SUR CERTAINES INVOLUTIONS APPARTENANT À UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

PAR

LUCIEN GODEAUX

(à Liége)

Nous avons consacré plusieurs mémoires à l'étude des involutions appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis (1). Ces recherches nous ont conduit à classer les points unis en deux catégories, suivant que dans le domaine du premier ordre de ce point, l'involution donne lieu à l'identité ou non. Les points de la première catégorie sont les points unis parfaits, ceux de la seconde, les points unis non parfaits. Le travail actuel est consacré à l'étude d'involutions appartenant à une surface algébrique et présentant des points unis des deux catégories.

Soit F une surface algébrique contenant une involution I_p d'ordre premier p, cyclique, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Soit Φ une surface image de cette involution. Si A est un point uni parfait de l'involution, il lui correspond, sur la surface Φ, un point multiple d'ordre p de cette surface, à cône tangent rationnel et irréductible. Si au contraire A est un point uni non parfait, le point qui lui correspond sur la surface Φ peut présenter des singularités assez diverses. Les points unis non parfaits que nous rencontrons dans ce travail donnent naissance à des points doubles biplanaires de la surface Φ, ces points ayant

---

(1) *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique*, « Bulletin de la Soc. Mathém. de France », 1919, pp. 1-16; *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*, « Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique », 1930, pp. 450-467; 1931, pp. 1131-1150, 1356-1364).

Un exposé de nos recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique paraîtra prochainement dans la collection des Actualités scientifiques et industrielles de la librairie Hermann (Exposés sur la Géométrie publiés sous la direction de M. CARTAN).

une suite de $\frac{1}{2}(p\text{-}3)$ points doubles biplanaires infiniment voisins successifs, dont le dernier est ordinaire.

1. — Considérons l'homographie H de période p,

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^{p-1} x_4,$$

p étant un nombre premier et ε une racine primitive p — ième de l'unité. L'homographie H possède deux points unis $O_3(0,0,1,0)$, $O_4(0,0,0,1)$ et une droite unie $O_1O_2(x_3=x_4=0)$.

La surface F la plus générale, d'ordre $p+2$, ayant des points simples en O_3, O_4 et transformée en elle-même par H a pour équation

$$\left.\begin{aligned} a_3x_3{}^{2n+2}x_4 + a_4x_4{}^{2n+2}x_3 + x_3{}^{n+1}x_4{}^{n+1}a_1 + x_3{}^{2n+1}a_2 \\ + x_4{}^{2n+1}a'_2 + \\ + x_3{}^n x_4{}^n a_3 + \ldots + x_3{}^{n-i}x_4{}^{n-i}a_{2i+3} + \ldots + a_{2n+3} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

où l'on a posé $p=2n+1$ et où les a sont des polynomes entiers, rationnels et homogènes en x_1, x_2, dont le degré est indiqué par l'indice.

L'homographie H engendre sur la surface F une involution I_p d'ordre p, présentant un nombre fini de points unis: les points O_3, O_4 et les $p+2$ points de rencontre de la surface avec la droite O_1 O_2.

Au point O_3, la surface a pour plan tangent le plan $x_4=0$, uni pour l'homographie H. Dans ce plan, cette homographie détermine une homologie de centre O_3 et d'axe O_1O_2; par conséquent le point O_3 est uni parfait pour l'involution I_p. Il en est de même du point O_4.

Soit B un des $p+2$ points de rencontre de la surface F avec la droite O_1O_2. Le plan tangent β à F en B est uni pour H et passe par conséquent par les points O_3, O_4. Dans le plan β, H détermine une homographie non homologique dont les points unis sont B, O_3, O_4. Nous pouvons supposer, sans restriction, que le point B coïncide avec le point $O_1(1,0,0,0)$, ce qui revient à supposer que le terme en $x_1{}^{2n+3}$ manque dans le polynome a_{2n+3}. Le plan β a alors pour équation $x_2=0$ et l'homographie déterminée dans β par H est donnée par

$$x'_1 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^{p-1} x_4.$$

Dans le domaine du point $B \equiv 0_1$, H détermine une involution d'ordre p ayant comme éléments unis les points infiniment voisins de 0_1 situés sur les droites $0_1 0_3, 0_1 0_4$. Le point 0_1 est donc uni non parfait pour I_p et, à cause de la symétrie de l'équation (1) en x_3, x_4, les domaines des points unis de I_p, infiniment voisins de 0_1, se comportent d'une manière symétrique. En d'autres termes, le point 0_1 est un point uni non parfait symétrique. Il en est de même des autres points unis de I_p situés sur la droite $0_1 0_2$.

