Separata de «O INSTITUTO», vol. LXXIII, n.º 1

SUR UNE TRANSFORMATION BIRATIONNELLE MONOÏDALE INVOLUTIVE

Dans un travail récent (1), nous avons étudié une transformation de Jonquières, plane, non périodique, définie en partant d'un réseau de courbes planes d'ordre n ayant, en un point fixe O, un point multiple d'ordre $n-3$. De plus, les courbes d'un faisceau compris dans le réseau ont, en O, la multiplicité $n-1$. Nous allons nous occuper d'une question analogue.

LUCIEN GODEAUX
Professeur à l'École Militaire de Belgique

Nous considérons, dans l'espace, un système linéaire triplement infini de surfaces d'ordre n ayant en général la multiplicité $n-4$ en un point fixe O. Dans le système, nous supposons qu'il existe un réseau de surfaces ayant en O la multiplicité $n-2$. Nous considérons ensuite les bitangentes aux surfaces du système passant par O et nous démontrons que les points de contact de ces bitangentes se correspondent dans une

(1) *Sur certains réseaux de courbes planes.* Bulletins de l'Académie Royale de Belgique, 1923, pág. 521-529.

transformation birationnelle involutive T. En général, cette transformation est d'ordre $n-3$, c'est-à-dire que la surface que T fait correspondre à un plan est d'ordre $n-3$. Ces surfaces ont, en O, la multiplicité $n-4$ et ont entre elles un contact du second ordre dans le voisinage du point O. Après avoir étudié cette transformation T, nous montrons que toute transformation jouissant des mêmes propriétés, peut s'obtenir par le même procédé. Enfin, nous considérons les généralisations possibles.

1. — Considérons, dans l'espace ordinaire, un système linéaire $|F|$, triplement infini, de surfaces F d'ordre n ayant un point base O multiple d'ordre $n-4$. Supposons que, parmi les surfaces F, il y en ait ∞^2, formant un réseau, ayant O comme point multiple d'ordre $n-2$, et désignons ce réseau par $|F_1|$.

Par un point P de l'espace passent ∞^1 surfaces de $|F|$ tangentes en ce point à la droite PO, et ces surfaces forment un faisceau. Dans ce faisceau, se trouve une et une seule surface de $|F_1|$. Les surfaces de ce faisceau découpent, sur la droite PO, en déhors de P_1O, des couples de points formant une involution. Cette involution possède deux points de coïncidence: L'un de ces points de coïncidence est fourni par la surface de $|F_1|$ appartenant au faisceau et est donc le point O; l'autre point de coïncidence Q est fourni par une surface de $|F|$ tangente à PO au point Q, en général distinct de O et de P. Nous voyons donc qu'il existe une seule surface du système $|F|$ bitangente à une droite passant par O, un des points de contact étant assigné. Il en résulte que les surfaces de $|F|$ bitangentes à une droite passant par O ont pour points de contact les couples d'une involution située sur cette droite. Ces couples de points P_1' Q se correspondent dans une transformation birationnelle involutive T que nous allons étudier.

2. — Choisissons comme trièdre de référence un trièdre

Oxyz de sommet O. Les équations de trois surfaces linéairement indépendantes du réseau $|F_1|$ peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} A(x, y, z) &\equiv \alpha_n(x, y, z) + \alpha_{n-1}(x, y, z) + \alpha_{n-2}(x, y, z) = 0, \\ B(x, y, z) &\equiv \beta_n(x, y, z) + \beta_{n-1}(x, y, z) + \beta_{n-2}(x, y, z) = 0, \\ C(x, y, z) &\equiv \gamma_n(x, y, z) + \gamma_{n-1}(x, y, z) + \gamma_{n-2}(x, y, z) = 0, \end{aligned}$$

les α, β, γ étant des polynomes entiers, rationnels et homogènes en x, y, z, de degrés égaux aux indices.

