BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul IX (XIII), Fasc. 1–2, 1963

C. D. 513.621

SURFACES DONT LES DIRECTRICES DE WILCZYNSKI ONT DES FOYERS CONFONDUS

PAR

LUCIEN GODEAUX

1. À diverses reprises, nous nous sommes occupés des congruences formées par les directrices de Wilczynski d'une surface. Dans cette Note, nous nous proposons de rechercher s'il existe des surfaces dont les premières directrices de Wilczynski ont des foyers confondus. Nous parvenons au théorème suivant :

Si les premières directrices de Wilczynski d'une surface ont des foyers confondus, ces foyers coïncident en un point fixe et les quadriques de Lie de la surface n'ont que deux points caractéristiques. Les secondes directrices de Wilczynski varient dans un plan fixe, ou la surface est une quadrique.

Nous utilisons les résultats et les notations de notre exposé sur *La Théorie des surfaces et l'espace réglé* [1], (v. et [2]). En particulier, nous représentons la dérivée d'une fonction f de u, v prise i fois par rapport à u et k fois par rapport à v par f^{ik}; nous nous excusons de cette notation non conforme à l'usage, mais elle est ici plus commode au point de vue typographique.

2. Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v, lieu d'un poit x dont les coordonnées normales de Wilczynski satisfont au système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable :

$$x^{20} + 2\,bx^{01} + c_1\,x = 0, \quad x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0.$$

Au point x nous attachons le tétraèdre mobile de Cartan dont les sommets sont le point x et les points :

$$m = x\,(\log a)^{10} - 2x^{10}, \quad n = x\,(\log b)^{01} - 2x^{01},$$

$$y = [8ab - (\log a)^{10}\,(\log b)^{01}]\,x + 2x^{10}\,(\log b)^{21} + 2x^{01}\,(\log a)^{10} - 4x^{11}.$$

Un point de l'espace est donné par $z_1 x + z_2 m + z_3 n + z_4 y$, et les quantités z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales de ce point.

Les directrices de Wilczynski sont les droites $w_1 = xy$ et $w_2 = mn$.

Les foyers de la première directrice w_1 sont donnés par :

(1) $$z_2 = 0, \quad z_3 = 0, \quad z_1^2 - 2(h_1 + k_1) z_1 z_4 + (4h_1 k_1 - \alpha\beta) z_4^2 = 0,$$

et ses plans focaux par :

(2) $$\alpha z_2^2 + 2(h_1 - k_1) z_2 z_3 - \beta z_3^2 = 0.$$

Les foyers de la seconde directrice w_2 sont donnés par :

(3) $$z_1 = z_4 = 0, \quad \alpha z_2^2 - 2(h_1 - k_1) z_2 z_3 - \beta z_3^2 = 0$$

et ses plans focaux par :

(4) $$z_1^2 + 2(h_1 + k_1) z_1 z_4 + (4h_1 k_1 - \alpha\beta) z_4^2 = 0.$$

La condition pour que les foyers de la droite w_1 soient cofondus est :

(5) $$(h_1 - k_1)^2 + \alpha\beta = 0$$

et, dans ces conditions, les foyers de la droite w_2 sont egalement confondus.

Le foyer unique de la droite w_1 est $p = (h_1 + k_1)x + y$ et celui de la droite w_2, $q = (h_1 - k_1) m + \alpha n$.

La relation (5) donne lieu à quelques conséquences que nous établirons par une voie détournée.

3. Soient U, V les points de l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 qui représentent les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} de la surface (x) en un point x. On a :

$$U = |x \quad x^{10}|, \quad V = |x \quad x^{01}|, \quad U^{10} + 2bV = 0, \quad V^{01} + 2aU = 0.$$

Les points U, V sont donc consécutifs dans une suite de Laplace :

(L) $$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots,$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

Les points de Q qui représentent les directrices de Wilczynski w_1, w_2 sont respectivement : $W_1 = U_1 + V_1$, $W_2 = U_1 - V_1$.

Fixons l'attention sur le premier. Nous avons :

$$W_1^{10} = h_1 U + V_2 + V_1 (\log ak_1)^{10}.$$

D'autre part, nous avons :

$$2p^{10} = [2(h_1^{10} + k_1^{10}) + (h_1 + k_1)(\log a)^{10} - 4b\beta]\, x + (h_1 - k_1)\, m - \alpha n - y (\log a)^{10},$$

et le point $|p \quad p^{10}|$ de Q qui représente la droite pp^{10} doit appartenir à la droite $W_1 W_1^{10}$. On a :

$$\begin{aligned}
-|p \quad p^{10}| = {} & (h_1^2 - k_1^2 + \alpha\beta) U - 2\alpha h_1 V - \\
& - [2(h_1^{10} + k_1^{10}) + 2(h_1 + k_1)(\log a)^{10} - 4b\beta + 2\alpha (\log bk_1)^{01}]\, U_1 - \\
& - [2(h_1^{10} + k_1^{10}) + 2(h_1 + k_1)(\log a)^{10} - 4b\beta + 2(h_1 - k_1)\ (\log ak_1)^{10}]\, V_1 - \\
& - 2\alpha U_2 + 2(h_1 - k_1) V_2.
\end{aligned}$$

