, ne pouvait donc intervenir ici. Observons d'ailleurs que dans toute projectivité de l'espace, à une droite correspond une droite, mais les droites sont ici considérées comme supports de ponctuelles ou comme axes de faisceaux de plans.

43. La génération projective des coniques. — Considérons un cercle γ et six points A, B, C, D, S, S′ de ce cercle (fig. 17). Projetons les points A, B, C, D respectivement de S, S′; nous obtenons ainsi deux quaternes de droites dont les rapports anharmoniques sont égaux, puisque calculés au moyen d'angles égaux.

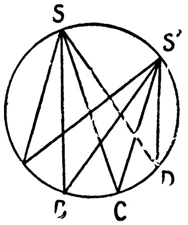

FIGURE 17.

Projetons le plan α du cercle γ sur un plan α_1 à partir d'un point O. Au cercle γ correspond dans α_1 une conique γ_1, aux points S, S′, A, B, C, D correspondent respectivement des points S_1, S'_1, A_1, B_1, C_1, D_1. Puisque les rapports anharmoniques sont conservés par projection et par section, on a

$$(S_1A_1,\ S_1B_1,\ S_1C_1,\ S_1D_1) = (S'_1A_1,\ S'_1B_1,\ S'_1C_1,\ S'_1D_1).$$

Cette propriété est évidemment vraie quels que soient les points S_1, S'_1 et on obtient donc ce théorème. Les quatre droites joignant les points d'une conique à quatre points fixes de celle-ci ont un rapport anharmonique constant. Par conséquent, une conique est le lieu des points d'où quatre points sont vus sous un rapport anharmonique constant.

Cette propriété peut encore être transformée. Soit Γ une conique, soient S, S′ deux de ses points. A une droite *a* passant par S, faisons correspondre la droite *a′* passant par S′ et par le second point de rencontre A de *a* avec Γ. Nous avons ainsi établi une correspondance biunivoque entre les faisceaux de rayons de sommets S, S′. Cette correspondance est d'ailleurs une projectivité, car si nous considérons quatre droites *a*, *b*, *c*, *d* passant par S et formant un quaterne harmonique, les droites homologues *a′*, *b′*, *c′*, *d′* passant par S′ forment également un quaterne harmonique. Par conséquent, les droites projetant les points d'une conique de deux points de celle-ci engendrent deux faisceaux projectifs.

Pouvons-nous définir, en géométrie projective, une conique comme le lieu des points communs aux rayons homologues de deux faisceaux projectifs situés dans un même plan ? Il y a une remarque à faire au préalable.

Si de deux points S, S′ nous projetons les points d'une ponctuelle *r* ne passant ni par S, ni par S′, nous obtenons deux faisceaux projectifs, mais cette projectivité est particulière, car à la droite SS′ du premier faisceau correspond la même droite dans le second faisceau. Suivant la dénomination de Poncelet, d'ailleurs toujours usitée aujourd'hui, les deux faisceaux sont perspectifs. On démontre d'ailleurs que deux faisceaux sont perspectifs lorsqu'ils sont projectifs et que la droite qui leur est commune est sa propre homologue. Cela étant, on définira une conique, en géométrie projective, de la manière suivante :

On appelle conique l'ensemble des points communs aux droites homologues de deux faisceaux projectifs, non perspectifs, situés dans un même plan.

Au rayon SS′ du premier faisceau correspond dans le second une droite *s′*, ne passant pas par S et qui est, par définition, la tangente en S′ à la conique Γ.

Le développement de la théorie des coniques basée sur la définition précédente se fera en montrant que la courbe peut être engendrée de la même manière en remplaçant les points S, S′ par deux quelconques de ses points.

Il y a lieu ensuite de considérer l'ensemble des droites joignant les points homologues de deux ponctuelles projectives situées dans un même plan, ces deux ponctuelles n'étant pas perspectives (c'est-à-dire telles que leur point commun ne soit pas son propre homologue). Cet ensemble est appelé conique-enveloppe et on démontre qu'il est constitué par les tangentes à une conique lieu de points.

44. La définition des coniques suivant von Staudt. — Le géomètre von Staudt a préféré bâtir la théorie des coniques en partant d'une autre définition, basée sur la polarité construite *a priori*.

Considérons une réciprocité Ω entre deux plans superposés ρ, ρ'. A un point P de ρ, Ω fait correspondre une droite p' de ρ'. Considérons cette droite comme appartenant à ρ ; Ω lui fait correspondre un point P′. Il est facile de voir que le point P′ correspond à P dans une homographie, car si P décrit une ponctuelle, p' décrit un faisceau et P′ décrit à son tour une ponctuelle. Cette homographie est associée à la réciprocité Ω. Lorsqu'elle se réduit à l'identité, c'est-à-dire lorsque P′ coïncide toujours avec P, la réciprocité Ω est appelée *polarité*. La droite p' homologue de P est la polaire de ce point et P est le pôle de p'.

On démontre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une réciprocité soit une polarité est l'existence d'un triangle tel qu'à chacun des sommets, la réciprocité fasse correspondre le côté opposé.

Cela étant, von Staudt appelle conique-lieu l'ensemble des points qui appartiennent à leurs polaires ; conique-enveloppe, l'ensemble des droites qui contiennent leurs pôles.

Cette définition a l'avantage d'introduire simultanément les coniques comme lieux de leurs points et enveloppes de leurs tangentes. C'est celle que nous avons adoptée dans nos *Leçons de Géométrie projective.*

45. Extensions à l'espace. — Reprenons la définition de la conique comme lieu des points communs aux rayons homologues de deux faisceaux projectifs. Comment étendre cette définition à l'espace et quelles sont les figures qui seront obtenues ?

Considérons deux gerbes de sommets S, S′, projectives. Nous aurons à considérer deux cas suivant que la projectivité est une homographie ou une réciprocité.

Si les gerbes S, S′ sont homographiques, à une droite passant par S correspond une droite passant par S′ et aux droites passant par S et situées dans un plan, correspondent des droites passant par S′ et situées dans un plan. A un plan passant par S correspond donc un plan passant par S′.

Ceci posé, nous pouvons considérer deux lieux géométriques :

1° Le lieu K des points M tels que les droites SM, S′M soient homologues dans l'homographie. Ce lieu K est une courbe rencontrée en trois points au plus par tout plan de l'espace et est appelée *cubique gauche.*

2. Le lieu des droites communes aux couples de plans homologues des deux gerbes. On démontre que c'est l'ensemble des droites s'appuyant en deux points sur la courbe K.

Au sujet de la courbe K, il y a une remarque intéressante à faire. Revenons pour un instant à la génération des coniques au moyen de deux faisceaux projectifs de droites et remarquons que le lieu des points communs aux rayons de deux faisceaux perspectifs de centres S, S, est formé de la droite SS′ et d'une droite *r*, section commune des deux faisceaux. L'ensemble de ces deux droites, SS′, *r* peut être considéré comme une conique dégénérée. En partant de cette observation, on peut se proposer de rechercher les dégénérescences de la cubique gauche K.

Trois cas sont à considérer :

a. La droite SS′ est sa propre homologue. Il y a alors en général deux plans passant par SS′ qui sont leurs propres homologues. Le lieu K est formé de la droite SS′ et de deux droites s'appuyant sur SS′ et qui peuvent d'ailleurs être confondues.

b. La droite SS′ n'est pas sa propre homologue, mais il existe un plan passant par cette droite et qui est son propre homologue. Le lieu K est formé d'une conique appartenant à ce plan et d'une droite extérieure au plan mais qui rencontre la conique en un point.

c. Les gerbes de sommets S, S′ sont perspectives, c'est-à-dire sont les projections d'un même plan σ. Le lieu K est constitué par ce plan et la droite SS′. On trouve donc ici un plan comme cas particulier d'une courbe.

La courbe K ne sera une cubique gauche proprement dite que si aucun élément commun aux gerbes S, S′ n'est son propre homologue dans l'homographie liant ces deux gerbes.

Supposons maintenant que les deux gerbes S, S′ soient réciproques. A une droite passant par S correspond un plan passant par S′ ; aux droites passant par S et situées dans un plan, correspondent des plans passant par une droite contenant S′.

Il y a actuellement un seul lieu géométrique à considérer, le lieu Q des points communs aux droites d'une des gerbes et aux plans homologues de l'autre.

Si M est un point de ce lieu, à la droite SM correspond un plan μ' passant par M (et par S′). Aux plans passant par SM correspondent les droites passant par S′ et situées dans le plan μ'. En particulier, la droite S′M est l'homologue d'un certain plan μ passant par SM. Ceci montre que les deux gerbes jouent des rôles symétriques dans la définition du lieu Q.

Le lieu géométrique Q est une surface du second ordre ou quadrique, dont l'étude se poursuit d'une manière analogue à celle des coniques.

La définition des coniques de von Staudt pourrait également être étendue à l'espace et donnerait les quadriques. Mais on ne pourrait obtenir la cubique gauche par ce procédé.

46. La génération projective des courbes. — La simplicité de la génération projective des coniques devait conduire les géomètres à chercher des générations analogues pour les courbes d'ordres supérieurs. Ce fut l'œuvre de Michel Chasles, de Moebius, de Steiner (1796-1863), et des géomètres de leur époque.

Il nous faut tout d'abord faire une remarque. La géométrie projective des coniques et des quadriques peut être développée en se bornant aux éléments (points, plans, droites) réels et même, comme on le verra au chapitre suivant, sans faire appel aux notions de mesure de segments et d'angles. Dans les recherches sur les courbes d'ordres supérieurs, on ne fait en général aucune distinction entre les éléments réels et imaginaires. Les matériaux sont en fait fournis par la géométrie analytique ; seule, la manière de raisonner est empruntée à la géométrie projective.

Une courbe d'ordre n est l'ensemble des points réels ou imaginaires dont les coordonnées satisfont à une équation

$$F(x, y) = 0,$$

où $F(x, y)$ est un polynome entier et rationnel en x, y, de degré n. Une telle courbe est rencontrée en n points réels ou imaginaires par toute droite du plan (qui ne fait naturellement pas partie de la courbe si celle-ci est dégénérée). Réciproquement, si une courbe algébrique est rencontrée en n points par toute droite du plan, cette courbe est d'ordre n.

Ceci établi, on appelle faisceau de courbes d'ordre n l'ensemble des courbes passant par l'intersection de deux d'entre elles. Si

$$F_1(x, y) = 0, \qquad F_2(x, y) = 0$$

sont les équations de ces deux courbes, toute courbe du faisceau sera représentée par une équation de la forme.

$$F_1(x, y) + \lambda F_2(x, y) = 0.$$

Par un point du plan qui n'appartient pas à toutes les courbes du faisceau passe une et une seule courbe de celui-ci.

Considérons deux faisceaux de courbes

$$F_1(x, y) + \lambda F_2(x, y) = 0, \qquad \Phi_1(x, y) + \mu\Phi_2(x, y) = 0, \quad (1)$$

respectivement d'ordres m, n. Ces deux faisceaux sont dits projectifs s'il existe entre leurs éléments une correspondance représentée par l'équation

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0. \qquad (2)$$

Cette correspondance est biunivoque et, lorsque les faisceaux considérés sont des faisceaux de droites ($m = n = 1$), l'équation (2) est la traduction analytique d'une projectivité entre ces faisceaux.

Le lieu des points communs aux courbes homologues des faisceaux projectifs (1) est la résultante de l'élimination des paramètres λ, μ entre les équations (1) et (2), c'est-à-dire

$$AF_1\Phi_1 - BF_1\Phi_2 - CF_2\Phi_1 + DF_2\Phi_2 = 0.$$

Ce lieu est donc une courbe d'ordre $m + n$, passant par les points communs à toutes les courbes de chacun des faisceaux (1) et en général irréductible.

Dans ce qui précède, nous avons écrit les équations des courbes considérées ; il convient de remarquer qu'en général, les géomètres laissaient ces équations sous-entendues.

Bornons-nous maintenant au cas le plus simple, celui de la génération des cubiques planes ($m + n = 3$).

Considérons un faisceau de coniques, ensemble des coniques passant par quatre points A, B, C, D, et un faisceau de droites de sommet F. Supposons ces faisceaux projectifs. Le lieu des points communs aux coniques et aux droites homologues est une cubique plane Γ. Pour le démontrer sans faire usage des équations, on peut raisonner de la manière suivante :

Il existe une conique du faisceau passant par le point F ; cette conique a comme homologue une droite passant par F et par conséquent ce point appartient à la courbe Γ. D'autre part, une droite quelconque passant par F est coupée en deux points de la courbe Γ par la conique homologue. Il en résulte que la courbe Γ est rencontrée en trois points par une droite passant par F et est donc une cubique (courbe du troisième ordre).

On remarquera que ce raisonnement suppose implicitement que le lieu étudié Γ est algébrique.

Une cubique plane est déterminée par neuf de ses points. Ces points étant donnés, comment construire le faisceau de coniques et le faisceau de droites générateurs de la courbe ? Voici la solution donnée par Chasles à cette question.

Soient A_1, A_2, ..., A_9 les neuf points donnés. Considérons le faisceau formé par les coniques passant par les quatre premiers de ces points. Il s'agit de déterminer un point B et une projectivité entre le faisceau de coniques et le faisceau de droites de sommet B de manière à engendrer la cubique déterminée par les neuf points donnés.

Le rapport anharmonique des quatre coniques passant par A_1, A_2, A_3, A_4 et respectivement par les points A_5, A_6, A_7, A_8 doit être égal au rapport anharmonique des quatre droites BA_5, BA_6, BA_7, BA_8. Ce rapport anharmonique est connu ; soit α sa valeur. Le point B se trouve sur le lieu des points d'où les quatre points A_5, A_6, A_7, A_8 sont vus sous le rapport anharmonique α, c'est-à-dire sur une conique γ passant par ces quatre points. En reprenant le même raisonnement pour les points A_6, A_7, A_8, A_9, nous trouverons une seconde conique γ' passant par ces points et par B.

Deux cas peuvent se présenter :

1. Les coniques γ, γ' sont distinctes. Elles ont en commun quatre points dont trois, A_6, A_8, A_7 sont connus, le quatrième étant B qui est donc déterminé. Une fois le point B déterminé, la projectivité entre le faisceau de coniques et le faisceau de sommet B est déterminée, puisque l'on connaît des éléments homologues en nombre suffisant.

2. Les coniques γ, γ' sont confondues. Le point B est indéterminé et il y a donc une infinité de cubiques passant par les neuf points donnés. En d'autres termes, ces neuf points sont communs à deux cubiques et par conséquent à toutes les cubiques du faisceau qu'elles déterminent.

Les cubiques passant par huit points forment un faisceau et passant par un neuvième point qui est donc complètement déterminé par les huit premiers. Dans le cas où les coniques γ, γ' sont confondues, le point A_9 doit donc être déterminé par A_1, A_2, ..., A_8. Nous savons déjà que le point A_9 est situé sur la conique γ, complètement déterminée par A_1, A_2, ..., A_8, et qui passe par les quatre derniers de ces points. Reprenons le raisonnement en partant du faisceau formé par les coniques passant par les points A_2, A_3, A_4, A_5 ; nous obtenons une conique γ'' passant par A_1, A_6, A_7, A_8 et qui doit contenir A_9. Ce dernier point forme, avec A_6, A_7, A_8, l'intersection des coniques γ, γ'' et est donc déterminé.

Cet exemple montre le genre de recherches auxquelles se livraient Chasles et les géomètres contemporains. Des recherches analogues, concernant la génération des surfaces, ont fait l'objet des préoccupations des géomètres pendant une bonne partie du XIX^e^ siècle.

47. Le principe de correspondance de Chasles. — Les recherches dont il vient d'être question ont conduit Chasles à considérer des correspondances entre les points d'une droite généralisant les projectivités.

Considérons une droite r et supposons qu'elle soit le support de deux ponctuelles dont nous désignerons les points respectivement par X, Y. Si ces ponctuelles sont projectives, à un point X correspond un point Y et inversement. Choisissons un point O sur r et orientons cette droite. Désignons par x l'abscisse OX de X et par y celle OY de Y. La projectivité est représentée par la relation

$$axy + bx + cy + d = 0.$$

On supposera que $ad - bc$ est différent de zéro, de manière que quand X varie, Y varie également.

On appelle point uni un point X qui coïncide avec son homologue Y. Les points unis sont donc donnés par l'équation

$$ax^2 + (b + c)x + d = 0 ;$$

il y en a donc deux, en général distincts.

Chasles a considéré plus généralement entre les points X, Y une correspondance algébrique telle qu'à un point X correspondent n points Y et à un point Y, m points X.

C'est ce qu'il appelle une correspondance (m, n). Une telle correspondance est représentée par une équation

$$f(x, y) = 0, \qquad (1)$$

où f est un polynome de degré m en x et de degré n en y. Les points unis de la correspondance sont donnés par

$$f(x, x) = 0,$$

équation en général de degré $m + n$ en x.

Considérons dans un plan deux axes Ox, Oy ; l'équation (1) représente dans ce plan une courbe C, d'ordre $m + n$, passant n fois par le point à l'infini de l'axe des x et m fois par le point à l'infini de l'axe des y. Les points unis de la correspondance correspondent aux points de rencontre de la courbe C avec la bissectrice $x = y$ des axes ; ils sont donc au nombre de $m + n$, à moins que la droite $x = y$ ne fasse partie de la courbe.

Ce dernier cas se présentera évidemment si la droite $x = y$ rencontre la courbe C en plus de $m + n$ points et le polynome $f(x, y)$ sera alors divisible par $x - y$.

Ceci établi, le principe de Chasles s'énonce :

Une correspondance (m, n) entre les points d'une droite possède $m + n$ points unis, ou en possède une infinité. Ce dernier cas se présente si l'on connaît plus de $m + n$ points unis.

Voici deux applications du principe de correspondance de Chasles :

Soient en premier lieu un faisceau Σ de courbes planes d'ordre m et un faisceau Σ' de courbes planes d'ordre n, liés par une projectivité. Cherchons l'ordre de la courbe C lieu des points communs aux courbes homologues des deux faisceaux.

Considérons une droite r. Par un point X de r passe une courbe de Σ, la courbe homologue de Σ' coupe r en n points Y. Inversement, par un point Y passe une courbe de Σ' et la courbe homologue de Σ coupe r en m points X. Les points X, Y sont donc liés par une correspondance (m, n). Il est clair que tout point du lieu C appartenant à r est un point uni de cette correspondance et réciproquement. Par conséquent, la courbe C est d'ordre $m + n$, comme nous l'avions déjà reconnu au paragraphe précédent.

La seconde application nous conduira à un théorème dû à Poncelet.

Commençons par observer que ce que nous avons dit des correspondances entre les points d'une droite peut être répété pour les correspondances entre les points d'une conique. Considérons en effet une correspondance algébrique (m, n) entre les points d'une conique C. Soient R un point de C et r une droite ne passant pas par R. Projetons la conique C du point R sur la droite r ; à un point M de C correspond sur r le point M′ où la droite RM coupe r ; inversement, à un point M′ de r correspond le point M où la droite RM′ coupe une seconde fois C. En particulier, au point R correspond le point d'intersection de r avec la tangente en R à la conique C.

Aux points X, Y correspondent sur r des points X′, Y′, liés par une correspondance (m, n). A un point uni de cette correspondance correspond sur C un point uni de la correspondance entre les points X, Y, et inversement. Par suite, la correspondance entre les points X, Y possède $m + n$ points unis ou elle en possède une infinité.

Cela étant, proposons-nous de rechercher le nombre de triangles inscrits dans une conique C et circonscrits à une conique C′.

Par un point X de C, menons une tangente à C′ ; par le second point de rencontre A de cette droite avec C, menons la seconde tangente à C′ ; par le second point de rencontre de cette droite avec C, menons encore la seconde tangente à C′ et soit Y son second point de rencontre avec C. Comme par le point X passent deux tangentes à C′, à ce point X correspondent deux points Y. Inversement, à un point Y correspondent deux points X.

Les points X, Y sont donc liés par une correspondance (2,2) et il y a quatre points unis, c'est-à-dire, semble-t-il, quatre triangles répondant à la question. Nous allons montrer que ces solutions sont impropres.

Il y a quatre tangentes communes aux coniques C, C′. Soient p une de ces tangentes, P son point de contact avec C, p' la seconde tangente à C′ menée par P, P′ son second point de rencontre avec la conique C. Répétons la construction précédente en supposant que le point X coïncide avec P′ et la tangente menée à C′ par X avec p'. Les points A et B coïncident avec P et le point Y avec P′, c'est-à-dire avec X.

Les quatre points unis de la correspondance fournissent donc des solutions impropres (triangles dégénérés). Par conséquent, il n'existe pas en général de triangles inscrits dans une conique et circonscrits à une seconde conique.

Considérons un triangle LMN, une conique C circonscrite à ce triangle et une conique inscrite C'. Si nous reprenons la correspondance entre les points X, Y de la conique C définie plus haut, nous trouverons, outre les quatre points unis déjà mentionnés, trois nouveaux points unis L, M, N. La correspondance ayant plus de quatre points unis, en possède une infinité. Nous obtenons ainsi le théorème de Poncelet :

S'il existe un triangle inscrit dans une conique et circonscrit à une autre conique, il en existe une infinité satisfaisant aux mêmes conditions.

48. Remarque. — Comme nous l'avons fait remarquer à plusieurs reprises, dans les raisonnements employés par Chasles, Steiner et en général par les géomètres qui se sont occupés des courbes et surfaces algébriques, la forme est géométrique, mais l'algèbre est sous-entendue. Sans doute, les méthodes employées se sont révélées particulièrement fécondes, elles ont permis d'aborder des questions là où la mise en équations eut été laborieuse si pas impossible. Mais il importe de vérifier à chaque instant si l'on ne quitte pas le domaine de l'algèbre. L'exemple suivant, emprunté à un article de M. Hadamard[1], fera comprendre le danger de négliger cette précaution.

Considérons dans un plan deux droites imaginaires conjuguées.

$$(a + ia')x + (b + ib')y = 0,$$
$$(a - ia')x + (b - ib')y = 0,$$

passant par l'origine O. Si P est un point de la droite (1), son imaginaire conjugué P′ appartient à la droite (2). Les points P et P′ sont donc liés par une correspondance biunivoque. Le point O, commun aux droites, étant réel, est son propre homologue dans cette correspondance ; celle-ci est donc une perspectivité et les droites PP′ passent par un point fixe A. Mais une droite réelle du plan rencontre les droites (1) et (2) en des points imaginaires conjugués, donc toutes les droites réelles du plan passent par le point A.

L'absurdité de cette conclusion provient de ce que nous avons considéré la correspondance entre les points P, P′ comme une projectivité, alors que cette correspondance n'est pas analytique.

1. *L'Enseignement scientifique*, 25 décembre 1933.

Chapitre IV

LES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE

49. Le postulat d'Euclide de Proclus à Legendre. — Comme nous l'avons vu, Euclide avait introduit dans sa Géométrie plusieurs postulats dont l'un, celui des parallèles, a été plus spécialement appelé postulatum d'Euclide. Il a donné lieu à de nombreuses recherches qui ont eu, sur le développement de la géométrie et, peut-on dire, sur l'ensemble des Mathématiques, une influence considérable.

Avant de passer rapidement ces recherches en revue, rappelons la définition des parallèles et l'énoncé du postulat d'Euclide.

Après avoir admis comme postulat qu'une droite peut être prolongée indéfiniment, Euclide appelle parallèles deux droites qui, prolongées indéfiniment, ne se rencontrent jamais. Le cinquième postulat, ou postulat d'Euclide, est ensuite énoncé sous la forme suivante : *Si une droite, qui en coupe deux autres, forme avec celles-ci, du même côté, des angles internes dont la somme est moindre que deux droits, les deux dernières droites, prolongées s'il le faut, se coupent du côté où la somme des angles est inférieure à deux droits.*

En s'appuyant sur ce postulat, Euclide déduit les propriétés suivantes :

a. Par un point, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée.

b. La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits.

c. Il existe des figures semblables à une figure donnée.

Les géomètres ont tout d'abord cherché à éliminer le postulat d'Euclide en le démontrant sans introduire un nouveau postulat. La stérilité de ces recherches ont peu à peu conduit à l'idée qu'il pouvait exister des géométries, logiquement possibles, où l'unicité de la parallèle menée par un point à une droite et par suite le postulat d'Euclide, ne seraient pas admis.

Le géomètre grec Proclus (410-485), auquel on doit des commentaires sur les éléments d'Euclide, semble être le premier qui chercha à démontrer le postulat. On rencontre ensuite des tentatives du géomètre persan Nasîr-Eddin (1201-1274).

Cataldi, aux environs de 1600, et plus tard Giordano Vitale (1633-1711) ont tenté de démontrer le postulat en considérant le lieu des points équidistants d'une droite donnée, et d'un même côté de la droite, lieu qu'ils admettaient implicitement être une droite.

