

Le second problème balistique.

-:- V. BURZIO -:-

Dans la *Revue des publications italiennes récentes sur la balistique rationnelle* (1), nous avons eu l'occasion de signaler diverses recherches de M.V. Burzio sur le mouvement d'un projectile autour de son centre de gravité, c'est-à-dire sur le second problème de la balistique extérieure.

Ce second problème balistique est le plus important des problèmes secondaires; les recherches auxquelles il a donné lieu dans ces dernières années permettent d'espérer que bientôt, les résultats théoriques obtenus pourront être utilisés en pratique. Les plus grandes difficultés qu'il reste à vaincre sont de nature expérimentale. Dans ces conditions, il a paru intéressant à M. Burzio de jeter un regard d'ensemble sur le problème et de comparer les résultats obtenus par différents chercheurs. Nous nous proposons de donner in extenso l'exposé très intéressant de M. Burzio.

Le travail de M. Burzio est divisé en trois parties :

I. — *Rappel des théories existantes sur la rotation des projectiles* (Mayevski, De Sparre, Burzio).

II. — *Théorie de Esclangon*.

III. — *Comparaisons et conclusions*.

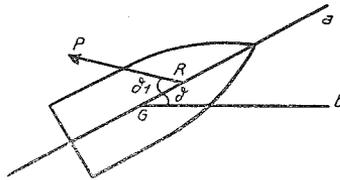
* * *

(1) *Bulletin Belge des Sciences Militaires*, 1922.

I. — Rappel des théories existantes sur la rotation des projectiles. (1)

On se limitera à rappeler brièvement ce qui est exposé dans les traités classiques de balistique au sujet du second problème balistique, en insistant davantage sur les résultats récents, qui constituent la mise au point de la question.

On sait que le mouvement du projectile autour de son centre de gravité G constitue un cas particulier, d'ailleurs fort complexe, du mouvement d'un système rigide autour d'un point fixe (G pouvant être assimilé à un point fixe en vertu de théorèmes bien connus de mécanique). Les autres cas particuliers simples étudiés et plus ou moins complètement résolus sont les problèmes classiques d'Euler-Poinsot (mouvement d'inertie), dans lequel le point fixe est le centre de gravité, les forces appliquées au corps (en particulier le poids) ayant un moment nul par rapport au point fixe; de Lagrange-Poisson (mouvement du gyroscope symétrique ou de la toupie) dans lequel le corps est de révolution, le point fixe sur l'axe de figure, la force appliquée (en particulier le poids) rencontrant l'axe et étant constante; de Kowalewski, qui peut être considéré comme un cas particulier du précédent. Des trois problèmes, le plus proche du second problème



(1) Voir par exemple : BIANCHI, *Corso di Balistica esterna*, Torino, Pasta, 1922 (p. 69 et suivantes). SAINT-ROBERT, *Mémoires Scientifiques*, Turin, 1872 (tome I, p. 173 et suivantes). MAYEVSKI, *Traité de balistique*, 1872 (p. 154 et suivantes). DE SPARRE, *Du mouvement des projectiles*,... (voir la théorie de M. De Sparre dans CHARBONNIER, *Balistique extérieure rationnelle*, volume II, p. 310, Paris, Doin, 1907). Voir en outre : BURZIO, *Sul moto e sulla stabilità dei proietti* (*Rivista di Artiglieria*, 1918); *La nutazione nel moto dei proietti*, *Applicazioni del secondo problema balistico* (Idem, 1918-1919); *Su alcune formule del Mayevski* (*Atti R. Accad*, Torino, 1918). On adoptera ici les notations de Bianchi.

balistique est celui de la toupie, comme on le voit lorsque l'on fait correspondre le point d'appui sur le sol de la toupie au centre de gravité du projectile, la force déviatrice « poids » à la résistance de l'air, la verticale à la tangente à la trajectoire. Dans les deux cas, il s'agit de mouvements gyroscopiques, qui doivent leurs caractéristiques à la rotation propre très rapide (de vitesse angulaire r) autour de l'axe de figure, c'est-à-dire, que la toupie ne tombe pas malgré l'action de la pesanteur et que le projectile ne se renverse pas malgré le couple perturbateur dû à la résistance de l'air. Les différences entre les deux mouvements, qui donnent lieu à la plus grande complexité du problème du projectile, consistent essentiellement en ce que la force déviatrice est constante dans la toupie, variable dans le projectile et que la verticale est une droite de direction fixe, tandis que la tangente à la trajectoire de G a une orientation variable.

On sait que le mouvement de la toupie jouit des propriétés suivantes :

1° En négligeant les frottements latéraux dus à l'air, la rotation propre est constante.

2° L'axe de figure, par l'effet gyroscopique, ne tombe pas, mais tourne autour de la verticale avec une vitesse angulaire moyenne $\frac{M}{Cr \sin \delta}$, où M est le couple perturbateur dû à la pesanteur, C le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de figure, δ l'angle de l'axe de figure avec la verticale (cette vitesse est appelée vitesse de *précession*).

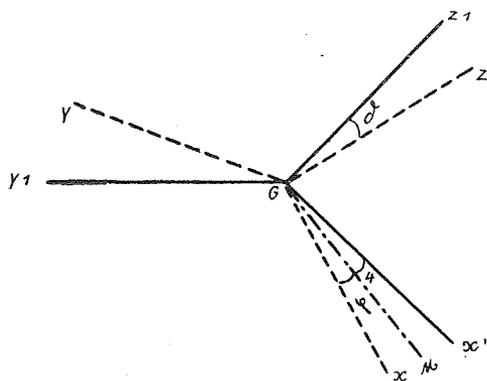
3° Pendant que l'axe tourne autour de la verticale, il est encore l'objet de petites oscillations rapides autour du cône moyen de précession (mouvement de *nutaton*, dont la vitesse est $\frac{d\delta}{dt}$).

Ce sont aussi à peu de choses près les propriétés du mouvement du projectile par rapport à G quand à la verticale de la toupie, on substitue la tangente à la trajectoire de G ; mais les différences indiquées plus haut font que l'analogie n'est pas une identité et que le problème du projectile doit

être traité directement quand on veut passer d'une représentation qualitative à une solution quantitative, utilisable dans les nombreuses questions pratiques qui en dépendent (dérivation, rayures de l'âme, influence sur le problème principal, etc.).

a) THÉORIE DE MAYEVSKI (et SAINT-ROBERT). — Une première tentative d'étude du problème du projectile, en profitant de son analogie avec celui de la toupie, fut faite quasi contemporanément par Saint-Robert (1859-1860) et Mayevski (1865).

L'étude analytique du mouvement est faite au moyen des équations d'Euler, en adoptant l'hypothèse simplificative de la *tangente fixe*. On peut alors écrire, pour le projectile, les systèmes d'Euler.



$$(1) \begin{cases} Bp' + qr(C - B) = M_x, \\ Bq' + rp(B - C) = M_y, \\ Cr' = 0, \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} p = \psi' \sin \delta \sin \varphi + \delta' \cos \varphi, \\ q = \psi' \sin \delta \cos \varphi - \delta' \sin \varphi, \\ r = \psi' \cos \delta + \varphi', \end{cases}$$

où $Gxyz$ est un trièdre orthogonal lié au projectile, dont les arêtes sont des axes principaux d'inertie, Gz étant l'axe de figure, Gx , Gy des axes équatoriaux; B est le moment d'inertie équatorial; $Gx_1y_1z_1$ est un trièdre orthogonal à orientation constante dans l'espace, Gz_1 coïncidant avec la tangente, Gy_1z_1 , étant le plan de tir; p, q, r sont les composantes de la vitesse angulaire sur Gx, Gy, Gz ; δ, ψ, φ sont les angles d'Euler (1), c'est-à-dire δ la *nutation*, ψ la *précession*,

(1) ψ est l'angle du plan de tir z_1Gy_1 avec le plan z_1Gz , dit *plan de résistance* parce qu'il contient la résistance de l'air ρ .

φ l'azimut; enfin M est le module du couple perturbateur dû à la résistance de l'air.