2. — Pour construire une surface Φ, image de l'involution I_p, considérons le système linéaire dépourvu du points-base, formé par les surfaces d'ordre p transformées en elles-mêmes par l'homographie H. Ce système a pour équation

$$\begin{aligned}\lambda_3 x_3^{2n+1} + \lambda_4 x_4^{2n+1} + x_3^{n} x_4^{n} L_1 + \ldots +\\ + x_3^{n-i} x_4^{n-i} L_{2i-1} + \ldots + L_{2n+1} = 0 \qquad (2)\end{aligned}$$

où nous posons

$$\begin{aligned}L_{2+i1} = \lambda_{2i+1,0} x_1^{2i+1} + \lambda_{2i+1,1} x_1^{2i} x_2 + \ldots +\\ + \lambda_{2i+1,2i+1} x_2^{2i+1}.\end{aligned}$$

Rapportons projectivement les surfaces (2) aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à $r = (n+1)(n+2) - 1$ dimensions, en posant

$$\begin{gathered}\rho X_3 = x_3^{2n+1}, \ \rho X_4 = x_4^{2n+1},\\ \rho X_{2i+1,k} = x_3^{n-i} x_4^{n-i} x_1^{2i+1-k} x_2^{k}, \qquad (3)\\ (k = 0, 1, \ldots, 2i+1;\ i = 1, 2, \ldots, n),\end{gathered}$$

et en interprétant les X comme coordonnées des points de S_r. Les surfaces (2) découpent sur F un système de courbes de degré $p^2(p+2)$, composé au moyen de I_p; la surface Φ lieu du point X déterminé par les équations (3), sera d'ordre $p(p+2)$. Ses équations sont

$$\frac{X_{2i+1,0}}{X_{2i+1,1}} = \frac{X_{2i+1,1}}{X_{2i+1,2}} = \ldots = \frac{X_{2i+1,2i}}{X_{2i+1,2i+1}} \left(= \frac{x_1}{x_2}\right),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{X_{3,0}}{X_{5,0}}=\frac{X_{5,0}}{X_{7,0}}=\ldots=\frac{X_{2n-1,0}}{X_{2n+1,0}}\left(=\frac{x_3x_4}{x_1^2}\right),$$

$$X_3X_4X_{2n+1,0}=X_{30}^2X_{2n-5,0},$$

$$\mathrm{F}(X_3, X_4, \ldots X_{2n+1,2n+1})=0,$$

cette dernière équation résultant de l'élimination des x entre les équations (3) et l'équation (1).

D'après les résultats que nous avons établis, aux points unis parfaits O_3, O_4 correspondent, sur Φ, des points O'_3, O'_4 multiples d'ordre p, à cônes tangents rationnels et irréductibles, pour cette surface. Aux $p+2$ points unis non parfaits de I_p, situés sur la droite O_1O_2, correspondent des points doubles biplanaires de Φ, à chacun desquels sont infiniment voisins successifs $n-1$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. Il serait facile de vérifier sur les équations précédentes qu'il en est bien ainsi; nous ne nous y arrêterons pas.