Les termes en V et en U_2 doivent disparaître et on a $\alpha = 0$ et, d'après (5), $h_1 = k_1$. En considérant de même le point $|p\ p^{01}|$, on trouverait $\beta = 0$. Les conditions sont donc: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $h_1 = k_1$ et on a $p = 2h_1 x + y = 2k_1 x + y$, tandis que le point q est indéterminé.

4. Nous supposerons en premier lieu que $h_1 = k_1$ n'est pas nul.

Nous avons actuellement $2p^{10} + p(\log a)^{10} = 4k_1 (\log a\, k_1)^{10}$. Or, on a $\alpha^{01} = -2k_1 (\log ak_1)^{10}$, $(\log ak_1)^{10} = 0$, donc $2p^{10} + p(\log a)^{10} = 0$ et de même $2p^{01} + p(\log b)^{01} = 0$.

Il en résulte que le point p reste fixe lorsque u, v varient.

Le plan focal de la droite w_1 est évidemment indéterminé, ce qui résulte d'ailleurs de l'équation (2). De même le foyer de w_2 est indéterminé comme cela résulte de l'équation (3), mais le plan focal de w_2 a pour équation :

$$z_1 + 2h_1 z_4 = 0. \tag{8}$$

Observons que l'on a :

$$2(z_1 + 2h_1 z_4)^{10} + (z_1 + 2h_1 z_4)(\log a)^{10} = 0,$$
$$2(z_1 + 2h_1 z_4)^{01} + (z_1 + 2h_1 z_4)(\log b)^{01} = 0.$$

Il en résulte que lorsque u, v varient, le plan (8) reste fixe.

5. La quadrique de Lie Φ de la surface (x) attachée au point x a pour équation :

$$z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0.$$

Les points caractéristiques de cette quadrique sont donnés par $z_2^2 = 0$, $z_3^2 = 0$, c'est-à-dire sont les points où la droite w_1 rencontre la quadrique.

Nous avons d'ailleurs demontré que la condition nécessaire et suffisante pour que les surfaces (x), (y) aient même quadrique de Lie sont $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Les asymptotiques de la surface (y) sont également les courbes u, v.

On a :

$$2y^{10} + y(\log a)^{10} = 2h_1 m, \quad 2y^{01} + y(\log b)^{01} = 2h_1 n,$$

$$2y^{20} + 4y^{10}(\log a)^{10} + 4by^{01} + y\left\{(\log a)^{20} + \frac{3}{2}[(\log a)^{10}]^2 + 2b^{01}\right\} = 0,$$

$$2y^{02} + 4y^{01}(\log b)^{01} + 4ay^{10} + y\left\{(\log b)^{02} + \frac{3}{2}[(\log b)^{01}]^2 + 2a^{10}\right\} = 0.$$

Lorsque $\alpha = 0$, $\beta = 0$, nous avons montré que la suite de Laplace (L) avait la période six, c'est-à-dire que U_3 coïncide avec V_2 et V_3 avec U_2. Actuellement on a :

$$h_2 = h_1\, k_2 = k_1, \quad U_2 = U_1^{01}, \quad U_3 = U_1^{02} + U_1^{01}(\log h_1)^{01}, \quad V_2 = V_1^{10},$$
$$V_3 = V_1^{20} + V_1^{10}(\log h_1)^{10},$$

et les relations que nous avons établies donnent :

$$U_3 + 4a\,V_1^{10} = 0, \quad V_3 + 4bU_1^{01} = 0.$$

Les points $U_1^{01}, U_3, V_1^{10}, V_3$ appartiennent à l'hyperquadrique Q.

Le plan tangent à la surface (y) au point y est $z_1 = 0$.

6. Nous supposeront maintenant $h_1 = k_1 = 0$. Alors le point p coïncide avec le point y qui est fixe et les formules (6) et (7) restent valables. Le plan (8) devient le plan $z_1 = 0$ qui est également fixe lorsque u, v, varient.

Actuellement le point U_1 ne dépend que de v et le point V_1 que de u. La suite de Laplace (L) s'arrête aux points U_1, V_1 en présentant chaque fois le cas de Laplace. Les points U_1, V_1 décrivent des courbes. De plus, les asymptotiques u, v de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires.

