Sur une surface algébrique du huitième ordre,

par

Lucien Godeaux, Liège, Belgique.

La surface du huitième ordre que nous allons considérer dans ce travail a les genres $p_a = p_g = 3, p^{(1)} = 9$. Elle présente un certain intérêt parce que son diviseur σ est en général égal à deux.

1. Une surface de Steiner a pour équation

$$X_2^2 X_3^2 + X_3^2 X_1^2 + X_1^2 X_2^2 = X_0 X_1 X_2 X_3. \tag{1}$$

C'est une surface du quatrième ordre passant doublement par les arêtes du trièdre formé par les plans

$$X_1 = 0, \ X_2 = 0, \ X_3 = 0$$

et triplement par le sommet de ce trièdre.

Considérons le système de quadriques

$$\lambda_0 \varphi_0(x_0, x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 = 0,$$

dépourvu de points-base et tel que le réseau

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 = 0$$

ait huit points-base distincts. Les équations

$$\frac{X_0}{\varphi_0} = \frac{X_1}{\varphi_1} = \frac{X_2}{\varphi_2} = \frac{X_3}{\varphi_3} \tag{2}$$

font correspondre à un point $X(X_0, X_1, X_2, X_3)$, huit points associés $x(x_0, x_1, x_2, x_3)$. Aux points X de la surface de Steiner (1) correspondent les points d'une surface Φ, d'ordre huit, d'équation

$$\varphi_2^2 \varphi_3^2 + \varphi_3^2 \varphi_1^2 + \varphi_1^2 \varphi_2^2 = \varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3. \tag{Φ}$$

Cette surface admet huit points triples

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$$

et passe doublement par les biquadratiques commune à ces quadriques prises deux-à-deux. Nous désignerons par G_1 la biquadratique

$$\varphi_2 = \varphi_3 = 0$$

et nous définirons les biquadratiques G_2, G_3 par permutation tournante.

2. Les surfaces adjointes d'ordre quatre à la surface Φ passant simplement par les courbes G_1, G_2, G_3. Ces conditions équivalent à 32 conditions simples et par suite le genre arithmétique de Φ est $p_a = 3$.

Les surfaces adjointes envisagées forment un système de dimension $r \geqq 2$; elles ne rencontrent plus la quadrique $\varphi_1=0$ en dehors des courbes G_2, G_3 ; par suite, il y a ∞^{r-1} de ces surfaces contenant cette quadrique comme partie. Elles sont complétées par des quadriques passant par G_1 ; ces dernières étant en nombre ∞^1, on a $r=2$. Le genre géométrique de Φ est $p_g=3$ et cette surface est régulière. Les courbes G_1, G_2, G_3 ne peuvent d'ailleurs se trouver sur une surface cubique.

Observons que, parmi les surfaces adjointes considérées, se trouvent les surfaces formées d'une quadrique $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, $\varphi_3=0$ et, respectivement, de quadriques passant par G_1, G_2, G_3. Il en résulte que ces surfaces adjointes ont pour équation

$$\lambda_1\varphi_2\varphi_3+\lambda_2\varphi_3\varphi_1+\lambda_3\varphi_1\varphi_2=0. \tag{3}$$

Les surfaces (3) découpent sur Φ les courbes canoniques Γ_0, du huitième ordre. Ces surfaces correspondent, par les équations (2), aux cônes

$$\lambda_1X_2X_3+\lambda_2X_3X_1+\lambda_3X_1X_2=0,$$

qui découpent, sur la surface de Steiner (1), les ∞^2 coniques Γ_0' de cette surface. Par suite, le réseau canonique $|\Gamma_0|$ de la surface Φ a le degré huit et le genre linéaire est $p^{(1)}=9$.

La surface Φ a les genres $p_a=p_g=3$, $p^{(1)}=9$.

3. Désignons par Γ les sections planes de la surface Φ.

On sait que les plans tangents à la surface de Steiner coupent celle-ci suivant des couples de coniques Γ_0'. Par suite les surfaces

$$\lambda_0\varphi_0+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\lambda_3\varphi_3=0, \tag{4}$$

tangentes à la surface Φ (en huit points associés) coupent celle-ci suivant deux courbes canoniques Γ_0. Mais d'autre part les quadriques (4) découpent, sur Φ, des courbes appartenant au système $|2\Gamma|$. On a donc

$$|2\Gamma|=|2\Gamma_0|$$

et la surface Φ a donc le diviseur de Severi([1]) pair et en général égal à deux ($\sigma=2$).

([1]) Severi, Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica (Math. Annalen, 1906); La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique (Annales de l'Ec. Normale sup., 1908) ; Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica (Rend. Circ. Palermo, 1910).

