ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

77

EXPOSÉS SUR L'ANALYSE MATHÉMATIQUE
ET SES APPLICATIONS

Publiés sous la direction de

M. J. HADAMARD

Membre de l'Institut

I

QUESTIONS NON RÉSOLUES
DE
GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Les involutions de l'espace
et les variétés algébriques à trois dimensions

PAR

LUCIEN GODEAUX

Professeur à l'Université de Liége
Correspondant de l'Académie royale de Belgique

PARIS
HERMANN & C^ie, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6

1933

QUESTIONS NON RÉSOLUES DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

La Géométrie algébrique consiste dans l'étude des propriétés algébriques qui ne sont pas altérées par les transformations birationnelles de ces variétés. De ce point de vue, la théorie des courbes algébriques peut être considérée comme terminée dans ses points essentiels. Commencée par Cayley, Clebsch et surtout par Noether, la théorie des surfaces algébriques a pris, depuis une quarantaine d'années, un développement considérable. En France, c'est surtout M. E. Picard qui, notamment par l'introduction des intégrales de différentielles totales attachées à une surface algébrique, lui a fait faire des progrès essentiels. En Italie, c'est la superbe Ecole fondée par MM. G. Castelnuovo, F. Enriques et F. Severi qui lui a donné un essor magnifique. Cette théorie n'a cependant pas encore atteint le même degré que celle des courbes algébriques. Un des concepts importants de la théorie des courbes algébriques est celui de l'équivalence de deux groupes de points appartenant à une courbe. Deux groupes de points sur une courbe algébrique donnée sont équivalents s'ils peuvent être considérés comme groupes de niveau d'une même fonction rationnelle des coordonnées des points de la courbe. Ce concept peut *a priori* s'étendre aux surfaces de deux manières, soit que l'on considère des courbes équivalentes tracées sur la surface, soit que l'on considère les groupes de points équivalents. L'extension du concept suivant la première manière a donné naissance à la théorie des systèmes de courbes tracées sur une surface algébrique, magistralement développée par l'Ecole italienne. Au contraire, ce n'est que tout récemment qu'un pas en avant a été fait par M. Severi [1]) dans le champ de la seconde extension, en utilisant les intégrales de Picard attachées à la surface.

La théorie des variétés algébriques à trois dimensions, suite naturelle des théories des courbes et surfaces algébriques, est à peine ébauchée. Le passage de la théorie des courbes à celle des surfaces avait fait pressentir que l'augmentation du nombre des dimensions de la variété étudiée exige l'introduction de concepts nouveaux et de méthodes nouvelles — et c'est là d'ailleurs un des principaux attraits de la Géométrie algébrique. Cette remarque est pleinement justifiée par le passage des surfaces aux variétés à trois dimensions. On fait ici des constatations décevantes : les propriétés de la cubique plane et même, dans une certaine mesure, celles de la surface cubique sont familières à un étudiant en mathématiques ; au contraire, on ne connaît rien de la variété cubique de l'espace à quatre dimensions !

Nous avons voulu, dans ces quelques pages, insister sur deux problèmes non résolus, d'ailleurs intimement liés : les conditions de rationnalité des variétés algébriques à trois dimensions et la théorie des involutions de l'espace. Les premières propriétés rencontrées dans ce domaine montrent de profondes différences avec les questions analogues de la théorie des surfaces. On pourrait dire que, jusqu'à présent, ces problèmes sont restés dans le stade « expérimental », en ce sens que seuls des cas particuliers sont étudiés. Peut-être d'ailleurs les efforts des géomètres devront-ils, pendant un certain temps encore, se borner à cela.

On trouvera, à la fin de cette étude, une bibliographie, aussi complète que possible, de la géométrie sur une variété algébrique à trois dimensions [2]).

Liège, le 9 janvier 1933.

---

[1]) *La serie canonica e la teoria delle serie principali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica* (Commentarii Mathematici Helvetici ; 1932, vol. IV, pp. 268-326). Voir également F. Enriques, *Intorno ad alcune serie invarianti di gruppi di punti sopra una superficie algebrica* (Rend. R. Accad. N. dei Lincei, déc. 1932, pp. 533-540) ; A. Comessatti, *Sulla serie canonica d'una superficie algebrica* (*Idem*, pp. 555-566).

[2]) Les nombres en caractères gras, placés entre parenthèses dans le texte, renvoient à cette bibliographie.

1. — Considérons les équations

$$\rho x_i = \varphi_i(y_0, y_1, \cdots, y_k), \qquad (i = 0, 1, \cdots, r), \tag{1}$$

où les φ_i sont des fonctions rationnelles, entières et homogènes, de même degré ; ρ un facteur de proportionnalité et où k est inférieur à r. Interprétons $x_0, x_1, \ldots, x_r$ comme coordonnées projectives homogènes des points d'un espace linéaire S_r à r dimensions et $y_0, y_1, \ldots, y_k$ comme coordonnées projectives homogènes des points d'un espace linéaire S_k à k dimensions. Par les équations (1), à un point y de S_k correspond un et un seul point x de S_r et si, comme nous le supposerons, les variables homogènes $y_0, y_1, \ldots, y_k$ sont essentielles, le lieu de ce point x est une variété algébrique V_k, à k dimensions. Mais un point x de V_k peut provenir d'un nombre fini $n \geqslant 1$ de points de S_k. Aux différents points de V_k correspondent ∞^k groupes de n points de S_k tels qu'un point de S_k appartienne en général à un seul groupe.

Envisageons, dans l'espace S_k, le système linéaire ∞^r d'hypersurfaces.

$$\lambda_0\varphi_0(y_0, y_1, \cdots, y_k) + \lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_r\varphi_r = 0, \tag{2}$$

qui, par les équations (1), est projectif au système des hyperplans de S_r. Les hypersurfaces du système (2) passant par un point ont encore en commun, en dehors de la base (ensemble des points appartenant à toutes les hypersurfaces du système), $n - 1$ autres points et à chacun de ces n points correspond le même point x de V_k. L'ensemble des groupes de n points ainsi obtenus constitue ce que l'on appelle une involution I_n, d'ordre n, de S_k ; la variété V_k est appelée image de cette involution. Il y a au plus ∞^{k-2} points de S_k appartenant à une infinité de groupes de l'involution I_n.

k hypersurfaces linéairement indépendantes du système (2) ont en commun, en dehors de la base, un nombre fini m de groupes de I_n. A ces groupes correspondent m points de V_k intersection de cette variété et de k hyperplans indépendants de S_r. La variété V_k est donc d'ordre m. On dit que le système (2) est composé au moyen de l'involution I_n.