Soit maintenant

$$\Phi(x, y, z) \equiv \varphi_n(x, y, z) + \varphi_{n-1}(x, y, z) + \varphi_{n-2}(x, y, z) + \\ + \varphi_{n-3}(x, y, z) + \varphi_{n-4}(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface de $|F|$ ayant la multiplicité $n-4$ en O, les φ étant des polynomes entiers, rationnels et homogènes en x, y, z, de degrés égaux aux indices.

Les surfaces du système $|F|$ auront comme équation

$$\lambda\Phi(x,y,z) + \lambda_1 A(x,y,z) + \lambda_2 B(x,y,z) + \lambda_3 C(x,y,z) = 0. \quad (1)$$

Toutes les surfaces F pour lesquelles λ n'est pas nul, c'est-à-dire n'appartenant pas au réseau $|F_1|$, auront en général la multiplicité $n-4$ en O. Le cône tangent en ce point a pour équation

$$\varphi_{n-4}(x, y, z) = 0$$

et est donc fixe. Les génératrices de ce cône rencontrent en général la surface F en $n-3$ points confondus en O. Les droites communes aux deux cônes

$$\varphi_{n-3}(x, y, z) = 0, \quad \varphi_{n-4}(x, y, z) = 0$$

rencontrent la surface F en $n-2$ points confondus en O.

Ces deux cônes peuvent avoir une partie commune. En représentant par

$$\chi_h(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

cette partie commune, supposée d'ordre h, nous poserons

$$\varphi_{n-3}(x, y, z) \equiv \chi_h(x, y, z) \cdot \psi_{n-3-h}(x, y, z),$$
$$\varphi_{n-4}(x, y, z) \equiv \chi_h(x, y, z) \cdot \psi_{n-4-h}(x, y, z),$$

les cônes

$$\psi_{n-3-h} = 0, \quad \psi_{n-4-h} = 0$$

n'ayant qu'un nombre fini de droites en commun.

Toutes les génératrices du cône (2) rencontrent la surface F en $n-2$ points confondus en O.

3. — Passons maintenant à l'expression analytique de la correspondance entre les points P, Q définie plus haut.

Si x, y, z sont les coordonnées de P, celles de Q pourront s'écrire $x' = kx$, $y' = ky$, $z' = kz$. Pour déterminer k, nous exprimerons que la surface (1) passe par les points P, Q et y touche la droite PQ. Cela nous donnera quatre équations entre lesquelles nous éliminerons $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Nous obtenons ainsi le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi_n + \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} + \varphi_{n-3} + \varphi_{n-4} & \alpha_n + \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} \ldots \\ \varphi_{n-1} + 2\varphi_{n-2} + 3\varphi_{n-3} + 4\varphi_{n-4} & \alpha_{n-1} + 2\alpha_{n-2} \ldots \\ k^4\varphi_n + k^3\varphi_{n-1} + k^2\varphi_{n-2} + k\varphi_{n-3} + \varphi_{n-4} & k^4\alpha_n + k^3\alpha_{n-1} + k^2\alpha_{n-2} \cdot \\ k^3\varphi_{n-1} + 2k^2\varphi_{n-2} + 3k\varphi_{n-3} + 4\varphi_{n-4} & k^3\alpha_{n-1} + 2k^2\alpha_{n-2} \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

dans lequel les 3e et 4e colonnes se déduisent de la seconde en remplaçant les α par les β et les γ.

Multiplions les lignes du déterminant précédent respectivement par $-2k^4, k^4 - k^3$, 2 et $k - 1$ et additionnons les trois premières lignes du nouveau déterminant obtenu à la quatrième. Celle-ci devient

$$(k-1)^3[k\varphi_{n-3}+2(k+1)\varphi_{n-4}] \quad 0 \quad 0 \quad 0.$$

Observons que le point Q devant être différent de P et de O, k doit être différent de O et de 1. Comme le mineur du déterminant (3) relatif au premier élément de la quatrième ligne n'admet comme racine que $k=0$ et $k=1$, l'équation (3) n'admet qu'une seule racine k différente de 0 et de 1, soit

$$k=-\frac{2\varphi_{n-4}}{\varphi_{n-3}+2\varphi_{n-4}}.$$

Les formules définissant la transformation birationnelle involutive T sont donc :

$$x'=-\frac{2x\varphi_{n-4}(x,y,z)}{\varphi_{n-3}(x,y,z)+2\varphi_{n-4}(x,y,z)},$$
$$y'=-\frac{2y\varphi_{n-4}(x,y,z)}{\varphi_{n-3}(x,y,z)+2\varphi_{n-4}(x,y,z)},$$
$$z'=-\frac{2z\varphi_{n-4}(x,y,z)}{\varphi_{n-3}(x,y,z)+2\varphi_{n-4}(x,y,z)}.$$