3. — La surface F est en général dépourvue de points multiples et le système canonique est découpé sur cette surface par les adjointes d'ordre $2n-1$, c'est-à-dire par le système formé par toutes les surfaces d'ordre $2n-1$. Le genre arithmétique p_a de F est donc égal à

$$p_a=\tfrac{2}{3}n(n+1)(2n+1)=\tfrac{1}{6}p(p^2-1)$$

et son genre linéaire est égal à

$$p^{(1)}=(p+2)(p-2)^2+1.$$

Entre les genres arithmétique et linéaire $p_a, p^{(1)}$ de F et les genres arithmétiques $\pi_a, \pi^{(1)}$ de la surface Φ, nous avons les relations

$$12(p_a+1)=12p(\pi_a+1)+2(p-1)(p-5)-(p+2)(p^2-1),$$

$$p^{(1)}-1=p(\pi^{(1)}-1)+2(p-2)^2.$$

La surface Φ a par conséquent les genres

$$\pi_a=\tfrac{1}{4}(p^2-1)=n(n+1),$$

$$\pi^{(1)}=(p-2)^2+1.$$

Nous avons établi que les courbes canoniques de Φ rencontraient en $p-2$ points les courbes rationnelles de degré $-p$ équivalentes, au point de vue des transformations birationnelles, aux points de diramation O'_3, O'_4 de Φ qui correspondent aux points unis parfaits de I_p. A ces courbes canoniques correspondent donc, sur F, des courbes canoniques ayant des points multiples d'ordre $p-2$ en O_3, O_4. Ces courbes sont découpées sur F par des surfaces d'ordre $2n-1$ passant par O_3, O_4 et formant un système linéaire de surfaces transformées en elles-mêmes par H. Ce système doit avoir la dimension $\pi_a - 1 = n(n+1) - 1$. Il est facile de voir que, parmi les systèmes de surfaces d'ordre $2n-1$ transformées en elles-mêmes par H, un seul a la dimension requise et se comporte d'une manière symétrique par rapport à x_3, x_4. C'est le système d'équation

$$x_3{}^{n-1}x_4{}^{n-1}\beta_1+\ldots+x_3{}^{n-i}x_4{}^{n-i}\beta_{2i-1}+\ldots\beta_{2n-1}=0, \qquad (4)$$

où $\beta_1, \beta_3, \ldots$ sont des polynomes en x_1, x_2, à coefficients variables et dont le degré est indiqué par l'indice.

4. – Nous allons tout d'abord montrer que le système (4) est composé au moyen de la congruence G formée par les coniques γ passant par O_3, O_4, et y touchant respectivement les plans $x_4=0, x_3=0$.

Les surfaces (4) passent par la droite O_3O_4 $(x_1=x_2=0)$; un plan $x_1=\lambda x_2$ coupe donc une de ces surfaces suivant cette droite et une courbe d'ordre $2n-2$ dont la projection sur le plan $x_1=0$, à partir du point O_1, a pour équation

$$x_3{}^{n-1}x_4{}^{n-1}\beta_1+\ldots+x_3{}^{n-i}x_4{}^{n-i}x_2{}^{2i-2}\beta_{2i-1}+ \\ +\ldots+x_2{}^{2n-3}\beta_{2n-1}=0, \qquad (5)$$

où les β sont maintenant des polynomes en λ.

La courbe (5) a en O_4 la multiplicité $n-1$, les tangentes étant confondues avec la droite $x_3=0$. Effectuons la transformation quadratique

$$x_2 : x_3 : x_4 = y_2y_4 : y_4^2 : y_2y_3, \qquad (6)$$

qui fait correspondre au point infiniment voisin de O_4 sur $x_3=0$, le point $y_2=y_3=0$. La courbe (5) se transforme en une courbe dont l'équation, après suppression des facteurs communs, s'écrit

$$y_3^{n-1}\beta_1+\ldots+y_2^{i-1}y_3^{n-i}\beta_{2i-1}+\ldots+y_2^{n-1}\beta_{2n-1}=0.$$

Cette courbe se décompose en $n-1$ droites passant par le point $y_2=y_3=0$. Or, à une telle droite,

$$y_3=\mu y_2,$$

la transformation inverse de (6) fait correspondre la conique

$$x_3x_4-\mu x_2^2=0.$$

La projection de cette conique, à partir du point O_1, sur le plan $x_1=\lambda x_2$, est une conique γ. Par conséquent, la section considérée de la surface (4) se compose de la droite O_3O_4 et de $n-1$ coniques γ. Il en résulte que le système (4) est composé au moyen de la congruence linéaire G formée par ces conique γ.