Supposons $n>1$. Est-il possible de trouver $k+1$ fonctions rationnelles, entières et homogènes, de même degré, $\psi_0(y_0, y_1, \cdots y_k)$, $\psi_1, \cdots, \psi_k$, telles qu'en éliminant les y entre les équations (1) et les équations

$$\rho' z_i = \varphi_i(y_0, y_1, \cdots, y_k), \qquad (i = 0, 1, \cdots, k),$$

on obtienne des équations

$$\rho'' x_i = f_i(z_0, z_1, \cdots, z_k), \qquad (i = 0, 1, \cdots, r),$$

analogues aux équations (1) mais possédant cette propriété que tout point x de V_k provienne en général d'un seul système de valeurs des z ? Si la chose est possible, on dira que la variété V_k et l'involution I_n sont rationnelles.

Pour $k = 1$, la réponse à la question précédente est affirmative et est fournie par le théorème de Lüroth. Pour $k = 2$, la réponse est également affirmative d'après un théorème dû à M. Castelnuovo [1]). Mais pour $k = 3$, la réponse est au contraire négative ; on connaît en effet un exemple, dû à M. Enriques (**15**), d'une involution non rationnelle de l'espace ordinaire. Pour $k > 3$, la question n'a pas été examinée.

2. — La démonstration du théorème de Lüroth est élémentaire. Indiquons brièvement celle du théorème de M. Castelnuovo.

Soit V_2 une surface image d'une involution I_n, d'ordre n, appartenant à un plan S_2. Un système linéaire de courbes du plan S_2, composé au moyen de l'involution I_n, c'est-à-dire tel que deux de ses courbes ne se rencontrent, en dehors des points-base, qu'en un nombre fini de groupes de I_n, a pour homologue, sur la surface V_2, un système linéaire. Inversement, à un système linéaire de courbes tracées sur la surface V_2 correspond dans le plan S_2 un système linéaire composé au moyen de I_n. Rappelons qu'une série linéaire de groupes de points, sur une courbe algébrique, est dite complète lorsqu'on ne peut trouver, sur la courbe, un groupe de points équivalent à un groupe de la série et n'appartenant pas à celle-ci. De même, un système linéaire de courbes

[1]) Sulla razionalità delle involuzioni piane (Math. Annalen, 1893, t. **44**, pp. 125-155).

tracées sur une surface algébrique est dit complet lorsque toute courbe de la surface équivalente à une courbe du système, appartient à ce système. Cela étant, l'analyse des systèmes linéaire de courbes du plan S_2, composés au moyen de l'involution I_n, a conduit M. Castelnuovo à démontrer que :

1° Si un système linéaire de courbes tracées sur V_2 est complet, la série caractéristique, c'est-à-dire la série découpée sur une courbe du système par les autres courbes de celui-ci, est complète.

2° Il existe sur la surface V_2 un système linéaire dont la dimension est supérieure au genre des courbes du système

Ces propriétés caractérisent les surfaces rationnelles. Considérons en effet le systéme adjoint à un systéme linéaire $|C|$ possédant les propriétés précédentes, c'est-à-dire le système linéaire formé par les courbes qui découpent, sur chaque courbe C, la série canonique de celle-ci [1]). Ou bien les courbes adjointes se composent de courbes rationnelles variables dans un faisceau linéaire, ou bien le système adjoint possède lui-même les propriétés 1) et 2). Comme le genre des courbes adjointes est inférieur au genre des courbes primitives, l'opération d'adjonction, répétée un nombre suffisant de fois, conduit à un faisceau de courbes rationnelles, ou à un réseau de courbes elliptiques, ou à un système linéaire ∞^3 de courbes de genre deux. Dans chaque cas, la surface est rationnelle.

3. — Avant d'exposer la construction de l'involution d'Enriques, il convient de donner quelques indications sur les invariants d'une variété algébrique à trois dimensions, relatifs aux transformations birationnelles de cette variété. Rappelons brièvement, en premier lieu, les résultats, aujourd'hui classiques, relatifs aux courbes et aux surfaces algébriques.

Toute courbe algébrique peut se transformer birationnellement en une courbe plane d'ordre m ne possédant que des points doubles ordinaires [2]). On sait que le nombre des adjointes d'ordre

---

[1]) Si l'on projette la courbe sur un plan suivant une courbe d'ordre m, à la série canonique corrspond la série découpée sur la courbe plane par les adjointes d'ordre m — 3 (Cfr. n° 3).

[2]) Ce théorème remonte à KRONECKER ; il équivaut au fait que toute courbe peut être transformée birationnellement en une courbe gauche sans point singulier. On en a donné de nombreuses démonstrations, dont on trouvera

$m - 3$, linéairement indépendantes, est égal au genre p de la courbe. On peut introduire le genre par d'autres procédés. Considérons, sur une courbe algébrique C, une série linéaire $|G|$ de groupes G de n points. Extrayons de cette série une série linéaire simplement infinie ; un certain nombre fini de groupes de cette nouvelle série ont des points doubles ; le groupe formé par ces points doubles est appelé groupe jacobien G_j de la série. Les groupes jacobiens de toutes les séries linéaires ∞^1 extraites de $|G|$ appartiennent à une série linéaire $|G_j|$ appelée série jacobienne de la série $|G|$. La série $|G_j - 2G|$, si elle existe, c'est-à-dire la série des groupes de points qui, joints à deux groupes de la série $|G|$, donnent un groupe de la série jacobienne $|G_j|$, est la série canonique de C; elle est d'ordre $2p - 2$ et de dimension $p - 1$. Cette construction de la série canonique, applicable à une courbe située dans un espace à un nombre quelconque de dimensions, est due à M. Enriques (voir **VII**, t. III). Sur la courbe plane d'ordre m considérée plus haut, la série canonique est découpée par les adjointes d'ordre $m - 3$.

Passons aux surfaces. Toute surface algébrique peut se transformer birationnellement en une surface d'ordre m, d'un espace S_3, possédant une courbe double ordinaire et des points triples à la fois pour la courbe double et pour la surface[1]) On appelle adjointes à cette surface les surfaces passant simplement par la courbe double. Le nombre des adjointes d'ordre $m - 4$, linéairement indépendantes, est le genre géométrique p_g de la surface

Le nombre des conditions imposées à une surface adjointe d'ordre l est, pour une valeur suffisamment grande de l, égal à $\alpha l + \alpha'$, α et α' ne dépendant que de la courbe double et de ses

---

l'historique dans le traité de M. Severi (*VIII*, p. 332). Citons la démonstration de Halphen (C. R., 1875, t. **78** ; Mém. des Savants étrangers, t. **26** Appendice au *Traité des courbes planes* de Salmon-Chemin ; Oeuvres, t. I et IV). Voir aussi Picard, *Traité d'analyse*, t. II ; Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, t. I ; Enriques-Chisini (*IV*). Signalons encore la démonstrations de M. Vessiot (Annales de Toulouse, 1896) et de M. Simart (C. R., 1893, t. **116**).