Wallis (1616-1703) a montré que le postulatum d'Euclide peut être démontré si l'on admet l'existence d'un triangle semblable à un triangle donné, et de grandeur arbitraire.

L'œuvre du jésuite italien Gerolamo Saccheri (1667-1733) ouvre une voie nouvelle. Saccheri considère un quadrilatère ABCD dont les côtés AD, BC sont égaux et perpendiculaires à la base AB. Il distingue trois hypothèses suivant que les angles en C et D sont tous deux droits, ou tous deux aigus, ou tous deux obtus. Dans le premier cas, la somme des angles d'un triangle vaut deux droits et l'on en déduit le postulat d'Euclide. Dans le second cas, la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits ; dans le troisième, cette somme est supérieure à deux droits. Mais cette dernière conclusion est en contradiction avec le fait qu'une droite peut être prolongée indéfiniment.

Saccheri ajoute une remarque importante. Si, pour un seul triangle, la somme des angles est égale à deux droits, il en est de même pour tous les triangles.

Il semble que ce soit Saccheri qui eut, le premier, la conception d'une géométrie, développée suivant les règles de la logique, où la somme des angles d'un triangle soit inférieure à deux droits.

Après lui, le géomètre suisse Lambert (1728-1777) considère un quadrilatère dont trois angles sont droits et examine les cas où le quatrième angle est droit, aigu ou obtus. Il parvient aux mêmes conclusions que Saccheri.

Les géomètres français Lagrange (1736-1813), Laplace (1749-1827), Legendre (1752-1833), Carnot (1753-1823), Fourier (1768-1830) se sont également occupés du postulat d'Euclide. Les travaux de Legendre sur cet objet sont particulièrement importants.

Legendre démontre notamment, sans utiliser le postulatum d'Euclide, que la somme des angles d'un triangle est inférieure ou égale à deux droits. Nous reproduirons sa démonstration ; elle nous permettra de faire une observation importante.

Considérons un triangle ABC et supposons que la somme de ses angles soit égale à $2^{dr} + a$ (fig. 18). Joignons A au milieu H de BC et prolongeons cette droite d'une longueur HD égale à AH.

Les triangles AHC, DHB sont égaux et par conséquent les angles $\widehat{CAH}$ et $\widehat{HDB}$ sont égaux, de même que les angles $\widehat{ACH}$ et $\widehat{HBD}$. On en conclut que la somme des angles du triangle ABD est aussi égale à $2^{dr} + a$.

L'un des angles $\widehat{DAB}$, $\widehat{ADB}$ est au plus égal à la moitié de l'angle BAC. Supposons que ce soit l'angle $\widehat{DAB}$. Soit K le milieu de la droite BD ; prolongeons la droite AK d'une longueur KE = AK. La somme des angles du triangle ABE est égale à $2^{dr} + a$ et l'un des angles $\widehat{EAB}$, $\widehat{AEB}$ est au plus égal à la moitié de l'angle $\widehat{DAB}$, c'est-à-dire au quart de l'angle $\widehat{BAD}$.

Si c'est l'angle $\widehat{ADB}$ qui est au plus égal à la moitié

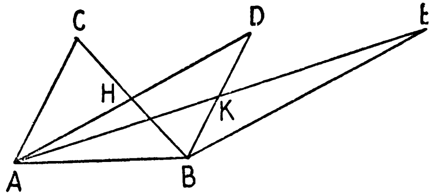

FIGURE 18.

de l'angle $\widehat{BAC}$, nous joindrons le milieu K′ de AB au point D et nous prolongerons cette droite d'une longueur K′E′ = DK′. La somme des angles du triangle BDE′ vaut $2^{dr} + a$ et l'un des angles $\widehat{BDE'}$, $\widehat{BE'D}$ est au plus égal au quart de l'angle $\widehat{BAC}$.

En continuant cette construction, on voit qu'après n opérations, on parviendra à un triangle dont la somme des angles vaut $2^{dr} + a$ et dont l'un des angles est au plus égal à $\left(\frac{1}{2}\right)^n \widehat{BAC}$.

Choisissons n assez grand pour avoir

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \widehat{BAC} < a.$$

Le dernier triangle obtenu aura deux angles dont la somme sera supérieure à 2^{dr}, ce qui est absurde. On voit donc que la somme des angles d'un triangle est au plus égale à deux droits.

Dans cette démonstration, Legendre admet implicitement qu'une droite peut être prolongée indéfiniment ; dans la suite des triangles qu'il construit, les côtés opposés à l'angle B deviennent en effet de plus en plus grands. On peut donc conclure de la démonstration de Legendre que *le postulat* formulé par Euclide *« une droite peut être prolongée indéfiniment » entraîne comme conséquence que la somme des angles d'un triangle est au plus égale à deux droits.*

50. La géométrie lobatchefskienne. — Le géomètre russe Lobatchefsky (1793-1856) a édifié, sous le nom de *pangéométrie* ou de *géométrie imaginaire*, une géométrie qui porte aujourd'hui son nom et dans laquelle il admet l'existence de plusieurs parallèles menées par un point à une droite, dans un plan. En réalité, cette géométrie s'était également présentée à Gauss (1777-1856), qui l'appelait géométrie antieuclidienne ou non-euclidienne, à Schweikart (1780-1857), à Taurinus (1794-1874), et, un peu plus tard, à J. Bolyai (1802-1860).

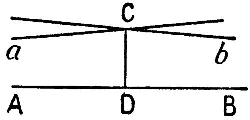

FIGURE 19.

Considérons une droite AB et un point C n'appartenant pas à cette droite (fig. 19). Parmi les droites passant par C dans le plan ABC, Lobatchefsky distingue les droites qui rencontrent la droite AB, qu'il appelle les sécantes, et les droites qui ne rencontrent pas la droite AB, qu'il appelle les non-sécantes.

L'ensemble des sécantes est séparé de l'ensemble des non-sécantes par deux droites *a*, *b*, symétriques par rapport à la perpendiculaire CD abaissée de C sur AB. Les droites a, b sont appelées les parallèles menées par C à la droite AB.

L'angle aigu fait par chacune des droites a, b avec la perpendiculaire CD est appelé angle de parallélisme. C'est une fonction $\pi(a)$ de la distance a de C à la droite AB. Lorsque a tend vers zéro, l'angle $\pi(a)$ tend vers un droit et lorsque a croît au delà de toute limite, $\pi(a)$ tend vers zéro.

Par le point D, on peut mener deux parallèles à chacune des droites a, b ; l'une de ces parallèles est dans chaque cas la droite AB.

Deux droites, parallèles à une même troisième, sont parallèles entre elles.

La somme des angles d'un triangle est toujours inférieure à deux droits.

En géométrie euclidienne, les faisceaux de droites peuvent se ranger en deux catégories : les faisceaux de droites concourantes (faisceaux propres) et les faisceaux de droites parallèles (faisceaux impropres). En Géométrie lobatchefskienne, il y a une troisième catégorie, celle des faisceaux formés de droites perpendiculaires à une même droite. La considération de ces trois catégories de faisceaux conduit à trois catégories de courbes analogues aux cercles de la géométrie classique.

Considérons trois points A, B, C et désignons respectivement par a, b, c, les perpendiculaires élevées au milieu des segments BC, CA, AB aux droites portant ces segments.

En géométrie classique, les droites a, b, c ou bien concourent en un même point, ou bien sont parallèles. Dans le premier cas, les points A, B, C appartiennent au cercle dont le centre est le point de concours des droites et le rayon OA ; dans le second, les points A. B, C sont en ligne droite.

Plaçons-nous en géométrie lobatchefskienne. Les droites a, b, c concourent en un même point O, ou sont parallèles, ou sont perpendiculaires à une même droite m.

Dans le premier cas, les points A, B, C sont également distants du point O et appartiennent à la courbe lieu des points situés à la distance OA du point O. Cette courbe est appelée *cercle* ou *endocycle*.

Dans le second cas, les points A, B, C appartiennent à une courbe dont Lobatchefsky a montré l'existence, appelée *horicycle*, et qui possède la propriété suivante : La perpendiculaire élevée au milieu d'une corde quelconque de cette courbe est parallèle à une droite fixe.

Dans le troisième cas, les points A, B, C sont situés à égales distances de la droite m et appartiennent à la courbe lieu des points situés à une distance constante de la droite. Cette courbe est appelée *hypercycle* ou *exocycle*.

51. Le modèle de la géométrie lobatchefskienne de Poincaré. — Dans ses mémorables recherches sur les fonctions fuchsiennes, Henri Poincaré (1854-1912) a été conduit à une géométrie qui se ramène, moyennant un changement de notations, à la géométrie lobatchefskienne[1].

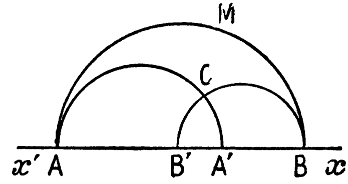

FIGURE 20.

L'illustre géomètre considère la partie du plan située d'un côté d'une droite donnée $x'x$ et, dans cette partie du plan, les demi-circonférences ayant leurs centres sur la droite $x'x$ (fig. 20).

Envisageons une de ces demi-circonférences AMB et

1. Voir le tome II des *Œuvres de Henri Poincaré*. Paris. 1916.

un point C qui ne lui appartient pas. Par C passent deux demi-circonférences ACA′, BCB′ rencontrant AMB sur la droite $x'x$. Les demi-circonférences passant par C peuvent se ranger en deux catégories : celles qui rencontrent AMB et celles qui ne rencontrent pas AMB. Ces deux catégories sont séparées par les demi-circonférences ACA′, BCB′.

Cela étant, Poincaré remarque que si l'on convient d'appeler droite les demi-circonférences dont il est question, et droites parallèles deux demi-circonférences se rencontrant en un point de la droite $x'x$, on obtient précisément la géométrie lobatchefskienne.

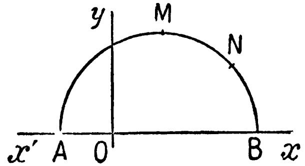

Figure 21.

Pour achever cette construction, Poincaré définit la distance de deux points, la longueur d'une courbe et l'aire d'une surface.

Indiquons en quoi consiste la distance de deux points. Rapportons la figure à deux axes rectangulaires Ox, Oy dont le premier coïncide avec la droite $x'x$ (fig. 21). La quantité imaginaire

$$z = x + iy$$

sera représentée par le point de coordonnées x, y, point appelé *affixe* de z. Soient, dans le demi-plan situé au-dessus de l'axe Ox, M et N les affixes de deux nombres complexes m, n. Par les points M, N passe une demi-circonférence dont le centre est sur Ox, c'est-à-dire une droite lobatchefskienne. Cette demi-circonférence coupe Ox en deux points A, B dont nous désignerons par a, b les abscisses. La distance des points M, N est par définition le logarithme népérien du rapport anharmonique des quantités m, n, a, b, c'est-à-dire que

$$\text{distance MN} = \log_e \frac{m-a}{m-b} : \frac{n-a}{n-b}.$$

Poincaré ajoute que cette remarque lui a rendu de grands services dans ses recherches. La portée en est considérable. En effet, par ce procédé, la géométrie lobatchefskienne se trouve ramenée à un chapitre de géométrie euclidienne. Par conséquent, les développements de géométrie lobatchefskienne ne peuvent, pas plus que ceux de géométrie euclidienne, conduire à des contradictions.

52. La géométrie riemannienne. — Au sujet du postulat d'Euclide, trois hypothèses peuvent être faites *a priori.*

Étant donnés dans un plan une droite a et un point A ne lui appartenant pas,

1. On peut mener par A une et une seule droite ne rencontrant pas a (Euclide).
2. On peut mener par A une infinité de droites ne rencontrant pas a (Lobatchefsky).
3. On ne peut mener aucune droite passant par A et ne rencontrant pas a.

Mais comme nous l'avons vu, si l'on admet que la droite peut être prolongée indéfiniment, cette dernière hypothèse doit être rejetée. En d'autres termes, si l'on admet la troisième hypothèse, on est conduit à admettre en même temps que la droite a une longueur finie. C'est ce qu'a fait Riemann (1826-1866).

Dans la géométrie riemannienne, la notion de parallèles n'existe pas et la droite a une longueur finie, c'est en quelque sorte une courbe fermée. La somme des angles d'un triangle est toujours supérieure à deux droits.

On peut donner une forme concrète à la géométrie riemannienne en interprétant convenablement la géométrie euclidienne de la gerbe.

Considérons l'ensemble des droites et des plans passant par un point donné O et convenons d'interpréter cet ensemble comme un plan idéal au moyen du « dictionnaire » suivant :

Gerbe de centre O,	Plan idéal.
Droite passant par O,	Point.
Plan passant par O,	Droite.
Angle de deux droites,	Distance de deux points.
Angle dièdre,	Angle de deux droites.
Trièdre,	Triangle.

Dans ce plan idéal, la somme des angles d'un triangle est supérieure à deux droits, puisque la somme des dièdres d'un trièdre possède cette propriété.

Les plans passant par O et perpendiculaires à un plan passant également par O, ont en commun la perpendiculaire en O à ce dernier plan. Cette propriété montre que dans la géométrie de Riemann, les perpendiculaires à une droite passent par un même point.

La construction précédente montre la possibilité logique de la géométrie riemannienne. On est assuré que le développement de cette géométrie ne conduira pas à des contradictions puisque, par un changement de notations, elle se ramène à la géométrie euclidienne. Mais cela ne prouve nullement la possibilité « physique » de la géométrie riemannienne.

53. Les postulats de la géométrie euclidienne. — Les recherches sur les principes de la géométrie et la construction des géométries non-euclidiennes ont conduit à l'analyse logique de la géométrie euclidienne et à l'énumération des postulats sur lesquels elle est basée. Ce fut, à la fin du siècle dernier, l'œuvre de géomètres parmi lesquels il convient de citer H. Poincaré, D. Hilbert, F. Enriques.

Dans ses *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig, 1899), D. Hilbert a énuméré les postulats de la géométrie euclidienne et les a répartis en cinq groupes correspondant aux notions d'association, de distribution, de parallélisme, d'égalité et de continuité.

Concevons, dit Hilbert, trois sortes d'êtres : Les êtres de la première sorte seront appelés points, ceux de la seconde sorte, droites, ceux de la troisième, plans. Entre ces êtres existent certaines relations qui se traduisent par les postulats de la géométrie.

Axiomes d'association. — I. Deux points distincts déterminent toujours une droite.

II. Deux points distincts d'une droite déterminent cette droite et sur toute droite, il y a au moins deux points.

III. Trois points non situés sur une droite déterminent toujours un plan.

IV. Trois points quelconques d'un plan, non situés sur une même droite, déterminent ce plan.

V. Lorsque deux points d'une droite sont situés dans un plan, il en est de même de tout point de cette droite.

VI. Lorsque deux plans ont un point en commun, ils en ont au moins un second.

VII. Dans tout plan, il y a au moins trois points non situés sur la même droite et dans l'espace, il y a au moins quatre points non situés dans un même plan.

Axiomes de distribution. — I. Si A, B, C sont trois points en ligne droite, et si B est situé entre A et C, il l'est aussi entre C et A.

II. Si A et C sont deux points d'une droite, il y a au moins un point B de cette droite situé entre A et C, et un point D de cette droite tel que C soit situé entre A et D.

III. De trois points d'une droite, il y en a toujours un et un seul situé entre les deux autres.

IV. Quatre points quelconques A, B, C, D d'une droite peuvent toujours être distribués de manière que B soit situé entre A et C et aussi entre A et D, et que C soit situé entre A et D et aussi entre B et D.

V. Soient A, B, C trois points non situés sur une même droite et a une droite du plan ABC, ne passant par aucun des points A, B, C. Si la droite a passe par un point du segment AB, elle passera toujours ou bien par un point du segment AC, ou bien par un point du segment BC.

Axiome des parallèles. — I. Dans un plan, par un point A pris en dehors d'une droite a, on peut toujours mener une droite et une seule qui ne coupe pas a ; cette droite est appelée la parallèle à a menée par A.

Axiomes d'égalité (ou de congruence). — I. Si AB est un segment de droite et A′ un point d'une droite a', on peut toujours trouver sur a', d'un même côté de A′, un et un seul point B′ tel que le segment A′B′ soit congruent (égal) au segment AB. Tout segment est congruent à lui-même.

Le segment AB est toujours congruent au segment BA.

II. Deux segments congruents à un même troisième, sont congruents.

III. Soient A, B, C trois points d'une droite a tels que les segments AB et BC n'aient que l'extrémité B en commun ; A′, B′, C′ trois points d'une droite a' présentant la même disposition. Si AB, A′B′ sont congruents, si BC et B′C′ sont congruents, alors AC et A′C′ sont toujours congruents.

IV. Soit dans un plan α un angle (h, k) déterminé par deux demi-droites h, k et dans un plan α' une droite a'. Choisissons sur a' un point O′ et une demi-droite h'. Il est toujours possible de déterminer dans le plan α', d'un côté déterminé de la droite a', une et une seule demi-droite k', passant par O′, telle que l'angle (h', k') soit congruent à l'angle (h, k).

Tout angle est congruent à lui-même.

L'angle (h, k) est toujours congruent à l'angle (k, h).

V. Deux angles congruents à un même troisième sont congruents.

VI. Si dans deux triangles ABC, A′B′C′, les segments AB, AC sont respectivement congruents aux segments A′B′, A′C′ et si les angles BAC, B′A′C′ sont congruents, alors les angles ABG, ACB sont respectivement congruents aux angles A′B′C′, A′C′B′.

Axiome de continuité ou postulat d'Archimède. — I. Soient sur une droite deux points A, B et un point A_1 situé entre A et B. Construisons des points A_2, A_3, ... tels que A_1 soit situé entre A et A_2, A_2 entre A_1 et A_3, ... et tels en outre que les segments AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... soient congruents. Alors, il existera un certain point A_n tel que B soit situé entre A et A_n.

A cet axiome, Hilbert a ajouté l'*axiome d'intégrité* : Au système de points, de droites et de plans, il est impossible d'adjoindre d'autres êtres de manière que le système ainsi généralisé forme une nouvelle géométrie où les axiomes précédents sont tous vérifiés.

Le second groupe d'axiomes permet d'orienter les droites et de parler de demi-droites au moment où il est question des angles. Quant à la congruence, elle n'est autre que l'égalité par superposition, celle précisément que considérait Euclide (axiome VII).

54. Compatibilité et indépendance des postulats. — Il n'est évidemment pas toujours possible de construire une géométrie en établissant, entre les points, les droites et les plans, un certain nombre de relations choisies arbitrairement comme postulats. Il faut que ces postulats soient compatibles, c'est-à-dire que le développement logique de cette géométrie ne conduise pas à des contradictions.

Après avoir énuméré les postulats de la géométrie euclidienne, Hilbert a pris soin de démontrer qu'ils sont compatibles. Dans ce but il a construit une géométrie analytique où tous ces postulats sont vérifiés.

D'un autre côté, après avoir établi que les postulats d'une géométrie sont compatibles, il faut encore établir qu'ils sont indépendants, c'est-à-dire qu'aucun d'eux ne peut se déduire des autres. Pour atteindre ce but, on construit des géométries où tous les postulats sont vérifiés, sauf l'un d'eux. C'est ainsi que pour démontrer par exemple que le postulat d'Archimède n'est pas une conséquence des postulats précédents, Hilbert a construit une géométrie non archimédienne, où ce dernier postulat n'est pas vérifié. Il avait d'ailleurs été précédé dans cette voie par Veronese (1854-1917).

Il peut cependant exister une certaine dépendance entre les postulats d'une géométrie, en ce sens que certains d'entre eux ne peuvent être modifiés sans que d'autres le soient nécessairement. Ainsi, on ne peut nier le postulat d'Euclide en admettant qu'il n'existe pas de parallèles, sans laisser tomber le postulat sur la possibilité de prolonger indéfiniment une droite.

Un autre problème qui se présente à propos des principes de la géométrie est le suivant : Une proposition étant donnée, quels sont les postulats nécessaires pour la démontrer ? Un exemple typique, que nous nous bornerons à signaler sans développements, est celui du théorème sur les triangles homologiques de Desargues.

Hilbert a établi que la proposition : *Si deux triangles* ABC, A'B'C' *sont tels que les droites* AA', BB', CC' *concourent en un même point, les couples de côtés opposés* BC *et* B'C', CA *et* C'A', AB *et* A'B' *se coupent en trois points en ligne droite*, ne peut être démontrée en géométrie plane que si l'on adopte les postulats de congruence. En d'autres termes, pour démontrer le théorème de Desargues sans utiliser les postulats de congruence, il faut utiliser la géométrie de l'espace. Pour établir ce point, Hilbert construit une géométrie plane dans laquelle ni les axiomes de congruence, ni le théorème de Desargues ne sont vrais.

55. Le postulat d'Archimède et la mesure des segments. — La mesure des segments consiste dans la possibilité d'associer à tout segment donné un nombre réel (rationnel ou irrationnel), complètement déterminé par le segment. Mais la géométrie, et en particulier la géométrie analytique, exige également la réciproque, c'est-à-dire que tout nombre réel soit la mesure d'un segment.

Le postulat d'Archimède permet d'introduire la proposition directe, mais non la réciproque. Pour arriver à ce résultat, il faut introduire un second postulat, par exemple le postulat d'intégrité de Hilbert.

Mais on peut aussi introduire, au lieu du postulat d'intégrité, le postulat de continuité que Georges Cantor (1845-1918) a énoncé sous la forme suivante :

S'il existe, dans un segment de droite OM, *deux suites illimitées de segments* OA_1, OA_2, ..., OA'_1, OA'_2, ... *tels que*:

1. *Les segments* OA_1, OA_2, ... *vont en croissant indéfiniment ;*

2. *Les segments* OA'_1, OA'_2, ... *vont en décroissant indéfiniment ;*

3. *Les segments* $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ... *vont en décroissant de telle sorte que l'on peut toujours trouver un nombre n tel que le segment* $A_nA'_n$ *soit plus petit qu'un segment donné à l'avance.*

Alors il existe un point X *tel que le segment* OX *soit plus grand que tout segment de la première suite et plus petit que tout segment de la seconde.*

Dedekind (1831-1916) a d'autre part énoncé un postulat de la continuité auquel on peut donner une forme géométrique.

Si les points d'un segment de droite OM *peuvent se répartir en deux classes telles que*

1. *Tout point du segment appartient à l'une des classes ;*
2. *Le point* O *appartient à la première classe et le point* M *à la seconde ;*
3. *Un point quelconque de la première classe appartient toujours à tout segment d'origine* O *et dont l'extrémité est un point de la seconde classe ;*

Alors il existe toujours un et un seul point X *tel que tous les points du segment* OX *appartiennent à la première classe et tous les points du segment* XM *à la seconde.*

On peut démontrer que si l'on admet les postulats de congruence et celui de Dedekind, on peut en déduire le postulat d'Archimède et l'existence d'une correspondance biunivoque entre les segments d'une droite orientée et les nombres réels. Par contre, Veronese a prouvé que le postulat de Cantor ne pouvait, dans les mêmes conditions, suppléer au postulat d'Archimède ; ces deux postulats sont indépendants.

56. Les postulats de la géométrie projective. — Nous avons déjà remarqué que la géométrie projective ne comportait que des propositions de position des figures géométriques, c'est-à-dire ne faisant pas intervenir les notions de mesure de segments ou de mesure d'angles. Mais nous avons aussi observé que la plupart des propositions de la géométrie projective ont tout d'abord été introduites en faisant intervenir des relations métriques. Ainsi, la relation d'involution de Desargues, le quaterne harmonique de points d'une droite ont été introduits en faisant intervenir des mesures de segments. Ce n'est que plus tard que l'on a pu se rendre compte de la nature projective de ces propriétés.

C'est von Staudt qui a cherché le premier à édifier la géométrie projective en la débarrassant de toute notion métrique. Il n'y est pas entièrement parvenu, mais ses successeurs furent plus heureux. On connaît aujourd'hui des systèmes de poslutats, reflétant des propriétés intuitives de position de l'espace, servant de base aux exposés de la géométrie projective. Nous reproduirons ici celui qui a été introduit par F. Enriques et qui nous paraît le plus rationnel.

Imaginons trois sortes d'éléments : les points, les droites et les plans, entre lesquels existent les relations suivantes :

I. *Deux points déterminent une droite à laquelle ils appartiennent.*

II. *Trois points n'appartenant pas à une même droite déterminent un plan auquel ils appartiennent.*

III. *Un point et une droite ne passant pas par ce point déterminent un plan qui les contient.*

IV. *Deux plans déterminent une droite qui leur appartient.*

V. *Trois plans ne passant pas par une même droite déterminent un point qui leur appartient.*

VI. *Un plan et une droite n'appartenant pas à ce plan déterminent un point qui leur appartient.*

Outre ces six postulats, nous en introduirons trois autres qui concernent les formes de première espèce de la géométrie projective (ponctuelle, faisceau de rayons, faisceau de plans). Nous les énoncerons d'abord et les discuterons ensuite.