Les quadriques de Lie Φ de la surface (x) passent par le point fixe y et touchent en ce point le plan $z_1 = 0$.

Dans le cas actuel, les relations (9) deviennent :

$$U_1^{02} + 4aV_1^{10}=0, \quad V_1^{20}+4bV_1^{01}=0.$$

En dérivant la première par rapport à u, on obtient $a^{10}V_1^{10} + aV_1^{20} = 0$ d'où, par la seconde, $a^{10}V_1^{10} = 4abU_1^{01}$.

Les points U_1^{01}, V_1^{01} coïncident donc. Lorsque v varie, le point V_1^{10} reste fixe, donc il en est de même du point U_1^{01} qui ne dépend pas de v et est fixe. De même, le point V_1^{10} ne dépend pas de u. Le point U_1^{02} n'existe pas et par conséquent $a = 0$. Il en est de même de b et par suite la surface (x) est une quadrique.

Cela étant, considerons la quadrique:

$$x_1/1 = x_2/u = x_3/v = x_4/(uv)\,.$$

Posons $p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i$. On trouve pour les coordonnées des points $U, U_1, U_1^{01}, V, V_1, V_1^{10}$:

	p	p	p	p	p	p
U	1	0	v	$-v$	0	v
U_1	0	0	1	-1	0	$2v$
U_1^{01}	0	0	0	0	0	2
V	0	1	u	u	u	0
V_1	0	0	1	1	$2u$	0
V_1^{10}	0	0	0	0	2	0

Les points U_1^{01} et V_1^{10} sont distincts, mais il faut observer que pour démontrer plus haut qu'ils coïncident, nous avons supposé que a et b n'etaient pas nuls.

Au point U_1+V_1 correspond la droite $x_1/1 = x_2/u = x_3/v$, passant par le point $(0,0,0,1)$.

Au point U_1-V_1 correspond la droite $x_1=0$, $vx_2+ux_3-x_4=0$, située dans le plan $x_1=0$.

Reçu le 22 XII 1962

Académie Royale, Liège, Belgique

BIBLIOGRAPHIE

1. Godeaux L., *La Théorie des surfaces et l'espace reglé,* Act. sci., **138**, Hermann, Paris, 1934.
2. — Bull. Acad. Roy. de Belgique, cl. Sci., 1954, **XXXIX** pp. 209-218.

ПОВЕРХНОСТИ, НАПРАВЛЯЮЩИЕ ВИЛЬЧИНСКОГО КОТОРЫХ ИМЕЮТ СОВПАДАЮЩИЕ ФОКУСЫ

(Резюме)

Автор, следуя направлению разработанному в некоторых своих предыдущих работах относящихся к конгруэнциям образованным направляющими Вильчинского некоторой поверхности, выкристаллизованных в монографических исследованиях посвященных теории поверхностей и линейчатому пространству [1], [2], изучает в настоящей заметке задачу о существовании поверхностей для которых первые направляющие Вильчинского имеют совпадающие фокусы.

Полученные результаты излагаются в виде следующей теоремы:

Теорема. *Если первые направляющие Вильчинского некоторой поверхности имеют совпадающие фокусы, эти фокусы совпадают в одной точке и квадрики Ли поверхности имеют лишь две характеристические точки. Вторые направляющие Вильчинского находятся в неподвижной плоскости или же поверхность — квадрика.*

Отмечается, что в тексте используется следующее обозначение: f^{ik} — производная $(i+k)$-порядка функции f переменных u, v, i-го порядка по отношению к u и k-го порядка по отношению к v.

SUPRAFEŢE AVÎND DIRECTOARELE LUI WILCZYNSKI CU FOCARE CONFUNDATE

(Rezumat)

Autorul, urmînd ordinea de idei a unui şir de lucrări anterioare proprii consacrate congruenţelor formate din directoarele lui Wilczynski ale unei suprafeţe şi expuse în studiile monografice relative la teoria suprafeţelor şi spaţiul riglat [1], [2], studiază

în această Notă problema de existenţă a suprafeţelor pentru care primele directoare ale lui Wilczynski au focare confundate.

Rezultatele obţinute conduc la următoarea :

T e o r e m ă. *Dacă primele directoare ale lui Wilczynski ale unei suprafeţe au focare confundate, aceste focare coincid într-un punct fix şi cuadricele lui Lie ale suprafeţei nu au decît două puncte caracteristice. Directoarele secunde ale lui Wilczynski variază într-un plan fix, sau suprafaţa este o cuadrică.*

Se menţionează că, în ceea ce priveşte notaţiile folosite, autorul a preferat să reprezinte prin f^{ik} derivata unei funcţii f de u, v luată de i ori în raport cu u şi de k ori în raport cu v.