[1]) Voir Picard et Simart (*I*, t. I). Ce théorème équivaut au fait que l'on peut transformer birationnellement une surface algébrique en une surface de l'espace à cinq dimensions, privée de singularités. Ce théorème a été démontré par B. Levi, O. Chisini, G. Albanese. Pour la bibliographie, où il y a lieu de citer également les travaux de C. Segre et de Kobb, nous renvoyons à Enriques-Chisini (*VII*, t. II).

points triples. Si l'on applique cette formule pour $l = m - 4$, qu'elle soit valable ou non pour cette valeur de l, on trouve que le nombre des adjointes d'ordre $m - 4$, linéairement indépendantes est

$$p_a = \binom{m-1}{3} - (m-4)\mu + 2\tau + \pi - 1,$$

où μ est l'ordre de la courbe double, π son genre, τ le nombre des points triples. On a $p_a \leqslant p_g$ et p_a peut être négatif, alors que p_g est positif ou nul. Pour une surface réglée de genre p, par exemple, on a $p_g = 0$, $p_a = -p$.

Les surfaces d'ordre $2(m-4)$, passant doublement par la courbe double de la surface, sont appelées biadjointes. Le nombre de ces surfaces, linéairement indépendantes, est le bigenre P_2 de la surface. On définit d'une manière alnaogue le trigenre P_3 au moyen des surfaces d'ordre $3(m-4)$ passant triplement par la courbe double (surfaces triadjointes) ;...

Considérons, sur une surface algébrique F, un système linéaire $|C|$ de courbes irréductibles C, ∞^2 au moins, et appelons jacobienne d'un réseau le lieu des points doubles des courbes de ce réseau. Les jacobiennes C_j des différends réseaux extraits de $|C|$ appartiennent à un système linéaire $|C_j|$, le jacobien de $|C|$. Le système canonique de la surface F est formé des courbes qui, jointes à trois courbes C quelconques, donnent une courbe du système jacobien $|C_j|$. On le représente par $|C_j - 3C|$ [1]; sa dimension est égale à $p_g - 1$. Le double du système canonique, que l'on représente par $|2(C_j - 3C)|$, c'est-à-dire le système linéaire qui comprend toutes les courbes formées de deux courbes canoniques, est le système bicanonique de la surface ; sa dimension est $P_2 - 1$. Ces systèmes sont respectivement découpés, sur une surface de l'espace S_3 (en dehors de la courbe double et des courbes exceptionnelles éventuelles) par les adjointes d'ordre

[1] Il convient de remarquer que dans le passage d'une surface à une autre par une transformation birationnelle, à des points simples d'une surface peuvent correspondre des courbes (rationnelles) de l'autre ; ces courbes sont dites exceptionnelles. Si l'on excepte les surfaces rationnelles ou transformables en des réglées (pour lesquelles on a $p_g = 0$), une surface ne peut contenir qu'un nombre fini de courbes exceptionnelles (*XII*). Ces courbes font partie du système $|C_j - 3C|$ et doivent être défalquées de ce système pour obtenir le système canonique. On peut d'ailleurs toujours trouver une transformée birationnelle d'une surface, dépourvue de courbes exceptionnelles.

$m - 4$ et les biadjointes. Le système $|C_j - 2C|$ est appelé système adjoint à $|C|$ et est représenté par $|C'|$; les courbes C' découpent, sur une courbe C, les groupes canoniques de cette courbe ; il est complètement défini par cette propriété et le système canonique peut être représenté par $|C' - C|$. La considération du système jacobien pour définir le système canonique est due à M. Enriques [1]).

La série caractéristique du système $|C|$ peut ne pas être complète ; dans ce cas, son défaut (différence entre la dimension de la série complète et la dimension de la série caractéristique) est égal à la différence $p_g - p_a$, appelée irrégularité de la surface (Enriques-Picard-Severi) ; ce fait permet de définir le genre arithmétique de la surface en partant du système $|C|$ (**XII**).

Un beau théorème de MM. Castelnuovo, Enriques, Severi donne une interprétation transcendante de l'irrégularité $p_g - p_a$ d'une surface ; c'est le nombre des intégrales de Picard (intégrales de différentielles totales) de première espèce, indépendantes, attachées à la surface.

Le genre des courbes canoniques de F est appelé genre linéaire $p^{(1)}$ de cette surface ; deux courbes canoniques se coupent en $p^{(1)} - 1$ points.

Les nombres $p^{(1)}$, p_a, p_g, P_2,... sont les invariants de la surface F vis-à-vis des transformations birationnelles. Les plurigenres P_2, P_3,... ont été introduits par M. Enriques.

On pourrait également définir, pour les courbes, le bigenre et la série bicanonique, mais le bigenre s'exprimant en fonction du genre, son introduction ne présente aucun intérêt. Au contraire, il existe des surfaces pour lesquelles on a $p_g = 0$, $P_2 \geqslant 1$; le système canonique n'existe pas, mais le système bicanonique existe (Enriques).

Nous renvoyons, pour de plus amples détails sur les genres des surfaces, aux ouvrages de MM. Picard et Simart (**I**), de MM. Castelnuovo et Enriques (**III**) et de M. Enriques (**XII**).

4. — Considérons maintenant une variété algébrique à trois dimensions V_3. Les considérations précédentes s'étendent à cette

---

[1]) *Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche* (Atti R. Accad. Torino, 1901, t. 37).

variété, comme l'on fait voir Nœther (**39**), M. Pannelli (**40**, **41**) et, d'une manière plus approfondie, M. Severi (**60**).

Soit V_3 une variété algébrique à trois dimensions, dans un espace S_4. On peut supposer, sans restriction, que V_3, d'ordre m, ne possède que des singularités ordinaires : surface double, courbe triple pour la variété et pour la surface double, points (en nombre fini) quadruples pour la variété et la courbe triple, sextuples pour la surface double. On appelle hypersurface adjointe à V_3, une hypersurface passant simplement par la surface double. Le nombre des hypersurfaces adjointes d'ordre $m - 5$, linéairement indépendantes, est appelé genre géométrique P_g de V_3. On peut calculer une expression virtuelle de ce nombre par le procédé employé pour calculer p_a dans le cas des surfaces ; on trouve ainsi un nombre P_a, appelé genre arithmétique de V_3, qui peut être distinct de P_g. On peut également définir les hypersurfaces biadjointes et le bigenre P_2,....

Considérons plutôt le cas où la variété algébrique V_3 est située dans un espace à un nombre quelconque $r \geqslant 4$ de dimensions et, sur cette variété, un système linéaire $|F|$ de surfaces irréductibles F, ∞^3 au moins, tel que les surfaces F passant par un même point arbitrairement donné n'aient pas toutes une infinité d'autres points communs, en dehors des courbes-base éventuelles du système (courbes communes à toutes les surfaces F). Désignons par F_j la jacobienne d'un système linéaire ∞^3 de surfaces tiré de $|F|$, c'est-à-dire le lieu des points qui sont doubles pour les surfaces de ce système ∞^3. Les jacobiennes F_j construites au moyen de $|F|$ appartiennent à un système linéaire $|F_j|$, le jacobien de $|F|$. Le système $|F_j - 4F|$, s'il existe, est appelé système canonique [1] de V_3 ; sa dimension est $P_g - 1$ et dans le cas où V_3 appartient à S_4, le système canonique est découpé par les adjointes d'ordre $m - 5$ (en dehors de la surface double).