Les deux premiers de ces postulats sont relatifs aux sens de parcours.

VII. *Un élément* O *étant fixé dans une forme de première espèce, les éléments de cette forme peuvent être ordonnés de manière que* O *précède chaque élément. Dans cet ordre, chaque élément de la forme en précède toujours un autre et* *entre deux éléments* A, B *de la forme tels que* A *précède* B, *il existe toujours quelque élément suivant* A *et précédant* B.

VIII. *Dans une forme de première espèce, il existe deux sens de parcours opposés, bien déterminés et si une forme se déduit d'une autre par projection ou par section, à un sens de parcours de l'une correspond un sens de parcours bien déterminé de l'autre.*

Le dernier postulat est la traduction projective du postulat de continuité de Dedekind.

IX. *Si* AB *est un segment d'une forme ordonnée de première espèce et si l'on divise ce segment en deux parties telles que :*

1. *Chaque élément du segment* AB *appartienne à l'une des parties ;*

2. A *appartienne à la première partie et* B *à la seconde ;*

3. *Un élément quelconque de la première partie précède un élément quelconque de la seconde ;*

Il existe un élément C *du segment* AB *(qui peut appartenir à l'une des parties) tel que chaque élément de* AB *précédant* C *appartienne à la première partie, chaque élément suivant* C *appartenant à la seconde.*

Sur les neuf postulats qui viennent d'être énoncés, la géométrie projective peut être entièrement construite.

57. Sens de parcours dans les formes de première espèce. — Une ponctuelle peut être parcourue par un point dans deux sens différents. De même, une droite d'un faisceau de rayons peut tourner autour du sommet dans deux sens différents. Un plan d'un faisceau peut parcourir celui-ci dans deux sens différents. De plus, si deux de ces formes sont sections ou projections l'une de l'autre, à un sens de parcours de la première correspond un sens de parcours bien déterminé de la seconde. Ce sont ces propriétés intuitives que traduisent les postulats VII et VIII.

Il convient de faire ici une remarque importante. Considérons une ponctuelle r et un point R ne lui appartenant pas (fig. 22). Faisons décrire r par un point M dans un sens déterminé, par exemple de gauche à droite. La droite $m =$ RM décrit le faisceau de rayons de centre R dans un sens déterminé. A un certain moment, le rayon m occupera la position m_0 parallèle à r. La droite m continuant son mouvement dans le même sens, viendra ensuite occuper la position m' et le point M sera en M′, à gauche du point M dont on est primitivement parti. Les postulats VII et VIII impliquent que si une ponctuelle est parcourue dans un sens déterminé par un point, celui-ci revient finalement à son point de départ. En d'autres termes, ces postulats introduisent les points à l'infini et font de la droite projective une sorte de courbe fermée.

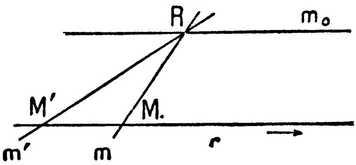

FIGURE 22.

Il en résulte que si l'on prend deux points A, B d'une ponctuelle, ces points déterminent deux segments projectifs, qu'un point décrit en passant de A à B suivant les deux sens de parcours de la ponctuelle.

Un autre concept important que l'on peut introduire grâce aux postulats VII et VIII concerne les groupes de quatre éléments d'une forme de première espèce. Considérons par exemple quatre points A, B, C, D d'une ponctuelle se succédant dans un sens de parcours déterminé de celle-ci. Ces quatre points peuvent se répartir en couples de trois manières : AB et CD, AC et BD, AD et BC. Dans le premier et le troisième cas, chacun des segments déterminé par les points d'un couple contient les deux points de l'autre couple ou n'en contient aucun. Dans le second cas au contraire, chacun des segments déterminé par les points d'un couple contient un point de l'autre couple. On dit que les couples AB et CD, ou AD et BC ne se séparent pas, et que les couples AC et BD se séparent.

A deux couples qui se séparent correspondent, par projection et par section, des couples qui se séparent.

On en déduit que si le quaterne ABCD est harmonique, c'est-à-dire si C, D séparent harmoniquement AB, les couples AB, CD se séparent.

58. Correspondances biunivoques. — Considérons deux formes de première espèce, par exemple deux ponctuelles r, r'. Imaginons une correspondance biunivoque T entre les points de ces deux ponctuelles. On dira que la correspondance T est ordonnée si, lorsqu'un point décrit r dans un sens déterminé, son homologue décrit r' dans un sens déterminé.

Supposons maintenant les ponctuelles r, r' superposées sur la même droite. Si la correspondance T est ordonnée, lorsque le point M parcourt r dans un sens déterminé, son homologue M' parcourt r' dans un sens qui peut coïncider avec le précédent, ou non. Dans le premier cas, on dira que T est une correspondance directe, dans le second une correspondance inverse.

Si à un certain moment le point M coïncide avec son homologue M', ce point sera dit uni pour la correspondance.

Ceci posé, le postulat IX permet d'établir des propriétés des correspondances, traduction des faits intuitifs dont il va être question.

Supposons qu'une route rectiligne joigne deux villes A, B. Deux voyageurs M, M' parcourent cette route ; nous dirons qu'ils occupent des positions homologues lorsque leurs montres marqueront la même heure. Nous avons ainsi une correspondance biunivoque entre les positions de nos deux voyageurs.

Si M et M′ vont tous deux dans le même sens et si M part après M′ de A mais arrive avant lui en B, à un certain moment, M aura rejoint M′ ; ce sera en un point uni de la correspondance. Il se peut qu'après cette première rencontre, M ralentisse le pas et soit dépassé par M′, qu'il dépassera de nouveau un peu plus loin. Mais on peut dire qu'il existe entre A et B un point où M et M′ se trouvent au même instant et qu'entre A et ce point, M′ précède toujours M.

Si M va de A à B et M′ de B à A, les voyageurs se rencontreront évidemment une seule fois.

En termes précis, nous avons les théorèmes suivants :

I. Si, entre les éléments d'une forme de première espèce, existe une correspondance ordonnée directe dans laquelle aux éléments d'un segment AB correspondent les éléments d'un segment A′B′ contenu dans AB, il existe un élément uni P, appartenant à A′B′ tel que, dans le segment ordonné AB, il n'existe aucun élément uni précédant P.

II. Si, entre les éléments d'une forme de première espèce, il existe une correspondance ordonnée inverse dans laquelle aux éléments d'un segment AB correspondent les éléments d'un segment A′B′ contenu dans AB, il existe un élément uni P contenu dans le segment AB′A′B et un élément uni Q contenu dans le segment AB complémentaire. Les couples AB et PQ, A′B′ et PQ se séparent.

59. La définition des projectivités et le théorème fondamental de la géométrie projective. — Nous avons déjà dit que von Staudt définissait la projectivité entre deux formes de première espèce : *une correspondance biunivoque conservant les quaternes harmoniques.* Examinons de plus près cette question et limitons-nous, pour plus de simplicité, à une projectivité entre deux ponctuelles *r*, *r′* (ce qui n'est d'ailleurs pas une restriction).

Soient sur r deux points C, D partageant harmoniquement deux points A, B. La projectivité ω, existant entre r et r', fait correspondre au quaterne harmonique ABCD un quaterne harmonique A′B′C′D′. Les couples AB et CD se séparent, il en est de même des couples A′B′ et C′D′. Par conséquent au sens de parcours ACBD de r, correspond le sens de parcours A′B′C′D′ de r'. Une projectivité est donc une correspondance ordonnée.

Le théorème fondamental de la géométrie projective s'énonce : *Il existe une et une seule projectivité, entre deux formes de première espèce, faisant correspondre à trois éléments donnés de l'une, trois éléments donnés de l'autre.*

En d'autres termes, il existe une et une seule projectivité entre les ponctuelles r, r' faisant correspondre à trois points donnés L, M, N de r, respectivement trois points donnés L′, M′, N′ de r'.

L'existence d'une projectivité satisfaisant à ces conditions est facile à établir ; nous l'avons déjà fait au chapitre précédent. Mais démontrer l'unicité de cette projectivité est chose plus délicate.

Supposons qu'il puisse exister, entre les ponctuelles r, r', deux projectivités ω, ω' faisant correspondre aux points L, M, N de r respectivement les points L′, M′, N′ de r'. A un point P de r, ω fait correspondre un point P′ de r'. Ce point correspond également, dans ω', à un point P_1 de r. Entre les points P et P_1 de r, nous avons évidemment une correspondance biunivoque qui est une projectivité ω_1. Les points L, M, N sont unis pour ω_1. Et bien, nous aurons démontré l'unicité de la projectivité ω si nous prouvons que tous les points de r sont unis pour ω_1, c'est-à-dire que cette projectivité est l'identité.

Un premier procédé se présente à l'esprit. Construisons les conjugués harmoniques de chacun des points L, M, N par rapport aux deux autres. Nous obtenons ainsi trois nouveaux points qui, d'après la définition même des projectivités, sont unis pour ω_1. Prenons ensuite les conjugués harmoniques de chacun des six points par rapport à chaque couple formé avec les cinq autres. Nous obtenons de nouveaux points unis de ω_1, et ainsi de suite. Nous obtiendrons en fin de compte une infinité de points unis de ω_1, mais il ne sera nullement prouvé que tout point de r est uni pour cette projectivité.

En s'appuyant sur le neuvième postulat, et sur le premier des théorèmes que nous en avons déduit, on arrive à la démonstration du théorème fondamental.

Supposons que ω_1 ne soit pas l'identité. C'est une correspondance ordonnée qui fait correspondre au segment LMN le segment LMN, c'est donc une correspondance ordonnée directe. Envisageons celui des segments LM qui ne contient pas N. A un point P de ce segment correspond un point P_1 du même segment et lorsque P va de L à M, P_1 va de L à M également. Il existe donc un point uni X tel qu'entre L et X, il n'existe aucun point uni pour ω_1 (le point X peut d'ailleurs coïncider avec M). Si P est un point du segment LX, les points L, P, P_1, X se succèdent dans le sens de parcours LMN. Envisageons maintenant la correspondance inverse de ω_1, qui fait correspondre P à P_1. Il existe de même un point uni Y (qui peut coïncider avec L) tel que si P_1 est un point du segment MY, les points M,P_1, P,Y se succèdent dans le sens NML.

Le segment XY ne contient par conséquent aucun point uni de ω_1. Mais cela est absurde, car le conjugué harmonique de N par rapport à XY, qui est intérieur à ce segment, est nécessairement uni pour ω_1. On en conclut que tous les points du segment LM ne contenant pas N sont unis pour ω_1. Il en est évidemment de même, pour la même raison, de tous les points des segments MN, NL et par suite ω_1 est l'identité.

Le théorème fondamental de la géométrie projective est donc démontré.

60. Le principe de dualité. — Les postulats de la géométrie projective énoncés plus haut permettent d'introduire le principe de dualité, *a priori*, sous sa forme la plus générale.

Dans les énoncés des postulats en question, échangeons les mots « point » et « plan ».

Les trois premiers postulats sont remplacés par les trois suivants, et inversement.

Quant aux postulats VII, VIII et IX, ils concernent les formes de première espèce. Or, l'échange des mots « point » et « plan » fait correspondre la ponctuelle au faisceau de plans et inversement, le faisceau de rayons au faisceau de rayons. Par conséquent, cet échange ne modifie pas les postulats.

Les neuf postulats de la géométrie projective étant conservés, nous pouvons énoncer le principe de dualité.

A chaque proposition de géométrie projective en correspond une autre dont l'énoncé se déduit de l'énoncé de la première en échangeant les mots « point » et « plan » et en laissant inaltéré le mot « droite ».

Mais ce principe a actuellement une portée restreinte, en ce sens que nous ne pouvons l'appliquer qu'aux propositions établies en nous basant sur les neuf postulats. L'étude ultérieure des reciprocités permet d'ailleurs d'élargir son champ d'application et, comme nous l'indiquerons au chapitre suivant, de préciser les limites de ce champ.

Le principe de dualité dans le plan peut se déduire du principe de l'espace.

Par dualité, à un plan considéré comme ensemble de ses points et de ses droites, correspond une gerbe. Deux figures ou deux propositions qui se correspondent par dualité sont dites corrélatives et le plan est donc corrélatif de la gerbe. Considérons un plan σ et une gerbe de sommet S. Une figure F du plan σ, formée de points et de droites, a pour corrélative une figure F_1 de la gerbe de sommet S, formée de plans et de droites. Coupons la gerbe par un plan σ' ne passant pas par S. La figure F_1 aura comme section une figure F' formée de droites et de points. Cela étant, une proposition projective relative à la figure F a pour corrélative une proposition relative à la figure F_1. A cette proposition correspond une proposition projective relative à la figure F'. L'énoncé de cette dernière proposition s'obtiendra évidemment en remplaçant, dans l'énoncé de la proposition relative à la figure F, les mots « point » et « droite » respectivement par les mots « droite » et « point ». On obtient ainsi le principe de dualité dans le plan.

On pourrait évidemment obtenir de même un principe de dualité dans la gerbe.

Chapitre V

LA GÉOMÉTRIE ET LA THÉORIE DES GROUPES

61. La géométrie métrique et les mouvements. — En géométrie élémentaire, pour démontrer que deux figures sont égales, on montre que l'on peut les superposer. Ainsi, pour démontrer que deux triangles ABC, A'B'C' sont égaux, on montre que l'on peut placer respectivement A', B', C' sur A, B, C, de manière que les triangles coïncident.

Limitons-nous à la géométrie plane et voyons comment, sans sortir du plan, nous pouvons amener les deux triangles ABC, A'B'C' à coïncider. Laissons le triangle ABC fixe et soumettons le triangle A'B'C' aux mouvements suivants :

1. Amenons A' en A en faisant glisser A'B'C' dans le plan, ses côtés restant parallèles à eux-mêmes. Le triangle A'B'C' occupera à la fin du mouvement une position AB"C" telle que AB" soit parallèle à A'B', AC" à A'C', B"C" à B'C'.

2. Faisons tourner AB"C" autour de A de manière à amener B" en B. A la fin du mouvement, le point C" coïncidera avec C ou sera le symétrique C''' de C par rapport à AB.

3. Dans cette dernière éventualité, prenons le symétrique de ABC''' par rapport à la droite AB.

Pour amener A'B'C' à coïncider avec ABC, nous avons donc effectué une translation, une rotation autour d'un point et enfin, éventuellement, une symétrie par rapport à une droite. Il est d'ailleurs bien évident que l'ordre dans lequel on effectue ces mouvements est indifférent.

On peut plus généralement constater que deux figures d'un plan sont égales lorsque l'on peut, par des translations, des rotations et des symétries par rapport à une droite, les amener à coïncider.

On en conclut que la géométrie métrique du plan est l'ensemble des propriétés des figures qui ne sont pas altérées lorsque l'on soumet ces dernières à des translations, des rotations et à des symétries par rapport à une droite.

Ce qui vient d'être fait pour le plan s'étend sans difficulté à l'espace et on peut dire que la géométrie métrique de l'espace est l'étude des propriétés des figures qui ne sont pas altérées lorsque l'on soumet ces dernières à des translations, à des rotations autour d'un axe et à des symétries par rapport à un plan.

On remarquera que, dans l'espace, une symétrie par rapport à une droite est une rotation autour de cette droite, d'amplitude égale à deux droits.

Si nous examinons ces énoncés, nous voyons que :

1. Nous considérons un ensemble d'opérations : les translations, les rotations et les symétries par rapport à une droite ou à un plan.

2. Nous pouvons définir l'égalité de deux figures par la condition que l'on puisse passer de l'une à l'autre au moyen d'opérations de l'ensemble.

3. Nous considérons les propriétés des figures qui ne sont pas altérées par des opérations de l'ensemble ou, en d'autres termes, qui sont invariantes pour ces opérations.

Nous allons voir que l'on peut arriver à des conclusions analogues pour toutes les géométries que nous avons considérées jusqu'à présent. Mais l'ensemble d'opérations considérées est soumis à certaines conditions : il constitue ce que l'on appelle un groupe d'opérations et nous commencerons par définir cette notion.

62. La notion de groupe. — C'est un jeune géomètre français, Évariste Galois (1811-1832), qui a introduit en mathématiques, à propos de la résolution des équations algébriques, la notion de groupe d'opérations. Cette notion a peu à peu envahi toutes les branches des mathématiques et l'on s'efforce actuellement de l'introduire en physique.

Commençons par indiquer, sur un exemple simple, ce que l'on appelle groupe de substitutions.

Considérons quatre lettres *a*, *b*, *c*, *d* et écrivons-les dans un autre ordre, par exemple dans l'ordre *badc*. Appelons substitution l'opération qui fait passer de *abcd* à *badc*, opération que nous représenterons par

$$S = \begin{pmatrix} b\,a\,d\,c \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix}.$$

Chaque fois que nous écrirons les lettres *abcd* dans un autre ordre, nous aurons une substitution. Considérons maintenant deux substitutions

$$S = \begin{pmatrix} b\,a\,d\,c \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix}, \qquad S' = \begin{pmatrix} c\,b\,d\,a \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix}.$$

La première fait passer de *abcd* à *badc* et la seconde de *abcd* à *cbda*, par conséquent de *badc* à *bcad*. Si nous effectuons successivement les substitutions S, S′, nous passons donc de *abcd* à *bcad*, c'est-à-dire que nous obtenons une nouvelle substitution

$$S'' = \begin{pmatrix} b\,c\,a\,d \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix}.$$

Nous conviendrons de dire que S″ est le produit de S par S′ et nous écrirons

$$S'' = S \, . \, S'.$$

La substitution S′ fait passer de *abcd* à *cbda*, donc de *dbac* à *abcd*. Nous conviendrons d'appeler substitution inverse de S′ l'opération faisant passer de *abcd* à *dbac*, opération qui est encore une substitution. Nous l'écrirons

$$(S')^{-1} = \begin{pmatrix} d\,b\,a\,c \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix}.$$

Nous avons d'ailleurs

$$S' \, . \, (S')^{-1} = \begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ a\,b\,c\,d \end{pmatrix},$$

substitution que nous appellerons substitution identique.

L'ensemble des substitutions sur quatre lettres que nous venons de considérer possède donc les propriétés suivantes :

1. Le produit de deux substitutions de l'ensemble est encore une substitution de l'ensemble.
2. Les inverses des substitutions de l'ensemble sont encore des substitutions de l'ensemble.

De ces propriétés résulte que l'ensemble contient la substitution identique.

Considérons maintenant un second exemple d'une nature différente ; celui des translations d'un plan. Soumettons une figure A de ce plan à deux translations successives T, T′. La première porte A en A′ et la seconde porte cette figure de A′ en A″. Il est clair qu'il existe une translation T″ permettant de passer directement de A en A″ ; nous dirons que cette translation est le produit de T par T′ et nous écrirons T″ = T . T′. D'autre part, si nous passons de A en A′ par une translation, inversement, nous passerons de A′ en A par une translation qui est l'inverse de la précédente.

Nous voyons donc que l'ensemble des translations du plan possède deux propriétés :

1. Le produit de deux translations est une translation ;

2. L'inverse d'une translation est une translation.

Il en résulte d'ailleurs que l'ensemble contient la translation identique, qui consiste à laisser une figure immobile.

Les deux ensembles d'opérations que nous venons de considérer sont d'une nature bien différente : le premier est formé d'un nombre fini de substitutions portant sur quatre lettres, précisément de vingt-quatre substitutions. Le second comprend une infinité de translations. Mais ces deux ensembles ont des propriétés communes, ce sont celles qui vont nous servir pour définir les groupes d'opérations.

Considérons un ensemble E d'opérations, en nombre fini ou infini. Convenons d'appeler produit de deux opérations de l'ensemble le résultat obtenu en effectuant successivement ces opérations dans un certain ordre.

L'ensemble E *constitue un groupe si* :

1. *Le produit de deux opérations de l'ensemble est encore une opération de l'ensemble ;*

2. *L'inverse d'une opération de l'ensemble est encore une opération de l'ensemble.*

Si l'ensemble E constitue un groupe, il contient le produit d'une de ses opérations par son inverse, c'est-à-dire l'opération identique.

L'ensemble des substitutions sur quatre lettres, celui des translations du plan, sont des groupes.

63. Le groupe principal de la géométrie métrique. — Revenons à la géométrie métrique et considérons l'ensemble des translations, des rotations et des symétries (par rapport à un plan ou à une droite) de l'espace. Cet ensemble constitue évidemment un groupe, car le produit de deux mouvements est encore un mouvement et l'inverse d'un mouvement est un mouvement. Le mouvement identique consiste évidemment à laisser une figure immobile.

Ce groupe s'appelle *groupe* G_m *des mouvements de l'espace.*

Si nous reprenons les conclusions auxquelles nous étions arrivés tantôt, nous pouvons énoncer le principe suivant :

La géométrie métrique consiste dans l'étude des propriétés des figures qui sont invariantes pour les opérations du groupe G_m.

Le groupe G_m s'appelle le *groupe principal de la géométrie métrique.*

64. Le groupe principal de la géométrie euclidienne. — La géométrie euclidienne ne se borne pas à l'étude des figures égales par superposition, elle étudie également les figures semblables. Son groupe principal sera donc plus étendu que le groupe des mouvements en ce sens qu'il contiendra d'autres opérations.

Pour nous en rendre compte, considérons deux triangles semblables ABC, A′B′C′, les angles en A, B, C étant respectivement égaux aux angles A′, B′, C′. Par des mouvements, nous pouvons amener le triangle A′B′C′ en une nouvelle position AB″C″ telle que A′ soit venu en A, B′ en un point B″ de la droite AB, C′ en un point C″ de la droite AC. Les triangles ABC et AB″C″ sont semblables et les côtés BC et B″C″ sont parallèles. Nous avons

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC}.$$

Si nous appelons k la valeur commune de ces rapports, nous voyons que l'on peut passer du triangle AB″C″ au triangle ABC en faisant correspondre à tout point M″ du plan un point M situé sur la droite AM″ et tel que

$$AM'' = k \,.\, AM.$$

Cette opération est appelée *homothétie* de centre A. Remarquons que la définition que nous venons de donner s'applique aussi bien à l'espace qu'au plan.

Il est bien évident que l'ensemble des mouvements et des homothéties de l'espace constitue un groupe appelé *groupe* G_s *des similitudes de l'espace.*

La géométrie euclidienne a comme groupe principal le groupe des similitudes G_s *de l'espace. Elle consiste dans l'étude des propriétés des figures qui sont invariantes par rapport aux transformations de ce groupe.*

Remarquons que toutes les opérations du groupe G_m des mouvements appartiennent au groupe G_s ; on dit que G_m est un *sous-groupe* du groupe G_s.

65. Le groupe des mouvements et la géométrie analytique. — Comment vont se traduire les mouvements en géométrie analytique et comment obtiendrons-nous la représentation analytique du groupe G_m ?

Considérons un trièdre trirectangle $Oxyz$. Des translations, des rotations et des symétries par rapport à des plans font correspondre à ce trièdre un nouveau trièdre trirectangle $O'x'y'z'$.

Pour définir la position de ce nouveau trièdre par rapport à l'ancien, il faut connaître les coordonnées x_0, y_0, z_0 du point O′ par rapport à $Oxyz$ et les cosinus directeurs de chacun des axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, c'est-à-dire les cosinus des angles faits par ces axes respectivement avec Ox, Oy, Oz. Désignons par l_1, m_1, n_1 les cosinus directeurs de $O'x'$, par l_2, m_2, n_2, ceux de $O'y'$, par l_3, m_3, n_3 ceux de

$O'z'$. Ces quantités ne sont pas indépendantes, elles sont liées par les relations

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1, \quad l_3^2 + m_3^2 + n^2 = 1, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{c} l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0, \quad l_3 l_1 + m_3 m_1 + n_3 n_1 = 0, \\ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

les trois dernières exprimant que les axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ sont perpendiculaires deux à deux.

