ACADÉMIE ROUMAINE

BULLETIN DE LA SECTION SCIENTIFIQUE

XVII-ème ANNÉE *No. 9—10*

SUR UNE PROPRIÉTÉ D'UNE SUITE DE LAPLACE AUTOPOLAIRE PAR RAPPORT À UNE HYPERQUADRIQUE D'UN ESPACE À CINQ DIMENSIONS

PAR

L. GODEAUX (Liége)

(Note présentée à l'Academie Roumaine par Mr. G. Țițeica, M.A.R.)

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v, dans un espace ordinaire S_3. Les coordonnées projectives de Wilczynski des points de cette surface satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable:

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,\ x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0$$

Désignons par Q l'hyperquadrique de l'espace S_5 représentant les droites de l'espace S_3. Soient U, V les points de Q images des tangentes aux asymptotiques u, v en un point x de la surface (x). Les coordonnées des points U, V satisfont aux équations:

$$U^{10} + 2bV = 0,\ V^{01} + 2aU = 0$$

et sont donc les transformés de Laplace l'un de l'autre. Cette propriété a été établie par MM. Tzitzeica [1]) et Bompiani [2]). Représentons par:

$$\ldots, U_n, \ldots\ U_1,\ U,\ V,\ V_1, \ldots\ V_n, \ldots \qquad \text{(L)}$$

la suite de Laplace dont font partie U, V, chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u. Nous avons établi [3]) que la suite L est autopolaire par rapport à Q. Précisément, le point U_n est le pôle

[1]) *Sur un théorème de M. Darboux.* (C. R., 1910, t. CLI, pp. 971—974); *Géométrie différentielle projective des réseaux.* (Paris, Gauthiers-Villars, 1924).

[2]) *Sull'equazione di Laplace.* (Rend. Circ. Matem. Palermo, 1912, t. 34, pp. 383 jusqu'à 407).

[3]) *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé.* (Bull. Acad. roy. de Belgique, 1927, pp. 812—826; 1928, pp. 31—41); *La théorie des surfaces et l'espace réglé.* (Actualités scientifiques et industrielles, No. 138, Paris, Hermann, 1934). On trouvera, dans ce dernier opuscule, un exposé de nos recherches sur la géométrie projective différentielle.

de l'hyperplan $V_{n-2}\ V_{n-1}\ V_n\ V_{n+1}\ V_{n+2}$ et le point V_n, celui de $U_{n-2}\ U_{n-1}\ U_n\ U_{n+1}\ U_{+2}$.

On a:

$$U_n = U_{n-1}^{01} - U_{n-1}\ (\log.\ bh_1 \ldots\ h_{n-1})^{01},$$
$$V_n = V_{n-1}^{10} - V_{n1}\ (\log.\ ak_1 \ldots\ k_{n-1})^{10},$$

les quantités h et k étant définies par récurrence par les relations:

$$h_n = -(\log.\ bh_1 \ldots\ h_{n-1})^{11} + h_{n-1},$$
$$k_n = -(\log.\ ak_1 \ldots\ k_{n-1})^{11} + k_{n-1}.$$

Les points U_1, V_1 ne peuvent appartenir à Q et les sections de cette hyperquadrique par les plans conjugués $UU_1\ U_2$, $VV_1\ V_2$ représentent les génératrices des deux modes de la quadrique de Lie Φ attachée au point x de la surface (x).

Toute suite de Laplace autopolaire par rapport à Q est liée à une surface (x) rapportée à ses asymptotiques.

2. Désignons par C_1, C_2 les points de rencontre de la droite $V_1\ V_2$, par D_1, D_2 ceux de la droite $U_1\ U_2$ avec Q. Si l'on pose:

$$\alpha = 2\ (\log.\ a)^{20} + \overline{(\log.\ a)^{10}}^2 + 4\ (b^{01} + c_1),$$
$$\beta = 2\ (\log.\ b)^{02} + \overline{(\log.\ b)^{01}}^2 + 4\ (a^{10} + c_2),$$
$$\xi^2 + \alpha = 0,\ \eta^2 + \beta = 0,$$

les points en question sont représentés par

$$C_1 = V_2 + V_1\ [\xi + \log.\ ak_1)^{10}],\ C_2 = V_2 + V_1\ [-\xi + \log.\ ak_1)^{10}],$$
$$D_1 = U_2 + U_1\ [\eta + \log.\ bh_1)^{01}],\ D_2 = U_2 + U_1\ [-\eta + (\log.\ bh_1)^{01}].$$

