TRAVAUX RÉCENTS
sur la Balistique rationnelle. (1)

(DEUXIÈME NOTE)

III. — E. Esclangon. — **Sur quelques propriétés des trajectoires décrites par les projectiles dans l'air.** (2)

La trajectoire utilisée par les artilleurs n'est qu'un segment d'une courbe que l'on pourrait appeler la trajectoire analytique, et le long de laquelle la vitesse v varie de $+\infty$ à 0. Ce sont des trajectoires de cette nature que M. Esclangon considère.

Les hypothèses faites sont :

1° L'intensité de la pesanteur est supposée constante.

2° La densité des couches atmosphériques, supposées planes et parallèles, varie avec l'altitude z suivant la formule

$$\Delta = \Delta_0 e^{-hz}.$$

Pour pouvoir considérer les trajectoires analytiques, c'est-à-dire les trajectoires prolongées en deçà de la pièce et au delà du point de chute, il est nécessaire de supposer l'atmosphère prolongée indéfiniment dans tous les sens, aussi bien vers le bas que vers le haut. Lorsque z croît au delà de toute limite en restant positif, Δ a pour limite 0; lorsque z décroît de plus en plus, Δ devient de plus en plus grand. Sur la partie de la trajectoire analytique située au delà du point de chute, le projectile rencontrerait des couches de plus en plus denses et par suite sa vitesse tendrait vers zéro.

M. Esclangon a établi que l'ensemble de toutes les trajectoires pouvait être divisé en deux classes (3) :

1° *Trajectoires pour lesquelles la vitesse* v, *partant de* $+\infty$ *à l'origine analytique de la trajectoire, décroît continuellement jusqu'à zéro, à l'autre extrémité de la trajectoire.*

2° *Trajectoires pour lesquelles la vitesse* v *passe par un minimum suivi nécessairement d'un maximum, pour décroître ensuite jusqu'à zéro.*

Certaines trajectoires « de transition » auront le minimum et le maximum confondus. Il y aura un point d'inflexion pour la courbe représentant la vitesse en fonction du temps.

---

(1) Voir *Bulletin Belge des Sciences Militaires,* 1924 (pp. 1025-1034).

(2) Mémoire présenté le 9 mars 1916 à la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux (Mémoires de la Société des Sciences de Bordeaux, 1918, 7e série, tome II, pp. 1-16).

(3) C. R. de l'Académie des Sciences, 24 janvier 1916.

Toutes ces trajectoires peuvent et doivent exister dans la balistique appliquée, avec les projectiles employés.

Le mémoire de M. Esclangon se rapporte à la partie de la trajectoire analytique située en deçà de la pièce.

Prenons l'origine du temps t au départ du coup de canon ; la partie de la trajectoire étudiée sera donnée pour t négatif. Lorsque v tend vers $+\infty$, l'angle τ de la tangente à la trajectoire avec l'horizontale croît constamment mais ne peut dépasser $\frac{\pi}{2}$, il a donc une limite θ. Dans les mêmes conditions, le point mobile sur la trajectoire a une position limite Ω située à distance finie ou infinie. On va voir que la position du point Ω dépend de la forme de la loi de résistance $F(v)$.

Le coefficient balistique c étant proportionnel à la densité de l'air, on peut le représenter par

$$c = ke^{-hz},$$

et on a

$$dc = -c.h.dz.$$

On a également, par les équations de la balistique,

$$dz = -\frac{v^2}{g} \operatorname{tg} \tau \, d\tau,$$

d'où

$$dc = \frac{c.h.v^2}{g} \operatorname{tg} \tau \, d\tau. \tag{1}$$

L'équation fondamentale

$$\frac{d(v \cos \tau)}{d\tau} = \frac{c}{g} v.F(v)$$

peut s'écrire sous la forme

$$\cos \tau.\, dv = v \left[\sin \tau + \frac{c}{g} F(v) \right] d\tau,$$

et on a par suite

$$v \frac{dv}{dc} = \frac{F(v)}{h \sin \tau} + \frac{g}{c.h}. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) permettraient d'obtenir v et τ en fonction de c. On aurait de même