Les coordonnées x, y, z d'un point M par rapport à $Oxyz$ et ses coordonnées x', y', z' par rapport à $O'x'y'z'$ sont liées par les relations

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + l_1 x' + l_2 y' + l_3 z', \\ y = y_0 + m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \\ z = z_0 + n_1 x' + n_2 y' + n_3 z', \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

qui sont les formules de transformation de coordonnées (voir par exemple les *Éléments de Géométrie analytique* de M. A. Tresse, Collection Armand Colin, n° 44, 1925). Observons que l'on a

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Considérons deux points M_1, M_2 dont les coordonnées par rapport à $Oxyz$ sont respectivement x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2. Le carré de la distance de ces deux points est donné par la formule

$$\overline{M_1 M_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Si x'_1, y'_1, z'_1 et x'_2, y'_2, z'_2 sont les coordonnées des points M_1, M_2 par rapport au trièdre $O'x'y'z'$, nous trouvons, par un calcul très simple,

$$(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2 = \overline{M_1 M_2}^2.$$

Considérons d'autre part deux plans

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Le cosinus de l'angle ω de ces plans est donné par

$$\cos\omega = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}}.$$

Substituons, dans les équations des plans, les seconds membres des équations (I) à x, y, z. Nous obtiendrons

$$A_1'x' + B_1'y' + C_1'z' + D_1' = 0, \quad A_2'x' + B_2'y' + C_2'z' + D_2' = 0,$$

équations de ces plans par rapport à $O'x'y'z'$. Un calcul simple donne

$$\frac{A_1'A_2' + B_1'B_2' + C_1'C_2'}{\sqrt{(A_1'^2 + B_1'^2 + C_1'^2)(A_2'^2 + B_2'^2 + C_2'^2)}} = \cos\omega.$$

Nous voyons donc que les substitutions (I) conservent les distances et les angles ; en d'autres termes, les distances et les angles sont des invariants pour ces substitutions.

Il en résulte évidemment que les propriétés métriques des figures sont conservées par les substitutions (I). Mais pour achever de montrer que la géométrie métrique est l'ensemble des propriétés invariantes pour les substitutions (I), il faut encore prouver que l'on peut passer d'un trièdre trirectangle à un autre par des mouvements.

Soient donc $Oxyz$, $O'x'y'z'$ deux trièdres trirectangles quelconques. Une translation amènera le trièdre $Oxyz$ en un trièdre $O'XYZ$ de même origine que $O'x'y'z'$. Soit alors d l'intersection des plans $O'XY$ et $O'x'y'$. Faisons tourner $O'XYZ$ autour de $O'Z$ jusqu'au moment où $O'X$ sera situé sur d ; le trièdre $O'XYZ$ sera devenu un trièdre $O'X_1Y_1Z$. Faisons tourner ce nouveau trièdre autour de $O'X_1$, jusqu'au moment où $O'Z$ sera venu coïncider avec $O'z'$; le trièdre $O'X_1Y_1Z$ occupera une nouvelle position $O'X_1Y_2z'$. Faisons enfin tourner ce trièdre autour de $O'z'$ jusqu'au moment où $O'X_1$ coïncide avec $O'x'$ (en position et en sens). Soit $O'x'Y_3z'$ la position finale du trièdre. Les axes $O'y'$ et $O'Y_3$ sont situés sur la même droite. S'ils sont dirigés dans le même sens, nous avons amené $Oxyz$ à coïncider avec $O'x'y'z'$ par une translation et trois rotations. Si les axes $O'y'$ et $O'Y_3$ ne sont pas dirigés dans le même sens, une symétrie par rapport au plan $O'x'z'$ amènera $O'x'Y_3z'$ en coïncidence avec $O'x'y'z'$. De toutes manières, nous voyons que l'on peut toujours passer d'un trièdre trirectangle à un autre au moyen d'opérations du groupe G_m.

Revenons aux transformations (I). Il est facile de voir, par des calculs simples, que le produit de deux transformations du type (I) est encore une transformation de ce type, les équations (1) et (2) étant respectées. Et d'ailleurs, c'est géométriquement évident. De plus, l'inverse de (I) est encore du même type ; le déterminant des coefficients de x', y', z' étant différent de zéro, les équations (I) peuvent être résolues par rapport à ces quantités. Il en résulte que l'ensemble des transformations (I), où les coefficients l, m, n sont liés par les relations (1) et (2), forme un groupe.

De plus, si nous interprétons les x, y, z et les x', y', z' comme les coordonnées de deux points distincts par rapport au même trièdre $Oxyz$, les équations (I) représentent une opération du groupe G_m.

Il en résulte que :

Le groupe des transformations (I) *coïncide avec le groupe* G_m *des mouvements de l'espace.*

La géométrie métrique est l'ensemble des propriétés invariantes pour les transformations (I).

66. Expression analytique du groupe des similitudes. — Le groupe G_s des similitudes naîtra en adjoignant au groupe des transformations (I) les homothéties de l'espace.

Considérons une homothétie de centre O. A un point M′ correspond un point M″ tel que

$$OM'' = k \cdot OM',$$

k étant une constante. Soient x', y', z' et x'', y'', z'' les coordonnées des points M′, M″ par rapport à un trièdre trirectangle d'origine O. Nous avons

$$x'' = kx', \qquad y'' = ky', \qquad z'' = kz'.$$

Combinons ces formules avec les équations (J). Il vient

$$x = x_0 + \frac{1}{k}(l_1x'' + l_2y'' + l_3z''), \ldots,$$

relations que nous écrirons sous la forme

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + a_1x'' + a_2y'' + a_3z'', \\ y &= y_0 + b_1x'' + b_2y'' + b_3z'', \\ z &= z_0 + c_1x'' + c_2y'' + c_3z''. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Les quantités a, b, c sont cette fois liées par les relations

$$\left.\begin{gathered} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2, \\ a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0, \quad a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 = 0, \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0. \end{gathered}\right\} \qquad (3)$$

De plus, le déterminant des coefficients de x'', y'', z'' n'est pas nul.

Le produit de deux transformations du type (II) est encore une transformation de ce type et l'inverse d'une transformation (II) également. Les transformations (II) forment donc un groupe qui n'est autre que le groupe G_4 des similitudes.

La géométrie euclidienne est l'ensemble des propriétés *invariantes pour les transformations* (II), *les coefficients a, b, c étant liés par les relations* (3);

Il est aisé de voir que les distances ne sont plus conservées, mais que par contre les angles de deux plans le sont encore.

67. L'espace arguésien. — La géométrie analytique établit une correspondance biunivoque entre les points de l'espace et les groupes de trois nombres x, y, z. On peut donc dire que l'espace de la géométrie analytique, que l'on peut appeler l'*espace cartésien*, est l'ensemble des groupes de trois nombres x, y, z, ces nombres étant toujours supposés finis, de sorte que la distance entre deux points est toujours finie. En d'autres termes, l'espace cartésien exclut les points à l'infini.

L'adjonction des points à l'infini à l'espace cartésien va nous donner un nouvel espace que nous appellerons *espace arguésien*, Desargues ayant le premier introduit la notion de points à l'infini, sous une forme d'ailleurs bien différente.

Considérons deux points A, B ayant respectivement pour coordonnées x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 par rapport à un trièdre $Oxyz$. Un point M de la droite AB est déterminé par son rapport de section

$$k = \frac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{MB}}}$$

et les coordonnées du point M sont

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}, \quad z = \frac{z_1 + kz_2}{1 + k}. \quad (1)$$

Les calculs conduisant à ces formules supposent implicitement que k est différent de -1. Si l'on avait $k = -1$, ces formules perdraient tout sens. Observons cependant que si k tend vers -1, les quantités x, y, z données par les équations (1) croissent au delà de toute limite et que, par conséquent, ce que l'on appelle par convention point à l'infini de la droite AB doit correspondre à $k = -1$.

Pour obtenir une représentation analytique des points à l'infini, nous introduirons les coordonnées cartésiennes homogènes.

Les coordonnées cartésiennes x, y, z d'un point étant données, introduisons quatre nombres X, Y, Z, U, dont le dernier n'est pas nul, par les relations

$$X = xU, \qquad Y = yU, \qquad Z = zU. \tag{2}$$

Ces quatre nombres X, Y, Z, U ne sont définis qu'à un facteur de proportionnalité près, c'est-à-dire que si X, Y, Z, U satisfont aux équations (2), il en est de même de ρX, ρY, ρZ, ρU, ρ étant un facteur différent de zéro.

Inversement, si l'on se donne quatre nombres X, Y, Z, U, dont le dernier n'est pas nul, les relations (2) permettent d'en déduire les coordonnées x, y, z d'un point. Les quantités X, Y, Z, U sont appelées *coordonnées cartésiennes homogènes* de ce point.

Cela étant, reprenons la droite AB et soient X_1, Y_1, Z_1, U_1 et X_2, Y_2, Z_2, U_2 les coordonnées cartésiennes homogènes des points A, B. Les équations (1) montrent que les coordonnées cartésiennes homogènes du point M sont

$$X_1 + hX_2, \quad Y_1 + hY_2, \quad Z_1 + hZ_2, \quad U_1 + hU_2, \tag{3}$$

où l'on a posé

$$h = k\frac{U_1}{U_2}.$$

Lorsque k tend vers -1, la dernière coordonnée $U_1 + hU_2$ du point M tend vers zéro. On conviendra donc d'appeler point à l'infini de la droite AB le point dont la quatrième des coordonnées cartésiennes homogènes est nulle.

Observons que, les coordonnées cartésiennes homogènes étant définies à un facteur de proportionnalité près, les coordonnées du point à l'infini de la droite AB peuvent s'écrire

$$x_1 - x_2, \qquad y_1 - y_2, \qquad z_1 - z_2, \ 0.$$

Les points A, B étant distincts, l'un au moins des trois premiers nombres n'est pas nul et par suite les coordonnées cartésiennes homogènes d'un point ne peuvent jamais être toutes nulles.

Les points à l'infini de l'espace sont caractérisés par l'équation $U = 0$. Or, l'équation d'un plan, en coordonnées homogènes, s'écrit

$$AX + BY + CZ + DU = 0, \tag{4}$$

c'est-à-dire est une équation linéaire et homogène en X, Y, Z, U. Il est donc naturel de dire que l'équation $U = 0$ représente un plan, c'est-à-dire que l'ensemble des points à l'infini de l'espace est un plan.

L'espace arguésien est l'ensemble des groupes de quatre nombres X, Y, Z, U *dont l'un au moins n'est pas nul. Un tel groupe de nombres est appelé point et deux groupes formés de nombres proportionnels représentent le même point. Les groupes de nombres dont le dernier est nul sont appelés par convention points à l'infini.*

Tout plan parallèle au plan (4) est représenté par une équation

$$AX + BY + CZ + D'U = 0.$$

Ce plan rencontre le plan à l'infini suivant la même droite

$$AX + BY + CZ = 0, \qquad U = 0$$

que le plan (4). Deux plans parallèles coupent donc le plan à l'infini suivant la même droite. La réciproque est évidente.

On établit de même sans difficulté que deux droites parallèles ont même point à l'infini et réciproquement; que le point à l'infini d'une droite parallèle à un plan appartient à la droite à l'infini de ce plan, et réciproquement.

Dans l'espace arguésien, la notion de parallélisme est remplacée par la notion d'incidence avec le plan à l'infini.

68. Éléments imaginaires à l'infini. — Nous avons déjà remarqué que, pour donner plus d'unité à la géométrie des courbes et surfaces algébriques, on avait été conduit à introduire en géométrie analytique les points imaginaires, points fictifs, ensembles de trois nombres x, y, z dont l'un au moins est imaginaire. Cette notion se transporte naturellement de l'espace cartésien à l'espace arguésien, un point imaginaire de ce dernier ayant une au moins de ses coordonnées imaginaire.

Cela étant, rapportons l'espace à un trièdre trirectangle $Oxyz$. L'équation d'une sphère de centre x_0, y_0, z_0 et de rayon R est

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$$

ou, en coordonnées homogènes,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2U(x_0X + y_0Y + z_0Z) + U^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2) = 0.$$

L'intersection de la sphère avec le plan de l'infini a pour équations

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0, \qquad U = 0.$$

C'est une courbe dont tous les points sont imaginaires, car les coordonnées de ces points ne peuvent être toutes nulles et d'autre part on ne peut satisfaire à la première des équations précédentes par des nombres réels non tous nuls. Cette courbe est appelée *cercle imaginaire à l'infini* ou *cercle absolu*. Ses équations étant indépendantes des quantités x_0, y_0, z_0, R, elle appartient à toutes les sphères de l'espace.

Réciproquement, une surface du second ordre de l'espace, c'est-à-dire une surface représentée par un polynome du second degré, entier, rationnel et homogène en X, Y, Z, U, égalé à zéro, passant par le cercle absolu, est nécessairement une sphère, comme on le voit sans peine.

La même question, traitée dans le plan, conduit à la notion de points cycliques. Un cercle du plan $Z = 0$ a pour équation homogène

$$X^2 + Y^2 - 2U(x_0X + y_0Y) + U^2(x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0.$$

Il coupe le plan de l'infini aux points

$$X^2 + Y^2 = 0, \qquad U = 0,$$

c'est-à-dire aux points de coordonnées $(i, 1, 0)$, $(i, -1, 0)$. Ce sont les *points cycliques* du plan $Z = 0$.

D'une manière générale, un plan α coupe le cercle imaginaire à l'infini en deux points imaginaires qui sont les points cycliques de ce plan. Tout cercle du plan α passe par les points cycliques de ce plan et réciproquement, toute conique du plan α passant par les points cycliques est un cercle.

Les droites de l'espace s'appuyant sur le cercle absolu sont imaginaires ; elles portent le nom de *droites isotropes*.

69. La géométrie affine. — Reprenons les équations (II) d'une similitude et écrivons-les en coordonnées homogènes,

$$\left.\begin{aligned} \rho X &= a_1X' + a_2Y' + a_3Z' + x_0U', \\ \rho Y &= b_1X' + b_2Y' + b_3Z' + y_0U', \\ \rho Z &= c_1X' + c_2Y' + c_3Z' + z_0U', \\ \rho U &= U', \end{aligned}\right\} \qquad (\text{II}')$$

ρ étant un facteur de proportionnalité.

Ces formules montrent que le plan de l'infini est indépendant du choix du trièdre de coordonnées choisi.

Les équations (II′) rentrent dans un type plus général que nous écrirons sous la forme

$$\left.\begin{aligned}\rho X &= a_1X' + a_2Y' + a_3Z' + a_4U',\\ \rho Y &= b_1X' + b_2Y' + b_3Z' + b_4U',\\ \rho Z &= c_1X' + c_2Y' + c_3Z' + c_4U',\\ \rho U &= U',\end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

sous la seule condition que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul.

A un point (X′, Y′, Z′, U′) correspond un seul point (X, Y, Z, U) et réciproquement, puisque les équations (III) peuvent être résolues par rapport aux quantités X′, Y′, Z′, U′, à un point (X, Y, Z, U) correspond un seul point (X′, Y′, Z′, U′).

Un plan étant représenté en coordonnées cartésiennes homogènes par une équation linéaire et homogène en X, Y, Z, U, les équations (III) font correspondre les plans aux plans et par conséquent les droites aux droites. En particulier le plan de l'infini $U = 0$ est son propre homologue ; on dit qu'il est uni pour la transformation (III).

Une transformation de l'espace arguésien de la forme (III) est appelée *affinité.* Il est bien évident que les affinités forment un groupe G_a.

On appelle géométrie affine la géométrie qui a pour groupe principal le groupe G_a. *C'est l'ensemble des propriétés des figures géométriques de l'espace arguésien qui sont invariantes pour les affinités.*

Voyons quelles sont les premières propriétés de la géométrie affine.

Considérons deux droites parallèles a, b ; elles se rencontrent en un point P du plan de l'infini. Soient a', b' les droites qu'une affinité fait correspondre à a, b ; P′ le point homologue de P. Les droites a', b' se rencontrent en P′. Puisque P appartient au plan de l'infini $U = 0$, le point P′ appartient également au plan de l'infini $U' = U = 0$. Par conséquent, les droites a', b' sont parallèles.

Dans une affinité, à deux droites parallèles correspondent donc deux droites parallèles. De même, à deux plans parallèles correspondent deux plans parallèles. Mais si le parallélisme est conservé, il n'en est cependant pas de même des angles ; deux triangles homologues, par exemple, ne sont pas en général semblables.

Considérons deux droites a, a' homologues dans une affinité et soient A, B, C, D, ... des points de a, A′, B′, C′, D′, ... leurs points homologues sur a'. Menons par A, A′ un plan quelconque α ne contenant ni a, ni a'. Les plans β, γ, ... parallèles à α menés respectivement par B, C, D, ... passent par B′, C′, D′, ... D'après les propriétés des segments découpés sur deux droites par des plans parallèles, on a

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \dots.$$

De ces relations, on conclut en particulier que les rapports anharmoniques des quaternes ABCD, A′B′C′D′ sont égaux,

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D').$$

Si S est un point n'appartenant pas à a, et S′ son homologue, aux droites SA, SB, SC, SD correspondent respectivement les droites S′A′, S′B′, S′C′, S′D′. Par conséquent, le rapport anharmonique de quatre droites d'un faisceau est égal à celui des quatre droites homologues.

De même, le rapport anharmonique de quatre plans d'un faisceau est égal à celui des quatre plans homologues.

Une affinité conserve le rapport anharmonique de quatre éléments d'une forme de première espèce.

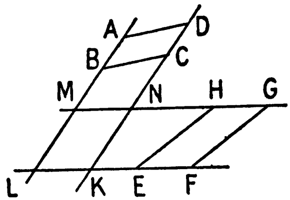

FIGURE 23.

Ou encore, *deux formes de première espèce homologues dans une affinité, sont projectives.*

La propriété qui nous a conduit à ces conclusions va nous donner une autre propriété importante des affinités.

Considérons, dans un plan ϖ, deux parallélogrammes ABCD, EFGH (fig. 23). Prolongeons les côtés AB, CD, EF, GH, de manière à former le parallélogramme KLMN. Les deux parallélogrammes ABCD, KLMN ayant même hauteur sont entre eux comme leurs bases et on a

$$\frac{\text{ABCD}}{\text{KLMN}} = \frac{\text{AB}}{\text{LM}}.$$

On a de même

$$\frac{\text{EFGH}}{\text{KLMN}} = \frac{\text{EF}}{\text{LK}}.$$

Soit ϖ' le plan qu'une affinité fait correspondre à ϖ. Soient A', B', ..., N' les points qui correspondent à A, B, ..., N. Les quadrilatères A'B'C'D', E'F'G'H', K'L'M'N' sont des parallélogrammes présentant la même disposition que les parallélogrammes correspondants du plan ϖ. On a donc

$$\frac{\text{A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'}{\text{K}'\text{L}'\text{M}'\text{N}'} = \frac{\text{A}'\text{B}'}{\text{L}'\text{M}'}, \qquad \frac{\text{E}'\text{F}'\text{G}'\text{H}'}{\text{K}'\text{L}'\text{M}'\text{N}'} = \frac{\text{E}'\text{F}'}{\text{L}'\text{K}'}.$$

Mais sur les droites homologues AB et A'B', EF et E'F', on a

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{LM}{L'M'}, \qquad \frac{EF}{E'F'} = \frac{LK}{L'K'}$$

et par conséquent

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'} = \frac{EFGH}{E'F'G'H'}.$$

Dans deux plans homologues, les aires de deux parallélogrammes homologues sont dans un rapport constant. On aura de même, en considérant les triangles ABC, A'B'C',

Dans une affinité, les aires de deux triangles homologues dans des plans homologues, sont dans un rapport constant.

Mais la valeur de ce rapport peut évidemment changer lorsque le plan ϖ varie.

On démontre de même que, *dans une affinité, les volumes de deux tétraèdres homologues sont dans un rapport constant, appelé rapport de l'affinité.*

70. Relations entre les affinités, les similitudes et les mouvements. — Nous avons introduit les relations (III) en partant des équations d'une similitude écrites en coordonnées homogènes. Les similitudes et par suite les mouvements sont donc des cas particuliers des affinités. Nous allons examiner dans quelles conditions.

Le trièdre de référence étant supposé rectangulaire, remarquons que l'affinité (III) fait correspondre au cercle absolu

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0, \qquad U = 0$$

une conique du plan de l'infini en général distincte de ce cercle. Imposons à l'affinité (III) de transformer le cercle imaginaire à l'infini en lui-même. Nous devons avoir

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \lambda(X'^2 + Y'^2 + Z'^2),$$

λ étant un facteur dépendant des coefficients des équations (III). Cela exige que l'on ait

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = \lambda\rho^2,$$
$$a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

L'affinité (III) devient donc une similitude.

Une similitude est une affinité conservant le cercle absolu.

On en déduit que le groupe des similitudes G_7 est un sous-groupe du groupe des affinités G_{12}.

Dans les équations (III), retournons aux coordonnées non homogènes en divisant les deux membres des trois premières équations par $\rho U = U'$; elles prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1x' + a_2y' + a_3z' + a_4, \\ y &= b_1x' + b_2y' + b_3z' + b_4, \\ z &= c_1x' + c_2y' + c_3z' + c_4. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III')}$$

Imposons à cette affinité de conserver la distance de deux points. On est conduit, par identification, à la nouvelle condition

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1,$$

jointe aux trois dernières conditions trouvées plus haut.

L'affinité devient un mouvement (similitude particulière).

Une affinité conservant les distances est un mouvement.

71. L'interprétation des angles de Laguerre. — On peut montrer qu'une similitude est une affinité conservant les angles en utilisant une élégante interprétation de la mesure des angles due à Laguerre (1834-1886), qui l'a obtenue alors qu'il était encore sur les bancs du Lycée.

Considérons dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy, deux droites a, b et appelons V l'angle qu'elles forment. Ce sera aussi l'angle des deux parallèles

$$y = mx, \qquad y = m'x \tag{1}$$

menées à ces droites par l'origine O. On sait que l'on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{m - m'}{1 + mm'}.$$

Par O passent deux droites isotropes

$$y = ix, \qquad y = -ix,$$

c'est-à-dire deux droites passant par les points cycliques.

Le rapport anharmonique α des deux droites isotropes et des deux droites (1) est égal au rapport anharmonique des quatre quantités i, $-i$, m, m', c'est-à-dire à

$$\alpha = (i, -i, m, m') = \frac{i - m}{i - m'} : \frac{-i - m}{-i - m'}$$
$$= \frac{1 + mm' + i(m - m')}{1 + mm' - i(m - m')}.$$

On a donc

$$\alpha = \frac{\cos V + i \sin V}{\cos V - i \sin V}.$$

Mais d'autre part[1], on a

$$e^{iV} = \cos V + i \sin V, \qquad e^{-iV} = \cos V - i \sin V,$$

donc

$$\alpha = \frac{e^{iV}}{e^{-iV}} = e^{2iV}.$$

On en conclut, en prenant les logarithmes népériens des deux membres

$$V = \frac{1}{2i} \log_e \alpha.$$

C'est la formule de Laguerre donnant la mesure de l'angle de deux droites.

1. Voir par exemple Th. Leconte et R. Deltheil, *Éléments de calcul différentiel et de calcul intégral*, Tome II, p. 202 (Collection Armand Colin, 1932).

Considérons maintenant une affinité T et soient a, b deux droites se coupant en O, a', b' leurs homologues, O′ leur point d'intersection. Par le point O passent deux droites isotropes t_1, t_2, droites s'appuyant sur le cercle absolu aux points où celui-ci est coupé par le plan des droites a, b. Par le point O′ passent de même deux droites isotropes t'_1, t'_2 situées dans le plan de a', b'.

Si l'affinité T conserve les angles, on doit avoir

$$(a, b, t_1, t_2) = (a', b', t'_1, t'_2).$$

Les droites t'_1, t'_2 doivent donc correspondre, dans un certain ordre, aux droites t_1, t_2. Comme cette propriété doit être vérifiée quelles que soient les droites a, b, on en conclut que T doit transformer le cercle absolu en lui-même et est par suite une similitude.

Une affinité conservant la mesure des angles est une similitude.

72. L'espace projectif. — Reprenons l'espace arguésien. Dans cet espace, le plan de l'infini U = 0 joue un rôle privilégié ; nous avons vu qu'il n'en est plus de même dans l'espace projectif. Celui-ci s'introduit analytiquement de la manière suivante :

Définissons quatre nombres x_1, x_2, x_3, x_4 par les équations

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1X + a_2Y + a_3Z + a_4U, \\ x_2 &= b_1X + b_2Y + b_3Z + b_4U, \\ x_3 &= c_1X + c_2Y + c_3Z + c_4U, \\ x_4 &= d_1X + d_2Y + d_3Z + d_4U, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

où nous supposons que le déterminant des coefficients

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

est différent de zéro,

A un point de l'espace arguésien, c'est-à-dire à un système de valeurs non toutes nulles de X, Y, Z, U, correspond un système de valeurs non toutes nulles de x_1, x_2, x_3, x_4. Inversement, à un système de valeurs non toutes nulles de x_1, x_2, x_3, x_4 correspond, puisque Δ n'est pas nul, un système de valeurs non toutes nulles de X, Y, Z, U, et par conséquent un point de l'espace arguésien. Nous pouvons donc prendre comme coordonnées d'un point les quantités x_1, x_2, x_3, x_4 ; on les appelle coordonnées projectives de ce point.

Comme les coordonnées cartésiennes homogènes d'un point ne sont définies qu'à un facteur de proportionnalité près, il en est de même des coordonnées projectives.

De ce qui précède, on conclut que l'espace projectif peut être défini de la manière suivante :

On appelle point l'ensemble de quatre nombres non tous nuls x_1, x_2, x_3, x_4 ; ces nombres sont appelés coordonnées projectives du point ; deux points dont les coordonnées projectives correspondantes sont proportionnelles, sont identiques. L'espace projectif est l'ensemble des points qui viennent d'être définis.