4. Considérons, dans un espace linéaire S_6, à six dimensions, une surface algébrique F, d'ordre seize, intersection de quatre hyperquadriques linéairement indépendantes. Les courbes canoniques C de F sont ses sections hyperplanes([2]) et les genres de cette surface ont pour valeurs $p_a=p_g=7, p^{(1)}=17$. Supposons que la surface F soit transformée en elle-même par une homographie involutive H, ne laissant un aucun point de la surface F. Les deux axes de cette homographie H ne peuvent donc rencontrer F et sont nécessairement un plan et un espace à trois dimensions. On peut toujours choisir la figure de référence de façon à ce que H ait pour équations

$$\frac{x'_0}{x_0}=\frac{x'_1}{x_1}=\frac{x'_2}{x_2}=\frac{x'_3}{x_3}=\frac{x'_4}{x_4}=\frac{x'_5}{x_5}=\frac{x'_6}{x_6}.$$

Désignons par $|Q|$ le système linéaire ∞^3 d'hyperquadriques ayant pour base la surface F. Dans le système $|Q|$, l'homographie H détermine une homographie H' qui peut être l'identité, ou une homologie harmonique, ou une homographie biaxiale harmonique. Dans les deux derniers cas, une au moins des hyperquadriques unies pour H' a une équation dont le premier membre est linéaire d'une part par rapport à x_0, x_1, x_2, x_3, d'autre part par rapport à x_4, x_5, x_6. Cette hyperquadrique passe donc par l'axe (espace à trois dimensions S_3)

$$x_4=x_5=x_6=0 \tag{5}$$

de H. Mais alors, la surface F rencontre nécessairement cet axe, ce qui est impossible. Il en résulte que l'homographie H' est l'identité. Le système $|Q|$ ne pouvant contenir d'hyperquadrique passant par l'axe (5), est représentée par des équations de la forme

$$\left.\begin{aligned}
\varphi'_0(x_0, x_1, x_2, x_3)+\psi_0(x_4, x_5, x_6)=0,\\
\varphi'_1(x_0, x_1, x_2, x_3)+\psi_1(x_4, x_5, x_6)=0,\\
\varphi'_2(x_0, x_1, x_2, x_3)+\psi_2(x_4, x_5, x_6)=0,\\
\varphi'_3(x_0, x_1, x_2, x_3)+\psi_3(x_4, x_5, x\ )=0.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Sur le plan

$$x_0=x_1=x_2=x_3=0, \tag{7}$$

axe de l'homographie H, les hyperquadriques Q déterminent un système linéaire ∞^3 de coniques, dépourvu de points-base et représenté par l'équation

([2]) ENRIQUES-CAMPEDELLI, Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche, p. 336 (Padoue, Cedam, 1932).

$$\mu_0\psi_0+\mu_1\psi_1+\mu_2\psi_2+\mu_3\psi_3=0.$$

On sait que, par un choix convenable de la figure de référence dans le plan (7), ce système peut être en général représenté par l'équation

$$\mu'_0(x_4^2+x_5^2+x_6^2)+\mu'_1x_5x_6+\mu'_2x_6x_4+\mu'_3x_4x_5=0.$$

Par suite, par un choix convenable de la figure de référence dans l'espace S_6, n'altérant pas la position du plan (7) ni de l'espace (5), et en choisissant d'une manière adéquate quatre combinaisons linéaires des équations (6), la surface F peut être représentée par les équations

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_0(x_0,x_1,x_2,x_3)+x_4^2+x_5^2+x_6^2=0,\\&\varphi_1(x_0,x_1,x_2,x_3)+x_5x_6=0,\\&\varphi_2(x_0,x_1,x_2,x_3)+x_6x_4=0,\\&\varphi_3(x_0,x_1,x_2,x_3)+x_4x_5=0.\end{aligned}\right\}\qquad(6')$$

5. L'homographie H détermine, sur la surface F, une involution I_2, d'ordre deux, privée de points unis. Dans le système canonique $|C|$, formé par les sections hyperplanes de F, il y a deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de cette involution. L'un, $|C_1|$, ∞^3, est découpé par les hyperplans passant par l'axe (7) de H; l'autre, $|C_0|$, ∞^2, est découpé par les hyperplans passant par l'axe (5) de H.

Pour obtenir une surface image de l'involution I_2, rapportons projectivement les courbes C_1 aux plans d'un espace S_3. L'équation de la surface transformée de F s'obtiendra en éliminant x_4, x_5, x_6 entre les équations (6′). Il vient ainsi

$$\varphi_2^2\varphi_3^2+\varphi_3^2\varphi_1^2+\varphi_1^2\varphi_2^2=\varphi_0\varphi_1\varphi_2\varphi_3,$$

et par conséquent la surface Φ est l'image de l'involution I_2. Aux courbes C_1 correspondent les section planes Γ de Φ.

Les courbes canoniques de Φ correspondent aux courbes canoniques de F formant le système linéaire partiel de dimension minimum, composé au moyen de I_2[3]. Aux courbes C_0 correspondent donc les courbes Γ_0. On retrouve ainsi les valeurs des genres arithmétique, géométrique et linéaire de Φ.

---

[3] L. Godeaux, Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1932).

D'autre part, on sait que l'on a [4]

$$|2\Gamma| = |2\Gamma_0|.$$

Par conséquent, *la surface Φ a en général le diviseur $\sigma = 2$.*

Liège, Université, 30. Septembre 1932.

---

[4] L. Godeaux, Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité (Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie, 1914).