$$z = -\frac{1}{h} \log_e c + C^{te},$$

$$\frac{dx}{dc} = -\frac{1}{c.h. \operatorname{tg} \tau},$$

$$\frac{dt}{dc} = \frac{1}{c.h.v. \sin \tau}.$$

Soient τ_0 une valeur de τ voisine de la limite θ de cet angle, v_0 la vitesse correspondante. En écrivant (2) sous la forme

$$\frac{vdv}{F(v)} = \frac{dc}{h \sin \tau} + \frac{g}{h F(v)} \cdot \frac{dc}{c},$$

et en intégrant, on a

$$\int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{F(v)} = \frac{c - c_0}{h \sin \tau_1} + \frac{g}{h\,F(v_2)} \left\{ \log_e c - \log_e c_0 \right\},$$

le théorème de la moyenne étant appliqué dans le second membre. On a τ_1 compris entre τ_0 et τ, v_2 compris entre v_0 et v.

Il faut maintenant examiner la limite de l'intégrale

$$I = \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{F(v)},$$

lorsque v tend vers l'infini.

Lorsque l'intégrale I a une limite finie, M. Esclangon démontre que si la limite θ de τ est :

1° Positive, le point Ω se trouve à distance finie;

2° Négative, le point Ω se trouve à distance finie ou infinie (vers les altitudes z positives).

Lorsque l'intégrale I augmente indéfiniment avec v, la limite θ de τ ne peut être négative. L'angle θ étant positif, le point Ω se trouve nécessairement à l'infini vers les altitudes négatives.

Si la limite θ était nulle, tout se passerait, dans le voisinage de Ω, comme si c était constant, c'est-à-dire comme si la densité de l'atmosphère était constante.

Si la résistance est sensiblement de l'ordre du carré de la vitesse (ce que les expériences conduisent à admettre quand v est très grand), on se trouve dans le cas où l'intégrale I augmente indéfiniment avec v. Dans ces conditions, puisque le point Ω est à l'infini vers les altitudes négatives, on augmenterait indéfiniment la portée d'une bouche à feu en augmentant indéfiniment la vitesse initiale (l'angle de projection et le type du projectile restant les mêmes).

IV. — A. Signorini. — **Un théorème de comparaison en balistique extérieure et quelques-unes de ses applications** (1).

La méthode préconisée par M. Signorini pour l'étude du problème principal de la balistique extérieure, consiste à considérer, en même temps que la trajectoire réelle, deux trajectoires fictives auxquelles on pourra comparer la première.

1. — Considérons le projectile à un instant t et soient $\mathbf{V}$ la vitesse relative, $\mathbf{A}$ l'accélération relative, $\mathbf{A}_c$ l'accélération complémentaire de son centre de gravité $\mathbf{G}$, par rapport à la Terre. Soient encore m la masse du projectile, $-\mathbf{R}$ la résistance de l'air, $\mathbf{g}$ la gravité en $\mathbf{G}$.

Le théorème du mouvement du centre de gravité donne

$$\mathbf{A} = \mathbf{g} - \frac{1}{m}\mathbf{R} - \mathbf{A}_c.$$

(1) *Un teorema di confronto in balistica esterna ed alcune sue applicazioni* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1919, tome XLIII, pp. 357-393).

Posons, $\mathbf{g}_o$ étant une des valeurs de $\mathbf{g}$,

$$\mathbf{R}_T = \mathbf{R} + m\,\mathbf{A}_c - m\,(\mathbf{g} - \mathbf{g}_o),$$

d'où

$$\mathbf{A} = \mathbf{g}_o - \frac{1}{m}\,\mathbf{R}_T. \qquad (1)$$

Si G_o est l'origine de la trajectoire, $\mathbf{v}_o$ la vitesse initiale, $\mathbf{g}_o$ la valeur de $\mathbf{g}$ en G_o, prenons un système d'axes orthogonaux $G_o\,\xi$, $G_o\,\eta$, $G_o\,\zeta$, l'axe $G_o\,\xi$ étant situé dans le plan déterminé par les vecteurs $\mathbf{v}_o$, $\mathbf{g}_o$, dans le sens du tir, l'axe $G_o\,\eta$ étant dirigé dans le sens de $-\,\mathbf{g}_o$. On considérera le mouvement $\mathscr{M}$ de la projection de G sur le plan $G_o\,\xi\,\eta$ et on désignera par $\mathscr{C}$ la trajectoire de cette projection.