L'espace projectif ne diffère donc de l'espace arguésien que par le fait que l'on ne spécifie pas quel est le plan de l'infini. Précisons ce point.

Au plan de l'infini U = O correspond, par les équations (1), le plan d'équation

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ x_2 & b_1 & b_2 & b_3 \\ x_3 & c_1 & c_2 & c_3 \\ x_4 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour définir les coordonnées projectives x_1, x_2, x_3, x_4, nous pouvons choisir arbitrairement les coefficients des équations (1) sous la seule condition que le déterminant Δ de ces coefficients ne soit pas nul. Il revient au même de dire que, dans l'espace projectif, nous pouvons choisir arbitrairement les coefficients de l'équation du plan de l'infini, c'est-à-dire au fond choisir pour plan de l'infini un plan quelconque.

Il est bien évident qu'un plan quelconque est représenté, en coordonnées projectives, par une équation linéaire et homogène

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0, \qquad (2)$$

et réciproquement, une telle équation représente un plan.

La connaissance des coefficients ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 détermine un plan. Ces quatre nombres ne peuvent être tous nuls et sont d'autre part définis à un facteur de proportionnalité près, car le plan ne change pas si l'on multiplie les deux membres de son équation par une quantité différente de zéro. Les nombres ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 sont appelés coordonnées du plan ou coordonnées tangentielles.

L'ensemble des plans de l'espace peut être considéré comme celui des groupes de quatre nombres non tous nuls ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, deux plans dont les coordonnées sont proportionnelles étant identiques.

Il y a là un parallélisme complet entre l'espace projectif considéré comme lieu de points et le même espace considéré comme lieu de plans. Nous y reviendrons dans un instant à propos du principe de dualité. Pour l'instant, bornons-nous à une remarque.

Si dans l'équation (2), nous considérons ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 comme donnés, cette équation représente un plan. Si au contraire nous considérons x_1, x_2. x_3, x_4 comme donnés, elle représente l'ensemble des plans passant par un point, c'est-à-dire une gerbe de plans.

73. Le groupe principal de la géométrie projective. — Nous avons distingué dans l'espace deux sortes de projectivités : les homographies ou collinéations et les réciprocités ou corrélations.

Une homographie est définie par les conditions de faire correspondre à un point, un point et aux points d'un plan, les points d'un plan.

Une réciprocité est définie par les conditions de faire correspondre à un point, un plan et aux points d'un plan, les plans passant par un point.

Les équations

$$\left.\begin{aligned}
\rho x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,\\
\rho x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,\\
\rho x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,\\
\rho x'_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4,
\end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

où ρ est un facteur de proportionnalité et où le déterminant

$$\Delta = | a_{ik} |$$

des coefficients n'est pas nul, représentent une homographie. En effet à un point x correspond un point x' et réciproquement, car Δ étant différent de zéro, les équations (1) peuvent être résolues par rapport aux x. D'autre part, si les x ou les x' satisfont à l'équation d'un plan, il en est de même des x' ou des x.

On démontre d'ailleurs que toute homographie peut être représentée par des équations de la forme (I).

De même, les équations

$$\left.\begin{aligned}
\rho \xi'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,\\
\rho \xi'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,\\
\rho \xi'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,\\
\rho \xi'_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4,
\end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

où le déterminant des coefficients n'est pas nul, representent une réciprocité. Toute réciprocité peut d'ailleurs être représentée par des équations du type (II).

Il résulte de la définition des homographies et des réciprocités, comme d'ailleurs de la forme des équations (I) et (II), que

Le produit de deux homographies est une homographie.

Le produit d'une homographie par une réciprocité, ou d'une réciprocité par une homographie, est une réciprocité.

Le produit de deux réciprocités est une homographie.

D'autre part, l'inverse d'une homographie est une homographie et l'inverse d'une réciprocité, une réciprocité.

On en conclut que :

Les homographies de l'espace forment un groupe G_h.

Les projectivités (homographies et réciprocités) de l'espace, forment un groupe G_p, *appelé groupe projectif.*

Ce dernier groupe est d'une nature particulière ; il contient des opérations, les réciprocités, dont le produit n'est pas une opération de même nature. Si les homographies forment un groupe, qui est un sous-groupe du groupe projectif, par contre, les réciprocités ne forment pas un groupe.

Nous sommes maintenant en mesure de définir avec précision la géométrie projective.

La géométrie projective est l'ensemble des propriétés des figures qui sont invariantes pour les opérations du groupe projectif.

En d'autres termes,

Le groupe principal de la géométrie projective est le groupe G_p.

A côté de cette géométrie projective, on peut considérer une *géométrie projective restreinte*, dont le groupe principal serait le groupe des homographies G_h.

74. Relation entre les affinités et les homographies. — Si nous comparons les équations d'une affinité à celles d'une homographie, nous constatons que les premières sont un cas particulier des secondes. Dans une affinité, il y a un plan transformé en lui-même, c'est-à-dire un plan uni.

Fixons dans l'espace projectif un plan σ que nous conviendrons d'appeler le plan de l'infini. Les homographies transformant ce plan en lui-même ne sont autres que les affinités.

On voit donc que le groupe des affinités G_a est un sous-groupe du groupe des homographies G_h.

75. Champ de validité du principe de dualité. — Nous avons constaté que dans l'espace projectif, on peut distinguer

1. L'espace ponctuel, ensemble des points x dont les coordonnées sont des groupes de quatre nombres x_1, x_2 x_3, x_4, non tous nuls, définis à un facteur de proportionnalité près.

2. L'espace tangentiel, ensemble des plans ξ dont les coordonnées sont des groupes de quatre nombres ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, non tous nuls, définis à un facteur de proportionnalité près.

Cette parfaite symétrie contient dans son essence le principe de dualité.

Imaginons en effet une proposition de géométrie projective. Pour l'établir, nous avons dû considérer des points x, y, z, ... et des plans ξ, η, ζ, ..., présentant certaines liaisons. Nous avons dû traduire ces liaisons en équations et effectuer sur ces équations certaines opérations algébriques.

Nous avons l'habitude de représenter les points par des lettres de l'alphabet courant, et les plans par des lettres de l'alphabet grec. Supposons que nos calculs soient remis à une personne ayant l'habitude de faire le contraire. Cette personne parviendra à une proposition dont l'énoncé se déduira de celui de la nôtre en intervertissant les mots « point » et « plan ». Nous avons donc ainsi une nouvelle démonstration du principe de dualité.

Ces conclusions ne seront plus valables si nous introduisons dans l'espace projectif un plan privilégié σ, intervenant dans nos calculs. Sans doute, la personne dont il vient d'être question déduira encore une proposition de nos calculs, mais dans cette proposition, il sera question d'un point privilégié. Si donc nous introduisons dans l'espace projectif un plan σ que nous convenons d'appeler plan de l'infini, le principe de dualité ne sera plus applicable aux propriétés faisant intervenir ce plan. Par conséquent

Le principe de dualité n'est pas applicable aux propriétés de la géométrie affine, de la géométrie euclidienne, de la géométrie métrique faisant intervenir le plan de l'infini.

76. Construction d'une géométrie abstraite. — Dans ce qui précède, nous avons considéré quatre géométries : la géométrie métrique, la géométrie euclidienne, la géométrie affine et la géométrie projective. Chaque fois, nous avons commencé par définir le champ d'application de ces géométries : l'espace cartésien pour les deux premières, l'espace arguésien pour la géométrie affine, l'espace projectif pour la géométrie projective.

Ensuite, nous avons défini un groupe principal : le groupe G_m des mouvements pour la géométrie métrique, le groupe G_e des similitudes pour la géométrie euclidienne, le groupe G_a des affinités pour la géométrie affine et enfin le groupe projectif pour la géométrie projective.

En nous basant sur ces exemples, nous pouvons concevoir la construction d'une géométrie abstraite de la manière suivante :

Imaginons

1. *Une variété* V *d'éléments que nous conviendrons d'appeler des points.*

2. *Un ensemble d'opérations effectuées sur ces points, formant un groupe* G.

La géométrie de la variété V *ayant pour groupe principal le groupe* G *est l'ensemble des propriétés de la variété invariantes pour les opérations de ce groupe.*

Ce concept très général d'une géométrie est dû à Sophus Lie (1842-1899) et à Félix Klein (1849-1925). Ce dernier l'a développé dans le célèbre *Programme d'Erlangen*, à l'occasion de sa prise de possession d'une chaire de l'Université de cette ville, en 1872.

Jusqu'en ces dernières années, ce concept est resté immuable, bien que l'on ait considéré des variétés d'éléments de plus en plus générales et des groupes de transformations très généraux. Récemment, Élie Cartan a été conduit, par ses recherches sur les variétés riemanniennes, à une extension remarquable du concept de géométrie. Nous devons nous borner ici à la signaler.

77. Géométries subordonnées. — Nous avons vu que les affinités, les similitudes, les mouvements sont des homographies particulières. D'une manière précise :

Les affinités sont des projectivités transformant en lui-même un plan donné appelé plan de l'infini. Ces projectivités ne peuvent évidemment être que des homographies, puisqu'une réciprocité fait correspondre un point à un plan.

Les similitudes sont des affinités conservant les mesures des angles.

Les mouvements sont des similitudes conservant les mesures de distances.

Le groupe des mouvements est un sous-groupe du groupe des similitudes, celui-ci est un sous-groupe du groupe des affinités, ce dernier enfin est un sous-groupe du groupe des projectivités.

On dit que la géométrie métrique est subordonnée à la géométrie euclidienne, celle-ci à la géométrie affine et enfin cette dernière à la géométrie projective.

Nous pouvons, en nous basant sur ce qui précède, définir d'une manière abstraite une géométrie subordonnée à une géométrie donnée.

Considérons une géométrie d'une variété V, ayant comme groupe principal un groupe G. Soit G′ un sous-groupe du groupe G. La géométrie de la variété V ayant comme groupe principal le groupe G′, est appelée *géométrie subordonnée* à la première.

Les propriétés de la géométrie de groupe G donnent évidemment des propriétés de la géométrie de groupe G′. Ces propriétés peuvent d'ailleurs être formulées d'une manière telle qu'il n'apparaît pas immédiatement qu'elles appartiennent à la géométrie de groupe G.

Ainsi, les propriétés de la géométrie projective ont souvent été établies au moyen de relations métriques, comme nous l'avons fait remarquer à diverses reprises. Et ce n'est que par l'introduction du plan de l'infini et du cercle imaginaire à l'infini que l'on a pu arriver à une classification précise.

78. Exemple d'une géométrie. — Montrons, sur un exemple très simple, la construction d'une géométrie.

Pour définir la variété V de cette géométrie, considérons l'espace cartésien dont nous supprimons un point O. Tout point de cette variété peut être défini par ses coordonnées x, y, z par rapport à un trièdre $Oxyz$ ayant pour origine le point supprimé, les nombres x, y, z ne pouvant être tous trois nuls.

Tout plan de l'espace ne passant pas par l'origine peut être représenté par une équation

$$ux + vy + wz = 1.$$

On peut prendre, pour définir ce plan, c'est-à-dire comme coordonnées de ce plan, les trois nombres non simultanément nuls u, v, w.

L'équation

$$au + bv + cw = 1 \tag{1}$$

représente l'ensemble des plans passant par le point de coordonnées a, b, c et ces coordonnées ne peuvent être toutes nulles. L'équation (1) est donc celle d'un point de notre variété V.

Cela étant, nous pouvons considérer une géométrie de la variété V dont le groupe principal est l'ensemble des transformations d'équations

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1x' + a_2y' + a_3z', \\ y &= b_1x' + b_2y' + b_3z', \\ z &= c_1x' + c_2y' + c_3z'. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

On reconnaît immédiatement que ces transformations sont des affinités conservant le point O, de sorte que notre géométrie est subordonnée à la géométrie affine.

Mais on pourrait aussi considérer une autre géométrie en prenant comme groupe principal le groupe formé par les transformations (2) et les transformations

$$\left.\begin{aligned} u &= a_1'x' + a_2'y' + a_3'z', \\ v &= b_1'x' + b_2'y' + b_3'z', \\ w &= c_1'x' + c_2'y' + c_3'z', \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

qui ne sont autres que les réciprocités faisant correspondre le plan de l'infini à l'origine et inversement.

Notre nouvelle géométrie sera une géométrie subordonnée à la géométrie projective, mais non à la géométrie affine.

79. Géométries équivalentes. — Imaginons deux géométries abstraites : La première sera la géométrie d'une variété V ayant comme groupe principal un groupe G ;

la seconde une géométrie d'une variété V_1, de groupe principal G_1.

Supposons qu'il existe une transformation entre les éléments des variétés V, V_1, faisant correspondre à tout élément de V, un élément de V_1 et réciproquement.

Soient A_1 un élément de V_1, A son homologue sur V. Une transformation déterminée T de G fait correspondre à A un élément B de V. Soit B_1, l'homologue de B sur V_1. Le point B_1 correspond au point A_1 dans une certaine transformation T_1 qui est l'homologue de T sur V_1. Supposons que T_1 appartienne au groupe G_1 et que, lorsque T décrit le groupe G, T_1 décrive le groupe G_1. Supposons encore que nous arrivions aux mêmes conclusions lorsque nous intervertissons les rôles des variétés V, V_1. En d'autres termes, supposons que la transformation que nous imaginons entre les variétés V, V_1 induise une correspondance biunivoque entre les transformations des groupes G, G_1 telle qu'à toute transformation de l'un des groupes en corresponde toujours une de l'autre groupe.

Dans ces conditions, à toute propriété de la première géométrie en correspond une de la seconde et réciproquement. Les deux géométries sont *équivalentes*.

Le principe de dualité fournit un exemple de géométries équivalentes. La géométrie projective de l'espace considéré comme lieu de points est équivalente à la géométrie projective de l'espace considéré comme lieu de plans.

Nous allons donner un autre exemple, fort simple, de géométries équivalentes.

Comme variété V, nous prendrons l'ensemble des points d'une droite projective *r*. Nous pouvons introduire sur *r*, en calquant la méthode suivie plus haut pour l'espace, les coordonnées projectives x_1, x_2 d'un point x de la droite. Le groupe G sera l'ensemble des transformations

$$\alpha x_1 x'_1 + \beta x_1 x'_2 + \gamma x_2 x'_1 + \delta x_2 x'_2 = 0,$$

où nous supposons

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Ces transformations sont les projectivités de la droite, en sorte que notre première géométrie sera la géométrie projective sur une droite.

Posons

$$X_1 : X_2 : X_3 = x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2$$

et interprétons les X comme coordonnées projectives d'un plan ρ. A un point x de la droite r correspond un point X de la conique R d'équation

$$X_2^2 - X_1X_3 = 0$$

du plan ρ, et réciproquement, à un point de cette conique correspond sur la droite r le point de coordonnées

$$x_1 : x_2 = X_1 : X_2.$$

La variété V_1 sera la conique R et le groupe G_1 sera constitué par l'ensemble des transformations

$$\begin{aligned}
\rho X_1' &= \beta^2 X_1 + 2\beta\delta X_2 + \delta^2 X_3,\\
\rho X_2' &= -\alpha\beta X_1 - (\alpha\delta + \beta\gamma) X_2 - \gamma\delta X_3,\\
\rho X_3' &= \alpha^2 X_1 + 2\alpha\gamma X_2 + \gamma^2 X_3,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire par les homographies du plan ρ transformant la conique R en elle-même.

La géométrie projective sur une droite est donc équivalente à la géométrie sur une conique dont le groupe principal est le groupe des homographies du plan de cette conique transformant celle-ci en elle-même.

Il est bien évident que si l'on connaît une géométrie, on connaît par le fait même toute géométrie équivalente. Cependant, la recherche des propriétés géométriques gagne souvent à être transportée d'une géométrie dans une géométrie équivalente.

Pour faire comprendre cette observation, reprenons l'exemple précédent.

Considérons, sur la droite r, l'équation

$$\lambda_1(a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2) + \lambda_2(b_1x_1^2 + b_2x_1x_2 + b_3x_2^2) = 0\,;$$

elle représente un couple de points de cette droite. Supposons les a et b fixés. Lorsque les λ varient, nous obtenons une infinité de couples de points de la droite r, configuration appelée involution. Remarquons en passant qu'un point de r appartient à un et un seul couple de l'involution.

L'équation précédente, transportée dans le plan ρ, devient

$$\lambda_1(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3) + \lambda_2(b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3) = 0.$$

Les couples de points de l'involution sont découpés, sur la conique R, par les droites d'un faisceau. Et il est bien évident que ceci est de nature à faciliter la recherche des propriétés de l'involution.

80. La géométrie réglée. — Nous étudierons maintenant un exemple moins simple, mais classique, de construction de géométries équivalentes. C'est la géométrie de la droite dans l'espace qui nous le fournira.

Commençons par observer qu'une droite de l'espace peut être représentée par les équations

$$y = mx + p, \qquad z = nx + q.$$

Les droites de l'espace dépendent donc de quatre paramètres m, n, p, q.

Plaçons-nous dans l'espace projectif et considérons une droite p déterminée par deux de ses points y, z. Posons

$$p_{ik} = y_iz_k - y_kz_i, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Si nous faisons abstraction des quantités p_{ii} dont les deux indices sont égaux et qui sont identiquement nulles, nous avons ainsi défini douze quantités non toutes nulles, liées d'ailleurs par six relations

$$p_{ik} + p_{ki} = 0.$$

Nous pourrons donc limiter nos considérations à six quantités

$$p_{12},\quad p_{13},\quad p_{14},\quad p_{23},\quad p_{42},\quad p_{34}. \qquad (1)$$

Ces six quantités ne sont d'ailleurs pas indépendantes ; elles sont liées par la relation, facile à vérifier,

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0. \qquad (\mathrm{I})$$

Observons maintenant que si nous considérons deux points distincts de la droite p mais d'ailleurs quelconques, les quantités p_{ik} formées au moyen de ces deux nouveaux points, sont égales aux quantités p_{ik} formées au moyen des points y, z, multipliées par un certain facteur. En effet, deux points distincts de la droite p ont des coordonnées de la forme

$$\alpha y_i + \beta z_i, \quad \gamma y_i + \delta z, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

On a

$$(\alpha y_i + \beta z_i)(\gamma y_k + \delta z_k) - (\alpha y_k + \beta z_k)(\gamma y_i + \delta z_i) = (\alpha\delta - \beta\gamma)p_{ik}.$$

D'autre part, la droite p est l'intersection commune des quatre plans

$$\left.\begin{aligned} p_{34}x_2 + p_{42}x_3 + p_{23}x_4 &= 0,\\ -p_{14}x_3 + p_{13}x_4 + p_{34}x_1 &= 0,\\ -p_{12}x_4 + p_{42}x_1 + p_{14}x_2 &= 0,\\ p_{23}x_1 - p_{13}x_2 + p_{12}x_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Il en résulte qu'il y a une correspondance biunivoque entre les droites de l'espace projectif et les groupes de six quantités (1), définies à un facteur de proportionnalité près et liées par la relation (I). Ces quantités peuvent donc être prises comme coordonnées de la droite. Ces coordonnées ont été introduites par Plücker (1801-1868) ; elles sont appelées coordonnées plückériennes de la droite.

Observons que les homographies de l'espace font correspondre aux points d'une droite les points d'une droite et que les réciprocités font correspondre aux points d'une droite les plans passant par une droite. En d'autres termes, les projectivités de l'espace font correspondre les droites aux droites.

Cela étant, nous appellerons *géométrie projective de la droite dans l'espace la géométrie qui a pour groupe principal le groupe projectif*. Notre variété V sera donc l'ensemble des droites de l'espace.

Reprenons maintenant les six quantités (1). Convenons d'appeler point l'ensemble de ces six quantités, que nous désignerons par coordonnées de ce point. Nous supposerons que ces quantités ne peuvent être toutes nulles et que deux points dont les coordonnées sont proportionnelles, sont identiques. Appelons espace projectif à cinq dimensions l'ensemble de tous les points ainsi définis.

Par analogie avec la géométrie projective de l'espace ordinaire, nous appellerons homographie de l'espace à cinq dimensions une correspondance entre les points de cet espace représentée par les équations

$$\left.\begin{array}{l} \rho p'_{12} = A_{112}p_{12} + A_{113}p_{13} + A_{114}p_{14} + A_{123}p_{23} \\ \qquad\qquad + A_{142}p_{42} + A_{134}p_{34}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho p'_{34} = A_{612}p_{12} + A_{613}p_{13} + A_{614}p_{14} + A_{623}p_{23} \\ \qquad\qquad + A_{642}p_{42} + A_{634}p_{34}, \end{array}\right\} \quad \text{(II)}$$

où le déterminant des coefficients A_{ijk} n'est pas nul. Il est bien évident que ces homographies forment un groupe.

En procédant toujours par analogie avec l'espace ordinaire, nous dirons que l'ensemble des points de l'espace à cinq dimensions dont les coordonnées vérifient l'équation (I) constitue une hyperquadrique. Nous la désignerons par Q.

D'après les définitions que nous venons de donner, à une droite de l'espace ordinaire correspond un point de l'hyperquadrique Q et réciproquement. Cette correspondance biunivoque a lieu sans exception.

Il est bien facile de voir qu'à une homographie ou à une réciprocité de l'espace ordinaire, considérée comme opérant sur les droites, correspond une homographie (II) de l'espace à cinq dimensions. Mais cette homographie n'est pas quelconque ; elle doit laisser inaltérée la relation (II), c'est-à-dire transformer en elle-même l'hyperquadrique Q. Inversement, une homographie (II) transformant en elle-même l'hyperquadrique Q correspond à une homographie ou à une réciprocité de l'espace.

Nous voyons donc que

La géométrie projective réglée de l'espace ordinaire, est équivalente à la géométrie d'une hyperquadrique de l'espace projectif à cinq dimensions ayant pour groupe principal le groupe des homographies de cet espace transformant cette hyperquadrique en elle-même.

Cette interprétation de la géométrie réglée est due à F. Klein. On peut se demander quelle est son utilité.

A une surface engendrée par une droite (surface réglée), correspond une courbe tracée sur Q . A un ensemble de droites dépendant de deux paramètres, ou congruence de droites, correspond une surface tracée sur Q. Enfin, à un ensemble de droites dépendant de trois paramètres, ou complexe de droites, correspond une variété à trois dimensions appartenant à Q. L'expérience montre qu'il est en général plus facile de raisonner sur un lieu de points, même appartenant à un espace à cinq dimensions, que sur un lieu de droites de l'espèce ordinaire. De là l'utilité de la représentation de Klein.

81. Extension de la géométrie projective. — L'interprétation de la géométrie réglée au moyen d'une géométrie dans un espace à cinq dimensions fait entrevoir l'extension de la géométrie projective à des espaces à plus de trois dimensions ou hyperespaces.

Considérons $n+1$ nombres $x_0, x_1, \ldots, x_n$, non tous nuls, et convenons d'appeler point x l'ensemble de ces nombres ; ceux-ci seront appelés coordonnées projectives du point x. Convenons en outre de considérer comme identiques deux points dont les coordonnées projectives sont proportionnelles. L'ensemble des points x ainsi définis constitue ce que nous appellerons un *espace projectif* ou *espace linéaire* S_n *à n dimensions.*

L'ensemble des points x de S_n dont les coordonnées satisfont à une équation linéaire

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n = 0 \tag{1}$$

constitue ce que nous appellerons un *hyperplan* ξ. La connaissance de $n+1$ nombres, non tous nuls, proportionnels à $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$, permet d'écrire l'équation (1). Nous dirons que les nombres $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$, non tous nuls, sont les coordonnées de l'hyperplan ξ, deux hyperplans dont les coordonnées sont proportionnelles étant confondus.

Si, dans l'équation (1), on suppose que les quantités x_0, $x_1, \ldots, x_n$ sont données et les quantités $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ variables, on obtient une relation satisfaite par les coordonnées de tous les hyperplans contenant le point x ; c'est l'équation tangentielle du point x.

On voit que, comme dans le cas de l'espace ordinaire S_3, les points et les hyperplans de S_n jouent des rôles parfaitement symétriques et on en déduit le principe de dualité dans l'espace S_n.

Considérons $p+1$ points $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}$, indépendants, c'est-à-dire tels que l'on ne puisse trouver $p+1$

quantités λ non toutes nulles telles que les $n+1$ identités

$$\lambda_0 y_i^{(0)} + \lambda_1 y_i^{(1)} + \dots + \lambda_p y_i^{(p)} = 0$$
$$(i = 0, 1, \dots, n)$$

soient vérifiées.