Le système $|2(F_j - 4F)|$ est appelé système bicanonique de V_3, le système $|3(F_j - 4F)|$ système tricanonique,... ; les nombres de surfaces linéairement indépendantes de ces systèmes sont respectivement le bigenre P_2, le trigenre P_3,....

Le système $|F_j - 3F|$ est l'adjoint $|F'|$ de $|F|$; ses surfaces

[1]) Il faut en défalquer les surfaces exceptionnelles éventuelles de V_3, surfaces définies d'une manière analogue aux courbes exceptionnelles des surfaces.

découpent, sur chaque surface F, le système canonique de cette surface et cette propriété suffit d'ailleurs à le définir.

Il y a lieu de considérer le degré Ω_0 du système canonique, c'est-à-dire le nombre de points communs à trois surfaces du système n'appartenant pas à un même faisceau ; le genre Ω_1 de la courbe commune à deux surfaces du système canonique et enfin le genre arithmétique Ω_2 d'une surface de ce système. On a

$$2\Omega_1 - 2 = 3\Omega_0,$$
$$2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4.$$

Un théorème important de MM. Castelnuovo et Enriques (**5**) permet d'introduire l'irrégularité superficielle d'une variété V_3. L'irrégulatrié d'une surface tracée sur V_3, susceptible de décrire un système linéaire ∞^2 au moins, la courbe variable intersection de deux surfaces de ce système étant en général irréductible, ne dépend pas de la surface considérée ; c'est cette irrégularité qui porte le nom d'irrégularité superficielle de V_3. Elle est égale au nombre des intégrales simples de première espèce, distinctes, de la variété V_3.

La différence $P_g - P_a$ porte le nom d'irrégularité à trois dimensions de V_3. Contrairement à ce qui se passe pour les surfaces, cette irrégularité peut être négative. Si V_3 est la variété qui représente les couples de points d'une surface de genres $p_g = p_a = 0$ et d'une courbe de genre p, on a $P_g = 0$, $P_a = p$, d'où $P_g - P_a = -p$ (**60**). On peut considérer comme probable que l'irrégularité $P_g - P_a$ est en relation avec le nombre des intégrales doubles de première espèce attachées à la variété V_3. D'une manière précise, il est probable que le nombre de ces intégrales, distinctes, est égal à la somme des deux irrégularités de la variété V_3 (**60**). Et il existe des variétés particulières pour lesquelles cette relation est vérifiée. Ajoutons encore que les irrégularités de V_3 sont en relation avec les défauts de certains systèmes de courbes tracées sur la variété (**60**, **1**). Il reste, dans ces questions, matière à de nombreuses recherches.

Les intégrales doubles de première espèce attachées à V_3 ont été étudiées par M. Severi (**59**, **62**) ; celles de seconde espèce par M. Lefschetz (**34**), qui en a déterminé le nombre.

5. — On sait que, d'après Clebsch, une courbe algébrique de genre $p = 0$ est rationnelle. L'extension aux surfaces a été faite par M. Castelnuovo [1] ; la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface algébrique soit rationnelle est que son genre arithmétique et son bigenre soient nuls ($p_a = P_2 = 0$). Ces conditions entraînent d'ailleurs $p_g = 0$, $P_3 = 0$,.... On a cherché la généralisation de ces propriétés pour les variétés algébriques à trois dimensions et l'on s'est posé la question de savoir si une variété ayant ses genres géométriques et arithmétiques, ses plurigences et son irrégularité superficielle nuls, était rationnelle. M. Fano (**20**) a montré qu'il faut répondre par la négative à ces questions.

Considérons, avec M. Fano, la variété V_3^4 du quatrième ordre de l'espace S_4, dépourvue de points doubles (c'est-à-dire le lieu des points de S_4 dont les coordonnées annulent une polynôme de degré quatre homogène par rapport à ces coordonnées, à coefficients généraux), et la variété V_3^6, de l'espace S_5, intersection d'une hyperquadrique et d'une hypersurface cubique [2]). Ces variétés ont toutes deux les genres $P_a = P_g = P_2 = \ldots = 0$ et l'irrégularité superficielle zéro. Or, M. Fano démontre que ces variétés ne possèdent pas de systèmes homaloïdaux, c'est-à-dire de systèmes linéaires ∞^3 de surfaces tels que trois surfaces d'un système, qui n'appartiennent pas à un même faisceau, ne se rencontrent qu'en un seul point variable. Il en résulte que l'on ne peut établir une correspondance birationnelle entre une quelconque de ces variétés et l'espace S_3 ; elles ne sont donc pas rationnelles.

M. Fano (**22**) a donné plus tard une démonstration plus simple des résultats précédents. Il a démontré que sur la variété V_3^4, il n'existe qu'un seul système linéaire de surfaces dont tous les genres sont égaux à l'unité et dont la dimension soit au moins égale à deux : le système des sections hyperplanes ; il en résulte que cette variété ne peut posséder de transformations birationnelles

---

[1]) *Sulle superficie di genere zero* (Memorie della Soc. Ital. delle Scienze, 1896, 3e série, t. X).

[2]) Rappelons que l'ordre d'une variété algébrique V_k de S_r est égal au nombre des points communs à cette variété et à un espace S_{r-k}. Il peut d'ailleurs exister des espaces S_{r-k} particuliers ayant une infinité de points en commun avec V_k.

nelles en elle-même, en dehors de transformations projectives éventuelles. La démonstration s'étend à la variété V_3^6 de S_5 avec une légère modification. Cette variété supposée dépourvue de points doubles) possède ∞^1 droites et un espace S_3 passant par une r de ces droites coupe encore V_3^6 suivant une quintique de genre deux, ayant r comme trisécante. Par suite, un plan passant par r coupe encore V_3^6 suivant deux points. Cette variété est donc projetée sur elle-même à partir de chacune de ses droites. Cela étant, il ne peut exister sur V_3^6 d'autres systèmes linéaires de surfaces de genres ou de dimensions au moins égale à deux, en dehors du système des sections hyperplanes et de ses projections à partir des droites de cette variété (projections répétées plusieurs fois). Il en résulte que les seules transformations birationnelles de la variété en elle-même sont des produits de ces projections et de transformations projectives éventuelles. Par suite, les variétés V_3^4 de S_4, V_3^6 de S_5 ne peuvent être rationnelles.

Ajoutons que si l'hyperquadrique passant par V_3^6 est dépourvue de points doubles, cette variété représente le complexe cubique de droites de l'espace S_3.

6. — Arrivons à la construction de l'involution d'Enriques, qui utilise les résultats qui précèdent.