Soit θ l'inclinaison de la tangente à $\mathscr{C}$ $(-\pi < \theta < \pi)$ et posons $\theta = \varphi$ pour $t = 0$ (angle de tir). Si x, y sont les coordonnées ξ, η de G, on a

$$\frac{dx}{dt} = v \cos\theta, \qquad \frac{dy}{dt} = v \sin\theta.$$

L'accélération à l'instant t aura comme composantes, sur la tangente et la normale à $\mathscr{C}$, $\frac{dv}{dt}$ et $v\,\frac{d\theta}{dt}$. Si r_T et $\mathscr{d}_T$ sont les composantes, sur ces mêmes droites, de $\frac{1}{m}\,\mathbf{R}_T$, on aura, par (1),

$$\frac{dv}{dt} = -\,g_o \sin\theta - r_T,$$

$$v\,\frac{d\theta}{dt} = -\,g_o \cos\theta - \mathscr{d}_T,$$

$$\frac{d\,(v\cos\theta)}{dt} = -\,[r_T\cos\theta - \mathscr{d}_T\sin\theta].$$

On va considérer le mouvement dans un intervalle de temps $(0, t^*)$ tel que, à chaque instant, on ait

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$r_T\cos\theta - \mathscr{d}_T\sin\theta > 0,$$

$$1 + \frac{\mathscr{d}_T}{g_o\cos\theta} > 0,$$

$$v > 0.$$

En prenant θ comme variable indépendante, on aura

$$\frac{g_o}{v}\,\frac{d\,(v\cos\theta)}{d\theta} = \frac{r_T - \mathscr{d}_T\,\mathrm{tg}\theta}{1 + \dfrac{\mathscr{d}_T}{g_o\cos\theta}} > 0.$$

En posant

$$\mathscr{F} = \frac{r_T - \mathscr{d}_T\,t_y\,\theta}{1 + \dfrac{\mathscr{d}_T}{g_o\cos\theta}},$$

$$\mathscr{D} = \frac{\mathscr{d}_T}{g_o\cos\theta},$$

on aura le système d'équations

$$
\text{(I)} \quad \begin{cases}
\dfrac{g_o}{v}\,\dfrac{d(v\cos\theta)}{d\theta} = \mathcal{F}, & v = v_o \text{ pour } \theta = \varphi, \\[2ex]
g_o t = \displaystyle\int_\theta^\varphi \frac{v\,d\theta}{(1+\mathcal{D})\cos\theta}, & \\[2ex]
g_o x = \displaystyle\int_\theta^\varphi \frac{v^2 d\theta}{1+\mathcal{D}}, & \\[2ex]
g_o y = \displaystyle\int_\theta^\varphi \frac{v^2 tg\,\theta\, d\theta}{1+\mathcal{D}}. &
\end{cases}
$$

On désignera par θ^* la valeur de θ qui correspond à t^*. Dans l'intervalle $(\theta^*\varphi)$, on a

$$v \cos\theta < v_o \cos\varphi.$$

On posera $V^* = v_o$ ou $V^* = \dfrac{v_o \cos\varphi}{\cos\theta^*}$ suivant que $|\theta^*| \leqq \varphi$ ou $|\theta^*| > \varphi$. On aura $v \leqq V^*$.

2. — Soit $\mathcal{F}a\,(\nu, \theta)$ une fonction qui, pour $\theta^* \leqq \theta \leqq \varphi$, et pour ν positif quelconque, soit régulière, positive et non décroissante. Alors, la solution de l'équation différentielle

$$\frac{g_o}{v_a}\,\frac{d(v_a\cos\theta)}{d\theta} = \mathcal{F}a(v_a, \theta)$$

qui, pour $\theta = \varphi$, prend la valeur $v_a = v_o$, satisfait à $0 < v_a \leqq V^*$.

Soit encore $\mathcal{D}a\,(\nu, \theta)$ une fonction qui, pour θ et ν compris dans les intervalles respectifs (θ, φ), $(0, V^*)$, soit régulière, supérieure à -1, et telle que le rapport.

$$\frac{\nu^2}{1 + \mathcal{D}_a(\nu, \theta)}$$

croisse constamment avec ν.