Si l'on introduit l'hypothèse que φ_{n-3} et φ_{n-4} ont un facteur commun χ_h, ces formules deviennent

$$\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z}=-\frac{2\psi_{n-4-h}}{\psi_{n-3-h}+2\psi_{n-4-h}}. \tag{4}$$

En particulier, si $h=n-4$, c'est-à-dire si toutes les tangentes aux surfaces F en O rencontrent ces surfaces en $n-2$ points confondus en O, la transformation T est une homographie.

C'est ce qui se présentera toujours si $n = 4$, car, alors, on a nécessairement $h = n - 4 = 0$.

Si nous passons aux coordonnées homogènes en posant

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4},$$

les formules (4) deviennent

$$\left.\begin{aligned}
\rho x'_1 &= 2x_1 \psi_{n-4-h}(x_1, x_2, x_3),\\
\rho x'_2 &= 2x_2 \psi_{n-4-h}(x_1, x_2, x_3),\\
\rho x'_3 &= 2x_3 \psi_{n-4-h}(x_1, x_2, x_4),\\
\rho x'_4 &= -\psi_{n-3-h}(x_1, x_2, x_3) - 2x_4 \psi_{n-4-h}(x_1, x_2, x_3),
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ρ étant un facteur de proportionnalité.

4. — Au plan

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0, \tag{6}$$

la transformation T fait correspondre la surface

$$2(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 - u_4 x_4)\psi_{n-4-h} - u_4 \psi_{n-3-h} = 0. \tag{7}$$

Les tangentes en O à cette surface forment le cône

$$\psi_{n-4-h}(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

qui ne dépend pas du plan (6). Les surfaces (7) ont donc en O la multiplicité $n-4-h$ et le cône tangent y est fixe. Ces surfaces sont donc des monoïdes.

Les $(n-3-h)(n-4-h)$ droites communes aux cônes

$$\psi_{n-3-h} = 0, \quad \psi_{n-4-h} = 0$$

appartiennent toutes à la surface (7). Ces droites sont d'ailleurs les seules courbes communes à toutes les surfaces (7), car la transformation T étant involutive, à une droite doit correspondre une courbe de même ordre $n-3-h$ que les surfaces (7). Les courbes — base du système des surfaces (7) doivent donc avoir ensemble l'ordre

$$(n-3-h)^2-(n-3-h)=(n-3-h)(n-4-h).$$

Ces courbes ne peuvent donc être que les droites rencontrées plus haut, et de plus, ces droites doivent être simples pour les surfaces (7).

Pour étudier de plus près la manière dont se comportent les surfaces (7) dans le domaine du point O, opérons la transformation quadratique spatiale

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 y_4 : y_2 y_4 : y_3 y_4 : y_2 y_3.$$

A la surface (7) correspond une surface d'équation

$$\begin{aligned}2[(u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3) y_4 - u_4 y_2 y_3]\, \psi_{n-4-h}(y_1, y_2, y_3) - \\ - u_4 y_4\, \psi_{n-3-h}(y_1, y_2, y_3) = 0.\end{aligned} \tag{8}$$

La section de cette surface par le plan $y_4 = 0$ se compose des droites

$$y_2 = y_4 = 0, \quad y_3 = y_4 = 0,$$

fondamentales pour la transformation, et de la courbe

$$\psi_{n-4-h}(y_1, y_2, y_3) = 0, \quad y_4 = 0 \tag{9}$$

qui correspond au domaine du premier ordre de O.