Envisageons, dans un espace S_3, un complexe de droites Φ, du troisième ordre et soit Q l'hyperquadrique d'un espace S_5 qui représente les droites de l'espace S_3 [1]). Sur Q, le complexe Φ est représenté par la variété V_3^6 intersection de cette hyperquadrique et d'une hypersurface cubique M_4^3 ; c'est précisément la variété considérée par M. Fano.

On sait que l'hyperquadrique Q contient deux systèmes Σ, Σ' de plans (en nombre ∞^3) représentant respectivement les gerbes de droites et les plans réglés de S_3 [2]). Les plans de Σ, Σ' coupent la variété V_3^6 suivant des cubiques en général elliptiques.

Considérons une droite r de Φ et le point R qui la représente sur Q et qui appartient donc à V_3^6. Par R passent ∞^1 plans de Σ et ces plans forment une variété rationnelle représentée biunivoquement sur la ponctuelle de support r. Sur chacune des

[1]) Pour ces questions, voir Koenings, *La géométrie réglée et ses applications* (Paris, 1895). Voir aussi Bouligand, *Notions sur la géométrie réglée* (Paris, 1929).

[2]) Koenigs, *loc. cit.*

cubiques Γ découpées sur V_3^6 par les plans de Σ passant par R se trouve déterminé rationnellement un point, le tangentiel R′ de R le lieu des points R′ est une courbe rationnelle K, intersection de V_3^6 et des hyperplans tangents à Q et à M_4^3 au point R. L'espace linéaire à trois dimensions, commun à ces hyperplans, coupe Q suivant un cône quadratique de sommet R et M_4^3 suivant une surface cubique ayant un point double conique en R ; il en résulte que la courbe K est d'ordre six et possède un point quadruple en R.

Répétons la même construction en partant de chaque point de la courbe K ; nous obtenons ∞^1 courbes rationnelles analogues à K, engendrant une surface F sur laquelle elles forment une série non linéaire ; par suite, la surface F est rationnelle. Répétons encore, pour chaque point de la surface F, la construction précédente ; nous obtenons ∞^2 courbes rationnelles analogues à K et que nous désignerons par K_1. Les courbes rationnelles K_1 remplissent toute la variété V_6^3 ; elles forment une congruence $\{K_1\}$ non linéaire, mais rationnelle comme la surface F. On peut par suite rapporter birationnellement les courbes de la congruence $\{K_1\}$ aux droites d'une gerbe de sommet O d'un espace S_3, de manière à ce que chaque courbe K_1 soit en correspondance birationnelle avec la droite homologue. Dans ces conditions, à un point de S_3 correspond un point de V_6^3, mais à un point de cette variété correspondent autant de points de S_3 qu'il y a de courbes K_1 passant par le point considéré. Ainsi se trouve construite une involution de S_3, non rationnelle d'après le résultat de M. Fano.

M. G. Aprile (**3**) a démontré que l'involution d'Enriques est d'ordre 216. En modifiant un peu la construction précédente, il est arrivé à une involution d'ordre 36, représentée également par la variété V_3^6. De plus, M. Aprile a indiqué un procédé pour passer des courbes K_1 aux droites de la gerbe de sommet O, procédé que voici :

Soit ϖ un plan appartenant à Q. La courbe K_1 relative a un point R_1 de F, appartient à un cône du second ordre qui coupe ϖ en un seul point. Supposons, ce qui n'est pas une restriction, que l'espace S_3 contenant la gerbe de sommet O appartienne à l'espace S_5. Désignons par k_1 la droite passant par O homologue de la courbe K_1 considérée. Un hyperplan, passant par le point R_1 et le plan ϖ coupe K_1 en un seul point variable auquel on fait correspondre le point de rencontre de cet hyperplan et de la droite k_1. Ainsi se trouve établie la correspondance entre une courbe K_1 et la droite k_1 homologue dans la gerbe de sommet O.

7. — Une variété V_3 image d'une involution I_n appartenant à un espace S_3 étant donnée, que peut-on dire de ses genres ?

Supposons que la variété V_3 puisse posséder un système canonique $|L|$, éventuellement formé de surfaces d'ordre zéro. Si $|F|$ est un système de surfaces, linéaire, ∞^3 au moins, et $|F_j|$ son système jacobien, on a

$$|L + 4F| = |F_j|.$$

L'involution I_n possède une surface unie D ; on appelle ainsi le lieu des points doubles des groupes de l'involution. De plus, il peut exister des points de V_3 auxquels correspondent des groupes de I_n en nombre infini. D'une manière précise, il peut exister sur V_3 un nombre fini de points à chacun desquels correspondent ∞^2 groupes de I_n, et certaines courbes lieu de points auxquels correspondent ∞^1 groupes de I_n. Les groupes de I_n ainsi obtenus forment des surfaces fondamentales de l'involution. Représentons par Φ l'ensemble de ces surfaces et soient F', F_j' les surfaces de S_3 qui correspondent respectivement aux surfaces F, F_j. Et bien, le jacobien du système $|F'|$ est le système $|F_j' + D + \Phi|$. Si $|L|$ existe, le système $|F_j' + D + \Phi - 4\ F'|$ existe. Or cela est impossible, car si les surfaces F' sont d'ordre m, les jacobiennes de $|F'|$ sont d'ordre $4\ (m - 1)$. On en conclut que le genre P_g de V_3 est nul. On démontre de même que les plurigenres $P_2, P_3, \ldots$ de V_3 sont nuls [1]).

D'autre part, s'il existait, sur V_3, une intégrale de Picard de première espèce, elle donnerait une intégrale analogue attachée à S_3, ce qui est impossible. L'irrégularité superficielle de V_3 est donc nulle.

L'évaluation du genre arithmétique P_a de la variété V_3 n'est pas aussi simple ; elle exigerait le calcul d'une formule liant les genres arithmétiques de deux variétés en correspondance ration-

---

[1]) Ce raisonnement est une simple extension de celui qui a été fait par MM. Enriques et Severi dans le cas des surfaces algébriques. Voir SEVERI, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica* (Rend R. Istituto Lombardo, 1903).

nelle, formule établie par M. Tafani (**59**) dans le cas où la correspondance est dépourvue de points fondamentaux. On peut toutefois affirmer que l'on a $P_a \leqslant 0$.

8. — Les surfaces algébriques dont les sections planes sont rationnelles, elliptiques ou hyperelliptiques ont été étudiées et on sait que ces surfaces sont rationnelles ou réglées. Par analogie, on pouvait étudier les variétés algébriques à trois dimensions de S_r dont les sections par des espaces S_{r-2} sont des courbes rationnelles, elliptiques, ... et celles dont les sections hyperplanes sont des surfaces rationnelles,...