Les équations

$$
\text{(II)} \quad \begin{cases}
\dfrac{g_o}{v_a}\,\dfrac{d(v_a\cos\theta)}{d\theta} = \mathcal{F}a(v_a, \theta), & v_a = v_o \text{ pour } \theta = \varphi, \\[2ex]
g_o t_a = \displaystyle\int_\theta^\varphi \frac{v_a\,d\theta}{\cos\theta\,[1+\mathcal{D}a(v_a,\theta)]}, & \\[2ex]
g_o x_a = \displaystyle\int_\theta^\varphi \frac{v_a^2 d\theta}{1+\mathcal{D}a(v_a,\theta)}, & \\[2ex]
g_o y_a = \displaystyle\int_\theta^\varphi \frac{v_a^2 tg\,\theta\, d\theta}{1+\mathcal{D}a(v_a,\theta)}, &
\end{cases}
$$

peuvent être interprétées comme définissant un mouvement du point (x_a, y_a) dans le plan $G_o\xi\eta$, t_a étant le temps, v_a la vitesse, dans l'intervalle de temps $(0, t_a^*)$, t_a^* correspondant à la valeur θ^* de θ.

On désignera par $\mathcal{M}a$ et on appellera mouvement auxiliaire d'indice θ^* défini par les fonctions $\mathcal{F}a$, $\mathcal{D}a$, l mouvement défini par les équations (II) pour $0 \leqq t_a \leqq t_a^*$, par les équations

$$x_a - x_a^* = v_a^* \cos \theta^* (t_a - t_a^*),$$
$$y_a - y_a^* = tg\, \theta^* (x_a - x_a^*)$$

pour $t_a > t_a^*$ (cela revient à prolonger, à partir de t_a^*, le mouvement défini par les équations (II) par la tangente à la trajectoire).

Les fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{D}$ peuvent être considérées comme fonctions de θ. Si, dans l'intervalle $(\theta,^*\varphi)$, on a en général

$$\mathcal{F}a\,(v,\,\theta) > \mathcal{F}.$$
$$\mathcal{D}a\,(v,\,\theta) > \mathcal{D}.$$

on dira que $\mathcal{M}a$ est un mouvement inférieur, et on le représentera par $\mathcal{M}_1$.

Si au contraire, on a dans le même intervalle,

$$\mathcal{F}a\,(v,\,\theta) < \mathcal{F},$$
$$\mathcal{D}a\,(v,\,\theta) < \mathcal{D},$$

le mouvement $\mathcal{M}a$ se dira mouvement supérieur et on le représentera par $\mathcal{M}_2$.

3. — *Théorème de comparaison.* — Dans l'intervalle (θ^*, φ), prenons, en même temps que le mouvement $\mathcal{M}$, un mouvement inférieur $\mathcal{M}_1$ et un mouvement supérieur $\mathcal{M}_2$.

Soit x^* la valeur de x correspondant à $\theta = \theta^*$. Soient de plus v_1, v, v_2 les valeurs de v dans $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_2$ pour une même valeur de θ ; ϑ_1, ϑ, ϑ_2 les valeurs de θ; y_1, y, y_2 celles de y, t_1, t, t_2 celles de t, dans $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_2$. pour une même valeur de x.

Pour une même valeur de θ, *dans* (θ^*, φ), *on a*

$$v_1 \leqq v \leqq v_2.$$

Pour une même valeur de x, *dans l'intervalle* (o, x*), *on a*

$$\vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2,$$
$$y_1 \geqq y \leqq y_2,$$
$$t_1 \geqq t \geqq t_2.$$

4. — Après avoir démontré le théorème de comparaison, M. Signorini en fait l'application à quatre questions : Effet d'un vent transversal, tir tendu, influence de la rotation du projectile sur le tir des bombardes (mortiers non rayés), tir à petite vitesse. Nous ne pouvons songer à suivre M. Signorini dans tous ses développements; nous nous bornerons à indiquer brièvement comment il utilise le théorème de comparaison dans le cas du tir tendu.