Le plan tangent en un point $(y_1, y_2, y_3, y_4 = 0)$ de cette courbe (9) à la surface (8) a pour équation

$$2 y_2 y_3 \left(Y_1 \frac{\partial \psi_{n-4-h}}{\partial y_1} + Y_2 \frac{\partial \psi_{n-4-h}}{\partial y_2} + Y_3 \frac{\partial \psi_{n-4-h}}{\partial y_3} \right) - Y_4\, \psi_{n-3-h} = 0.$$

Ce plan ne dépend donc pas de u_1, u_2, u_3, u_4; il est le même pour toutes les surfaces (8) correspondant à toutes les surfaces (7). Les surfaces (8) se touchent donc le long de la courbe (9), par suite les surfaces (7) ont entre elles, au point O, un contact du second ordre.

5. — Considérons une droite et la courbe que T lui fait correspondre. La droite peut toujours être considérée comme l'intersection de deux plans

$$\left.\begin{aligned} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0, \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

dont l'un passe par O. La courbe correspondant à la droite sera donc une partie de l'intersection de la surface (7) et de la surface

$$(v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3) \phi_{n-4-h} = 0.$$

La courbe commune à la surface (7) et au cône $\phi_{n-4-h} = 0$ sera formée des $(n-3-h)(n-4-h)$ droites communes à toutes les surfaces (7). La courbe, d'ordre $n-3-h$, qui correspond à la droite (10), sera par suite l'intersection de la surface (7) et du plan

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0.$$

Cette courbe passe donc $n-4-h$ fois par O et chacune de ses branches a un contact du second ordre avec les surfaces telles que (7).

En résumé: *La transformation* T *fait correspondre:*

à un plan, une surface d'ordre n — 3 — h *passant* n — 4 — h *fois par* O, *passant par* (n — 3 — h) (n — 4 — h) *droites issues de* O, *et les surfaces qui correspondent à l'ensemble des plans de l'espace ont entre elles, au point* O, *un contact du second ordre;*

à une droite, une courbe d'ordre n — 3 — h, *située dans le plan déterminé par* O *et cette droite*, *passant* n — 4 — h *fois* *par* O, *chaque branche de la courbe ayant en ce point un contact du second ordre avec les surfaces qui correspondent aux plans le l'espace.*

Les éléments fondamentaux de la transformation T sont le point O et les $(n-3-h)(n-4-h)$ droites communes à toutes les surfaces transformées de plans.

Il est aisé de voir que la jacobienne des surfaces transformées de plans est formée du cône $\psi_{n-4-h}=0$, compté quatre fois.

6. — Pour obtenir l'équation du lieu des points de l'espace invariants pour la transformation T, il suffit de faire $x'_i=x_i$ dans les formules (5). Ou trouve ainsi la surface

$$\psi_{n-3-h}+4x_4\,\psi_{n-4-h}=0. \tag{11}$$

Celle-ci est d'ordre $n-3-h$ et passe $n-4-h$ fois par O. Le cône tangent en ce point est le même que le cône tangent aux surfaces transformées de plans. Il est aisé de voir que la surface (11) n'a pas, en O, avec ces dernières surfaces, un contact du second ordre. Par contre, elle passe par les $(n-3-h)(n-4-h)$ droites fondamentales de la transformation T.

7. — Arrêtons-nous un instant au cas $n=4$. Alors on a $h=0$ et, comme nous l'avons déjà fait remarquer plus haut, la transformation T est une homographie.

La surface (11) est alors un plan, par suite :

Si l'on considère un système linéaire triplement infini de surfaces du quatrième ordre contenant un réseau de surfaces ayant un point double fixe, les points de contact des bitangentes aux surfaces du système, issues de ce point, se correspondent dans une homographie involutive. Le lieu des points de contact des tangentes sur osculatrices aux surfaces, passant par le point fixe, est un plan (plan uni de l'homographie).

8. — Envisageons maintenant le problème inverse.

Considérons une transformation T birationnelle monoïdale de sommet O ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) telle que:

1.°) les droites issues de O se correspondent chacune à elle-même;

2.°) la transformation soit involutive;

3.°) les surfaces transformées de plans aient entre elles, en O, un contact du second ordre.