M. Enriques a étudié les variétés V_3 de S_r dont les sections par les espaces S_{r-2} sont rationnelles, elliptiques (**13**) ou hyperelliptiques (**12**). Dans le premier cas, V_3 est une hyperquadrique de S_4, ou contient une famille ∞^1 rationnelle de plans et est rationnelle, ou est la projection d'une surface de Véronèse [1]) à partir d'un point, dans S_6, et est rationnelle. Dans le second cas, la variété est rationnelle, on contient une famille ∞^1 elliptique de plans, ou est la variété cubique de S_4. Dans le dernier cas, la variété est rationnelle et contient un faisceau de quadriques, ou elle contient un faisceau irrationnel de plans.

M. Fano (**23**) a démontré que les variétés à trois dimensions, algébriques, dont les sections hyperplanes sont des surfaces rationnelles, sont rationnelles ou coïncident avec l'hypersurface cubique V_3^3 de S_4. Il s'est ensuite occupé (**24**) des variétés V_3^{2p-2}, d'ordre $2p - 2$, appartenant à l'espace S_{p+1} ; les sections hyperplanes de ces variétés sont des surfaces de genres un. L'hypersurface du quatrième ordre V_3^4 de S_4 et l'intersection V_3^6 d'une hyperquadrique et d'une hypersurface cubique de S_5, déjà étudiées par M. Fano, sont des cas particuliers de ces variétés.

Dans un travail récent (**30**), nous avons démontré qu'une variété V_3^{2p-2}, d'ordre $2p - 2$, de S_p, se ramène, par une transformation birationnelle, à une variété du même ordre, appartenant à un espace S_{p-1}.

Signalons que M. Enriques (**14**) a démontré qu'une variété V_3

[1]) La surface de Véronese s'obtient en rapportant projectivement les coniques d'un plan aux hyperplans d'un espace S_5 ; elle est d'ordre quatre et contient ∞^2 coniques se coupant deux à deux en un point. Voir Bertini, *Geometria proiettiva degli iperspazi* (Pise, 1907).

contenant un réseau de surfaces rationnelles dont les intersections variables ne se composent pas de courbes rationnelles ou elliptiques, représente une involution appartenant à un espace S_3. Il en a déduit qu'une variété V_3 contenant un système linéaire ∞^3 de surfaces rationnelles à intersections variables irréductibles, représente également une involution de l'espace S_3.

Dans le même mémoire, M. Enriques démontre qu'une variété V_3 contenant une congruence d'indice un de courbes rationnelles, se transforme birationnellement en une variété contenant une congruence d'indice un de coniques. Ce théorème est l'extension du théorème de Noether sur les surfaces contenant un faisceau de courbes rationnelles ; Nœther a démontré que ces surfaces se transforment birationnellement en une surface réglée ou en une surface contenant un faisceau de coniques ; il a montré que si, dans ce dernier cas, le faisceau est linéaire (c'est-à-dire rationnel), la surface est rationnelle. M. Enriques a ensuite démontré que toute surface contenant un faisceau de coniques de genre p est référable à une réglée ; cela revient à prouver l'existence, sur la première surface, d'une courbe unisécante des coniques. Un théorème analogue ne pourra être obtenu dans le cas des variétés à trois dimensions, car Montesano a montré l'existence, dans l'espace S_3, de congruences d'indice un de coniques pour lesquelles il n'existe pas de surface unisécante. Ceci nous amène à signaler cet autre résultat de M. Enriques : Une congruence d'indice un de courbes rationnelles d'ordre impair de S_3 peut se ramener, par une transformation birationnelle, à une gerbe de droites. Il serait intéressant d'étudier les congruences de courbes rationnelles d'ordre pair de S_3.

9. — Nous avons eu l'occasion de signaler à deux reprises, l'hypersurface cubique générale V_3^3 de S_4. Nœther a posé, il y a plus de quarante ans, la question de savoir si elle est rationnelle. Cette question est jusqu'ici retée sans réponse ; tout au plus, certains indices font-ils croire que cette dernière sera négative.

Observons que dès que la variété V_3^3 acquiert un point double O, elle est rationnelle ; il suffit en effet de la projeter de O sur un espace S_3 ne passant pas par ce point. Aux sections hyperplanes de V_3^3 correspondent les surfaces cubiques de S_3 passant par une sextique gauche de genre quatre. M. Enriques **(15)** suggère un procédé de raisonnement qui, rendu rigoureux, permettrait de démontrer l'irrationnalité de la variété cubique V_3^3 générale (sans point double).

a) Si la variété V_3^3 générale est rationnelle, il existe une représentation de cette variété sur l'espace S_3 qui ne dégénère pas lorsque la variété acquiert un point double.

b) Dans cette hypothèse, le système des surfaces cubiques de S_3 passant par une sextique gauche de genre quatre peut être considéré comme la limite d'un système linéaire de surfaces d'ordre $n > 3$, représentant la surface cubique générale. Il devrait donc exister une surface, éventuellement réductible, d'ordre $n - 3$, qui, ajoutée aux surfaces cubiques en question, donneraient lieu à des surfaces connexes de genre zéro, ce qui est impossible.

La variété générale V_3^3 représente une involution d'ordre deux appartenant à l'espace S_3. Ce point a été établi par Nœther dans un travail resté inédit (**66**) et plus tard par M. Enriques (**12**). La variété V_3^3 contient ∞^1 droites formant une congruence qui a été étudiée par M. Fano (**19**) ; par un point de la variété passent six de ces droites, car la section de V_3^3 par l'hyperplan tangent en ce point est une surface cubique ayant un point double conique au point de contact et contenant par suite six droites passant par ce point.

Soit r une droite déterminée de V_3^3. Une tangente t à V_3^3 en un point R de r coupe encore la variété en un point A. Inversement, le plan Ar coupe encore V_3^3 suivant une conique rencontrant r en deux points R_1, R_2 et les droites AR_1, AR_2 sont tangentes à V_3^3 en R_1, R_2. Ainsi se trouve établie une correspondance (1, 2) entre les points de V_3^3 et les tangentes à cette hypersurface aux points de r.

Cela étant, établissons une projectivité entre les points de r et les plans d'un faisceau d'axe a appartenant à un espace S_3. Les tangentes à V_3^3 en un point de r forment une gerbe dans l'hyperplan tangent ; on peut établir une projectivité entre la gerbe des tangentes en un point de r et le plan (ponctuel) homologue du faisceau d'axe a. On obtient ainsi, dans l'espace S_3 une involution d'ordre deux ayant V_3^3 comme image. Cette représentation a été étudiée par M. Snyder (**66**). On consultera également, sur cet objet, un mémoire de M. Marletta (**38**). Il peut être utile de signaler qu'au point de vue projectif, la variété V_3^3 a été étudiée par MM. Enriques (**11**) et Fano (**17**).

10. — Les lignes qui précèdent montrent qu'il existe de profondes différences entre la géométrie sur une surface algébrique et la géométrie sur une variété algébrique à trois dimensions. Nous avons essayé d'appeler l'attention sur trois problèmes.