De la troisième des équations (1), on déduit que, comme pour la toupie (en négligeant les frottements), r est constant. Par des calculs laborieux, et en faisant quelques hypothèses simplificatrices, Saint-Robert (2) et Mayevski arrivent à l'expression suivante pour la *vitesse de précession*,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{M}{Cr \sin \delta} \left(1 - \cos \frac{Cr}{B} t\right).$$

Mayevski montre comment, en prenant pour δ une valeur moyenne et en supposant M petit par rapport à Cr , cette expression de la vitesse de précession peut être considérée comme égale à celle de la toupie.

Poursuivant ses recherches, Mayevski cherche à tenir compte de l'abaissement de la tangente, mais il le fait par des procédés qui laissent place au doute sur la portée des résultats, parce qu'il tient compte des résultats obtenus en supposant la tangente fixe. Il parvient aux équations donnant les vitesses angulaires de nutation et de précession,

$$(3) \quad \frac{d\delta}{dt} = -\cos \psi \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{M}{Cr \sin \delta} + \frac{\sin \psi}{\operatorname{tg} \delta} \frac{d\theta}{dt},$$

où θ est l'inclinaison de la tangente.

Saint-Robert et Mayevski cherchent alors de diverses manières à résoudre complètement le problème, passant des intégrales premières aux intégrales secondes, c'est-à-dire, aux valeurs de δ et de ψ , par des méthodes d'intégration approchée.

On doit à Mayevski d'avoir énoncé le premier la *loi caractéristique de la précession balistique*, c'est-à-dire, que, alors que dans la toupie ψ croît indéfiniment (c'est-à-dire que l'axe accomplit plusieurs tours autour de la verticale), dans le projectile ψ reste inférieur à π , c'est-à-dire que le plan de résistance reste toujours du même côté du plan de projection. La démonstration de Mayevski n'est pas rigoureuse,

(2) A vrai dire, Saint-Robert parvient en premier lieu à $\frac{d\psi}{dt} = \frac{M}{Br \sin \delta}$.

parce qu'il dérive des expressions approchées et adopte les mêmes valeurs moyennes pour une variable dans des intervalles d'intégration successifs. M. Burzio a donné une démonstration rigoureuse de cette propriété, montrant de plus que la loi $\psi < \pi$ peut tomber en défaut au delà du point de vitesse minimum.

A la théorie de Mayevski se rattache la méthode indiquée par le colonel Vallier pour la résolution du second problème. Un pas en arrière serait fait par la méthode récente de Vahlen, qui retourne, comme l'a fait observer récemment le général Cavalli, à l'hypothèse de la tangente fixe. Adopter cette hypothèse signifie que l'on néglige, non pas un infiniment petit d'ordre supérieur, mais une quantité, $\frac{d\theta}{dt}$, du même ordre de grandeur que celle que l'on veut déterminer.

b) THÉORIE DE DE SPARRE. — Le second problème acquiert un caractère et des développements spécifiques par les travaux de De Sparre (1); la méthode de cet auteur peut être appelée méthode géométrico-mécanique. Elle se rattache à la théorie de Poinsoot sur la rotation des systèmes rigides à point fixe et, abandonnant l'hypothèse de la tangente fixe, elle se limite aux deux hypothèses simplificatives suivantes :

1° L'angle de l'axe de figure avec la tangente, c'est-à-dire la nutation δ est petit (ce qui correspond à la stabilité du projectile le long de la trajectoire et est vérifié en pratique du fait que, en général, les projectiles tombent sur la pointe, c'est-à-dire sont stables).

2° Les trois axes caractéristiques du mouvement, c'est-à-dire l'axe de figure Ga , l'axe de rotation instantanée Gi , l'axe moment de la quantité de mouvement Gm , coïncident.

La seconde hypothèse peut être légitimée de la manière suivante : D'après Poinsoot, Ga , Gi et Gm sont coplanaires et on a $\frac{\text{tg } aGi}{\text{tg } aGm} = \frac{C}{B}$, c'est-à-dire, que les angles aGi , aGm

(1) M. Burzio avertit ici que n'ayant pu se procurer les travaux originaux de M. De Sparre, il a reconstruit la théorie d'une manière qui lui paraît rigoureuse, et donnant des résultats concordants, mais différant dans les démonstrations de celle qui est donnée par le général Charbonnier (loc. cit.).

sont du même ordre de grandeur. D'autre part, $tgaGi = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r}$ donc si $\sqrt{p^2 + q^2}$ (vitesse angulaire due au couple perturbateur) est négligeable vis-à-vis de r , aGi et aGm seront réellement très petits. En faisant ces observations et en donnant des formules pour résoudre numériquement le problème de la nutation, M. Burzio (*La nutazione nel moto dei proietti*, loc. cit.) a pu montrer que ces angles étaient réellement très petits et pouvaient être considérés comme des infiniments petits d'ordre supérieur à δ , c'est-à-dire que cette seconde hypothèse est également justifiée. D'autre part, comme le remarque le général Charbonnier, la divergence de Gi de Ga (mesurée par $\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r}$) est produite par le couple perturbateur, dont le moment M , comme on le verra, est proportionnel à δ , de sorte que la seconde hypothèse peut être considérée comme contenue implicitement dans la première. On en déduit :

a) Le mouvement de Ga , est celui de l'axe Gm supposé matérialisé.

b) Le module du vecteur moment de la quantité de mouvement qui vaut, par la mécanique rationnelle,

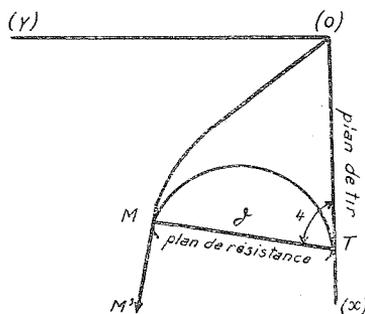
$$\sqrt{C^2 r^2 + B^2 (p^2 + q^2)}$$

est Cr .

c) Considérant l'axe Gm comme un système rigide, l'extrémité, sur cet axe, du segment issu de G et égal à Cr , se meut, par le théorème du moment de la quantité de mouvement, avec une vitesse égale (en module et direction) au moment vectoriel du couple perturbateur \overline{M} ; donc $\frac{\overline{M}}{Cr}$ est la vitesse angulaire du système rigide Gm ; donc ce sera la vitesse angulaire du point M de Gm , distant de l'unité de longueur de G . Considérons la sphère de centre G et de rayon 1 , et soit T le point d'intersection de la tangente Gt à la trajectoire de G avec cette sphère. Durant le mouvement,

T décrit un arc de grand cercle et M une trajectoire sphérique qui, si δ est petit, restera toujours voisine de T. Considérons le cylindre tangent à la sphère le long du grand cercle T et développons-le sur un plan; la trajectoire de T devient une droite et il s'agit de déterminer celle de M. A cet effet, on la regardera comme une roulette engendrée par un mouvement plan de système rigide et on prendra comme base de ce mouvement la droite lieu de T, sur laquelle T occupe à chaque instant une position connue, parce que l'on suppose connue la quantité $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos \theta}{v}$ (par le problème principal). La vitesse M' de M est, par le théorème de la quantité de mouvement, normale à chaque instant à la droite MT (intersection du plan de résistance et du plan développant le cylindre); donc le centre instantané est T, c'est-à-dire, que la vitesse de roulement de la roulette sur la base est $-\frac{d\theta}{dt}$, quantité connue. D'autre part, la vitesse angulaire du système rigide fictif auquel M est imaginé lié est la vitesse de M divisé par la distance de M à T, c'est-à-dire δ ; cette vitesse est donc $\frac{\bar{M}}{Cr\delta}$. Alors, si R_s et R_p sont les rayons de courbure de la base et de la roulette, on a, par la formule d'Euler-Savary,

$$(4) \quad \frac{\bar{M}}{Cr\delta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_p}$$



On a (fig. 1) $M = \rho \cdot GR \sin \delta_1$. En posant $GR = l, \delta_1 = f(\delta)$ (où pour $\delta = 0, \delta_1 = 0$), nous avons, en développant en série

et en négligeant les puissances de δ supérieures à la première, $\delta_1 = k\delta$, où $k = f'(0)$ sera considéré comme une grandeur expérimentale. D'autre part, par l'hypothèse que δ est petit, on peut prendre pour ρ sa composante tangentielle $\frac{p}{g} cF(v)$, où c est le coefficient balistique (français). On aura donc $M = \frac{p}{g} cFlk\delta$ et, en tenant compte de ce que ici $R_s = \infty$, (4) deviendra

$$(4') \quad Rp = \frac{Crg^2 \cos \theta}{plkcvF(v)}$$

Le problème principal étant résolu et les quantités l , k déterminées expérimentalement ou calculées par les théories aérodynamiques, le second membre de (4') est connu et à chaque instant, le rayon de courbure de la roulette (appelée *roulette de précession*). On pourra construire graphiquement cette roulette comme enveloppe de ses cercles osculateurs; en la faisant ensuite rouler sur la droite (0) T (fig. 3), on aura la roulette décrite par M, point invariablement lié à la précédente roulette, en remarquant que la position initiale M_0 peut être supposée connue (et sera O si la déviation initiale δ_0 est nulle). Il est intéressant de remarquer que le rayon de courbure R est l'inverse d'une quantité Q qui joue un rôle important dans la théorie de Mayevski et dans les conséquences que M. Burzio en a déduites.

