Estratto dal *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana*
Anno VIII - N. 1 - Febbraio 1929
Edito dalla Casa Editrice NICOLA ZANICHELLI, Bologna

Sur les congruences conjuguées et harmoniques à une surface

par LUCIEN GODEAUX (Liége).

Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes de WILCZYNSKI d'un point x de cette surface satisfont au système complètement intégrable d'equations aux derivées partielles

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0,$$

où nous posons

$$\varphi^{ik} = \frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial u^i \partial v^k}.$$

M. FUBINI [1] a démontré que toute congruence conjuguée à la surface (x) était engendrée par une droite r joignant le point x au point $\left(\frac{x}{\rho}\right)^{11}$, ρ étant une fonction de u, v convenablement choisie. La droite conjuguée de r par rapport à la quadrique de LIE relative au point x engendre une congruence harmonique à la surface (x). On peut donner une autre forme à ce théorème.

Envisageons, dans le plan tangent $xx^{10}x^{01}$ à la surface (x) au point x, une droite s ne passant pas par x. En observant que tout point de l'espace peut être représenté par

$$z_1 x + z_2 x^{10} + z_3 x^{01} + z_4 x^{11},$$

[1] *Alcuni risultati di geometria proiettiva-differenziale.* (« Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », 2° sem., 1923, pp. 321-326). *Sulle congruenze coniugate od armoniche ad una superficie data* (« Rend. Circolo matem. ». Palermo, 1925, pp. 201-205).

où z_1, z_2, z_3, z_4 sont appelées coordonnées locales du point, les équations locales de s peuvent s'écrire

$$z_1 + \alpha z_2 + \beta z_3 = 0, \quad z_4 = 0,$$

où α, β sont des fonctions de u, v.

Les points m, n où cette droite rencontre les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} à la surface (x) sont

$$m = \alpha x - x^{10}, \quad n = \beta x - x^{01}.$$

Nous avons

$$m^{10} = (\alpha^{10} + c_1)x + \alpha x^{10} + 2bx^{01},$$
$$n^{01} = (\beta^{01} + c_2)x + 2ax^{10} + \beta x^{01}$$

et les droites mm^{10}, nn^{01} se rencontrent en un point

$$\begin{vmatrix} x & x^{10} & x^{01} \\ 2b & 2b\alpha & -(\alpha^2 + \alpha^{10} + c_1) \\ 2a & -(\beta^2 + \beta^{01} + c_2) & 2a\beta \end{vmatrix}$$

du plan tangent $xx^{10}x^{01}$.

Nous avons d'autre part

$$m^{01} = \alpha^{01}x + \alpha x^{01} - x^{11},$$
$$n^{10} = \beta^{10}x + \beta x^{10} - x^{11}$$

et les droites mm^{01}, nn^{10} ont respectivement pour équations locales

$$z_1 + \alpha z_2 - (\log \alpha)^{01} z_3 = 0, \quad z_3 + \alpha z_4 = 0,$$
$$z_1 - (\log \beta)^{10} z_2 + \beta z_3 = 0, \quad z_2 + \beta z_4 = 0.$$

Pour que ces droites se rencontrent, on doit avoir

$$\alpha^{01} = \beta^{10}.$$

Il doit donc exister une fonction ρ de u, v telle que

$$\alpha = (\log \rho)^{10}, \quad \beta = (\log \rho)^{01}$$

et cette condition est nécessaire et suffisante. Le point de rencontre des deux droites est

$$y = m^{01} - m(\log \rho)^{01} = n^{10} - n(\log \rho)^{10}$$
$$= [(\log \rho)^{11} - (\log \rho)^{10}(\log \rho)^{01}]x + (\log \rho)^{01}x^{10} + (\log \rho)^{10}x^{01} - x^{11}$$

et nous avons

$$y = -\rho \left(\frac{x}{\rho}\right)^{11}.$$

Le droite $r = xy$ engendre donc une congruence (r) conjuguée à la surface (x). D'autre part, la droite s est la conjuguée de la droite r par rapport à la quadrique de Lie

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2ab z^2_4 = 0$$

relative au point x, donc le congruence (s) engendrée par s est harmonique à (x).

Nous pouvons par conséquent énoncer le théorème suivant: *Si l'on prend deux points* m, n *sur les tangentes asymptotiques en un point* x *d'une surface* (x) *et si les plans tangents en* m, n *aux surfaces* (m), (n) *et à la quadrique de Lie relative au point* x *ont un point commun, la droite* mn *engendre une congruence harmonique à la surface* (x). *Le point de rencontre des quatre plans et le point* x *déterminent une droite engendrant une congruence conjuguée à la surface* (x).

Liège, le 10 décembre 1928.