Observation sur les points de diramation d'une surface multiple.

Lucien Godeaux (Liège).

1. Les surfaces multiples que nous considérons ne possèdent qu'un nombre fini de points de diramation et représentent une involution cyclique d'ordre premier appartenant à une surface algébrique.

Rappelons tout d'abord quelques points dont on trouvera le développement dans un ouvrage récent (1).

Soit F une surface algébrique normale transformée en soi par une homographie H de période $p=2\nu+1$, p étant premier, possédant p axes ponctuels dont un seul, σ_0, rencontre la surface en un nombre fini de points Sur F, l'homographie H détermine une involution I ne possédant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par $|C|$ le système linéaire découpé sur F par les hyperplans unis pour H ne contenant pas σ_0. Ce système est composé au moyen de l'involution I et sa dimension peut être supposée aussi grande qu'on le veut pourvu que celle de l'espace contenant F soit suffisamment grande.

Considérons un point uni O de l'involution, simple pour F et supposons que H ne donne pas l'identité dans son voisinage. En d'autres termes supposons que O soit un point uni de seconde espèce. Le plan tangent à F en O est uni pour H et dans ce plan elle détermine une homographie dont les équations peuvent s'écrire

$$x_0' : x_1' : x_2' = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^{\alpha} x_2,$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité, α un entier positif inférieur à p, lescoordonnées du point O étant $x_1=x_2=0$. Il y a donc deux tangentes à F en O qui sont unies pour H. Nous les désignerons par a et b.

Les courbes C passant par O acquièrent en ce point une certaine multiplicité inférieure à p, les tangentes à ces courbes en ce point étant confondues avec a et b. Nous désignerons ces courbes par C^1.

Les courbes C^1 assujetties à toucher en O une droite distincte de a et b acquièrent en ce point une multiplicité supérieure à celle des courbes C^1, les tangentes étant confondues avec a et b. Nous désignerons ces courbes par C^2.

Et ainsi de suite. Nous formons ainsi une suite de système linéaires $|C^1|, |C^2|, \dots, |C^\nu|, |C^{\nu+1}|$ dont les multiplicités en O vont en croissant et dont les tangentes en ce point coïncident avec a et b, sauf pour le dernier, $|C^{\nu+1}|$, dont les courbes ont en O un point multiple d'ordre p à tangentes variables.

Les multiplicités des tangentes a et b à ces courbes au point O sont déterminées par les solutions en nombres entiers positifs de la congruence

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0 \qquad (\text{mod.}\,p) \qquad\qquad (1)$$

Rangeons ces solutions dans l'ordre croissant de la somme $\lambda+\mu$. Nous obtenons une suite de nombres $\lambda_1+\mu_1$, $\lambda_2+\mu_2$, ... Eh bien, les courbes C^i ont en O λ_i tangentes confondues avec a et μ_i avec b. Ces courbes ont la multiplicité $\lambda_i+\mu_i$ en O.

Si r est la dimension du système $|C|$, rapportons projectivement ses courbes aux hyperplans d'un espace à r dimensions. Il correspond à F une surface Φ image de l'involution I. Soient O' le point de diramation qui correspond à O sur Φ et Γ les sections hyperplanes de cette surface, courbes homologues des courbes C. Aux courbes C^1 correspondent sur Φ les sections Γ^1 par les hyperplans passant par O'. En projetant Φ de O' sur un hyperplan, on obtient une surface Φ_1 dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ^1.

Aux courbes C^2 correspondent sur Φ_1 des courbes Γ^2 découpées par les hyperplans passant par un point O_1'. En projetant Φ_1 de O_1' sur un hyperplan on obtient une surface Φ_2 dont les sections hyperplans sont les courbes Γ^2.

Et ainsi de suite. On obtient une suite de surfaces $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\nu$ et sur chacune de ces surfaces un point $O_1', O_2', \ldots, O_\nu'$. Les sections hyperplanes de la surface Φ_i sont les courbes Γ^i homologues des courbes C^i et cette surface est la projection de Φ_{i-1} à partir de O_{i-1}'.

Les multiplicités des points O' pour Φ, O_1' pour Φ_1, ... forment en général une suite non croissante, mais il y a des exceptions et c'est une de celles-ci que nous voudrions étudier dans cette note.

2. Nous allons supposer $p=31$ et $\alpha=23$. Les solutions de la congruence (1) sont

$$\lambda_1=1,\mu_1=4;\lambda_2=8,\mu_2=1;\lambda_3=2,\mu_3=8;\lambda_4=9,\mu_4=5;\lambda_5=3,\mu_5=12;\ldots$$

Les courbes C^1 ont en O la multiplicité 5, une tangente étant confondue avec a et 4 avec b. En utilisant les notations définies dans notre ouvrage cité plus haut [2], on voit que les courbes C^1 passent une fois par les points $(\alpha,1),(\alpha,2),\ldots,(\alpha,26)$, 4 fois par $(\beta,1)$, deux fois par $(\beta,2)$, une fois par $(\beta,3),(\beta,4),\ldots,(\beta,22)$, une fois par $(\beta,2,1),(\beta,2,2)$.

Deux courbes C^1 ont 93 points d'intersection absorbés en O et le point O' est multiple d'ordre 3 pour la surface Φ.