Telle est la reconstruction qu'il a paru pouvoir être faite de la théorie de M. De Sparre. Comme on l'aura remarqué, la belle innovation, entièrement dans l'esprit synthétique de Poinsoot, consiste à considérer le moment de la quantité de mouvement comme un vrai système matériel rigide dont on étudie le mouvement et qui, en première approximation, est considéré comme lié au projectile (coïncidant avec l'axe de figure), tandis qu'en seconde approximation, on pourra étudier le mouvement relatif du projectile lui-même. Dans le cas le plus simple du mouvement d'inertie, le moment de la quantité de mouvement est constant non seulement en module, mais aussi en direction, ce qui revient à dire que la

trajectoire de M se réduit à un point. Dans le cas, déjà plus complexe, de la toupie, la trajectoire de M est, en première approximation, une circonférence de centre T (GT étant vertical); en seconde approximation, c'est une courbe à petites ondulations décrite autour de cette circonférence.

En balistique, on appelle généralement la première approximation : problème (et mouvement) de la *précession*; et la seconde : problème (et mouvement) de la *nutation*. Cela serait exact si, en première approximation, on se bornait à calculer l'angle de précession ψ en supposant l'angle de nutation δ constant, en réservant l'étude des variations δ à la seconde approximation. Au contraire, dans la méthode de M. De Sparre, dans celle de M. Burzio et dans celle de M. Esclangon, déjà dans la première approximation, on détermine δ et ψ , tandis que dans la seconde, on introduit des corrections pour les valeurs calculées. Il vaudrait donc mieux user des termes : *précession balistique* et *nutations balistique* pour désigner les approximations successives.

On sait que M. De Sparre a donné une théorie géométrique de la nutation balistique analogue à celle de la précession balistique, et une théorie de la dérivation au moyen de développements en séries, qui comprend celle de Mayevski.

c) THÉORIE DE BURZIO. — Les travaux de M. Burzio sur la rotation des projectiles peuvent être divisés en quatre parties :

Méthode analytico-géométrique pour la précession balistique, c'est-à-dire pour la détermination de ψ et de δ dans l'hypothèse de la coïncidence des trois axes. Elle a été appelée ainsi pour la distinguer de la méthode analytique suivie par Saint-Robert, Mayevski et récemment par M. Esclangon. Elle se présente comme une traduction analytique de l'élégante solution géométrique de M. De Sparre. Si, en effet, dans le plan développant le cylindre considéré plus haut, on prend (fig. 3) deux axes rectangulaires (x), (y) ayant l'origine (o) au point de départ, les conditions du problème se traduisent, en posant pour la vitesse de M, $\frac{M}{Cr} = (k) \delta$,

où $(k) = \frac{p}{g} \frac{lkcF}{Cr}$ est une quantité connue, dans le système d'équations à quatre inconnues x, y, δ, ψ ,

$$(5) \begin{cases} (k)\delta = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \\ \delta = \sqrt{[x - (\varphi - \theta)]^2 + y^2}, \\ y = \delta \sin \psi, \\ x' = (k) \delta \sin \psi. \end{cases}$$

Le système (5) réduit le problème à des quadratures, donnant lieu à une formule assez simple pour x , quand on introduit l'hypothèse simplificative, déjà admise par Mayevski, que $\psi \approx \frac{\pi}{2}$, hypothèse approximativement vérifiée.

L'auteur, dans les application numériques, s'est servi jusqu'à présent des équations (5) pour obtenir des formules, également assez simples, pour le calcul par points de la trajectoire de M, avec quelques approximations, par la méthode de Cauchy-Lipschitz. On a en effet, en éliminant δ et ψ des (5),

$$x' = (k) y, \quad y' = (k)[(\varphi - \theta) - x],$$

d'où, facilement,

$$\Delta_i x = \frac{K_{im} \Delta_i t \{y_{i-1} + \frac{1}{2} K_{im} \Delta_i t [(\alpha - \theta_{im}) - x_{i-1}]\}}{1 + \frac{1}{4} K_{im}^2 \Delta_i t^2}$$

$$\Delta_i y = \frac{K_{im} \Delta_i t [(\alpha - \theta_{im}) - x_{i-1} - \frac{1}{2} K_{im} \Delta_i t y_{i-1}]}{1 + \frac{1}{4} K_{im}^2 \Delta_i t^2}$$

avec, pour $i = 1$, $x_{i-1} = y_{i-1} = 0$. De nombreuses applications numériques ont confirmé la simplicité et l'exactitude de cette méthode.

Nouvelles propriétés de la précession balistique. — En développant la méthode analytique générale, c'est-à-dire en écrivant le théorème du couple acquis par rapport à un trièdre orthogonal mobile dans le solide et dans l'espace,

comme l'est effectivement $Gx_1y_1z_1$ (doué du mouvement $-\frac{d\theta}{dt}$), M. Burzio, dans la seule hypothèse que Gm coïncide avec Ga , a retrouvé pour $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\delta}{dt}$, les formules (3) de Mayevski. De ces formules, l'auteur a déduit plusieurs théorèmes, notamment les suivants :

I. — A l'origine, la vitesse de précession du projectile est la moitié de celle de la toupie; la vitesse de nutation est égale à celle d'abaissement de la tangente. Au point final $\theta = \frac{\pi}{2}$, la vitesse de précession du projectile devient égale à celle de la toupie, la vitesse de nutation s'annule.

II. — Tandis que la propriété caractéristique de la précession signalée par Mayevski, est vérifiée, c'est-à-dire que ψ reste inférieur à π et oscille autour de $\frac{\pi}{2}$, à partir du point de vitesse minimum, ψ peut dépasser π , c'est-à-dire que le projectile peut se comporter comme une toupie.

Formule pour la nutation balistique. — Comme application de la méthode analytico-géométrique pour la précession et des équations (3), M. Burzio a donné quelques formules pour le calcul des angles de l'axe de figure Ga avec les axes Gi , Gm , supposé coïncidants en première approximation.

Puisque l'on a $\frac{\text{tg } aGi}{\text{tg } aGm} = \frac{C}{B}$, $\text{tg } aGi = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r}$, on connaîtra

l'angle aGm quand $\sqrt{p^2 + q^2}$ sera connu. Or, $\sqrt{p^2 + q^2}$ est la projection, sur le plan de tir, de la vitesse angulaire totale Ω , qui est considérée comme la résultante de quatre vitesses : r ,

de rotation propre; $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\delta}{dt}$ du mouvement relatif de l'axe

de figure par rapport au trièdre $Gx_1x_1z_1$; — $\frac{d\theta}{dt}$ de ce der-

nier par rapport à l'espace fixe. L'application de ces considérations conduit M. Burzio à des formules donnant $\text{tg } aGi$ qui, dans des exemples numériques particulièrement défavorables, montrent l'extrême petitesse de l'angle aGm par

rapport à δ , c'est-à-dire que la première approximation semble suffisante.