Considérons l'ensemble des points dont les coordonnées s'écrivent

$$\begin{aligned}
\rho x_0 &= m_0 y_0^{(0)} + m_1 y_0^{(1)} + \dots + m_p y_0^{(p)},\\
\rho x_1 &= m_0 y_1^{(0)} + m_1 y_1^{(1)} + \dots + m_p y_1^{(p)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\rho x_n &= m_0 y_n^{(0)} + m_1 y_n^{(1)} + \dots + m_p y_n^{(p)}.
\end{aligned}$$

Cet ensemble coïncide avec l'ensemble des groupes de $p+1$ nombres non tous nuls $m_0, m_1, \dots, m_p$, définis à un facteur de proportionnalité près ; il constitue par conséquent un espace linéaire S_p , à p dimensions, déterminé par les $p+1$ points y donnés.

Cet espace S_p est d'ailleurs complètement dét miné comme intersection de $n-p$ hyperplans indépendants. En particulier, un hyperplan, qui est déterminé par n de ses points, est un espace linéaire à $n-1$ dimensions.

On voit aisément que si deux espaces linéaires S_p , S_q, ayant en commun un espace S_t (et non un espace à plus de t dimensions), appartiennent à un espace S_r (et non à un espace à moins de r dimensions), on a

$$p + q = r + t.$$

Ceci posé, nous appellerons *homographie* de l'espace S_n la correspondance entre les points x, x' définie par les équations

$$\left.\begin{aligned}
\rho x'_0 &= a_{00} x_0 + a_{01} x_1 + \dots + a_{0n} x_n,\\
\rho x'_1 &= a_{10} x_0 + a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n.\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\rho x'_n &= a_{n0} x_0 + a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n,
\end{aligned}\right\} \text{(I)}.$$

où le déterminant $|a_{ik}|$ des coefficients n'est pas nul.

Une homographie fait correspondre aux points d'un hyperplan ξ les points d'un hyperplan ξ' et plus généralement, aux points d'un espace linéaire à p dimensions, les points d'un espace linéaire à p dimensions.

Une réciprocité de l'espace S_n sera définie par les équations

$$\left.\begin{array}{l} \rho\xi'_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \ldots + a_{0n}x_n, \\ \rho\xi'_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho\xi' = a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{array}\right\} \text{(II)}$$

le déterminant des coefficients $|a_{ik}|$ étant différent de zéro.

A un point correspond un hyperplan et aux points d'un espace linéaire à p dimensions correspondent les hyperplans passant par un espace linéaire à $n—p—1$ dimensions.

L'ensemble des homographies et des réciprocités de S_n constitue un groupe G_p, appelé *groupe des projectivités. La géométrie projective de* S_n *est celle qui a comme groupe principal le groupe* G_p.

Les réciprocités ne forment pas un groupe, mais les homographies forment un groupe G_h. *La géométrie projective restreinte de* S_n *est celle qui a pour groupe principal le groupe* G_h.

Poursuivant l'analogie avec l'espace ordinaire S_3, nous pouvons définir les affinités, les similitudes et les mouvements de l'espace à n dimensions.

Introduisons un hyperplan privilégié σ, que nous appellerons *hyperplan impropre* ou *hyperplan de l'infini.* Les homographies de S_n ayant cet hyperplan comme hyperplan uni, c'est-à-dire faisant correspondre à un point de σ un point de σ, sont appelées *affinités.* Les affinités forment un groupe G_a qui est le *groupe principal de la géom trie affine* de S_n.

Si, pour fixer les idées, l'hyperplan α a pour équation

$x_0 = 0$, les affinités seront représentées par les formules (1) où l'on a posé

$$a_{01} = a_{02} = \dots = a_{0n} = 0,$$

a_{00} n'étant pas nul.

En excluant de l'espace S_n les poin's de l'hyperplan σ où $x_0 = 0$, nous obtenons un nouvel espace que nous appellerons *espace cartésien à n dimensions* et que nous désignerons par S'_n. Un point de ce nouvel espace sera complètement déterminé par les quantités finies

$$X_1 = \frac{x_1}{x_0}, \qquad X_2 = \frac{x_2}{x_0}, \quad \dots, \quad X_n = \frac{x_n}{x_0};$$

ce seront les coordonnées non homogènes de ce point X.

Les équations d'une affinité peuvent s'écrire

$$\left.\begin{array}{l} X'_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \dots + A_{1n}X_n, \\ X'_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \dots + A_{2n}X_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X'_n = A_{n1}X_1 + A_{n2}X_2 + \dots + A_{nn}X_n. \end{array}\right\} \text{(III)}$$

Donnons-nous maintenant, dans l'hyperplan $x_0 = 0$, une hyperquadrique Q, imaginaire, c'est-à-dire l'ensemble des points de cet hyperplan dont les coordonnées vérifient une équation du second degré

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

dont toutes les solutions sont imaginaires. On peut d'ailleurs toujours s'arranger pour que l'équation de Q prenne la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$$

ou, en coordonnées non homogènes,

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 = 0.$$

Cela étant, une affinité sera appelée *similitude* si elle transforme l'hyperquadrique Q en elle-même. Cela revient à supposer que les équations (III) donnent

$$X_1'^2 + X_2'^2 + \ldots + X_n'^2 = \lambda(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2). \quad (2)$$

Les similitudes forment un groupe G_s, *groupe principal de la géométrie euclidienne de l'espace cartésien* S'.

Enfin, une similitude sera appelée mouvement si elle conserve les distances, ce qui revient à supposer que dans l'équation (2), on a $\lambda = 1$. Les mouvements forment un groupe G_m, *groupe principal de la géométrie métrique de l'espace cartésien* S_n'.

Observons d'ailleurs que l'on eût pu partir de l'espace cartésien S_n' et des mouvements de cet espace pour s'élever ensuite aux similitudes, aux affinités et aux projectivités, comme on l'a fait plus haut dans le cas $n = 3$.

82. La géométrie algébrique. — La géométrie projective est susceptible d'une extension toute différente, obtenue en élargissant le concept d'homographie.

Revenons pour plus de simplicité à l'espace ordinaire S_3. Si deux points x, x' sont homologues dans une homographie, les coordonnées de l'un sont proportionnelles à des polynomes du premier degré portant sur les coordonnées de l'autre. Peut-on laisser tomber la condition imposée aux polynômes d'être du premier degré et obtenir des correspondances conservant le caractère algébrique et biunivoque des homographies ? Un exemple simple va nous montrer que l'on peut répondre par l'affirmative à cette question.

Considérons un point O et un nombre R, donnés. Nous dirons que deux points M, M′ sont homologues si :

a. La droite MM′ passe par le point O,

b. Les segments OM, OM′ satisfont à la condition

$$OM \,.\, OM' = R^2.$$

On reconnaît là la transformation appelée inversion.

Choisissons trois axes de coordonnées rectangulaires d'origine O et soient x, y, z les coordonnées de M, x', y', z' celles du point M'. On obtient sans difficulté les relations

$$x' = x \frac{R^2}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y' = y \frac{R^2}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z' = z \frac{R^2}{x^2 + y^2 + z^2},$$

et des relations de même forme donnent x, y, z en fonction de x', y', z'.

Cet exemple montre qu'il existe, dans l'espace projectif, des correspondances biunivoques entre des points x, x', telles que l'on ait

$$\frac{x'_1}{f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)} = \frac{x'_2}{f_2} = \frac{x'_3}{f_3} = \frac{x'_4}{f_4} \qquad (1)$$

et

$$\frac{x_1}{\varphi_1(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)} = \frac{x_2}{\varphi_2} = \frac{x_3}{\varphi_3} = \frac{x_4}{\varphi_4}, \qquad (2)$$

où f_1, f_2, f_3, f_4 sont des polynômes d'un certain degré m et φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 des polynômes d'un degré n, m et n étant supérieurs à l'unité. Les équations (2) se déduisent des équations (1) en résolvant celles-ci par rapport aux x, et inversement.

Ces correspondances sont appelées *transformations birationnelles* ou *transformations crémoniennes*, du nom du géomètre italien Cremona (1830-1903), qui les a considérées en premier lieu dans toute leur généralité.

L'ensemble des transformations birationnelles de l'espace constitue évidemment un groupe, le groupe crémonien G_c. *On appelle géométrie algébrique la géométrie qui a pour groupe principal le groupe crémonien* G_c.

C'est Bertini (1846-1933) qui a le premier été conduit à cette géométrie (1877) ; elle a depuis pris une grande extension.

Il existe évidemment une géométrie algébrique dans tout espace projectif, quel que soit le nombre de dimensions de cet espace.

Nous ne pouvons, sans sortir du cadre que nous nous sommes tracé, entrer dans des détails au sujet de la géométrie algébrique et des problèmes qui y sont traités. Nous renverrons le lecteur soit à notre ouvrage sur « La Géométrie », déjà cité, soit à deux fascicules du *Mémorial des Sciences mathématiques* que nous avons consacrés à ces questions[1]. Nous nous bornerons ici à une remarque.

Reprenons les formules (1). Aux points x' d'un plan, correspondent les points x appartenant à une surface d'ordre m d'équation

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0. \qquad (3)$$

Lorsque les λ varient, c'est-à-dire lorsque le plan varie, la surface (3) engendre un système linéaire. Puisque la correspondance est biunivoque, trois surfaces de ce système, correspondant à trois plans n'ayant pas une droite en commun, doivent avoir en commun un seul point x, variable avec les surfaces. Cela exige que les surfaces (3) aient en commun un certain nombre de courbes et de points fixes. Or, si nous introduisons dans les formules (1) les coordonnées d'un point x appartenant à toutes les surfaces (3), les dénominateurs sont nuls et le point x' est indéterminé. Nous rencontrons donc ici un fait nouveau : *une transformation birationnelle n'est pas*, comme une homographie, *biunivoque sans exceptions*. Il existe des points singuliers, appelés points fondamentaux de la transformation.

1. *Les transformations birationnelles du plan* (Paris, Gauthier-Villars, 1927), *Les transformations birationnelles de l'espace* (idem, 1934).

CHAPITRE VI

LA TOPOLOGIE

83. Considérations intuitives sur les courbes. — Considérons des courbes que nous supposerons être des fils matériels extrêmement fins. Au sujet de la matière dont sont faites ces courbes, nous pouvons faire trois hypothèses :

1. La matière est rigide ; les fils représentant les courbes sont indéformables.

2. La matière est déformable, mais inextensible ; les fils représentant les courbes peuvent être déformés, mais dans les déformations qu'ils subissent, la distance de deux points, calculée le long du fil, reste constante. On peut par exemple supposer qu'il s'agit de fils métalliques.

3. La matière est déformable et extensible. Les fils considérés peuvent être déformés, étendus ou contractés comme peuvent l'être par exemple des fils de caoutchouc.

Comment, dans chacune de ces hypothèses, pourrons-nous imaginer une classification des courbes ?

Dans la première hypothèse, nous ne pouvons que déplacer nos courbes. Dans ces déplacements, une ligne droite reste une ligne droite et la distance de deux points reste immuable. Nous pouvons ranger dans une même catégorie deux courbes qui, par des déplacements, sont superposables et, par extension, qui sont symétriques par rapport à un plan. On reconnaît là le point de vue de la géométrie métrique élémentaire, considéré au début du chapitre précédent.

Plaçons-nous dans la seconde hypothèse et considérons deux segments de courbes limités, le premier par deux points A, B, le second par deux points A′, B′. Déplaçons le second segment de courbe de manière à amener A′ en A et déformons ce segment de manière à l'appliquer sur le premier segment. Si, après cette déformation, le point B′ vient coïncider avec B, nous dirons que les segments de courbes considérés sont égaux, ou encore que les distances curvilignes AB, A′B′ (distances calculées sur les courbes) sont égales.

Nous n'avons plus actuellement à considérer d'une manière particulière les lignes droites et nous pouvons ranger dans une même catégorie deux courbes telles que l'une d'elles puisse être déformée de manière à être appliquée exactement sur l'autre. Ce qui reste immuable ici, c'est la distance curviligne de deux points.

Dans la troisième hypothèse, il sera toujours possible d'appliquer deux segments de courbes AB, A′B′ l'un sur l'autre de manière que A′ vienne en A et B′ en B, en allongeant éventuellement un des segments. Actuellement, nous placerons dans une même catégorie deux courbes qui peuvent s'appliquer exactement l'une sur l'autre en allongeant au besoin certaines parties de l'une ou de l'autre courbe. Ce qui nous est défendu, c'est la rupture d'une courbe ou la soudure de deux courbes. La distance curviligne de deux points n'est plus conservée.

Prenons un exemple simple. Considérons un cercle C et une ellipse E.

Dans la première hypothèse, ces deux courbes seront rangées dans des catégories différentes

Dans la seconde hypothèse, ces deux courbes appartiendront à la même catégorie si elles ont des longueurs égales. Dans le cas contraire, le cercle et l'ellipse appartiennent à des catégories différentes.

Dans la troisième hypothèse, le cercle et l'ellipse appartiendront toujours à la même catégorie. On peut en effet toujours dilater le cercle C de manière que sa longueur devienne égale à celle de l'ellipse.

Nous allons, dans ce qui suit, chercher à dégager les géométries abstraites qui correspondent aux deux dernières hypothèses. La géométrie qui correspond à la seconde hypothèse porte le nom de métrique générale ; celle qui correspond à la troisième hypothèse est appelée topologie ou analysis-situs.

Nous commencerons par définir les courbes et les surfaces qui interviennent dans ces géométries.

84. Le concept de courbe. — Pour nous rendre compte des propriétés que nous devons attribuer aux courbes, considérons une droite matérialisée et plaçons-nous dans la troisième hypothèse. Si nous déformons cette droite tout en étirant ou contractant la matière qui la compose, nous obtiendrons une courbe sur laquelle la distribution des points et la continuité seront conservées. Nous sommes donc conduits à supposer que les courbes que nous allons considérer satisfont à des postulats d'ordre et de continuité analogues à ceux qui ont été admis pour les droites.

Mais ici, une difficulté se présente. Dans les géométries considérées antérieurement, nous avons rencontré deux sortes de droites : la droite euclidienne et la droite projective. Chacune de ces droites peut être parcourue par un point dans deux sens opposés, mais si un point parcourt une droite euclidienne dans un sens déterminé, il ne revient jamais à sa position de départ, tandis que si un point parcourt une droite projective dans un sens déterminé, il revient toujours à sa position de départ. La droite euclidienne est illimitée dans les deux sens, la droite projective est une sorte de courbe fermée.

Les deux sortes de droites ne se présentaient jamais simultanément dans les géométries considérées jusqu'ici; par contre, nous aurons à considérer à la fois des courbes illimitées, analogues aux droites euclidiennes, et des courbes fermées, analogues aux droites projectives. Ainsi, si nous nous plaçons dans l'espace de la géométrie élémentaire, nous rencontrerons des droites euclidiennes, donc des courbes illimitées, et des cercles, qui sont des courbes fermées.

Nous devons donc définir les courbes au moyen d'un système de postulats qui, sur une courbe illimitée, correspondent aux postulats de distribution des points sur une droite euclidienne et, sur une courbe fermée, aux postulats de distribution des points sur une droite projective.

Pour définir les courbes, nous suivrons la marche utilisée par F. Enriques dans son article sur les *Principes de la Géométrie* de l'Encyclopédie des Sciences mathématiques, déjà cité plus haut.

Nous nous placerons dans un espace dont tous les points sont réels et qui sera, soit l'espace de la géométrie élémentaire (espace euclidien), soit l'espace projectif déduit de l'espace précédent par l'introduction des points impropres (n° 35).

Commençons par considérer une courbe illimitée dans les deux sens, comprenant une infinité de points et ne présentant pas de points multiples, c'est-à-dire ne se recoupant pas.

Nous supposerons que cette courbe satisfait aux axiomes de distribution formulés par Hilbert pour la droite (n° 53), à savoir :

I. Si A, B, C sont trois points d'une courbe et si B est entre A et C, il est aussi entre C et A.

II. Si A et C sont deux points d'une courbe, il y a au moins un point B de cette courbe situé entre A et C et un point D de cette courbe tel que C soit entre A et D.

III. De trois points A, B, C d'une courbe, il y en a toujours un et un seul situé entre les deux autres.

IV. Quatre points A, B, C, D d'une courbe peuvent toujours être distribués de manière que B soit entre A et C ainsi qu'entre A et D, et que C soit entre A et D et aussi entre B et D.

De ces postulats résulte que la courbe peut être parcourue par un point dans deux sens opposés.

Deux points A, B d'une courbe déterminent un segment de courbe comprenant tous les points compris entre A et B et ces deux points.

Nous introduirons la continuité de la courbe en adoptant le postulat de Dedekind pour les formes projectives de première espèce (nº 55). Il nous suffira de remplacer dans l'énoncé la locution « forme de première espèce » par « courbe ».

V. Si AB est un segment de courbe et si l'on divise ce segment en deux parties telles que

1. Chaque point du segment appartienne à une des parties.

2. Le point A appartienne à la première partie et le point B à la seconde.

3. Dans le sens de parcours de A vers B un point quelconque de la première partie précède un point quelconque de la seconde.

Alors il existe un point C du segment AB (pouvant appartenir à l'une des parties) tel que tout point du segment précédant C appartienne à la première partie et que tout point du segment suivant C appartienne à la seconde.

Considérons maintenant une courbe limitée MN, c'est-à-dire une courbe limitée par deux points M, N, extrémités de la courbe. Si nous supprimons les points M, N, nous obtenons une courbe illimitée, car si A est un point quelconque de la courbe, il existe toujours un point entre A et M ou entre A et N. Nous supposerons que cette courbe illimitée satisfait aux postulats qui viennent d'être énoncés. Il en résulte en particulier qu'il existe, sur la courbe MN, deux sens de parcours opposés, l'un allant de M vers N, l'autre de N vers M.

Cela étant, considérons deux courbes limitées MN, PQ telles que le point P coïncide avec N et le point Q avec M. L'ensemble de ces deux courbes sera appelé courbe fermée.

Sur cette courbe fermée, il existe deux sens de parcours opposés que nous obtiendrons en associant d'une part le sens de parcours de MN qui fait passer de M à N au sens de parcours de PQ qui fait passer de P à Q ; d'autre part, le sens de parcours de MN qui fait passer de N à M avec le sens de parcours de PQ qui fait passer de Q à P. Cette courbe fermée satisfait évidemment aux postulats VII et VIII des formes projectives de première espèce (nº 55).

Nous avons donc introduit trois sortes de courbes : les courbes illimitées (que l'on pourrait aussi appeler courbes ouvertes), les courbes limitées et les courbes fermées. Sur chacune de ces courbes, nous avons deux sens de parcours opposés, continus.

Remarquons notamment que l'on peut considérer, sur chacune de ces courbes, deux couples de points se séparant, comme sur les formes projectives de première espèce.

85. Le concept de surface. — Nous définirons une surface en utilisant le concept intuitif de la génération d'une telle figure par une ligne qui se déplace en se déformant.

Précisons ce point de vue en considérant tout d'abord la génération du plan projectif par une droite. Considérons un plan projectif σ et dans ce plan un faisceau de droites de sommet A. Nous pouvons considérer le plan σ comme l'ensemble des points des droites du faisceau ou, mieux, comme l'ensemble des points des ponctuelles ayant comme supports les droites du faisceau. Remarquons maintenant que le faisceau, en tant que forme projective de première espèce, satisfait aux mêmes postulats d'ordre et de continuité que la ponctuelle. Nous voyons donc que le plan σ est l'ensemble des points qui sont les éléments de formes de première espèce (ponctuelles) qui sont, à leur tour, les éléments d'une forme de première espèce (faisceau de droites).

Revenons maintenant aux surfaces. Considérons une famille de courbes dont les éléments satisfont, dans la famille, aux mêmes postulats que les points d'une courbe. L'ensemble des points des courbes de cette famille constitue, par définition, une surface.

Par analogie avec la géométrie projective, nous pouvons appeler la famille de courbes considérée un faisceau de courbes, générateur de la surface.

Cependant, cette définition de la surface est trop générale. Nous supposerons que l'on peut trouver sur la surface un second faisceau générateur, formé de courbes unisécantes des courbes du premier faisceau. Nous prendrons donc comme définition d'une surface la suivante :

Une surface est l'ensemble des points des courbes de deux faisceaux F, F′, satisfaisant aux conditions suivantes :

1. Un point de la surface appartient à une courbe de F et à une courbe de F′.

2. Une courbe de F et une courbe de F′ ont en commun un et un seul point de la surface.

3. Sur deux courbes quelconques de F (ou de F′), les courbes de F′ (ou de F) découpent des séries de points

qui se succèdent dans des sens de parcours déterminés.

D'après cette dernière condition, si C_1, C_2 sont deux courbes quelconques de F, la courbe C′ de F′ coupe C_1 en un point P_1 et C_2 en un point P_2 ; les points P_1, P_2 se correspondent dans une transformation biunivoque et lorsque P_1 parcourt C_1 dans un sens déterminé, P_2 parcourt C_2 dans un sens déterminé.

L'ensemble des faisceaux F, F′ constitue ce que l'on appelle un réseau. Les courbes de F, F′ forment, sur la surface, une sorte de réticule analogue à celui des lignes coordonnées sur une surface définie par sa représentation paramétrique.

86. La topologie. — Nous sommes maintenant en mesure d'indiquer en quoi consiste la *topologie* ou *analysis-situs*. Nous le ferons en introduisant le groupe principal de cette géométrie.

Considérons, entre les points de l'espace, une transformation T satisfaisant aux conditions suivantes :

1. Elle est biunivoque sans exception, c'est-à-dire qu'elle fait correspondre à tout point un point et inversement.

2. Elle fait correspondre aux points d'une courbe, les points d'une courbe.

3. A deux couples de points M, N et P, Q se séparant sur une courbe, elle fait correspondre deux couples de points M′, N′ et P′, Q′ se séparant sur la courbe homologue.

De cette dernière condition résulte que si à une courbe C, T fait correspondre une courbe C′, à un sens de parcours de C correspond un sens de parcours de C′. Nous traduirons cette propriété en disant que la correspondance est ordonnée.

Considérons deux points M, N de C et fixons sur cette courbe un sens de parcours dans lequel M précède N, par exemple. Partageons les points du segment curviligne MN en deux catégories telles que

1. Chaque point du segment MN appartient à l'une des catégories.

2. Le point M appartient à la première catégorie et le point N à la seconde.

3. Tout point de la première catégorie précède tout point de la seconde.

D'après le postulat de Dedekind, il existe un point P du segment MN tel que tout point du segment précédant P appartienne à la première catégorie et tout point suivant P à la seconde.

Soient M', N', P' les points qui correspondent respectivement à M, N, P sur la courbe C' homologue de C. Au sens de parcours MPN de C correspond le sens de parcours M'P'N' de C'. A tout point du segment MP correspond un point du segment M'P' et à tout point du segment PN, un point du segment P'N'. De plus, tout point du segment M'N' est le correspondant d'un point du segment MN. Il en résulte que les points du segment M'N' sont répartis en deux catégories possédant les mêmes propriétés que les catégories considérées dans le segment MN. Ces deux catégories sont séparées par le point P'. Par conséquent, la transformation T conserve la continuité des courbes ; on dit qu'elle est continue.

A une surface, la transformation T fait évidemment correspondre une surface.

D'autre part, l'inverse d'une transformation T possède les mêmes propriétés que cette transformation. Enfin, le produit de deux transformations telles que T est encore une transformation de cette nature. Les transformations T forment donc un groupe.

Les transformations T sont appelées *homéomorphies.* Deux courbes ou surfaces homologues dans une transformation T sont dites homéomorphes.

La topologie est la géométrie qui a pour groupe principal le groupe des homéomorphies.

Au point de vue intuitif, la topologie est l'étude des surfaces et des courbes élastiques ; deux surfaces ou deux courbes sont homéomorphes lorsque l'une peut être amenée en coïncidence avec l'autre sans déchirure ni recouvrement.

87. La métrique générale. — Revenons à la seconde hypothèse faite dans les considérations intuitives du début de ce chapitre.

Alors que dans la topologie, nous pouvions considérer l'espace comme étant celui de la géométrie projective ou celui de la géométrie élémentaire, nous supposerons, dans la métrique générale, que l'espace est celui de la géométrie élémentaire. Nous avons à définir la mesure des segments curvilignes.

Considérons un segment de courbe AB. Déformons-le sans l'allonger ni le contracter de manière à l'appliquer sur un segment de droite A'B'. Nous rectifions ainsi le segment de courbe AB et nous conviendrons d'appeler longueur de ce segment celle du segment de droite A'B'.

Somme toute, rectifier le segment de courbe AB, c'est lui attacher un nombre réel qui mesure la distance curviligne AB. Mais naturellement le procédé employé ne peut être arbitraire : Si A, B, C sont trois points qui se succèdent sur une courbe dans un certain sens, la mesure de AC doit être égale à la somme des mesures des segments AB et BC. Sans insister davantage sur ces conditions, nous supposerons que nous connaissons un procédé nous permettant de rectifier tout segment de courbe.