On observera que le plan $\beta_1=0$ a un contact du second ordre avec une surface (4) en tout point de la droite O_2O_4; il rencontre donc la surface suivant une conique γ particulière, formée de la droite O_3O_4 comptée deux fois (et suivant $n-2$ coniques γ généralement irréductibles).

Deux surfaces du système (4) ont en comum $2n(n-1)$ coniques γ.

5. — Nous allons maintenant établir que les courbes découpées sur F par les surfaces (4) ont des points multiples d'ordre $p-2=2n-1$ aux points O_3, O_4.

Effectuons la transformation quadratique

$$x_1:x_2:x_3:x_4=y_1y_4:y_2y_4:y_3y_4:y_1^2,$$

qui fait correspondre au domaine du point O_4 le plan $y_4=0$. A la surface F correspond la surface

$$\begin{gathered}a_3y_1^2y_3^{2n+2}y_4^{2n}+a_4y_1^{4n+4}y_3+y_1^{2n+1}y_3^{n+1}y_4^{n+1}\alpha_1+\\+y_3^{2n+1}y_4^{2n+2}\alpha_2+y_1^{2n+2}y_4\alpha'_2+y_1^{2n}y_3^{n}y_4^{n+2}\alpha_3+\\+\ldots+y_3^{n-i}y_4^{n+i+2}\alpha_{2i+3}+\ldots+\\+y_4^{2n+2}\alpha^{2n+3}=0,\end{gathered} \tag{7}$$

où les α sont maintenant des polynome en y_1, y_2.

A une surface (4) correspond la surface

$$y_1^{2n-2}y_3^{n-1}\beta_1+\ldots+y_1^{2n-2i}y_3^{n-i}y_4^{i-1}\beta_{2i-1}+ \\ +\ldots y_4^{n-1}\beta_{2n-1}=0, \tag{8}$$

où les β sont des polynomes en y_1, y_2.

Au domaine de O_4 sur la surface F correspond sur la surface (7) la droite simple $y_3=y_4=0$. Le long de cette droite, la surface (7) a le plan tangent fixe $y_3=0$.

Au domaine de O_4 sur la surface (4) correspond sur la surface (8) l'ensemble des droites $y_3=y_4=0, \beta_1=y_4=0$, la première multiple d'ordre $n-1$, la seconde simple pour la surface.

A la courbe commune aux surfaces F et (4) correspond une courbe commune aux surfaces (7) et (8) et aux points infiniment voisins de O_4 sur la première de ces courbes correspondent les points de la seconde situés sur la droite $y_3=y_4=0$. En ces points, les deux surfaces doivent avoir même plan tangent; le nombre de ces points est donc égal à celui des points de la droite $y_3=y_4=0$ où la surface (8) touche le plan $y_3=0$.

Ces points sont donnés par

$$y_3=y_4=0, \qquad \beta_{2n-1}(y_1, y_2)=0.$$

On voit donc que la courbe commune à F et à une surface (4) a bien la multiplicité $2n-1$ au point O_4. Et de même au point O_3.

6. – Une conique γ coupe la surface F en $2(p+2)$ points dont deux sont réunis en O_3, deux en O_4 et $2p$ sont variables. Les coniques γ étant transformées en elles-mêmes par l'homographie H, les groupes de $2p$ points variables découpés sur F par ces coniques sont constitués par deux groupes de l'involution I_p. Désignons par K les courbes canoniques de Φ, par K' les courbes qui leur correspondent sur F; ces dernières sont découpées sur cette surface par les surfaces (4). Puisque le système formé par les surfaces (4) est composé au moyen de la congruence G des coniques γ, les courbes K' passant par un point passent en conséquence par les deux groupes de I_p situés sur la conique γ passant par le point considéré; par conséquent, les courbes canoniques K de Φ passant par un point passent

en conséquence par un second point et le système $|K|$ est composé au moyen d'une involution du second ordre J_2.