A. — Déterminer les conditions de rationnalité d'une variété algébrique à trois dimensions.

B. — Classer les involutions appartenant à l'espace linéaire à trois dimensions.

C. — Démontrer que la variété cubique V_3^3, sans point double, de l'espace linéaire à quatre dimensions, n'est pas rationnelle.

Il est probable que pour résoudre le premier de ces problèmes, il faudra introduire de nouveaux invariants (vis-à-vis des transformations birationnelles) des variétés à trois dimensions. Et cela conduira sans doute à la solution du troisième problème, car la variété V_3^3 a tous les genres et les deux irrégularités nuls.

Il sera vraisemblablement nécessaire d'étudier à fond d'autres cas particuliers. Peut-être, une étude de certaines involutions d'ordre deux de l'espace, rencontrées par Montesano [1]), sera-t-elle utile. L'une d'elles est représentée par une variété V_3^{16}, d'ordre seize, d'un espace S_{10}, contenant un système linéaire ∞^3 de surfaces rationnelles tel que deux surfaces se rencontrent suivant une courbe elliptique et que trois surfaces n'appartenant pas à un même faisceau se coupent en deux points. Cette variété est-elle rationnelle ?

---

[1]) *Su alcuni gruppi chiusi de trasformazioni involutorie nel piano e nello spazio* (Atti del R. Istituto Veneto, 1887-1888, pp. 1425-1444) ; *Su le trasformazioni involutorie dello spazio nelle quali ai piani corrispondono superficie di ordine n con una retta (n — 2) — pla* (Rend .R. Acad. Lincei, 2º sem. 1889, pp. 123-130).

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages concernant la Géométrie algébrique

I. PICARD et SIMART. — *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.* Paris, 1897, 1906.
II. SEVERI. — *Lezioni di geometria algebrica.* Padoue, 1908.
III. CASTELNUOVO et ENRIQUES. — *Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformations aus.* Encycklopädie der mathem Wissenschaften. Leipzig, 1915.
IV. ENRIQUES et CHISINI. — *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.* Bologne, 1915, 1918, 1924.
V. SEVERI. — *Vorlesungen ueber algebraische Geometrie.* Leipzig, 1921.
VI. LEFSCHETZ. — *L'Analysis situs et la géométrie algébrique.* Paris, 1924.
VII. ENRIQUES et CHISINI. — *Courbes et fonctions algébriques d'une variable* (trad. Légaut.) Paris, 1927.
VIII. SEVERI. — *Trattato di geometria algebrica.* Bologne, 1927.
IX. LEFSCHETZ. — *Géométrie sur les surfaces et les variétés algébriques.* Paris, 1929.
X. SEVERI. — *Conferenze di geometria algebrica.* Rome, 1930.
XI. PICARD. — *Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques.* Paris, 1931.
XII. ENRIQUES et CAMPEDELLI. — *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche.* Padoue, 1932.

Mémoires

1. ALBANESE. — *Sul genere aritmetico delle varietà algebriche à quattro dimensioni.* Rend. R. Accad. Lincei, 1° sem. 1924, pp. 179-182, 210-214.
2. ALEXANDER. — *Sur les cycles d'une surface algébrique et sur une définition topologique de l'invariant de Zeuthen-Segre. Idem.*, 2° sem. 1914, pp. 55-62.
3. APRILE. — *Sopra la involuzione non razionale di Enriques.* Rassegna di mat. e fis., Rome, 1921, pp. 133-136.
4. — *Sulle involuzioni di coppie di punti dello spazio ordinario.* Atti Accad. Gioenia Catania, 1932.
5. CASTELNUOVO-ENRIQUES. — *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions.* Annales de l'Ecole Normale sup. 1907, pp. 339-366.
6. COMESSATTI. — *Sulle varietà algebriche che possegono integrali semplici funzionalmente dipendenti.* Rend. R. Accad. Lincei, 22° sem. 1913, pp. 270-275.
7. — *Sopra certe disugualianze fra i caratteri d'una varietà algebrica. Idem.*, pp. 316-321, 361-366.

8. — *Sulle trasformazioni involutorie delle varietà algebriche.* Atti R. Ist. Veneto, 1925-1926, pp. 471-494.

9. De Franchis. — *Intorno alle varietà multiple cicliche senza diramazioni.* Rend. Circ. Matem. Palermo, 1925, pp. 337-341, 420-422.

10. — *Intorno al significato di alcuni caratteri delle varietà algebriche. Idem.*, 1932, pp. 223-237, 238.

11. Enriques. — *Sugli spazi pluritangenti delle varietà cubiche generali appartenenti allo spazio a quattro dimensioni.* Giornale di Battaglini, 1893, pp. 31-35.

12. — *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellitiche.* Rend. R. Accad. Lincei, 2° sem. 1893, pp. 281-287 ; Math. Annalen, 1894, t. 46, pp. 179-199.

13. — *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellitiche.* Rend. R. Accad. Lincei, 1° sem. 1894, pp. 481-487, 536-543.

14. — *Sulle irrazionalità di cui puo farsi dipendere la risoluzione di un'equazione algebrica $f(x, y, z) = 0$ con funzioni razionali di due parametri.* Rend. R. Accad. Lincei, 2° sel. 1895, pp. 311-316 ; Math. Annalem, 1895, t. 49, pp. 1-23.

15. — *Sopra un'involuzione non razionale dello spazio.* Rend. R. Accad. Lincei, 1° sem. 1912, pp. 81-83.

16. — *Intorno alla risoluzione razionale di una classe di equazioni algebriche fra quattro variabili.* Annali di Matematica, 1913, (3), XX, pp. 109-11.

17. Fano. — *Ricerche sulla varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni e sopra i suoi spazi pluritangenti.* Annali di Mathematica, 1904, (3), X, pp. 251-285.

18. — *Sulle superficie algebriche contenute in una varietà cubica dello spazio a quattro dimensioni.* Atti R. Accad. di Torino, 1903-1904, pp. 469-485.

19. — *Sul sistema ∞^2 di rette contenuto in una varietà cubica generale di uno spazio a quattro dimensioni.* Atti R. Accad. di Torino, 1903-1904, pp. 580-594.

20. — *Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli.* Atti R. Accad. di Torino, 1907,-1908, pp. 541-552.

21. — *Sulle varietà algebriche che sono intersezioni completi di più forme.* Atti R. Accad. di Torino, 1908-1909, pp. 415-430.

22. — *Osservazioni sopra alcune varietà non razionali aventi tutti i generi nulli.* Atti R. Accad. di Torino, 1914-1915, pp. 1067-1072.

23. — *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie sezioni razionali.* Annali di Matematica, 1915 (3), XXIV, pp. 49-89.

24. — *Sulle varietà a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli.* Atti Congresso dei Matem. di Bologna, 1908, t. IV, pp. 115-121.