Dérivation. Une loi aérodynamique établie par des déductions balistiques. — La résolution du problème de la précession ouvre la voie à celle du problème de la dérivation. M. Burzio s'est servi, dans ses travaux sur la dérivation, de l'équation différentielle donnée par le Gén. Charbonnier,

$$\frac{d\eta}{dt} = (k-1) \frac{cF\delta \sin \phi}{v \cos \theta}$$

où $\eta = \frac{dz}{dx}$ est l'inclinaison de la *courbe de dérivation* $z = z(x)$. Il a pu démontrer que cette équation, qui réduit le problème de la dérivation aux quadratures et qui avait été obtenue par le Gén. Charbonnier, au moyen de considérations géométriques synthétiques, est rigoureuse à des infiniment petits de l'ordre de η^2 près; ceci est essentiel dans sa méthode, parce qu'il a basé sur cette équation les applications ultérieures. Celles-ci ont porté sur la détermination des valeurs moyennes de l , k , grandeurs qui figurent dans tout le second problème balistique, dont la solution peut être désormais considérée comme atteinte, mais seulement lorsque l et k ont des valeurs exactes. M. Burzio est parti de l'idée que la dérivation est l'unique grandeur dépendant théoriquement d'une manière rigoureuse du second problème, dont les valeurs sont mesurables expérimentalement, pratiquement mesurées au polygone et enregistrées dans les tables de tir. Les valeurs exactes de l et k , introduites dans les formules de la précession, puis dans celles de la dérivation, devront donc donner des valeurs calculées de la dérivation égales aux valeurs expérimentales. Partant de là, et se basant sur de nombreux exemples numériques, M. Burzio a pu vérifier que les valeurs de l , k suggérées par les diverses théories de la résistance de l'air, sont inacceptables et il en a déterminé d'autres qui ont donné la propriété suivante : *k diminue quand la vitesse croît* (de 4, 5 à 3,5 à 1,5 en passant de vitesses de 10 à 250 à 550 ^m/_{sec}), c'est-à-dire que *la résistance croît, la poussée diminue et le « rendement aérodynamique » s'abaisse*. Ces

lois, établies par M. Burzio en 1920, ont reçu une confirmation expérimentale complète dans les expériences américaines récentes (1925) exécutées par MM. Briggs, Hull et Dryden sur des modèles de profils d'hélices dans le tunnel aérodynamique, pour des vitesses atteignant 300 ^m/_{sec}, (*National Advisory Committee for Aeronautics*, Report n° 207.)

(*A suivre.*)

Lucien GODEAUX.

Professeur à l'Université de Liège.



II. — Théorie de M. ESCLANGON

Dans ce paragraphe sont exposés les points saillants de la théorie de M. Esclangon; la comparaison avec les autres théories sera faite dans le troisième paragraphe.

1. — *Forces agissant sur le projectile.* — M. Esclangon considère (au moins au début et théoriquement) outre les forces de pression et de frottement longitudinal, dont la résultante est la résistance de l'air ρ habituellement considérée et contenue dans le plan de résistance, les forces de *frottement latéraux*, dues à la rotation du projectile et dont la résultante (qu'on peut considérer comme proportionnelle à r) est perpendiculaire au plan de résistance.

2. — *Moment des forces.* — On considère deux trièdres de référence; l'un, $Gxyz$, lié au projectile; l'autre, $Gx_1y_1z_1$, lié à la trajectoire (fig. 2).

a) *Moment de la résistance ρ .* — C'est celui qui a été désigné plus haut par M . Sa valeur est $M = \rho l \sin \delta_1$; il est normal au plan z_1Gz , c'est-à-dire dirigé comme n . Ses composantes sur x , y , z sont respectivement

$$\rho l \sin \delta_1 \cos \varphi, \quad - \rho l \sin \delta_1 \sin \varphi, \quad 0.$$

En posant $\delta_1 - \delta = \mu \delta$, $M = \Phi(\delta) \sin \delta$, on a, si δ est petit,

$$M = \rho l (1 + \mu) \delta = a \delta, \quad a = \rho l (1 + \mu).$$

b) *Moment des forces de frottements latéraux.* — Ce moment se trouve dans le plan de résistance et est proportionnel, d'une part à la rotation propre r , d'autre part à

(1) Voir *Bulletin belge des Sciences militaires*, 1927, p. 189-202.

une constante physique k dépendant de la nature des frottements. Ses composantes sur x, y, z sont respectivement

$$\lambda_1 k r \sin \varphi, \lambda_1 k r \cos \varphi, - \lambda_2 k r,$$

où l'on peut poser $\lambda_1 = \sin \delta f(\delta)$, $\lambda_2 = g(\delta)$, $f(\delta)$ et $g(\delta)$ étant des fonctions paires de δ qui, pour de petites valeurs de δ , peuvent être considérées comme constantes.

3. — *Equations du mouvement.* — Etude du mouvement du projectile autour de G. On passe d'une position à la position suivante au moyen de quatre rotations : les trois rotations d'Euler, δ' autour de n , ψ' autour de z_1 , φ' autour de z , et l'abaissement de la tangente, rotation θ' autour de x_1 . Les composantes p, q, r de la vitesse angulaire totale sur les trois axes G $x y z$ sont :

$$(6) \begin{cases} p = \psi' \sin \delta \sin \varphi + \delta' \cos \varphi - \theta' \cos (x x_1), \\ q = \psi' \sin \delta \cos \varphi - \delta' \sin \varphi - \theta' \cos (y x_1), \\ r = \psi' \cos \delta + \varphi' - \theta' \cos (z x_1), \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \cos (x, x_1) &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \delta, \\ \cos (y, x) &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \delta, \\ \cos (z, x_1) &= \sin \delta \sin \psi. \end{aligned}$$

Nous écrivons les équations de Lagrange pour le mouvement du projectile relatif à G, en prenant comme paramètres δ, ψ, φ , après avoir calculé les expressions de la force vive et du travail élémentaire.

4. — *Force vive T.* — On a

$$2 T = B (p^2 + q^2) + C r^2,$$

moyennant

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= \delta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \delta - 2\theta' [\delta' \cos \psi \\ &\quad - \psi' \sin \delta \cos \delta \sin \psi] + \theta'^2 [\cos^2 \psi + \sin^2 \psi \cos^2 \delta], \\ r^2 &= \psi'^2 \cos^2 \delta + 2 \psi' \varphi' \cos \delta + \varphi'^2 + \theta'^2 \sin^2 \delta \sin^2 \psi \\ &\quad - 2 \theta' \sin \delta \sin \psi (\varphi' + \psi' \cos \delta). \end{aligned}$$

5. — *Travail élémentaire $\Delta \mathcal{T}$.* — a) *Travail de la résistance.* — Le travail de $M = \Phi(\delta) \sin \delta$ est $\Phi(\delta) \sin \delta d\delta$.

b) *Travail des frottements.* — Le couple des frottements, situé dans le plan de résistance, a pour composantes suivant Gz_1 et Gz , $-kr g(\delta) \cos \delta + krf(\delta) \sin^2 \delta$ et $-kr g(\delta)$. Ces deux couples fournissent un travail élémentaire $[-kr g(\delta) \cos \delta + krf(\delta) \sin^2 \delta] d\delta$ et $-kr g(\delta) d\delta$. On en déduit la valeur de $\Delta \mathcal{C}$.

6. — *Equations de Lagrange.* — Ces équations sont :

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \varphi}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \psi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \psi}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \delta'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \delta}. \end{array} \right.$$

La première de ces équations donne, par la 3^e des (6), $C \frac{dr}{dt} = -kr g(\delta)$, d'où

$$r = r_0 e^{-\frac{k}{C} \int_0^t g(\delta) dt}.$$

r est donc fonction décroissante du temps. Puisque k est très petit, que $g(\delta)$, pour δ très petit, peut être supposé constant et si t , durée de la trajectoire, est petit, on voit que r reste assez voisin de sa valeur initiale r_0 .