Soit m l'ordre de la transformation T'. Cette transformation devant faire correspondre aux plans des surfaces l'ordre m ayant la multiplicité $m-1$ en O, est nécessairement représentée par des formules telles que

$$\left.\begin{array}{l} \rho x'_1 = (a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3)\,(x_4\, f_{m-2} + f_{m-1}), \\ \rho x'_2 + (a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3)\,(x_4\, f_{m-2} + f_{m-1}), \\ \rho x'_3 = (a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3)\,(x_4\, f_{m-2} + f_{m-1}), \\ \rho x'_4 = x_3\, f'_{m-1} + f_m, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

où ρ est un facteur de proportionnalité, $f_{m-2}, f_{m-1}, f'_{m-1}, f_m$ des polynomes entiers, rationnels et homogènes en x_1, x_2, x_3, respectivement de degrés $m-2$, $m-1$, $m-1$ et m.

D'après la première condition imposée, une droite issue de O doit se correspondre à elle-même, donc on a

$$a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0, \quad a_{11} = a_{22} = a_{33} = a.$$

Les formules (1) font correspondre au plan

$$u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + u_3\, x_3 + u_4\, x_4 = 0$$

la surface

$$\begin{array}{c} a\,(u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + u_3\, x_3)\,(x_4\, f_{m-2} + f_{m-1}) + \\ + u_4\, x_4\, f'_{m-1} + u_4\, f_m = 0. \end{array} \qquad (2)$$

Le cône tangent à cette surface en O doit être indépendent de u_1, u_2, u_3, u_4, d'après la troisième condition. Le coefficient de x_4 dans l'équation (2) doit donc être indépendant des u, ce qui exige que l'on ait

$$f_{m-2} \equiv 0.$$

Pour exprimer complètement la troisième condition, opérons sur la surface (2) la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 y_4 : y_2 y_4 : y_3 y_4 : y_2 y_3.$$

La surface (2) devient (en tenant compte de $f_{m-2} \equiv 0$,

$$\begin{aligned} a(u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3) y_4 f_{m-1}(y_1, y_2, y_3) + \\ + u_4 y_2 y_3 f'_{m-1}(y_1, y_2, y_3) + u_4 y_4 f_m(y_1, y_2 y_3) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Au domaine du point O sur la surface (2) correspond la courbe

$$y_4 = 0, \quad f'_{m-1}(y_1, y_2, y_3) = 0. \tag{4}$$

Le plan tangent en un point $(y_1, y_2, y_3, y_4 = 0)$ de cette courbe doit être indépendant des u, puisque, les surfaces (2) ayant en O un contact du second ordre, les surfaces (3) doivent se toucher le long de la courbe (4). Or, ce plan tangent a pour équation

$$\begin{aligned} u_4 y_2 y_3 \left(Y_1 \frac{\partial f'_{m-1}}{\partial y_1} + Y_2 \frac{\partial f'_{m-1}}{\partial y_2} + Y_3 \frac{\partial f'_{m-2}}{\partial y_3} \right) + \\ + a Y_4 [(u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3) f_{m-1} + u_4 f_m] = 0. \end{aligned}$$

Pour qu'il en soit ainsi, le terme $u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3$ doit disparaître. Mais f_{m-1} ne peut être identiquement nul, donc f_{m-1} doit s'annuler en même temps que f'_{m-1}, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$f_{m-1} \equiv f'_{m-1}.$$

Cette condition est évidemment suffisante, et la transformation T' est maintenant représentée par

$$\left.\begin{aligned}
\rho x'_1 &= a x_1 f_{m-1}(x_1, x_2, x_3),\\
\rho x'_2 &= a x_2 f_{m-1}(x_1, x_2, x_3),\\
\rho x'_3 &= a x_3 f_{m-1}(x_1, x_2, x_3),\\
\rho x'_4 &= x_4 f_{m-1}(x_1, x_2, x_3) + f_m(x_1, x_2, x_3).
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Le carré de cette transformation s'écrit

$$\begin{aligned}
\rho' x''_1 &= a^2 x_1 f_{m-1},\\
\rho' x''_2 &= a^2 x_2 f_{m-1},\\
\rho' x''_3 &= a^2 x_3 f_{m-1},\\
\rho' x''_4 &= x_4 f_{m-1} + (a+1) f_m.
\end{aligned}$$

D'après la seconde condition, ces formules doivent représenter la transformation identique. Pour cela, il faut et il suffit que l'on ait $a + 1 = 0$.