Les tangentes $C_1\ C_1^{01}$, $C_2\ C_2^{01}$ aux courbes v aux points C_1, C_2 des surfaces (C_1), (C_2) se rencontrent au point:

$$A = V_2 + V_1\ (\log.\ ak_1)^{10} + \alpha V.$$

De même, les tangentes $D_1 D_1^{10}$, $D_2 D_2^{01}$, se rencontrent au point:

$$B = U_2 + U_1\ (\log.\ bh_1)^{01} + \beta U.$$

En utilisant les relations que nous avons établies:

$$U_3 + U_2\ (\log.\ b^3 h_1^2 h_2)^{01} + U_1\ [\beta + (\log.\ bh_1)^{02}$$
$$+ (\log.\ bh_1)^{01}\ (\log.\ b^2 h_1)^{01}] + \beta\ (\log.\ b\eta)^{01}\ U + 2\ aA = 0,$$
$$V_3 + V_2\ (\log.\ a^2 k_1^2 k_2)^{10} + V_1\ [\alpha + (\log.\ ak_1)^{20}$$
$$+ (\log.\ ak_1)^{01}\ (\log.\ a^2 k_1)^{10}] + \alpha\ (\log.\ a\xi)^{10}\ V + 2\ bB = 0,$$

on voit que les tangentes $C_1C_1^{10}$, $C_2C_2^{10}$ se rencontrent au point:

$$A_1 = A\ (\log.\ a\xi)^{10} + 2\,bB$$

et les tangentes $D_1D_1^{10}$, $D_2D_2^{10}$ au point:

$$B_1 = B\ (\log.\ b\eta)^{01} + 2\,aA$$

Les points A, B, A_1, B_1 sont donc en ligne droite. Aucun de ces points n'appartient en général à Q; les points de rencontre de cette hyperquadrique avec la droite AB sont donnés par:

$$\eta A \pm \xi B$$

Les points A, B sont conjugués par rapport à Q et représentent deux complexes linéaires en involution liés d'une manière intrinsèque au point x de la surface (x). Ces points donnent d'ailleurs lieu aux relations suivantes:

$$A^{10} + A\ (\log.\ a)^{10} + 2\,bB = \alpha V\ (\log.\ a\xi)^{10},$$
$$V^{01} + B\ (\log.\ b)^{01} + 2\,aA = \beta U\ (\log.\ b\eta)^{01}.$$

Les complexes linéaires représentés par les points A_1, B_1 sont également en involution en vertu de la relation:

$$a\alpha\ (\log.\ a\xi)^{10} = b\beta\ (\log.\ b\eta)^{01}.$$

3. Les points C_1, C_2, D_1, D_2 sont les images des côtés c_1, c_2, d_1, d_2 du quadrilatère de Demoulin, dont les sommets c_1d_1, d_1c_2, c_2d_2, d_2c_1 sont, avec le point x, les points caractéristiques de la quadriques de Lie Φ (Demoulin). Les deux autres arêtes r_1, r_2 du tétrèdre dont ce quadrilatère gauche fait partie sont d'ailleurs représentées par les points $\eta A \pm \xi B$; la droite AB est donc la seconde image d'une congruence linéaire R de directrices r_1, r_2.

La droite $C_1\,C_1^{01}$ est la seconde image d'une congruence linéaire ayant pour directrices la droite c_1 et la droite infiniment voisine de c_1 sur la surface v (sur laquelle v varie) de la congruence (c_1) passant par c_1. Cette congruence est donc le lieu des tangentes à la surface v le long de la droite c_1. Les tangentes considérées plus haut s'interprètent de la même manière et la propriété établie se traduit par le théorème suivant:

Si l'on considère les congruences des tangentes le long de deux arêtes opposées du quadrilatère de Demoulin aux surfaces engendrées par ces droites lorsque u *ou* v *varie seul, ces congruences appartiennent à un complexe linéaire et les quatre complexes ainsi obtenus ont en commun la congruence linéaire dont les directrices sont les diagonales du quadrilatère de Demoulin.*

Liège, Université, 28 janvier, 1936.