Nous avons vu que le système canoniqne $|K|$ de Φ est de degré $\pi^{(1)}-1=(p-2)^2$. Observons que la droite O_3O_4, rencontre la surface F, en dehors des pointes O_3, O_4, suivant un groupe de l'involution I_p,

$$x_1=0, x_2=0, \qquad a_3x_3^p+a_4x_4^p=0;$$

à ce groupe correspond sur Φ un point commun à toutes les courbes K. En dehors de ce point-base, les courbes K se rencontrent suivant des groupes de $(p-2)^2-1=4n(n-1)$ points formés de $2n(n-1)$ couples de l'involution J_2. Si nous observons que la congruence G est rationnelle, nous voyons qu'en rapportant projectivement les courbes K aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{n(n+1)-1}$ à $n(n+1)-1$ dimensions, nous obtenons comme modèle projectif de la surface Φ, une surface double dont le support est une surface rationelle d'ordre $2n(n-1)$.

La surface Φ, image de l'involution I_p, a les genres

$$\pi_a=n(n+1), \qquad \pi^{(1)}=(p-2)^2+1.$$

Le système canonique possède un point-base simple et la surface est birationnellement équivalente à un plan double.

7. — Le cas particulier $p=3$ a déjà fait l'objet d'une étude particulière (1). Nous allons nous arrêter un instant sur le cas $p=5$. L'équation de la surface F s'écrit alors

$$a_3x_3^6x_4+a_4x_3x_4^6+x_3^3x_4^3a_1+x_3^5a_2+x_4^5a'_2+x_3^2x_4^2a_3+$$
$$+x_3x_4a_5+a_7=0,$$

où nous posons

$$a_i=a_{i0}x_1^i+a_{i1}x_1^{i-1}x_2+\ldots+a_{ii}x_2^i.$$

Les surfaces (4) ont pour équation

$$x_3x_4(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)+\lambda_3x_1^3+\lambda_4x_1^2x_2+\lambda_5x_1x_2^2+\lambda_6x_2^3=0.$$

(1) L. Godeaux, *Étude d'une involution cubique douée d'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique* « Revista dó la Sociedad Matematica Espanola », 1917, pp. 7-14.

Pour obtenir un modèle projectif de la surface Φ, rapportons projectivement ces surfaces aux hyperplans d'un espace linéaire S_6 à six dimensions en posant

$$\frac{X_1}{x_3 x_4 x_1} = \frac{X_2}{x_3 x_4 x_2} = \frac{X_3}{x_1^3} = \frac{X_4}{x_1^2 x_2} = \frac{X_5}{x_1 x_2^2} = \frac{X_6}{x_2^3}.$$

L'élimination de x_1, x_2, x_3, x_4 entre ces équations donne

$$\left\| \begin{matrix} X_1 & X_3 & X_4 & X_5 \\ X_2 & X_4 & X_5 & X_6 \end{matrix} \right\| = 0. \tag{9}$$

équations d'une surface réglée du quatrième ordre dont les points correspondent aux coniques γ de la congruence G.

La surface Φ est représentée par une surface double dont le support est la surface (9) et dont la courbe de diramation est découpée sur cette surface par la variété d'équation

$$\begin{aligned}
&[X_1^3(a_{10} X_3 + a_{11} X_4) + X_1^2 X_3 (a_{30} X_3 + a_{31} X_4 + a_{32} X_5 + a_{33} X_6) \\
&+ X_1 X_3 (a_{50} X_3^2 + a_{51} X_3 X_4 + a_{52} X_3 X_5 + a_{53} X_3 X_6 + a_{54} X_4 X_6 + \\
&\qquad + a_{55} X_5 X_6) \\
&+ X_3 (a_{70} X_3^3 + a_{71} X_3^2 X_4 + a_{72} X_3^2 X_5 + a_{73} X_3^2 X_6 + \\
&\qquad + a_{74} X_3 X_4 X_6 + a_{75} X_3 X_5 X_6 + a_{76} X_3 X_6^2 + a_{77} X_5 X_6^2)]^2 \\
&- 4 X_3 X_1^5 (a_3 X_1 + a_{20} X_3 + a_{21} X_4 + a_{22} X_5)(a_4 X_1 + a'_{20} X_3 + \\
&\qquad + a'_{21} X_4 + a'_{22} X_5) = 0.
\end{aligned}$$

Liége, Faculté des Sciences, 12 mars 1935.