La transformation T' est donc finalement

$$\begin{aligned}
\rho x'_1 &= - x_1 f_{m-1},\\
\rho x'_2 &= - x_2 f_{m-1},\\
\rho x'_3 &= - x_3 f_{m-1},\\
\rho x'_4 &= x_4 f_{m-1} + f_m.
\end{aligned}$$

Si l'on compare ces formules à celles de la transformation T, on voit que l'on peut obtenir T' en portant du système linéaire $\infty^3 \mid F \mid$, en posant

$$2\varphi_{n-4} = f_{m-1}, \quad \varphi_{n-3} \equiv f_m,$$

et en supposant que les cônes

$$\varphi_{n-4} = 0, \quad \varphi_{n-3} = 0$$

n'ont qu'un nombre fini de génératrices communes. Les autres fonctions $\varphi, \alpha, \beta, \gamma$ pourront être choisies arbitrairement.

Si une transformation monoïdale involutive et birationnelle est telle que les monoïdes correspondant aux plans aient au point multiple commun O *un contact du second ordre, et que toute droite issue de* O *soit transformée en elle-même, elle peut être considérée comme faisant se correspondre les points de contact des bitangentes passant par* O *aux surfaces d'un système linéaire* ∞^3 *de surfaces d'ordre* n, *ayant* O *comme point* (n — 4) — *uple, et contenant un réseau de surfaces ayant* O *comme point* (n — 2) — *uple.*

9. — On peut généraliser la transformation T qui vient d'être étudiée de la manière suivante:

Considérons une surface Φ, d'ordre n, ayant un point O multiple d'ordre $n-r-s$ et $r+s-1$ surfaces linéairement indépendantes $A_1, A_2, \ldots, A_{r+s-1}$, d'ordre n, ayant en O la multiplicité $n-r-s+2$. Ces surfaces déterminent un système linéaire ∞^{r+s-1} que nous désignerons par $|F|$. On peut étudier la correspondance entre les points P, Q telle qu'il y ait un surface du système $|F|$ ayant avec la droite PQ, en P un contact d'ordre $r-1$, en Q, un contact d'ordre $s-1$, la droite PQ passant par O. Nous allons montrer que cette correspondance est birationnelle.

Soient, O étant l'origine des coordonnées,

$$\Phi(x, y, z) \equiv \varphi_n(x, y, z) + \varphi_{n-1}(x, y, z) + \ldots + \varphi_{n-r-s}(x, y, z)$$

l'équation de Φ,

$$A_i(x, y, z) \equiv \alpha_{i,n}(x, y, z) + \alpha_{i,n-1}(x, y, z) + \ldots + \alpha_{i,n-r-s+2}(x, y, z),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r+s-1)$$

les équations de $A_1, A_2, \ldots, A_{r+s-1}$.

Posons

$$F(u) = \varphi_n + u\varphi_{n-1} + \ldots + u^{r+s}\varphi_{n-r-s},$$
$$F_i(u) = \alpha_{i,n} + u\alpha_{i,n-1} + \ldots + u^{r+s-2}\alpha_{i,n-r-s+2}.$$

Si une transformation monoïdale involutive et birationnelle est telle que les monoïdes correspondant aux plans aient au point multiple commun O *un contact du second ordre, et que toute droite issue de* O *soit transformée en elle-même, elle peut être considérée comme faisant se correspondre les points de contact des bitangentes passant par* O *aux surfaces d'un système linéaire* ∞^3 *de surfaces d'ordre* n, *ayant* O *comme point* (n — 4) — *uple, et contenant un réseau de surfaces ayant* O *comme point* (n — 2) — *uple.*