25. — *Trasformazioni birazionali sulle varietà algebriche a tre dimensioni a generi nulli.* Rend. R. Accad. Lincei, 1° sem. 1932, pp. 1-5.

26. Godeaux. — *Sur l'invariant de Zeuthen-Segre.* Bull. Acad. roy. de Belgique, 1909, pp. 336-341.

27. — *Sur les variétés à trois dimensions qui représentent les couples de points d'une courbe et d'une surface algébriques.* Mémoires Soc. roy. de Liège, 1910, pp. 1-9.

28. — *Sur une variété algébrique représentant les couples de points inverses de l'espace.* Bull. Acad. roy. de Belgique, 1930, pp. 907-922.

29. — *Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions. Idem.*, 1931, pp. 29-39.

30. — *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genre zéro et de bigenre un. Idem.*, 1933, pp.

31. KÄHLER. — *Forme differenziali e funzioni algebriche.* Memorie della R. Accad. d'Italia, 1932, pp. 1-19.

32. LEFSCHETZ. — *The arithmetical genus of an algebraic manifold immersed in an other.* Annals of mathem., 1916, pp. 197-212.

33. — *Sur les intégrales multiples des variétés algébriques.* C. R., 1re sem. 1917, pp. 850-853.

34. — *Sur les intégrales doubles des variétés algébriques.* Annali di Matematica 1917 (3), XXVI, pp. 227-261.

35. — *Note on a problem in the theory of algebraic manifolds.* Kansas Univ. Bull., 1917, pp. 3-9.

36. *On certain numerical invariants of algebraic varieties with applications to abelian variety.* Trans. Amer. Math. Soc., 1921, pp. 327-482.

37. — *Sur les intégrales de seconde espèce des variétés algébriques.* C. R., 1re sem. 1923, pp. 941-943.

38. MARLETTA. — *Di una classe di forme dell'*S_4 *ognuna rappresentabile nelle coppie di un'involuzione dell'*S_3. Rend. R. Accad. Lincei., 1° sem. 1918, pp. 371-373.

39. NOETHER. — *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von belielig vielen Dimensionen.* Math. Annalen, 1869, II, pp. 293-316, 1874, VIII, pp. 495-533.

40. PANNELLI. — *Sopra gli invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali.* Rend. R. Accad. Lincei, 1° sem. 1906, pp. 483-489.

41. — *Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni. Idem.*, pp. 619-619.

42. — *Sopra un carattere di una varietà algebrica a tre dimensioni.* Atti IV° Congresso dei Matematici, Roma, t. II, pp. 274-277 ; Rend. Circ. Matem. Palermo, 2° sem. 1911, pp. 1-47.

43. ROSATI. — *Sugli spazi normali delle varietà algebriche.* Atti R. Istituto Veneto, 1908-1909, pp. 75-84.

44. — *Un osservazione sugli inviluppi dei sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica.* Rend. R. Accad. Linsei, 1° sem. 1907, pp. 952-956.

45. ROSENBLATT. — *Sur les variétés algébriques à trois dimensions.* Prace matem. fizyc., 1914, pp. 203-213.

46. — *Ueber die Invarianten der algebraischen Gebilde von drei dimensionen.* Jahresberichte Deutsch. Math. Verein, 1915, pp. 42-50.

47. — *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les genres satisfont à l'inégalité* $P_g \leqslant 3\ (p_g - p_a - 3)$. C. R. 1er sem. 1924, pp. 2222-2225 ; 2e sem. 1925, pp. 349-352 ; 1er sem. 1926, pp. 1260-1261 ; Prace matem.-fisyc., 1925, pp. 115-124.

48. — *Sopra i moduli delle varietà algebriche a tre dimensioni.* Rend. Seminario. matem. Roma, 1925-1926, pp. 1-8.

49. — *Varietà algebriche a tre e più dimensioni.* Atti Congresso Matem. Bologna, 1928, t. IV, pp. 93-113.

50. — *Sopra le varietà algebriche a tre dimensioni fra i cui caratteri intercedono certe disuguaglianze. Idem.*, pp. 123-128.

51. Scorza. — *Le varietà a curve sezioni ellitiche.* Annali di Matematica, 1908 (3), XV, pp. 217-274.

52. — *Sopra una classe di varietà algebriche a tre dimensioni con un gruppo* ∞^2

di trasformazioni birazionali in sè. Rend. R. Accad. Lincei, 2e sem. 1911, pp. 361-368.

53. Segre (C.). — *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiore algebriche.* Atti R. Accad. Torino, 1895-1896, pp. 485-501.
54. Severi. — *Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità proiettive.* Mem. R. Accad. Torino, 1902, pp. 59-118.
55. — *Su alcune questioni di postulazione.* Rend. Circ. Matem. Palermo, 1903, pp. 73-103.
56. — *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà.* Atti R. Istituto Veneto, 1905-1906, pp. 625-643.
57. — *Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli.* Rend. R. Accad. Lincei, 2o sem. 1906, pp. 691-696.
58. — *Alcune proposizioni fondamentali per la geometria sulle varietà algebriche. Idem.*, 2o sem. , 1907, pp. 337-344.
59. — *Sur les intégrales de première espèce attachées à une variété algébrique.* C. R., 1re sem. 1909, pp. 80-81.
60. — *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche.* Rend. Circ. Matem. Palermo, 2o sem. 1909, pp. 33-87.
61. — *Sulle superficie e varietà algebriche irregolari di genere geometrico nulla.* Rend. R. Accad. Lincei, 1o sem. 1911, pp. 537-546.
62. — *Relazioni fra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di 1a specie.* Annali di Matematica, 1913 (3), XX, pp. 201-216.
63. — *Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche.* Atti. R. Istituto Veneto, 1915-1916, pp. 1121-1162.
64. — *Un nuovo campo di ricerche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica.* Memorie della R. Accad. d'Italia, 1932, pp.
65. Sharpe et Snyder. — *Certain types of involutorial space transformations.* Trans. Amer. Mathem. Society, 1919, pp. 185-202 ; 1920, pp. 52-78.
66. Snyder. — *Un'involuzione d'ordine due dell'S_3 appartenente alla varietà cubica generale.* Giornale di Battaglini, 1923, pp. 1-4.
67. — *Problems in involutorial space transformations.* Bull. Amer. Mathem. Society, 1924, pp. 101-124.
68. — *The problem of the cubic variety in S_4 . Idem*, 1929, pp. 593-628.
69. Tafani. — *Sulle corrispondenze (1,n) tra varietà a tre dimensioni.* Annali R. Scuola nor. di Pisa, 1913, pp. 1-44.
70. Torelli (R.). — *Sugli spazi doppi dotati di integrali semplici di 1a specie.* Rend. R. Istituto Lomb., 1910, pp. 909-915.
71. — *Osservazioni di geometria sopra una varietà algebrica.* Rend. R. Accad. Napoli, 1911, pp. 420-425.

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie R. Bussière. — 20-7-1933.