En tenant compte de (6), les 2^e et 3^e équations (7) deviennent :

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} B [\delta'' - \psi'^2 \sin \delta \cos \delta] + Cr \psi' \sin \delta = \Phi(\delta) \sin \delta \\ \quad + B \theta'' \cos \psi - \theta' [2 B \psi' \sin^2 \delta \sin \psi \\ \quad + Cr \sin \psi \cos \delta] - B \theta'^2 \sin^2 \psi \sin \delta \cos \delta, \\ B [\psi'' \sin \delta + 2\psi' \delta' \cos \delta] - Cr \delta' = kr \sin \delta f(\delta) \\ \quad - B \theta'' \sin \psi \cos \delta + \theta' [2 B \delta' \sin \delta \sin \psi \\ \quad - Cr \cos \psi] - B \theta'^2 \sin \psi \cos \psi \sin \delta. \end{array} \right.$$

7. — *Hypothèses simplificatrices.* — a) r est très grand. On négligera les carrés et les produits de δ' , ψ' , θ' et θ'' . Les (8) deviennent :

$$(8') \left\{ \begin{array}{l} B \delta'' + Cr \psi' \sin \delta = \Phi(\delta) \sin \delta - Cr \theta' \sin \psi \cos \delta, \\ B \psi'' \sin \delta - Cr \delta' = krf(\delta) \sin \delta - Cr \theta' \cos \psi. \end{array} \right.$$

b) On supposera en outre $B \delta''$ et $B \psi''$ très petits, ce qui équivaut à supposer que le projectile ne subit jamais de variations brusques d'orientation. Il vient

$$(8'') \quad \begin{cases} Cr \psi' \sin \delta = \Phi(\delta) \sin \delta - Cr \theta' \sin \psi \cos \delta, \\ - Cr \delta' = k r \sin \delta f(\delta) - Cr \theta' \cos \psi. \end{cases}$$

c) *Cas d'un projectile stable.* — Alors δ est petit et en substituant a à $\Phi(\delta)$, α à $f(\delta)$, δ à $\sin \delta$, 1 à $\cos \delta$, on a

$$(8''') \quad \begin{cases} Cr \delta \psi' = a \delta - Cr \theta' \sin \psi, \\ - Cr \delta' = k r \alpha \delta - Cr \theta' \cos \psi. \end{cases}$$

En se rappelant que $M = a \delta$, ces équations peuvent encore s'écrire

$$(9) \quad \delta' = -\frac{k \alpha}{C} \delta + \cos \psi \cdot \theta', \quad \psi' = \frac{M}{Cr \delta} - \frac{\sin \psi}{\delta} \theta'.$$

Considérons le point situé sur l'axe Ga du projectile à la distance 1 de G . Ses coordonnées sur les axes x_1, y_1, z_1 sont $\sin \delta \sin \psi, -\sin \delta \cos \psi, \cos \delta$ et, pour δ petit, en posant $u = \delta \sin \psi, v = -\delta \cos \psi$, elles deviennent $u, v, 1$. L'axe du projectile a donc pour cosinus directeurs, par rapport à $Gx_1 y_1 z_1$, $u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}$. En prenant u, v comme nouvelles variables, (9) devient

$$(10) \quad \begin{cases} u' = -\frac{k \alpha}{C} u - \frac{a}{Cr} v, \\ v' = \frac{a}{Cr} u - \frac{k \alpha}{C} v - \theta'. \end{cases}$$

Posons $m = \frac{a}{Cr} = \frac{M}{Cr \delta}, k_1 = -\frac{k \alpha}{a} r$. Les quantités

$$u_1 = \frac{1}{1 + k_1^2} \frac{\theta'}{m}, \quad v_1 = \frac{k_1}{1 + k_1^2} \frac{\theta'}{m}$$

annulent les seconds membres des équations (10) et celles-ci peuvent s'écrire

$$(11) \quad \begin{cases} u' = -m(v - v_1) + m k_1(u - u_1), \\ v' = m(u - u_1) + m k_1(v - v_1). \end{cases}$$

k_1 mesure l'effet des frottements et est petit vis-à-vis de m (sauf quand R est voisin de G); en négligeant k_1 , on a

approximativement : a) $u_1 = \frac{\theta'}{m}$, b) le point (u, v) tourne autour du point (u_1, v_1) avec une vitesse angulaire égale à m .

L'axe de cosinus directeurs $u_1, v_1, \sqrt{1 - (u_1^2 + v_1^2)}$ est appelé *axe de précession instantanée* à l'instant t ; on l'indiquera par $G e$ et E sera celui de ses points situé à la distance 1 de G .

8. — *Valeur de m .* — Pour un projectile du calibre de 0 m. 38, de coefficient balistique $10^4 c = 1$, de vitesse initiale $v = 600$ m./sec., les rayures ayant une inclinaison de 6° , m est de l'ordre de $1/6$ de tour par $1''$.

9. — *Variations de u_1 .* — On a, en négligeant les frottements, $u_1 = \frac{\theta'}{m} = \frac{Cr \delta}{M} \theta'$. Par suite, u_1 ayant un signe constant, l'axe de précession instantanée est toujours du même côté du plan de tir. De plus, u_1 étant petit, cet axe s'écarte peu de ce plan.

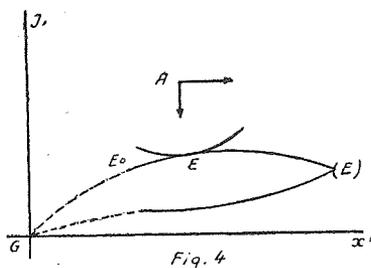
En étudiant les variations de u_1 au moyen de l'équation

$$\frac{d u_1}{d t} = \frac{1}{m v} \theta' \left[g \cos \theta + \frac{1}{2} g \sin \theta + c F(v) \right] \left(\frac{v F'(v)}{F(v)} + 1 \right),$$

on trouve que : 1° l'écart maximum de l'axe de précession instantanée du plan de tir a lieu entre le sommet et le point de vitesse minimum; 2° après son passage au maximum, l'axe devient de plus en plus voisin de la tangente.

10. — *Représentation du mouvement de l'axe de figure.* — Des équations (11), il découle que le mouvement du point $A(u, v)$ de l'axe de figure résulte : 1° d'une rotation de vitesse m autour de $E(u_1, v_1)$; 2° d'une vitesse assez petite, de projections $m k_1 (u - u_1)$, $m k_1 (v - v_1)$, dirigée suivant AE . Si donc (fig. 4) $E_0 E(E)$ est la courbe $E(u_1, v_1)$ (qui a un point de rebroussement lorsque u_1 est maximum), le mouvement de A pourra s'obtenir en considérant une courbe (que l'on appellera polaire d'Esclangon) roulant sur la courbe $E_0 E(E)$ avec une vitesse angulaire m , et un point A se déplaçant relativement à cette courbe avec une vitesse $m k_1 AE$, dans la direction AE .

Sauf pour les gros calibres et les mortiers, les dimensions de la courbe roulant sur $E_0 E$ (E) sont petites.



11. — *Mouvement général de l'axe. Intégration des équations du mouvement.* — L'intégration du système (11) est effectuée en introduisant la variable complexe $z = u + i v$.

En posant $\zeta = \int^t m dt$, $x = e^{-\zeta}$, (11) donne

$$(11') \left\{ \begin{array}{l} \frac{dz}{dx} + (k_1 + i) \frac{z}{x} + i \frac{d\theta}{dx} = 0. \end{array} \right.$$

L'intégrale a la forme, λ étant une constante déterminée par les conditions initiales,

$$z = f(x) + i\varphi(x) + \lambda x^{-(k_1+i)\zeta}.$$

Comme on a $\cos \zeta + i \sin \zeta = x^{-i\zeta}$, il vient

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} u = f(x) + \lambda e^{k_1\zeta} \cos \zeta, \\ v = \varphi(x) + \lambda e^{k_1\zeta} \sin \zeta. \end{array} \right.$$

Le système (12) représente tous les mouvements possibles; chaque mouvement effectif comprend une partie fixe $f(x)$, $\varphi(x)$ et une partie périodique d'amplitude variable $\lambda e^{k_1\zeta}$. La partie non périodique est la même pour tous les mouvements, c'est un mouvement particulier de l'axe (pour $\lambda = 0$) qui présente les plus petites oscillations. L'axe donné par la condition $\lambda = 0$, c'est-à-dire par $u = f(x)$, $v = \varphi(x)$ est appelé *axe d'équilibre dynamique*. Si $m k_1 > 0$, $\lambda e^{k_1\zeta} = \lambda e^{\int_0^t m k_1 dt}$ augmente toujours; si $m k_1 < 0$, cette quantité

diminue constamment, c'est-à-dire que l'axe de figure tend à s'orienter comme l'axe d'équilibre dynamique (présentant les plus petites oscillations, ce qui peut diminuer la dispersion).