9. — On peut généraliser la transformation T qui vient d'être étudiée de la manière suivante:

Considérons une surface Φ, d'ordre n, ayant un point O multiple d'ordre $n-r-s$ et $r+s-1$ surfaces linéairement indépendantes $A_1, A_2, \ldots, A_{r+s-1}$, d'ordre n, ayant en O la multiplicité $n-r-s+2$. Ces surfaces déterminent un système linéaire ∞^{r+s-1} que nous désignerons par $| F |$. On peut étudier la correspondance entre les points P, Q telle qu'il y ait un surface du système $| F |$ ayant avec la droite P Q, en P un contact d'ordre $r-1$, en Q, un contact d'ordre $s-1$, la droite P Q passant par O. Nous allons montrer que cette correspondance est birationnelle.

Soient, O étant l'origine des coordonnées,

$$\Phi(x, y, z) \equiv \varphi_n(x, y, z) + \varphi_{n-1}(x, y, z) + \ldots + \varphi_{n-r-s}(x, y, z)$$

l'équation de Φ,

$$A_i(x, y, z) \equiv \alpha_{i,n}(x, y, z) + \alpha_{i,n-1}(x, y, z) + \ldots + \alpha_{i,n-r-s+2}(x, y, z),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r+s-1)$$

les équations de $A_1, A_2, \ldots, A_{r+s-1}$.

Posons

$$F(u) = \varphi_n + u\varphi_{n-1} + \ldots + u^{r+s}\varphi_{n-r-s},$$
$$F_i(u) = \alpha_{i,n} + u\alpha_{i,n-1} + \ldots + u^{r+s-2}\alpha_{i,n-r-s+2}.$$

Le système | F | est représenté par

$$\lambda\Phi + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_{r+s-1} A_{r+s-1} = 0. \qquad (1)$$

Les conditions pour que cette surface ait un contact d'ordre $r-1$ en P (x, y, z) avec la droite PO, sont

$$\left.\begin{array}{r}\lambda F(1) + \lambda_1 F_1(1) + \ldots + \lambda_{r+s-1} F_{r+s-1}(1) = 0,\\ \lambda F'(1) + \lambda_1 F'_1(1) + \ldots + \lambda_{r+s-1} F'_{r+s-1}(1) = 0.\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda F^{(r-1)}(1) + \lambda_1 F_1^{(r-1)}(1) + \ldots + \lambda_{r+s-1} F_{r+s-1}^{(r-1)}(1) = 0.\end{array}\right\} \quad (2)$$

Les conditions pour que la surface (1) ait un contact d'ordre $s-1$ en Q, de coordonnées $\frac{x}{k}, \frac{y}{k}, \frac{z}{k}$, avec la droite Q O, sont

$$\left.\begin{array}{r}\lambda F(k) + \lambda_1 F_1(k) + \ldots + \lambda_{r+s-1} F_{r+s-1}(k) = 0,\\ \lambda F'(k) + \lambda_1 F'_1(k) + \ldots + \lambda_{r+s-1} F'_{r+s-1}(k) = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda F^{(s-1)}(k) + \lambda_1 F_1^{(s-1)}(k) + \ldots + \lambda_{r+s-1} F_{r+s-1}^{(s-1)}(k) = 0.\end{array}\right\} \quad (3)$$

Écrivons que les $r+s$ équations (2) et (3) sont compatibles en λ. Nous obtenons un déterminant à $(r+s)^2$ éléments dont nous n'écrirons que deux lignes,

$$\Delta = \left|\begin{array}{l}F(1)\,F'(1)\ldots F^{(r-1)}(1)\,F(k)\,F'(k)\ldots F^{(s-1)}(k)\\ F_1(1)\,F'_1(1)\ldots F_1^{(r-1)}(1)\,F_1(k)\,F'_1(k)\ldots F_1^{(s-1)}(k)\end{array}\right| = 0, \quad (4)$$

les lignes non écrites se deduisant de la seconde en remplaçant l'indice 1 successivement par $2, 3, \ldots, r+s-1$.

Si au point P correspond un seul point Q, l'équation (4) doit avoir une seule racine différent de l'unité et de zéro.