Cela étant, ne considérons que les homéomorphies qui conservent les distances des arcs de courbes correspondants. Ces homéomorphies particulières forment évidemment un groupe, sous-groupe du groupe principal de la topologie. Nous désignerons ce sous-groupe par G'.

Nous pourrions maintenant définir la métrique générale comme étant la géométrie de groupe principal G'. Mais il est possible d'aller plus loin en utilisant le procédé qui nous a permis de passer de la métrique élémentaire à la géométrie euclidienne.

Considérons une homéomorphie T et soient C une courbe, C' la courbe correspondante. Si AB est un segment de la courbe C et A'B' le segment correspondant de la courbe C', nous supposerons que l'on a

$$\text{mes. } A'B' = k \,.\, \text{mes. } AB.$$

k étant une constante réelle, attachée à la transformation T. Cette relation a lieu quelle que soit la courbe C et quel que soit le segment AB sur cette courbe. Les homéomorphies jouissant de cette propriété (la constante k pouvant varier d'une homéomorphie à l'autre) forment un groupe que nous désignerons par G et dont G' est un sous-groupe.

Nous appellerons *métrique générale* A *la géométrie qui a pour groupe principal le groupe* G *et métrique générale* A' *la géométrie qui a pour groupe principal* G'.

Considérons deux surfaces S, S'. Convenons de dire qu'elles sont équivalentes dans une métrique générale s'il existe une transformation du groupe principal de cette métrique permettant de passer de l'une à l'autre.

Si nous nous plaçons dans la métrique A', il est possible d'appliquer la surface S sur la surface équivalente S', sans déchirure ni recouvrement, avec conservation des longueurs.

Si nous nous plaçons dans la métrique A, deux surfaces équivalentes ne peuvent plus être appliquées l'une sur l'autre sans que l'une d'elles ne subisse une sorte de rétrécissement dans toutes ses parties.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces questions.

Disons cependant qu'il ne faut pas confondre les métriques précédentes avec certaines questions de géométrie infinitésimale concernant l'applicabilité et la représentation conforme des surfaces. Les points de vue sont différents, mais non sans liaisons.

On doit à B. Riemann l'introduction d'une métrique beaucoup plus générale que celles qui viennent d'être considérées ; nous ne pouvions d'ailleurs être conduit à cette métrique en nous plaçant au point de vue adopté ici. Nous avons fait allusion plus haut à une extension du concept de géométrie de Lie et Klein, extension due à Élie Cartan. Ce sont les profondes recherches de ce géomètre sur les métriques générales de Riemann qui l'ont conduit à cette extension.

88. La topologie et la géométrie élémentaire. — Nous sommes passés de la géométrie élémentaire à la topologie en faisant abstraction d'abord de la notion de ligne droite, ce qui nous a conduits à la métrique générale A′, puis de la notion de distance.

Inversement, en introduisant en topologie la notion de distance, nous sommes passés à la métrique générale A ou A′. En introduisant dans ces métriques la notion de ligne droite, nous retournons à la géométrie élémentaire.

D'une manière précise, si nous introduisons dans la métrique A′ la notion de ligne droite, les transformations du groupe principal devant faire passer d'une ligne droite à une ligne droite, deviennent des mouvements et nous obtenons la métrique élémentaire.

Si au contraire nous partons de la métrique A, les transformations du groupe principal deviennent des similitudes et nous obtenons la géométrie euclidienne.

Retournons à la topologie et introduisons la notion de ligne droite. Une homéomorphie assujettie à faire correspondre une droite à toute ligne droite est une projectivité et nous obtenons ainsi la géométrie projective comme géométrie subordonnée à la topologie.

On sait que l'introduction de la notion de distance en géométrie projective permet de passer à la géométrie élémentaire.

Nous pouvons donc, avec F. Enriques, construire le schéma suivant :

$$\text{Géométrie } \underbrace{\overbrace{\text{projective.}\quad\text{Métrique}}^{\text{Topologie.}}}_{\text{Géométrie élémentaire.}} \text{ générale.}$$

F. Enriques a remarqué que ces différentes géométries correspondent à des groupes de sensations. On peut résumer son point de vue de la manière suivante :

L'homme normal a constitué la géométrie élémentaire.

Si l'on supprime les mains de cet homme, on l'empêche de mesurer les distances et il est conduit à la géométrie projective. Si au contraire on lui supprime la vue, il conserve la possibilité de mesurer les distances, mais perd la notion de ligne droite. Il est conduit à la métrique générale.

Si enfin on supprime à la fois à cet homme l'usage de la vue et celui des mains, il est conduit à la topologie. La notion de ligne droite et celle de distance lui deviennent inaccessibles.

89. Les surfaces de Riemann. — Nous donnerons deux exemples de questions traitées en topologie.

Riemann a introduit, dans l'étude des fonctions d'une variable complexe, certaines surfaces réelles auxquelles son nom est resté attaché. Nous ne pouvons indiquer ici de quelle manière ces surfaces sont amenées dans la théorie des fonctions, mais nous montrerons en quoi consistent ces surfaces et quel est le problème fondamental qui se présente à leur sujet.

Considérons tout d'abord une sphère et fixons l'attention sur la surface extérieure S de cette sphère. Traçons sur la surface S une courbe C, fermée, ne se recoupant pas. Nous pouvons, sans quitter la surface S, déformer cette courbe sans soudure ni rupture, de manière à la réduire à un point. Pour préciser, déformons tout d'abord la courbe C de manière à la réduire à un cercle C′ de la sphère. Soit α le plan du cercle C′ et α' un plan tangent à la sphère parallèle au plan α. Déplaçons le plan α parallèlement à lui-même jusqu'au moment où il vient coïncider avec α'. Le cercle C′ se déforme et se réduit finalement au point de contact du plan α' avec la sphère.

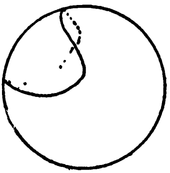

FIGURE 24.

Observons maintenant que nous pouvons déformer la surface S, sans déchirure ni recouvrement, de manière à la réduire à la surface d'un disque plan D à deux faces. Pour nous rendre compte de cette déformation, nous pouvons supposer que la sphère est constituée par une pâte molle, par exemple par de la pâte de boulanger. On peut alors aplatir cette sphère de manière à la réduire à un disque. La courbe C deviendra une courbe tracée sur le disque D, fermée et sans recoupements. En général, cette courbe sera en partie tracée sur chacune des faces du disque, le passage d'une partie à l'autre se faisant en franchissant le bord du disque. La figure 24 représente la face supérieure d'un disque sur lequel est tracée une courbe C dont la partie située sur la face inférieure du disque est représentée en ponctué.

La propriété de la courbe C tracée sur la sphère S subsiste évidemment pour la courbe C tracée sur le disque D. On peut, par déformation continue, sans rupture, ni soudure, la réduire à un point.

Forons un trou T dans le disque D et appelons D_1 la surface extérieure de la figure ainsi obtenue (fig. 25). Traçons sur la surface D_1 une courbe fermée C ne se recoupant pas. Nous ne pouvons plus, dans tous les cas, réduire la courbe C, par déformation continue, à un point. Si par exemple la courbe C est la courbe α entourant le trou T, ou si c'est la courbe β passant à travers ce trou (fig. 25), la chose n'est plus possible.

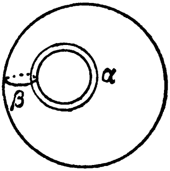

FIGURE 25.

On peut déformer le disque D_1 de manière à le faire coïncider avec un tore ; en d'autres termes, la surface D_1 est homéomorphe à la surface extérieure d'un tore. Sur celle-ci, la courbe α devient un cercle parallèle et la courbe β un cercle méridien.

Toute courbe C, tracée sur le disque D_1, ou sur le tore, peut être réduite, par déformation continue, à une courbe formée d'un certain nombre de fois la courbe α et d'un certain nombre de fois la courbe β.

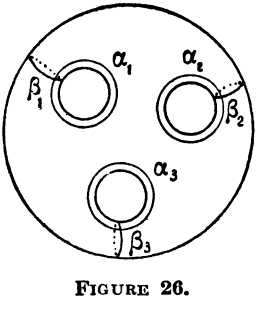

FIGURE 26.

On appelle surface de Riemann de genre p la surface extérieure D_p d'un disque plan dans lequel on a foré p trous, ou toute surface homéomorphe à celle-ci.

Une surface homéomorphe à la surface D_p est par exemple la surface extérieure d'une sphère à laquelle on a attaché p anses, ou si l'on veut, la surface extérieure d'un vase possédant p anses.

Sur une surface de Riemann D_p, on peut tracer $2p$ courbes fermées ne pouvant se réduire, par déformation continue, à un point. Ce sont les courbes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ entourant chacune un des p trous et les courbes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ passant chacune à travers un des p trous. Ainsi, dans le cas $p = 3$, on obtient les courbes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ représentées sur la figure 26.

Toute courbe fermée C tracée sur la surface de Riemann D_p se réduit, par déformation continue, à une courbe formée d'un certain nombre de fois chacune des courbes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et d'un certain nombre de fois chacune des courbes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$. Une telle courbe peut être représentée par le symbole :

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_p\alpha_p + \mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2 + \ldots + \mu_p\beta_p,$$

les nombres μ, λ étant des entiers. Si tous ces entiers sont nuls, la courbe C peut se réduire à un point par déformation continue.

Le nombre p est un caractère topologique d'une surface de Riemann. Deux surfaces de Riemann de genres différents ne sont évidemment pas homéomorphes.

90. La théorie des nœuds. — Un second exemple de problème topologique est fourni par la théorie des nœuds.

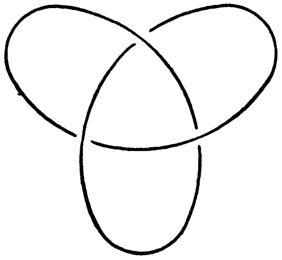

FIGURE 27.

Plaçons-nous dans l'espace de la géométrie élémentaire et proposons-nous de ne considérer que des courbes fermées, sans points multiples, c'est-à-dire ne se recoupant pas. De telles courbes seront appelées des *nœuds*.

Le plus simple de ces nœuds est l'ovale, homéomorphe à un cercle ou à un polygone convexe, par exemple.

Pour nous rendre compte de la nature des courbes envisagées, prenons un bout de ficelle, faisons un nœud puis soudons les extrémités. Nous obtenons ainsi soit la courbe représentée par la figure 27, soit la courbe représentée par la figure 28 (Au croisement de deux traits de la figure, nous avons interrompu le trait passant au-dessous). Le premier de ces nœuds s'appelle trèfle à gauche, le second trèfle à droite. Ces deux nœuds ne sont évidemment pas homéomorphes au cercle, ni même entre eux.

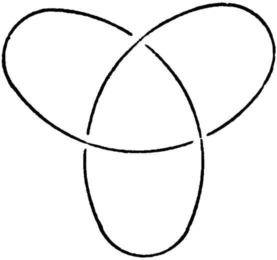

FIGURE 28.

Par contre, le nœud représenté par la figure 29 est homéomorphe à un cercle.

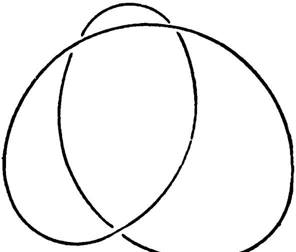

FIGURE 29.

On peut combiner les nœuds en trèfle de manière à obtenir des nœuds plus compliqués. Le nœud représenté par la figure 30, par exemple, est obtenu en combinant un trèfle à gauche et un trèfle à droite.

La courbe de Hoppe (1816-1900), représentée en coordonnées cartésiennes par les équations paramétriques

$$x = \cos t(3 \cos t + 2), \qquad y = 5 \cos t \,.\, \sin t,$$
$$z = \sin t(25 \cos^2 t - 1),$$

affecte la forme d'un trèfle à gauche (fig. 27).

La théorie des nœuds a pour objet la détermination de certains caractères topologiques tels que deux nœuds ayant les mêmes caractères soient homéomorphes. Le

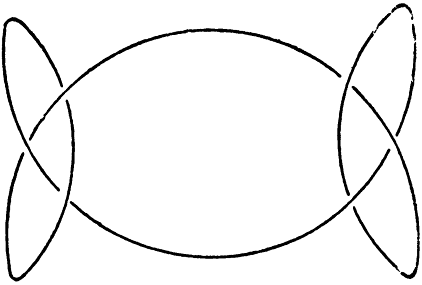

FIGURE 30.

problème de caractériser les nœuds de cette manière n'est d'ailleurs pas résolu.

91. Représentation analytique des courbes. Courbes de Jordan. — Plaçons-nous dans un espace euclidien rapporté à trois axes Ox, Oy, Oz. Reprenons le concept de courbe de la topologie.

Considérons en premier lieu une courbe limitée. Cette courbe est homéomorphe à un segment de droite, c'est-à-dire que nous pouvons appliquer la courbe sur le segment de droite de manière à respecter l'ordre des points et la continuité.

Les coordonnées des points d'un segment de droite peuvent s'exprimer en fonctions linéaires d'un paramètre t, variant entre certaines limites t_0, T. Nous sommes donc conduit à représenter les coordonnées d'un point d'une courbe limitée par des fonctions réelles d'un paramètre t. Nous écrirons

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t). \tag{1}$$

Ces fonctions ne sont naturellement pas arbitraires.

Nous devons faire certaines hypothèses rendant compte des conditions topologiques que l'on vient de rappeler.

1. A une valeur de t de l'intervalle (t_0, T) correspond un et un seul point de la courbe.

2. Un point de la courbe correspond à une seule valeur de t de l'intervalle considéré.

3. Les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 sont continues.

Les deux sens de parcours sur la courbe correspondent aux deux modes de variation de t dans l'intervalle (t_0, T). Si, pour fixer les idées, nous supposons t_0 inférieur à T, t peut passer de t_0 à T en croissant constamment et de T à t_0 en décroissant constamment.

La troisième condition imposée aux fonctions φ_1, φ_2, φ_3 correspond à la continuité de la courbe envisagée. On peut traduire cette condition de la manière suivante : Soient t_1, t_2 deux valeurs de t et x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 les coordonnées des points correspondants. Si ε est un nombre positif arbitrairement choisi, aussi petit qu'on le veut on peut toujours choisir t_2 suffisamment voisin de t_1 pour que les différences $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ soient comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$.

La représentation par les équations (1), soumises aux trois conditions qui viennent d'être énumérées, s'étend à toutes les courbes que nous avons considérées. En particulier, nous obtiendrons une courbe fermée si le même point correspond aux valeurs extrêmes t_0, T de l'intervalle considéré, c'est-à-dire si l'on a

$$\varphi_1(t_0) = \varphi_1(T), \qquad \varphi_2(t_0) = \varphi_2(T), \qquad \varphi_3(t_0) = \varphi_3(T),$$

les autres valeurs de t comprises dans l'intervalle conduisant toujours à des points distincts.

S'il existe exceptionnellement n valeurs de t de l'intervalle (t_0, T) donnant le même point de la courbe, celui-ci sera un point multiple d'ordre n de la courbe, Les courbes représentées par les équations (1) sont appelées *courbes de Jordan* (1838-1922).

On doit à ce géomètre un théorème important qui montre que les courbes de Jordan correspondent bien à la notion intuitive que nous avons de ces figures géométriques.

Une courbe plane de Jordan, fermée, sans point double partage le plan en deux régions telles que

1. Deux points d'une même région peuvent toujours être réunis par une ligne brisée ne traversant pas la courbe.

2. Deux points n'appartenant pas à la même région ne peuvent être réunis par une courbe continue ne traversant pas la courbe.

92. La courbe de Peano. — On peut se demander si les trois conditions imposées aux fonctions φ_1, φ_2, φ_3 sont bien nécessaires pour obtenir une courbe répondant à la notion intuitive que nous avons de ces objets. La réponse est affirmative, comme le montre l'exemple de la courbe construite par Peano (1858-1932). Il s'agit d'une courbe plane dont les points ont pour coordonnées des fonctions continues d'un paramètre t et qui remplit tout un carré.

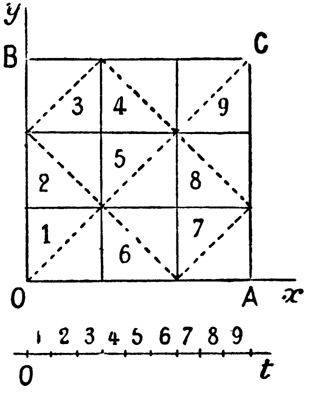

FIGURE 31.

Considérons d'une part sur un axe Ot le segment (OA) de longueur unité, et d'autre part un carré OABC de côté égal à l'unité (fig. 31). Partageons le segment (OA) en neuf segments égaux numérotés de 1 à 9 et le carré en neuf carrés égaux numérotés également de 1 à 9 comme l'indique la figure. Deux carrés successifs ont un côté commun.

Dans un carré partiel, définissons un sommet initial et un sommet final par les conditions suivantes :

1. Le sommet initial et le sommet final sont opposés.

2. Le sommet initial d'un carré coïncide avec le sommet final du carré précédent.

3. Le sommet initial du premier carré partiel est le point O.

Menons la diagonale de chacun des carrés partiels joignant le point initial au point final de ce carré. Nous obtenons ainsi la ligne brisée commençant au point O et se terminant au point C, représentée sur la figure 31.

Nous ferons correspondre un segment de cette ligne brisée au segment de l'intervalle (OA) portant le même numéro d'ordre que le carré dont ce segment est la diagonale.

Recommençons ces opérations en divisant l'intervalle (OA) et le carré OABC non plus en neuf, mais en 9^2 parties égales, puis en 9^3 parties égales, et ainsi de suite Nous obtiendrons successivement des lignes brisées comprenant 9^2, 9^3, ... segments.

A un point x, y appartenant à un des segments de la ligne brisée obtenue en divisant le carré en 9^k carrés partiels, nous ferons correspondre la partie de l'intervalle (OA) portant le même numéro que le carré dont le segment envisagé est une diagonale.

On démontre que, lorsque l'opération est répétée indéfiniment, x, y sont des fonctions continues

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t)$$

de t, variant dans l'intervalle (OA). Le point x, y, lorsque t parcourt cet intervalle, décrit tout le carré OABC. La construction montre qu'à une valeur de t correspond un et un seul point x, y. Mais, par contre il existe une infinité de points x, y provenant de deux ou quatre valeurs distinctes de t. La correspondance entre les valeurs de t et les points de la courbe de Peano n'est plus biunivoque, la seconde condition que nous avons imposée aux fonctions φ dans le paragraphe précédent n'est plus respectée. Et ceci montre que si nous voulons obtenir une courbe répondant à nos conceptions intuitives, la seconde condition est essentielle.

93. Représentation analytique des homéomorphies. — Considérons une homéomorphie T. C'est, par définition, une correspondance biunivoque sans exceptions. Si nous rapportons l'espace à un trièdre $Oxyz$, à un point x, y, z, T fait correspondre un point x', y', z' donné par des relations

$$x' = F_1(x, y, z), \quad y' = F_2(x, y, z), \quad z' = F_3(x, y, z). \quad (1)$$

A un point x, y, z, ces équations font correspondre un seul point x', y', z', et inversement. Par conséquent, on doit pouvoir déduire des équations (1) des relations

$$x = F_1'(x', y', z'), \quad y = F^2(x', y', z'), \quad z = F_3(x', y', z') \quad (2)$$

présentant les mêmes caractères.

D'après la définition de l'homéomorphie T, à une courbe C de Jordan, d'équations

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t),$$

les équations (1) doivent faire correspondre une courbe C' de Jordan. Il en résulte que les équations

$$x' = F_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad y' = F_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad z' = F_3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \quad (3)$$

doivent représenter une courbe de Jordan.

Les conditions imposées aux fonctions F_1, F_2, F_3 impliquent qu'il y a une correspondance biunivoque entre les valeurs de t, comprises dans un certain intervalle (t_0, T), et les points x', y', z' de la courbe C'. Nous devons en outre imposer aux fonctions F_1, F_2, F_3 des conditions telles que les seconds membres des équations (3) soient des fonctions continues de t. On est donc conduit à supposer que les fonctions F_1, F_2, F_3 sont continues par rapport à x, y, z.

On peut exprimer cette condition de la manière suivante :

Considérons deux points quelconques x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2. Soient x'_1, y'_1, z'_1 et x'_2, y'_2, z'_2 leurs homologues dans l'homéomorphie (1). Donnons-nous en outre un nombre positif arbitrairement petit ε. Quel que soit ce nombre, il est toujours possible de choisir les deux premiers points de telle sorte que les différences $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ soient suffisamment petites pour que les différences $x'_1 - x'_2$, $y'_1 - y'_2$, $z'_1 - z'_2$ soient comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$.

D'une manière plus précise, à tout nombre positif ε, arbitrairement choisi, aussi petit qu'on le veut, correspond un nombre positif η tel que, si les différences $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ sont comprises entre $-\eta$ et $+\eta$, les différences $x'_1 - x'_2$, $y'_1 - y'_2$, $z'_1 - z'_2$ sont comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$.

On démontre d'ailleurs que dans ces conditions, les seconds membres des équations (2) possèdent les mêmes propriétés.

Nous avons défini analytiquement les homéomorphies et par conséquent le groupe des homéomorphies, c'est-à-dire le groupe principal de la topologie.

94. Le problème des tangentes. — Considérons une courbe C de Jordan et soient M M', deux de ses points.

On appelle tangente à la courbe C au point M la limite de droite MM′ lorsque M′ tend vers M sur la courbe, *si cette limite existe.* Le problème des tangentes peut donc se poser de la manière suivante : Une courbe de Jordan a-t-elle une tangente en chaque point et, dans la négative, quelles sont les conditions supplémentaires que l'on doit imposer à une courbe de Jordan pour qu'elle ait des tangentes ?

C'est précisément par la négative qu'il faut répondre à la première partie de la question. Il existe des courbes continues sans tangentes ; la première fut en fait définie par Weierstrass (1815-1897), et celle dont nous allons indiquer la construction est due à von Koch (1870-1924).

Commençons par faire une remarque. L'idée de considérer une courbe comme la limite d'une ligne brisée est très ancienne et s'est déjà présentée aux Grecs notamment à propos du calcul de la longueur d'une circonférence de cercle.

Considérons un cercle C. Inscrivons dans ce cercle un carré A_0 et circonscrivons au même cercle un carré B_0 dont les côtés soient parallèles à ceux du carré A_0. Divisons chaque arc du cercle C soutendu par un côté du carré A_0 en deux parties égales et joignons les points de division obtenus aux extrémités du côté correspondant du carré. Nous obtenons ainsi un octogone convexe A_1. Soit B_1 l'octogone convexe circonscrit au cercle C et dont les côtés sont parallèles à ceux de l'octogone A_1. Répétons la même opération en partant de l'octogone A_1, et ainsi de suite. Après k opérations, nous obtiendrons un polygone convexe inscrit de $4 \cdot 2^k$ côtés, que nous désignerons par A_k et un polygone convexe B_k, du même nombre de côtés, circonscrit au cercle C et dont les côtés sont parallèles à ceux du polygone A_k. Le cercle C est entièrement compris dans la région du plan limitée par les polygones A_k et B_k. En continuant indéfiniment nos constructions, nous obtiendrons des régions du plan de plus en plus minces, contenant le cercle C et celui-ci apparaît comme la limite commune des polygones A_k et B_k.

Arrivons maintenant à la construction de la courbe de von Koch.

Considérons un segment de droite L_0 d'extrémités A, B (fig. 32). Divisons le segment AB en trois parties égales et sur le segment du milieu DE, construisons un triangle

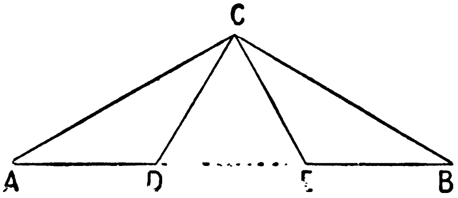

FIGURE 32.

équilatéral CDE. Appelons L_2 la ligne brisée ADCEB et L_1 la ligne brisée ACB.

Divisons chacun des segments de la ligne brisée L_2 en trois parties égales et construisons chaque fois, sur la partie du milieu, un triangle équilatéral (fig. 33). Nous obtenons ainsi une ligne brisée

AA'FD'DD''GC'CC''HE'EE''KB'B

que nous désignerons par L_4.

D'autre part, divisons chacun des segments de la ligne brisée L_1 en trois parties égales et construisons sur les parties du milieu les triangles équilatéraux FGD, HKE (fig, 33). Appelons L_3 la ligne brisée AFDGCHEKB.

Continuons indéfiniment ces constructions ; nous obtiendrons deux suites de lignes brisées :

1. Les lignes L_0, L_2, L_4, ..., L_{2k}, composées de un, quatre, seize, ..., 2^{2k}, ... segments.

2. Les lignes brisées L_1, L_3, L_5, ..., L_{2k-1}, ... composées de deux, huit, trente-deux, ..., 2^{2k-1}, ... segments.