12. — *Détermination de l'axe d'équilibre dynamique.* — Cette détermination est effectuée dans l'hypothèse $k_1 = 0$ et en cherchant à satisfaire à (11') par une expression de la

$$\text{forme} \quad z = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

On obtient les séries convergentes

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_2 = \frac{d\theta}{d\zeta} - \frac{d^3\theta}{d\zeta^3} + \frac{d^5\theta}{d\zeta^5} - \dots = \frac{\theta'}{m} - \frac{d^3\theta}{d\zeta^3} + \dots, \\ v_2 = -\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} + \frac{d^4\theta}{d\zeta^4} - \frac{d^6\theta}{d\zeta^6} + \dots \end{array} \right.$$

L'hypothèse $k_1 = 0$ entraîne $v_1 = 0$; si de plus $\frac{d^2\theta}{d\zeta^2}$ est assez petit, on a sensiblement $u_2 = \frac{\theta'}{m} = u_1$, $v_2 = 0$, c'est-à-dire que dans cette hypothèse, les axes d'équilibre dynamique et de précession instantanée coïncident.

13. — *Dérivation.* — Le barycentre vrai G_1 ne coïncide pas avec le point G , dont la trajectoire a été déterminée par le problème principal; en réalité, G_1 sort du plan de tir.

En négligeant les frottements ($k_1 = 0$), les projections de ρ sur $Gx_1 y_1 z_1$ étant respectivement, pour δ petit, $\mu\rho\delta \sin \psi$, $\mu\rho\delta \cos \psi$, $-\rho \cos(\mu\delta)$, on a, pour les équations du mouvement de $G_1 x y z$ dans le plan $G y_1 z_1$,

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{g} \frac{d^2 X}{dt^2} = \mu \rho u, \quad \frac{p}{g} \frac{d^2 Y}{dt^2} = \mu \rho v. \end{array} \right.$$

En posant $w = X + i Y$, $z = u + i v$, on en déduit

$$\frac{p}{g} \frac{d^2 w}{dt^2} = \mu \rho z.$$

Dans l'hypothèse $u = u_2$, on déduit de (13) et (14),

$$(14') \left\{ \begin{aligned} \frac{p}{g} \frac{dX}{dt} &= \int_0^{\zeta} \frac{\mu \rho}{m} u_2 d\zeta = \left(\frac{\mu \rho}{m} \right)_m \left[(\theta - \varphi) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} - \frac{d^2 \varphi}{d\zeta_0^2} \right) + \left(\frac{d^4 \theta}{d\zeta^4} - \frac{d^4 \varphi}{d\zeta_0^4} \right) \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

On peut ensuite déduire X de cette équation au moyen d'une intégration graphique.

14. — *Stabilité des projectiles.* — Dans l'hypothèse $\theta' = 0$, $\theta'' = 0$, la première des équations (8) devient

$$(15) B\delta'' - B\psi'^2 \sin \delta \cos \delta + Cr\psi' \sin \delta - \Phi(\delta) \sin \delta = 0.$$

Cette équation doit avoir des racines réelles en ψ' ; pour cela, il faut que l'on ait

$$B\delta'' \sin \delta \cos \delta > \sin^2 \delta \frac{p}{g} cFl(1 + \mu)(\cos \delta - I),$$

où

$$I = \frac{gC^2r^2}{4BpcFl(1 + \mu)}.$$

Si $I < 1$, et si au début δ est voisin de 0, on aura $\cos \delta - I > 0$; la force sollicitant l'axe, qui est caractérisée par δ'' , et δ auront le même signe; δ croîtra au moins jusqu'à une valeur δ_1 telle que $\cos \delta_1 = I$. Par suite, δ ne pourra rester petit.

Si au contraire $I > 1$, δ et δ'' seront de signes contraires et alors δ restera petit. Pour chaque valeur v de la vitesse, l'inégalité $I > 1$ donnera une valeur r_0 de r en dessous de laquelle on ne pourra pas descendre. Pour une bouche à feu et un projectile donnés, on pourra prendre la valeur r_0 correspondant à la vitesse initiale V , car ensuite v diminue, $F(v)$ diminue également et l'inégalité sera vérifiée à fortiori. Si pour un projectile donné et pour une valeur donnée de r , V croît, il se présentera finalement une instabilité dite *essentielle*.

15. — *Instabilité progressive.* — L'écart de l'axe de précession instantanée de la tangente, mesuré par u_1 , peut être

pris comme mesure de l'instabilité progressive. On a

$$u_1 = \frac{\theta'}{m} = -\frac{1}{m} \frac{g \cos \theta}{v} = -\frac{g^2 Cr \cos \theta}{pc Fl (1 + \mu) v}$$

Il y a donc intérêt, pour réduire u_1 , à réduire r , condition contradictoire avec celle de la stabilité essentielle. Si on admet un écart maximum δ_1 pour δ , on aura en conséquence une valeur r_1 de r qui ne devra pas être dépassée. On devra donc avoir $r_1 > r > r_0$.

16. — *Equations du mouvement de G, en tenant compte du mouvement relatif à G₁.* — On négligera les frottements et on considérera (fig. 5) un trièdre fixe Ox_0, y_0, z_0 , le plan de tir étant Ox_0, y_0 et Ox_0 étant horizontal.

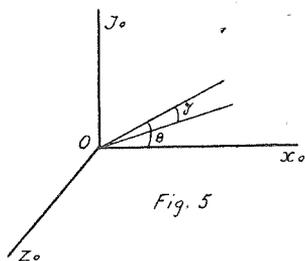


Fig. 5

La résistance de l'air, contenue dans le plan de résistance, admet une composante $\rho \cos (\delta_1 - \delta)$ (sensiblement ρ) suivant la tangente, et une composante $\rho \sin (\delta_1 - \delta)$ (sensiblement $\rho \mu \delta$) normale à la tangente. Cette dernière composante se décompose à son tour en une composante, $\rho \mu \delta \sin \psi$, normale au plan de tir, et en une autre, située dans le plan de tir, $\rho \mu \delta \cos \psi$. Les composantes de ρ sur les trois axes sont donc

$$\begin{aligned} \rho_x &= -\rho \cos \theta + \mu \rho \delta \cos \psi \sin \theta, \quad \rho_y = -\rho \sin \theta \\ &\quad -\mu \rho \delta \cos \psi \cos \theta, \quad \rho_z = \mu \rho \delta \sin \psi. \end{aligned}$$

Habituellement, dans le problème balistique principal, on prend pour ces composantes suivant Ox_0, Oy_0 , $-\rho \cos \theta$ et $-\rho \sin \theta$. On voit donc les modifications apportées par la considération d'une résistance non tangentielle, mais oblique.

Les équations du mouvement de G, sont

$$(16) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d(v \cos \theta)}{dt} = \frac{g}{p} \rho_x, & \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{d(v \sin \theta)}{dt} \\ & & &= -g + \frac{g}{p} \rho_y, & \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{g}{p} \rho_z. \end{aligned} \right.$$

Les deux premières donnent

$$\begin{aligned} \cos \theta \frac{dv}{dt} - v \sin \theta \frac{d\theta}{dt} &= \frac{g}{p} \rho_x, \\ \sin \theta \frac{dv}{dt} + v \cos \theta \frac{d\theta}{dt} &= -g + \frac{g}{p} \rho_y. \end{aligned}$$

On en tire

$$v \frac{d\theta}{dt} = -g \cos \theta - \mu c F \delta \cos \psi,$$

ou

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos \theta}{v} \left[1 + \frac{\mu c F \delta \cos \psi}{g \cos \theta} \right].$$

On a de même

$$\frac{d(v \cos \theta)}{dt} = -c F \cos \theta [1 - \mu \delta \cos \psi \operatorname{tg} \theta].$$

On déduit de ces deux équations,

$$\frac{d(v \cos \theta)}{d\theta} = \frac{c}{g} v F \frac{1 - \mu \delta \cos \psi \operatorname{tg} \theta}{1 + \frac{\mu c F \delta \cos \psi}{g \cos \theta}}.$$

En se limitant aux deux premiers termes du développement en série de $\left(1 + \frac{\mu c F \delta \cos \psi}{g \cos \theta} \right)^{-1}$ et en négligeant en outre $\frac{\mu^2 \delta^2 \cos^2 \psi c F \operatorname{tg} \theta}{g \cos \theta}$, on peut écrire

$$(16') \left\{ \frac{d(v \cos \theta)}{d\theta} = \frac{c}{g} v F \left[1 - \mu \delta \frac{\cos \psi}{\cos \theta} \left(\sin \theta - \frac{c}{g} F \right) \right]. \right.$$

En comparant à l'équation habituelle de l'hodographe,

$$\frac{d(v \cos \theta)}{d\theta} = \frac{c}{g} vF,$$

on voit le terme correctif de l'unité qu'on est amené à introduire.