Evaluons tout d'abord le degré de l'équation (4) par rapport à k. Pour cela, décomposons le déterminant en une somme de $(r+s+1)(r+s-1)^{r+s-1}$ déterminants ayant $(r+s)^2$ éléments, ces éléments étant les termes de $F(1), \ldots, F^{(r-1)}(1)$, $F(k), \ldots, F^{(s-1)}(k)$, $F_1(1) \ldots$. Il est facile de voir que ceux de ces déterminants, non nuls, contenant k à la plus haute puissance, sont du degré $rs+1$. L'équation (4) est donc de degré $rs+1$.

Observons maintenant que le premier des déterminants, obtenus en prenant les dérivées successives de Δ par rapport à k, qui ne soit pas nul pour $k=1$, est

$$\begin{vmatrix} F(1)\,F'(1)\ldots F^{(r-1)}(1)\,F^{(r)}(k)\,F^{(r+1)}(k)\ldots F^{(r+s-1)}(k) \\ F_1(1)\,F'_1(1)\ldots F_1^{(r-1)}(1)\,F_1^{(r)}(k)\,F_1^{(r+1)}(k)\ldots F_1^{(r+s-1)}(k) \end{vmatrix}.$$

Pour conséquent, l'équation (4) admet l'unité comme racine multiple d'ordre rs.

D'autre part, l'équation (4) n'admet pas la racine 0, donc elle possède une seule racine différente de 0 et de 1; il en résulte qu'il correspond un seul point Q au point P.

Inversement, il correspond un seul point P au point Q; la correspondance entre les points P, Q est birationnelle.

Cette correspondance T_1 est représentée, en coordonnées homogènes, par les équations

$$\left.\begin{aligned} \rho x'_1 &= r\, x_1\, \varphi_{n-r-s}(x_1, x_2, x_3), \\ \rho x'_2 &= r\, x_2\, \varphi_{n-r-s}(x_1, x_2, x_3), \\ \rho x'_3 &= r\, x_3\, \varphi_{n-r-s}(x_1, x_2, x_3), \\ \rho x'_4 &= -\varphi_{n-r-s+1}(x_1, x_2, x_3) - s\, x_4\, \varphi_{n-r-s}(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}\right\} \quad (T_1)$$

La transformation inverse, T_1^{-1}, qui fait correspondre le point P au point Q, est donnée pour

$$\left.\begin{aligned} \rho' x_1 &= s\, x'_1\, \varphi_{n-r-s}(x'_1, x'_2, x'_3), \\ \rho' x_2 &= s\, x'_2\, \varphi_{n-r-s}(x'_1, x'_2, x'_3), \\ \rho' x_3 &= s\, x'_3\, \varphi_{n-r-s}(x'_1, x'_2, x'_3), \\ \rho' x_4 &= -\varphi_{n-r-s+1}(x'_1, x'_2, x'_3) - r\, x'_4\, \varphi_{n-r-s}(x'_1, x'_2, x'_3). \end{aligned}\right\} \quad (T_1^{-1})$$

La transformation T_1 n'est donc involutive que pour $r=s$.

La transformation T_1^ν est représentée par les formules

$$\left.\begin{aligned}
\rho x'_1 &= r^\nu x_1 \varphi_{n-r-s}(x_1, x_2, x_3),\\
\rho x'_2 &= r^\nu x_2 \varphi_{n-r-s}(x_1, x_2, x_3),\\
\rho x'_3 &= r^\nu x_3 \varphi_{n-r-s}(x_1, x_2, x_3),\\
\rho x'_4 &= \frac{r^\nu+(-1)^{\nu-1}s^\nu}{r+s}\varphi_{n-r-s+1}(x_1, x_2, x_3)+(-s)^\nu\varphi_{n-r-s}(x_1, x_2, x_3).
\end{aligned}\right\}(T_1^\nu)$$

Si elle n'est pas involutive, la transformation T_1 ne peut être cyclique.

Bruxelles, le 27 Octobre 1924.

COIMBRA — Imprensa da Universidade — 1925