Remarquons que

1. La ligne brisée L_{2k+2} est toujours au-dessus de la ligne L_{2k}.

2. La ligne brisée L_{2k+1} se trouve toujours au-dessous de la ligne L_{2k-1}.

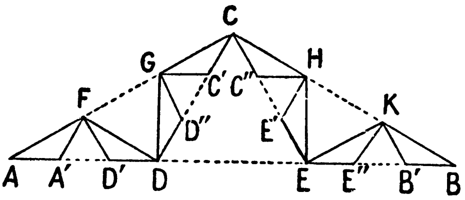

FIGURE 33.

3. Les lignes brisées L_0, L_2, ..., L_{2k}, ... sont toujours au-dessous des lignes brisées L_1, L_3, ..., L_{2k-1}, ...

Fixons l'attention sur les régions du plan limitées respectivement par les lignes L_1 et L_2, L_3 et L_4, ..., L_{2k-1} et L_{2k}, ... Ces régions du plan s'amincissent de plus en plus et les deux suites de lignes brisées considérées ont pour limite commune une courbe L qui est précisément la courbe de von Koch.

On démontre que les coordonnées x, y d'un point de la courbe L de von Koch sont des fonctions continues d'un paramètre t. Mais si M, M′ sont deux points de la courbe L, lorsque M′ se rapproche indéfiniment de M, la limite de la droite MM′ est indéterminée et la tangente n'existe pas.

La courbe L de von Koch est une courbe continue sans tangente.

Cette courbe L possède la propriété d'être partout semblable à elle-même ; en d'autres termes, une portion quelconque de la courbe est semblable à la courbe tout entière. Tout segment de la courbe a une longueur infinie.

95. Conditions d'existence des tangentes. — Cherchons à déterminer dans quelles conditions une courbe de Jordan

$$x = \varphi_1(t), \qquad y = \varphi_2(t), \qquad z = \varphi_3(t) \tag{1}$$

possède une tangente en un point M. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point M, t_0 la valeur correspondante de t. Prenons un second point M′ de la courbe correspondant à la valeur t_1 de t et soient x_1, y_1, z_1 ses coordonnées. Les équations de la droite MM′ sont

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{2}$$

Les paramètres directeurs de cette droite sont donc

$$x_1 - x_0 = \varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_0), \qquad y_1 - y_0 = \varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_0),$$
$$z_1 - z_0 = \varphi_3(t_1) - \varphi_3(t_0)$$

ou encore, puisque ces paramètres ne sont définis qu'à un facteur de proportionnalité près,

$$\frac{\varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_0)}{t_1 - t_0}, \qquad \frac{\varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_0)}{t_1 - t_0}, \qquad \frac{\varphi_3(t_1) - \varphi_3(t_0)}{t_1 - t_0}. \tag{3}$$

La tangente à la ligne (1) au point M, si elle existe, est la limite de la droite MM′ lorsque M′ tend vers M sur la courbe, c'est-à-dire lorsque t_1 tend vers t_0. Les équations de cette tangente seront les équations déduites des équations (2) après ce passage à la limite. Ce qui varie dans les équations (2), lorsque t_1 tend vers t_0, ce sont les dénominateurs, c'est-à-dire les paramètres directeurs de la droite, Pour que la tangente existe au point M, il faut donc que les limites des fonctions (3) existent lorsque t_1 tend vers t_0. Or, ces limites sont précisément par définition les dérivées $\varphi_1'(t_0)$, $\varphi_2'(t_0)$, $\varphi_3'(t_0)$ des fonctions φ_1, φ_2, φ_3 au point t_0. Cependant, l'existence de ces dérivées, supposées finies, ne suffit pas encore pour que la tangente existe. Les paramètres directeurs d'une droite ne peuvent être tous nuls et par conséquent il faut encore que les dérivées $\varphi_1'(t_0)$, $\varphi_2'(t_0)$, $\varphi_3'(t_0)$ ne soient pas toutes nulles.

En résumé, pour que la tangente au point M à la courbe de Jordan (1) existe, il faut que

1. Les dérivées $\varphi_1'(t_0)$, $\varphi_2'(t_0)$, $\varphi_3'(t_0)$ des fonctions $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ existent en ce point.

2. L'une au moins de ces dérivées ne soit pas nulle.

Ces conditions sont évidemment suffisantes.

Pour qu'il existe une tangente en tout point de la courbe de Jordan (1), il faut que les dérivées des fonctions $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ existent pour toutes les valeurs de t considérées (nous dirons que ces fonctions sont dans ce cas dérivables ou différentiables) et ne soient pas nulles simultanément.

Nous pouvons d'ailleurs laisser tomber cette dernière condition, car il est évident que si les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 sont dérivables dans l'intervalle (t_0, T) considéré, leurs dérivées ne seront qu'exceptionnellement toutes trois nulles. Cela revient à supposer la possibilité de quelques points de la courbe où la tangente n'existera pas. De même, nous pouvons admettre qu'il existe quelques points en lesquels la dérivée d'une des fonctions φ_1, φ_2, φ_3 n'existe pas ; nous aurons ainsi une courbe de Jordan ayant « en général » une tangente en chaque point.

Reprenons l'homéomorphie

$$x' = F_1(x, y, z), \qquad y' = F_2(x, y, z), \qquad z' = F_3(x, y, z).$$

Si nous voulons constituer une géométrie des courbes de Jordan ayant des tangentes, nous devrons prendre pour groupe principal de cette géométrie un groupe formé d'homéomorphies faisant correspondre à une courbe de Jordan ayant des tangentes, une courbe de Jordan ayant également des tangentes.

En d'autres termes, la courbe

$$x' = F_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad y' = F_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad z' = F_3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

devra avoir des tangentes et les dérivées des seconds membres devront exister. Cela exige évidemment que les fonctions F_1, F_2, F_3 admettent des dérivées partielles $\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial F_3}{\partial z}$ et cette condition est suffisante. Nous dirons que les fonctions F_1, F_2, F_3 sont différentiables.

La géométrie ainsi constituée peut être caractérisée en disant que c'est une topologie où toutes les fonctions utilisées sont différentiables.

96. Topologies restreintes de divers ordres. — En géométrie analytique classique, lorsque l'on étudie une courbe

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t), \qquad (1)$$

on admet en général que les fonctions f_1, f_2, f_3 sont indéfiniment dérivables. On attache alors à ces courbes différents éléments faisant intervenir les dérivées de ces fonctions jusqu'à un certain ordre. Tels sont :

1. La tangente, qui fait intervenir les dérivées du premier ordre.

2. Le plan osculateur et le cercle osculateur, qui font intervenir les dérivées du premier et du second ordre.

3. La sphère osculatrice, qui fait intervenir les dérivées des trois premiers ordres, etc.

Or, on peut très bien étudier les courbes ayant des tangentes sans faire aucune hypothèse sur l'existence des dérivées secondes des fonctions servant à définir les courbes. De même, on peut étudier les courbes ayant des plans et des cercles osculateurs sans supposer quoi que ce soit au sujet des dérivées troisièmes. Et ainsi de suite.

Convenons de ne considérer que les courbes (1) pour lesquelles les seconds membres possèdent des dérivées des n premiers ordres sans posséder des dérivées du $(n + 1)$-ième ordre.

Si nous voulons constituer une géométrie de ces courbes, nous devrons nous limiter à la considération d'homéomorphies transformant chacune de ces courbes en une courbe possédant la même propriété. Il est facile de voir que cela implique l'existence des dérivées partielles des n premiers ordres, des fonctions intervenant dans l'expression analytique des homéomorphies, sans impliquer quoi que ce soit sur les dérivées partielles du $(n + 1)$-ième ordre.

Convenons de dire qu'une fonction admettant des dérivées partielles des n premiers ordres est différentiable n fois. La géométrie que nous venons de construire est une topologie dans laquelle toutes les fonctions utilisées sont différentiables n fois. On peut l'appeler *topologie restreinte du n-ième ordre.*

Dans cet ordre d'idées, la géométrie des courbes de Jordan ayant des tangentes, dont il a été question au paragraphe précédent, est la topologie restreinte du premier ordre.

La géométrie des courbes de Jordan admettant des plans et des cercles osculateurs est la topologie restreinte du second ordre.

Ce genre de considération a retenu récemment l'attention de G. Bouligand, aux publications duquel nous renvoyons pour une étude plus précise des topologies restreintes.

97. La géométrie infinitésimale directe. — Nous donnerons actuellement quelques indications sur une géométrie appelée par G. Bouligand géométrie infinitésimale directe.

Plaçons-nous dans l'espace de la géométrie élémentaire et considérons un ensemble E de points réels de cet espace. Nous supposerons que cet ensemble comprend une infinité de points : ce sera par exemple l'ensemble des points d'une courbe, ou celui des points d'une surface, ou encore l'ensemble des points intérieurs à une sphère donnée (ensemble qui pourra ou non comprendre les points de la sphère elle-même).

On dit qu'un point O est un *point d'accumulation* ou un *point limite* de l'ensemble E lorsque, dans toute sphère ayant pour centre O, il y a au moins un point de l'ensemble, quelque petit que soit le rayon de cette sphère. On démontre d'ailleurs que si O est un point d'accumulation de l'ensemble E, chacune des sphères considérées contient une infinité de points de l'ensemble.

A un point d'accumulation O d'un ensemble E, on peut attacher deux ensembles de droites : le *contingent* et le *paratingent.*

Considérons un point M de l'ensemble et la demi-droite OM (limitée au point O). Lorsque M tend vers O, la demi-droite OM peut avoir une position limite OT que l'on appelle demi-tangente au point O. L'ensemble des demi-tangentes forme le contingent au point O.

La demi-tangente OT peut être définie d'une manière plus précise en disant que tout cône de révolution d'axe OT et de sommet O contient au moins un point de l'ensemble E distinct de O, quelque petit que soit l'angle au sommet du cône et quelque petite que soit la hauteur de celui-ci (supposé limité à un plan perpendiculaire à OT et ne passant pas par O).

Soient maintenant M, M′ deux points de l'ensemble E, distincts de O. Supposons que lorsque les points M, M′ se rapprochent indéfiniment et simultanément de O, la droite MM′ ait une position limite d, passant par O. La droite d est appelée paratingente de l'ensemble E au point O. L'ensemble des paratingentes au point O forme le paratingent en ce point. Ce paratingent contient évidemment le contingent au point O et peut d'ailleurs dans certains cas coïncider avec celui-ci.

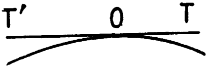

FIGURE 34.

Donnons deux exemples simples pour éclairer ces définitions.

Considérons en premier lieu un arc de courbe, par exemple un arc de section conique et soit O un point de cet arc (fig. 34). Nous avons en O deux demi-tangentes OT, OT′, portées par la tangente T′T à l'arc. Le contingent sera formé de la seule droite T′T. Il est évident que cette droite est la seule paratingente au point O. Le contingent et le paratingent coïncident.

Considérons en second lieu la courbe d'équation

$$y^2 = x^3,$$

qui possède un point de rebroussement à l'origine O des coordonnées (fig. 35). Le contingent est formé de la seule demi-droite OT. Par contre, le paratingent est formé de toutes les droites du faisceau de sommet O.

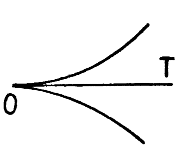

FIGURE 35.

Venons-en au groupe principal de la géométrie infinitésimale directe.

Une homéomorphie transforme un ensemble en un ensemble et fait correspondre à un point d'accumulation d'un ensemble un point d'accumulation de l'ensemble homologue. Nous imposerons aux homéomorphies du groupe principal de la géométrie infinitésimale directe la condition de conserver les contingents. D'une manière plus précise, soient E un ensemble, O un de ses points d'accumulation, E′ l'ensemble qu'une homéomorphie T fait correspondre à E, O′ le point d'accumulation de E′ homologue de O. L'homéomorphie T doit être telle que s'il existe un contingent de E en O, il existe un contingent de E′ en O′.

Si

$$x' = F_1(x, y, z), \qquad y' = F_2(x, y, z), \qquad z' = F_3(x, y, z)$$

sont les équations d'une telle homéomorphie, cela implique que les fonctions F_1, F_2, F_3 aient des dérivées partielles continues du premier ordre et que, de plus, le déterminant fonctionnel de ces trois fonctions, ou jacobien,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix}$$

soit positif et différent de zéro [1].

Sous ces conditions, s'il existe un paratingent de l'ensemble E au point O, il existe un paratingent de l'ensemble E′ en O′.

La géométrie infinitésimale directe a été développée par G. Bouligand et par toute une équipe de chercheurs qu'il a formés ; elle a conduit à d'importants résultats. Elle est née du désir d'obtenir des propriétés géométriques en faisant le minimum d'hypothèses sur les êtres étudiés ou, en d'autres termes, de connaître la véritable cause de ces propriétés.

La notion de paratingent avait été utilisée antérieu-

1. Le fait que ce déterminant n'est pas nul doit d'ailleurs être vrai pour toutes les homéomorphies considérées plus haut, sans quoi on ne pourrait exprimer x, y, z en fonctions de x', y', z'.

rement par B. Levi dans un problème d'une tout autre nature, concernant les courbes algébriques ; ce géomètre appelait les paratingentes des cordes impropres. Au moment où G. Bouligand commençait ses belles recherches, F. Severi a étendu la notion de corde impropre aux courbes, qu'il appelle courbes intuitives, transformées topologiques de droites.

98. La géométrie finie. — Considérons une ellipse. Une droite de son plan la rencontre en deux points réels ou imaginaires, distincts ou confondus, et par un point de son plan, on peut lui mener deux tangentes, réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues. Si nous nous restreignons à la considération des seuls points et droites réels, nous devons écrire qu'une droite rencontre l'ellipse en deux points ou en un point, ou ne la rencontre pas, et que par un point, on peut lui mener deux tangentes, ou une tangente, ou qu'on ne peut pas lui mener de tangentes. En d'autres termes, une droite rencontre l'ellipse en deux points au plus et par un point, on peut mener deux tangentes au plus à cette ellipse. Les ellipses ne sont pas les seules courbes possédant ces propriétés ; celles-ci appartiennent également aux ovales, c'est-à-dire aux courbes planes fermées convexes.

Des considérations de cette nature ont conduit les géomètres à ce que Darboux (1842-1916) a appelé la *géométrie finie*, sur laquelle nous donnerons quelques indications en nous bornant à la géométrie plane.

Considérons une courbe plane de Jordan C satisfaisant aux conditions suivantes :

1. Elle admet en général une tangente en chaque point.

2. La tangente varie d'une manière continue avec le point de contact.

3. Elle est rencontrée en un nombre fini de points par toute droite du plan.

4. Par un point du plan passent des tangentes à la courbe en nombre fini.

Si n est le nombre maximum des points de rencontre d'une droite avec la courbe C, celle-ci sera dite d'ordre n. Si m est le maximum du nombre de tangentes que l'on peut mener à la courbe par un point, la courbe est dite de classe m.

La transformée par dualité de la courbe C est une courbe de même nature.

Les courbes algébriques réelles satisfont aux conditions imposées aux courbes C, mais si on laisse tomber le fait que la courbe est algébrique, certaines propriétés subsistent et la recherche de ces propriétés constitue un problème essentiel de la géométrie finie.

Parmi les géomètres qui ont étudié ces questions, il convient de citer Juel (1855-1935), qui leur a consacré de nombreux mémoires et a édifié une théorie de ces courbes.

Le point de départ de Juel est la notion d'*arc élémentaire*. Considérons un arc de courbe continue d'extrémités A, B, tel que cet arc limite, avec la corde AB, un domaine convexe. Supposons de plus qu'en chaque point de l'arc existe une tangente unique, variant d'une manière continue avec le point de contact.

Une droite rencontre un arc élémentaire en deux points au plus et par un point, on peut mener au plus deux tangentes à cet arc. Par dualité, un arc élémentaire se transforme en un arc élémentaire.

Les courbes considérées par Juel sont formées par la réunion d'un nombre fini d'arcs élémentaires, chaque extrémité d'un arc étant une extrémité d'un autre arc. Ces courbes satisfont aux conditions imposées plus haut.

Un exposé magistral des recherches de Juel a été fait, il y a quelques années, par P. Montel. Empruntons à ce dernier le processus qui permet de passer d'une courbe de Jordan à une courbe de Juel.

Plaçons-nous dans un plan projectif réel et considérons dans ce plan une courbe fermée de Jordan.

1. On supposera en premier lieu l'existence d'une tangente en chaque point, sauf peut-être en un nombre fini de points.

2. Supposons ensuite que la tangente varie d'une manière continue avec le point de contact, sauf peut-être en un nombre fini de points.

3. Admettons enfin que chaque point de la courbe soit l'origine de deux arcs élémentaires, placés sur la courbe, de part et d'autre du point.

FIGURE 36.

On en déduit que la courbe est formée d'un nombre fini d'arcs élémentaires.

Parmi les propriétés des courbes algébriques qui subsistent pour les courbes de Juel, mentionnons la suivante :

On appelle point d'inflexion d'une courbe un point A en lequel la tangente AT est unique et est traversée par la courbe (fig. 36). Une courbe plane algébrique du troisième ordre possède neuf points d'inflexion dont trois sont réels et six imaginaires. Et bien, une courbe plane de Juel du troisième ordre possède trois points d'inflexion.

Juel a étendu ses recherches aux surfaces, en particulier aux surfaces réglées et aux surfaces de troisième ordre, rencontrées en trois points au plus par toute droite de l'espace n'appartenant pas à la surface.

Parmi les géomètres qui s'occupent actuellement de géométrie finie, nous citerons A. Marchaud et O. Haupt. Le premier a notamment étudié des ensembles continus de points, d'ordre borné, c'est-à-dire rencontrés par les droites en un nombre fini de points.

Le groupe principal de la géométrie finie n'a pas pu, jusqu'à présent, être caractérisé d'une manière précise.

99. Le développement de la topologie. — Dans les lignes qui précèdent, nous avons essayé de faire comprendre en quoi consiste la topologie ou analysis-situs en partant de la géométrie élémentaire et en faisant largement appel à l'intuition. Ce sont les surfaces de Riemann, introduites dans la science par ce géomètre en 1857, qui ont appelé l'attention sur l'analysis-situs. L'utilisation de ces surfaces, notamment dans l'étude des courbes algébriques, s'est révélée extrêmement féconde, aussi ont-elles été l'objet de très nombreuses recherches.

Au début cependant, l'appel à l'intuition dans les recherches de topologie fut assez fréquent, mais peu à peu, les géomètres ont cherché à en dégager les principes et à donner à cette discipline une assiette rigoureuse. Ceci était d'autant plus nécessaire que petit à petit, l'analysis-situs s'est révélée indispensable dans la plupart des branches des mathématiques.

On doit à H. Poincaré des résultats fondamentaux sur l'analysis-situs ; les cinq mémoires qu'il a consacrés à cette théorie ont été le point de départ d'un grand nombre de recherches. On peut dire que l'illustre géomètre a été le promoteur des recherches modernes sur la topologie.

Nous ne pouvons donner, dans un ouvrage aussi élémentaire que celui-ci, des indications sur les recherches récentes concernant la topologie. Nous nous bornerons, en terminant, à indiquer deux questions d'aspect élémentaire, qui relèvent de cette partie de la géométrie.

La première de ces questions est relative au coloriage des cartes géographiques. On considère une carte géographique, on se propose de la colorier de manière que deux pays limitrophes aient des couleurs différentes, en employant le plus petit nombre possible de couleurs. Combien faut-il de couleurs ?

Sous une forme plus précise, traçons sur la surface d'une sphère un réseau de lignes (de Jordan) de manière à partager cette surface en un certain nombre de régions (exactement comme la surface terrestre est partagée en régions par les frontières de pays et les côtes maritimes). Donnons une couleur à chacune de ces régions de manière que deux régions ayant une frontière commune aient des couleurs différentes. Par contre, deux régions ayant en commun un nombre fini de points pourront avoir la même couleur. On se propose de trouver le nombre minimum de couleurs nécessaires pour faire ce coloriage. On démontre que ce nombre est au moins égal à quatre et au plus égal à cinq. Comme on ne connaît aucun exemple exigeant cinq couleurs, on a cherché, vainement jusqu'ici, à démontrer que quatre couleurs suffisent toujours. C'est le problème connu sous le nom de problème des quatre couleurs.

La seconde question est relative aux polyèdres. Dans les traités de géométrie élémentaire, on démontre que si un polyèdre convexe possède S sommets, A arêtes et F faces, on a la relation

$$F + S = A + 2.$$

C'est le théorème connu sous le nom de théorème d'Euler, bien que la relation précédente fut déjà connue de Descartes.

Il s'agit bien d'une propriété topologique, car dans la démonstration, le fait que les arêtes sont des segments de droites et les faces des portions de plans, ne joue aucun rôle. Cette relation reste vraie si on considère un réseau de courbes de Jordan tracé sur la surface d'une sphère ou d'une surface de Riemann de genre zéro. Il existe d'ailleurs une relation analogue pour les réseaux tracés sur une surface de Riemann de genre *p*.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

Chapitre Premier

ENRIQUES (F.) et DE SANTILLANA (G.), *Storia del pensiero scientifico*, Vol. I, Il mondo antico. Bologne, 1932.

ENRIQUES (F.), *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, 3e édit. 4 vol., Bologne, 1925-1927.

ENRIQUES (F.), *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*, Rome, 1925.

MILHAUD (G.), *Les philosophes géomètres de la Grèce*, Paris, 1900.

PÉRÈS (J.), *Les Sciences exactes* (Histoire du Monde publiée sous la direction de E. CAVAIGNAC, t. XIII, fasc. 3), Paris, 1930.

TANNERY (P.), *La géométrie grecque*, Paris, 1887.

VER EECKE (P.), *Œuvres d'Archimède*, Paris et Bruxelles, 1921.

VER EECKE (P.), *Les coniques d'Apollonius de Perge*, Paris et Bruxelles, 1924.

ZEUTHEN (H.-G.), *Histoire des mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen Age*, Paris, 1902.

Chapitre III

CHASLES (M.), *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne, suivi d'un mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie*, Paris et Bruxelles, 1837 ; 2e édition, Paris, 1875.

CHASLES (M.), *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, Paris, 1870.

ENRIQUES (F.), *Leçons de Géométrie projective*, Paris, 1930.

GODEAUX (L.), *Leçons de Géométrie projective*, Paris et Liége, 1933.

GODEAUX (L.), *Introduction à la Géométrie supérieure*, Liége, 1946,

Chapitre IV

BARBARIN (P.), *La géométrie non euclidienne*, Troisième édition, suivie de notes par A. BUHL, Paris, 1928.

ENRIQUES (F.), *Principes de la géométrie*, Encyclopédie des Sciences mathématiques, Paris, 1909.

FANO (G.), *Geometria non euclidea*, Bologne, 1935.

POINCARÉ (H.), *Les fondements de la géométrie*, Bibliothèque de synthèse scientifique, Paris, 1921.

ROUCHÉ et COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie*, t. II, note II, rédigée par H. POINCARÉ. Paris, 1900.

Chapitre V

BOULIGAND (G.), *Premières leçons sur la théorie générale des groupes*, Paris, 1935.

CARTAN (A.), *Quelques aperçus sur le rôle de la théorie des groupes de Sophus Lie dans le développement de la géométrie moderne*, Conférence faite au Congrès international des Mathématiciens, à Oslo, 1936.

ESTÈVE (R.) et MITAULT (M.), *Cours de géométrie* (3 vol.), Paris. 1935-1936.

GODEAUX (L.), *La géométrie*, Paris et Liége, 1931.

Chapitre VI

A. ALEXANDROFF et H. HOPF, *Topologie*, Berlin, 1935.

BOULIGAND, *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Paris, 1932.

CARTAN, *La géométrie des espaces de Riemann*, Mémorial des Sciences Mathématiques, Paris, 1925.

CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, 2e éd., 1946.

CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis-situs*, Mémorial des Sciences Mathématiques, 1930.

CARTAN, *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*. Paris, 1937.

KEREKJARTO (DE), *Vorlesungen über Topologie*, Berlin, 1923.

LEFSCHETZ, *Topology*, New York, 1930.

MONTEL, *La géométrie finie et les travaux de M. C. Juel*, Bulletin des Sciences mathématiques, 1924.

SEVERI, *Conferenze di geometria algebrica*, Rome, 1927.

TABLE DES MATIÈRES

Imprimé en France à l'Imprimerie Nouvelle, Orléans, en avril 1947.
O. P. I. A. C. L. 31.0427.
Dépôt Légal effectué dans le 2e trimestre 1947.
Date du 1er Dépôt légal : 12 juillet 1937.
N° d'ordre dans les travaux de la Librairie Armand Colin : n° 358.
N° d'ordre dans les travaux de l'Imprimerie Nouvelle : n° 2089.