D'une manière analogue, on a

$$dx = -\frac{v^2}{g} \left(1 - \frac{\mu \delta \cos \psi}{\cos \theta} \frac{c}{g} F\right) d\theta,$$
$$dy = dx \sin \theta.$$

(A suivre.)

Lucien GODEAUX.

Professeur à l'Université de Liège.



(Fin.)

III

III. — Comparaisons et conclusions.

Dans le paragraphe précédent se trouve résumée l'intéressante et importante théorie de M. Esclangon sur la rotation des projectiles. A l'opposé des théories de M. De Sparre et de M. Burzio, inspirées par la méthode géométrico-mécanique de Poinso, la théorie de M. Esclangon se rattache plutôt à la méthode analytique de Saint-Robert et Mayevski, mais elle réalise cependant vis-à-vis de celles-ci un progrès fondamental. Ceci est dû à deux raisons, la première inhérente à la question traitée, la seconde formelle :

1° L'hypothèse de la tangente fixe est abandonnée;

2° Au lieu des équations d'Euler, l'instrument analytique est fourni par les équations de Lagrange.

Au sujet de l'hypothèse de la tangente fixe, obstacle devant lequel se sont butés les premiers chercheurs, M. Esclangon utilise la seule méthode qui soit, semble-t-il, rigoureuse. Outre le trièdre fixe et le trièdre lié au projectile, il utilise un troisième trièdre lié à la trajectoire (comme le fait également M. Burzio). On observera que ce troisième trièdre n'est pas

(1) *Bulletin Belge des Sciences militaires*, 1927, pp. 189-202, 497-507.

utilisé de la même façon par MM. Esclangon et Burzio; le premier s'en sert pour définir les angles d'Euler et pour écrire les équations de Lagrange; le second pour écrire le théorème du moment de la quantité de mouvement.

On peut indiquer avec précision le progrès réalisé par la méthode de M. Esclangon sur celles de Saint-Robert et Mayevski en comparant les équations (2) et (6).

Dans les équations (6), figurent les expressions

$$\theta' \cos(x, x_1), \quad \theta' \cos(y, x_1), \quad \theta' \cos(z, x_1)$$

que l'on ne rencontre pas dans les équations (2). Cela provient de ce que l'on tient compte, pour établir (6), que le mouvement instantané du système autour de G est la somme non seulement des trois rotations δ' , ψ' , φ' , mais aussi d'une quatrième θ' . On observera que θ' n'étant pas négligeable vis-à-vis de δ' , ψ' , φ' , les équations (2) ne peuvent être considérées comme une première approximation.

Quant à l'usage des équations de Lagrange au lieu de celles d'Euler, il a la valeur pratique suivante : En traitant le même problème de façons diverses, on parvient aux mêmes conclusions. En comparant en effet les équations (3) de Mayevski, (démontrées par M. Burzio sous l'hypothèse que Gm et Ga coïncident) avec les équations (9) de M. Esclangon, on constate qu'elle coïncident quand on suppose nuls les frottement latéraux ($\frac{d\theta}{dt}$ est essentiellement négatif). On obtient ainsi par des méthodes différentes les mêmes expressions pour les vitesses angulaires de précession et de nutation du projectile; grâce à cela, les formules de la toupie semblent pouvoir être définitivement abandonnées dans l'exposé des mouvements du projectile.

L'analyse suivante portera sur trois points :

- a) Résultats analytiques généraux;
- b) Applications déjà faites par des méthodes autres que celle de M. Esclangon;
- c) Applications non encore faites par d'autres méthodes que celle de M. Esclangon.

La partie a) peut cependant être considérée comme traitée dans ce qui précède.

* * *

b) La seconde partie a trait aux développements de la méthode de M. Esclangon à partir des équations (9) jusqu'aux équations (14') inclus. Ces développements ont pour but des résultats pratiques et précisément la représentation synthétique et le calcul numérique du mouvement relatif à G. M. Esclangon introduit les concepts nouveaux d'*axe de précession instantanée* et d'*axe de stabilité dynamique*. Il est intéressant d'examiner les relations de ces entités avec ceux qui sont considérés dans les autres méthodes.

L'axe de précession instantanée Ge est une entité fictive par rapport auquel l'axe de figure Ga a un mouvement assez simple; mais Ge a à son tour un mouvement qu'il importe de déterminer. En négligeant les frottements latéraux, on a, pour les coordonnées u_1, v_1 du point E de Ge ,

$$u_1 = \frac{\theta'}{m}, v_1 = 0.$$

u_1 est donc la mesure caractéristique de E, dont la trajectoire projetée sur le plan $x_1 y_1$ se réduit alors (fig. 4) à un segment de x_1 parcouru dans les deux sens jusqu'au point de rebroussement (E). Cela signifie que Ge sera toujours dans le plan $x_1 z_1$. En se rappelant que

$$m = \frac{a}{Cr} = \frac{M}{Cr\delta},$$

on voit que cette grandeur introduite dans la théorie de Esclangon est la vitesse de précession de la théorie de la toupie, et la vitesse de la polaire de précession de la théorie de De Sparre. Quant à $u_1 = \frac{\theta'}{m}$, c'est le rayon de courbure R_p de cette polaire de précession et la quantité $\frac{1}{Q}$ de

la théorie de Mayevski. De plus, le centre O de la polaire de précession (situé à une distance R_p de T) est sur la perpendiculaire commune en T à la polaire même et au grand cercle décrit par T (polaire fixe). Le point O appartenant également au cylindre tangent à la sphère le long de T , il en résulte que TO est perpendiculaire au plan $y_1 z_1$ (plan de tir) et par suite se trouve dans le plan $x_1 z_1$. Donc $O \equiv E$, et l'axe de précession instantanée est la droite joignant G au centre de courbure de la polaire de De Sparre (fig. 6). Par suite la trajectoire de E est la courbe que Charbonnier appelle « courbe moyenne de la précession ».

Cette identification permet de conclure que, cependant que Ga et Gm sont très voisins, l'erreur commise quand on suppose Ga coïncidant avec l'axe de précession instantanée $Ge \equiv Go$, pourrait en quelques points atteindre le 100/100. Il résulte en effet, de la théorie de Mayevski-Burzio (et aussi de celle de De Sparre-Charbonnier), que

$$\delta_{max.} = (1 + \cos \psi) R_p,$$

c'est-à-dire

$$TM = (1 + \cos \psi) TO,$$

où ψ peut être assez voisin de π ou de 0 .

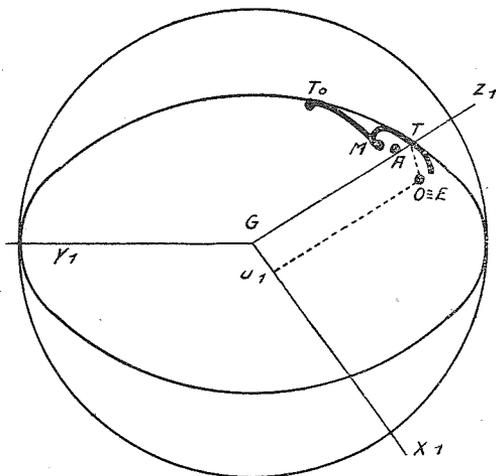


Fig. 6

Pour avoir, avec la méthode de M. Esclangon, dans la solution du second problème, c'est-à-dire dans la construction de la trajectoire de A, la même approximation qu'avec les méthodes de de Sparre et Burzio, il est nécessaire de construire la roulette engendrée par A dans le roulement de la *polaire de Esclangon* sur la courbe E de la figure 4. On doit donc en somme à M. Esclangon une nouvelle représentation géométrico-mécanique du mouvement de l'axe de figure, analogue à celle de M. de Sparre, mais où à la droite des T on substitue celle des E et à la polaire de de Sparre, la polaire de Esclangon. Les vitesses de roulement des deux polaires, sur leurs enveloppes respectives, sont les mêmes, c'est-à-dire toujours égales à la vitesse de précession de la toupie.