Les équations (I) seront actuellement écrites sous la forme

$$\frac{g}{v}\,\frac{d\,(v\cos\theta)}{d\,\theta} = c\,\delta\,(y)\,\frac{\mathrm{F}\,(kv)}{k},\; v = v_0 \text{ pour } \theta = \varphi,$$

Cela étant, puisque $\frac{F(m)}{m}$ est une fonction croissante de m, on aura un mouvement supérieur en prenant

$$n = 0, k_r = k, \delta^* = \delta_m.$$

On aura un mouvement inférieur en prenant

$$n = 0, k_r = \frac{k}{\cos \Theta^*}, \delta^* = \delta_M,$$

Θ^* étant le plus grand des nombres φ, $[\theta^*]$ et δ_m, δ_M étant les plus petite et plus grande valeurs de $\delta(v)$.

Une approximation plus grande s'obtiendra en définissant n par la double inégalité

$$\cos {}^{n+1}\varphi \leqq \cos \theta^* < \cos {}^n\varphi,$$

et par suite

$$\varphi_r = - \text{arc} \cos (\cos^r \varphi), (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans l'intervalle $(\varphi_{r+1}, \varphi_r)$, on aura un mouvement auxiliaire supérieur en posant

$$\delta^* = \delta_m, k_r = \frac{k}{\cos {}^r\varphi},$$

et un mouvement inférieur en posant

$$\delta^* = \delta_M, k_r = \frac{k}{\cos {}^{r+1}\varphi}.$$

On peut voir, par ce court résumé, que la méthode de M. Signorini est des plus intéressante, au point de vue théorique. Des essais d'applications à la balistique appliquée mériteraient d'être tentés.

V. — V. Vâlcovici. — **Sur le lancement des bombes d'un avion en marche.** (1)

M. Boykow (2) a cherché une formule donnant l'angle sous lequel on voit, d'un avion, le point à atteindre dans le lancement d'une bombe, en fonction de la hauteur et de la vitesse de l'avion. Sur ses données, on a construit un viseur qui fut utilisé par les armées des puissances centrales pendant la guerre. M. Boykow faisait abstraction de la résistance de l'air. La question est reprise par M. Vâlcovici en tenant compte de celle-ci.

Soient h la hauteur de l'avion, v_0 sa vitesse à l'instant $t = 0$ où la bombe est lancée, x la distance du but, φ l'angle sous lequel on voit le but.

On a

$$\varphi = \text{arc tg} \frac{x}{h}.$$

(1) *Annales scientifiques de l'Université de Jassy*, 1921, tome XI, pp. 25-64.

(2) *Boykow. — Bestimmung des Vorhaltwinkels beim Abwerfen von Bomben aus Flugzeugen.* (Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1912, III, p. 248.)

Les équations du mouvement de la bombe sont

$$d\,(v\cos\theta) = -\,kv^2\cos\theta\,dt,$$
$$d\,(v\sin\theta) = -\,kv^2\sin\theta\,dt + gt,$$

g étant l'accélération de la pesanteur, θ l'angle de la tangente à la trajectoire avec l'horizontale, v la vitesse, k une constante positive ayant pour dimension l'inverse d'une longueur. On suppose la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse.

On a

$$x = \frac{1}{k}\int_0^q \frac{dq}{A + f(q)},$$

avec

$$A = \frac{g}{kv_0^2},$$

$$f(q) = q\sqrt{1+q^2} + \log_e\left(q + \sqrt{1+q^2}\right),$$

$q = \operatorname{tg}\theta$ étant donné par

$$h = \frac{1}{k}\int_0^q \frac{q\,dq}{A + f(q)}.$$

Cette dernière intégrale est évaluée par M. Vâlcovici en remplaçant la courbe $y = f(q)$ par un polygone inscrit. La même méthode permet ensuite de déterminer x. De plus, une limite supérieure de l'erreur δ commise est évaluée.

M. Vâlcovici applique ses résultats à un cas concret : soit une bombe de 0,1 m. de diamètre, pesant 25 kg. On prend $k = \frac{1}{2000}$, $v_0^2 = 1000$ m^2. Pour $q = 4$, on trouve $x = 306$ m. avec une erreur possible de $\pm$ 1 m. 50.

M. Vâlcovici se propose ensuite de calculer l'erreur commise dans ses calculs en supposant le poids spécifique de l'air constant.

L. GODEAUX.
Professeur d'analyse mathématique
à l'Ecole militaire.

Extrait du *Bulletin belge des Sciences militaires*, août 1925.