Bien que très intéressant analytiquement, l'autre entité définie par M. Esclangon, l'*axe d'équilibre dynamique*, ne semble pas présenter un réel intérêt pratique. Cet axe est obtenu en négligeant la partie périodique dans les intégrales (12). Pour le déterminer, on retourne des intégrales (12), purement symboliques, aux équations différentielles (11), que l'on cherche à intégrer approximativement d'une toute autre manière, c'est-à-dire au moyen de développement en séries. La manière dont l'auteur parvient à établir les séries (13) et à en démontrer la convergence est élégante; mais il faut remarquer que pour calculer les termes de ces séries, il serait nécessaire d'exprimer θ comme fonction analytique de

$\zeta = \int_0^t m dt$, ou tout au moins recourir à des dérivations

graphiques successives, avec des calculs assez longs et imprécis. Il est pratiquement inévitable de se limiter à la première approximation, c'est-à-dire de poser $u_2 = u_1$, $v_2 = 0$, c'est-à-dire de reporter l'axe d'équilibre dynamique à celui de précession instantanée. La coïncidence de ces deux axes est en effet faite par l'auteur dans les développements ultérieurs.

En ce qui concerne la dérivation, la formule qui peut être pratiquement utilisée est (14'). En supposant $\frac{d^2\theta}{d\xi^2}$ assez petit (hypothèse faite par l'auteur à propos de l'axe dynamique),

(14') devient, en se référant aux axes fixes de la fig. 5,

$$(14'') \quad \frac{p}{g} \frac{dz}{dt} = \left(\frac{\mu \rho}{m} \right)_m (\theta - \varphi).$$

La formule de Charbonnier pour la dérivation, démontrée par Burzio valable à moins d'infiniment petits d'ordre supérieur à η^2 et appliquée par ce dernier à de nombreux calculs numériques, est la suivante :

$$(17) \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\mu c F \delta \sin \psi}{v \cos \theta},$$

où η est l'inclinaison de la courbe de dérivation (projection de la trajectoire réelle gauche de G_1 sur le plan horizontale xz). La formule (14') apparaît alors comme donnant une intégrale de (17); on a précisément

$$(14''') \quad \begin{aligned} \eta &= \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dx}, & \frac{dx}{dt} &= v \cos \theta, \\ \eta &= \frac{g}{p} \left(\frac{\mu \rho}{m} \right)_m \frac{\theta - \varphi}{v \cos \theta}. \end{aligned}$$

Comme on a

$$\rho = \frac{p}{g} cF, \quad dt = - \frac{v d\theta}{g \cos \theta},$$

(17) donne

$$d\eta = - \frac{g}{p} \mu \rho \delta \sin \psi \frac{d\theta}{g \cos^2 \theta},$$

$$\eta = - \frac{1}{p} (\mu \rho \delta \sin \psi)_m (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \varphi).$$

En prenant

$$\delta = \sqrt{u^2 + v^2} \sim u_1 = \frac{\theta'}{m} = - \frac{1}{m} \frac{g \cos \theta}{v},$$

on en déduit

$$\eta = \frac{g}{p} \left(\frac{\mu \rho}{m} \right)_m \sin_m \psi \frac{\cos_m \theta}{r_m} (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \varphi).$$

Pour le tir tendu et pour $\psi \sim \frac{\pi}{2}$, on a donc

$$(17') \quad \eta = \frac{g}{p} \left(\frac{\mu \rho}{m} \right)_m \frac{\sin \theta - \sin \varphi}{v_m}$$

Dans ces conditions, cette formule coïncide quasi avec la formule (14''). Il semble que, étant donné l'inexactitude de l'hypothèse $\delta \sim u_1$ et la limitation au tir tendu (d'où l'hypothèse $\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = 0$ qui permet de passer de 14' à 14''), il vaut mieux se servir de (17) comme d'une équation aux différences finies, donnant pour chaque accroissement Δt , l'accroissement correspondant $\Delta\eta$.

* * *

c) On examinera ici les études de M. Esclangon relatives aux critères pour la stabilité des projectiles et à l'influence du second problème balistique sur le premier, c'est-à-dire sur le coefficient balistique et sur l'équation de l'hodographe.

Au sujet de la stabilité, M. Esclangon donne les deux critères de la *stabilité essentielle* et de l'*instabilité progressive*. Le premier est basé sur les hypothèses $\theta' = 0$, $\theta'' = 0$ et ne peut donc s'appliquer qu'au tir très tendu. On sait que l'hypothèse de la tangente fixe implique, pour la précession balistique, de s'arrêter aux formules de la toupie. Par la première des équations (3), $\delta' = -\theta' \cos \psi$, l'hypothèse $\theta' = 0$ entraîne $\delta' = 0$, $\delta'' = 0$, donc dans les équations (25), le terme $B\delta''$ doit être négligé.

Quant à l'instabilité progressive, on observera que, étant donné l'identification entre l'axe de précession instantanée GE de M. Esclangon et l'axe GO de M. de Sparre, le critère de poser une limite supérieure pour u_1 revient à poser une limite supérieure pour le rayon de courbure R_p de la polaire de précession, déjà indiquée par le général Charbonnier.

La dernière application faite par M. Esclangon est l'établissement des formules du mouvement de G_1 quand on fait

l'hypothèse de la résistance oblique. Les équations (16), obtenues ainsi, peuvent être considérées comme cas particulier des équations.

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{p} [\rho \cos \theta + \mu\rho\delta \cos \psi \sin \theta + \mu\rho\delta \sin \psi \cdot \eta], \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{g}{p} [\rho \sin \theta - \mu\rho\delta \cos \psi \cos \theta], \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{g}{p} [\mu\rho\delta \sin \psi - \eta (\rho \cos \theta + \mu\rho\delta \cos \psi \sin \theta)], \end{array} \right.$$

établies par Mayevski (loc. cit., pp. 210 et suiv.).

Les équations (18), dans l'hypothèse du tir tendu (δ petit, $\sin \delta = \delta$, $\cos \delta = 1$) sont plus complètes que les (16) parce que, tenant compte de ce que la trajectoire est gauche, figurent dans les seconds membres des termes ayant pour facteur $\eta = \frac{dz}{dx}$. Mayevski établit également des équations analogues aux (18), pour le tir courbe, dans deux cas :

$$1^\circ \delta < 20^\circ, \frac{\cos(\delta_1 - \delta)}{\cos \delta} = 1;$$

$$2^\circ \delta > 20^\circ, \frac{\cos(\delta_1 - \delta)}{\cos \delta} = 1 + 1,07.\delta^2.$$

Conclusions.

1° Pour la partie théorique, la théorie de M. Esclangon et les théories précédentes concordent dans les formules (3) des vitesses angulaires de précession et de nutation;

2° Pour la partie pratique, et concernant les rayons, un critère de maximum pourra être celui de l'instabilité progressive de M. Esclangon, correspondant au critère de stabilité du général Charbonnier et consistant dans le fait de poser une limite supérieure pour u_1 , c'est-à-dire pour le rayon R_p de la polaire de précision de M. de Sparre. On en tirera un maximum pour r ;

3° Pour obtenir une plus grande exactitude, il faudra calculer la trajectoire de M par les méthodes de MM. de Sparre et Burzio;

4° Pour la dérivation, les formules de M. Esclangon et de MM. Charbonnier et Burzio, sont à peu près équivalentes, surtout pour le tir tendu;

5° Pour la détermination des grandeurs expérimentales l et k , qui figurent dans toutes les applications du second problème (et tant que l'on ne pourra pas faire des mesures directes au tunnel aérodynamique), il semble nécessaire de suivre le procédé indiqué par M. Burzio (qui a conduit celui-ci à retrouver une loi aérodynamique, confirmée par l'expérience).

L. GODEAUX.

Note. — Nous signalerons au lecteur du Bulletin une publication récente de M. Burzio, traitant des problèmes dont il est question dans ce qui précède.

F. BURZIO, *Il secondo problema balistico. Rotazione dei proietti* (Torino, publié par le Ministère de la Guerre, Tip. Olivero, 1927).

En voici la table des matières :

I. — Préliminaires. Equations différentielles du mouvement et intégrales premières.

II. — Intégrales secondes (précession balistique).

III. — Ordre de grandeur des quantités relatives à la précession balistique.

IV. — Nutation balistique.

V. — Dérivation.

VI. — Grandeurs expérimentales du second problème.

VII. — Notes historiques et critiques (S. Robert, Mayevski, de Sparre, Charbonnier, Cranz, Esclangon).

VIII. — Applications numériques.