Aux domaines des points $(\alpha,26),(\beta,2,2),(\beta,22)$ qui sont unis de première espèce pour l'involution, correspondent respectivement sur la surface Φ_1 une droite ρ_1, une droite τ et une droite ρ_2, les droites ρ_1,ρ_2 ne se rencontrant pas mais rencontrant τ chacune en un point. Le cône tangent à Φ en O' projette ces trois droites.

3. Avant de considérer les courbes C^2, considérons les courbes C^{15} qui correspondent aux valeurs $\lambda_{15}=6,\mu_{15}=24$. Les courbes C^{15} ont la multiplicité 30 en O, 6 tangentes confondues avec a et 24 avec b.

Comme la somme des multiplicités du point O et des points $(\alpha,1),(\alpha,2),\ldots$ ou $(\beta,1),(\beta,2),\ldots$ est égal à $p=31$, les courbes C^{15} passent simplement par les points $(\alpha,1),(\alpha,1,1),\ldots,(\alpha,1,5)$ et d'autres part par les points $(\beta,1),(\beta,1,1),\ldots,(\beta,1,23)$.

Le point O absorbe 930 points d'intersection de deux courbes C^{15} et si n est l'ordre de la surface Φ, la surface Φ_{15} est d'ordre n-30.

4. Les courbes C^2 ont en O la multiplicité 9, 8 tangentes étant confondues avec a et une avec b. Ces courbes passent simplement par les points $(\beta,1),(\beta,2),\ldots,(\beta,22)$.

Le nombre de points d'intersection de deux courbes C^2 et C^{15} absorbés en O devant être multiple de 31, on voit que les courbes C^2 ne peuvent passer 8 fois par $(\alpha,1)$. Par conséquent, les courbes C^2 doivent passer une fois par les points $(\alpha,1,1)(\alpha,1,2),\ldots,(\alpha,1,5)$, trois fois par le point $(\alpha,1)$, deux fois par les points $(\alpha,3)(\alpha,4),\ldots$ $\ldots,(\alpha,10)$, une fois par les points $(\alpha,11)$ et $(\alpha,11,1)$.

Aux domaines des points $(\alpha,1,5),(\alpha,11,1)$, qui sont unis de première espèce pour l'involution, correspondent sur la surface Φ_2 deux droites respectivement ρ_3,ρ_4. On en conclut que la surface Φ_2 est la projection de Φ_1 à partir du point O_1' commun aux droites ρ_1 et τ. Ce point est double biplanaire pour la surface et les droites ρ_3,ρ_4 se rencontrent en un point.

La surface Φ_1 est d'ordre n-3 et la surface Φ_2 d'ordre n-5.

5. Les courbes C^3 ont en O la multiplicité 10, deux tangentes étant confondues avec a et 8 avec b. Elles passent deux fois par les points $(\alpha,1),(\alpha,2),\ldots,(\alpha,10)$ et une fois par les points $(\alpha,11),(\alpha,11,1)$.

D'autre part, elles passent 8 fois par $(\beta,1)$ comme on le voit en considérant les intersections de deux courbes C^3, C^{15} absorbées en O. Elles passent en outre 4 fois par $(\beta,2)$, 2 fois par $(\beta,3),\ldots,(\beta,6)$, une fois par $(\beta,7)(\beta,7,1)$, deux fois par $(\beta,2,1),(\beta,2,2)$.

Aux domaines des points $(\alpha,11,1),(\beta,7,1),(\beta,2,2)$ correspondent sur la surface Φ_3 respectivement une droite ρ_4, une droite ρ_5 et une conique τ. La surface est donc la projection de Φ_2 à partir du point O_2^1 commun aux droites ρ_2 et ρ_3. Le point O_2^1 est donc triple pour la surface Φ_2.

On observera que les courbes Γ^3 qui correspondent aux courbes C^3 sur la surface Φ_1 sont découpées par les hyperplans <u>passant par la droite τ</u>.

La surface Φ_3 est d'ordre n-8.

6. Les courbes C^4 passent 14 fois par O et ont 9 tangentes coïncidant avec a et 5 avec b. Ces courbes passent 4 fois par le point $(\alpha,1)$, une fois par $(\alpha,1,1),\ldots(\alpha,1,5)$, trois fois par $(\alpha,2),\ldots,(\alpha,5)$, une fois par $(\alpha,6),(\alpha,6,1),(\alpha,6,2)$. D'autre part, elles passent 5 fois par $(\beta,1)$, trois fois par $(\beta,2)$, deux fois par $(\beta,3),\ldots,(\beta,6)$, une fois par $(\beta,7),(\beta,7,1)$, et une fois par $(\beta,2,1),(\beta,2,2)$.

Aux domaines des points $(\alpha,1,5),(\alpha,6,2),(\beta,7,1),(\beta,2,2)$ correspondent respectivement sur la surface Φ_4 une droite ρ_3, une droite ρ_6, une droite ρ_5 et une droite τ. On en conclut que Φ_4 est la projection de Φ_3 à partir du point O_3^1 commun à la conique τ et à la droite ρ_4. Ce point est double biplanaire pour Φ_3. Φ_4 est d'ordre n-10.

7. Les courbes C^5 ont la multiplicité 15 en O, trois tangentes étant confondues avec a et 12 avec b. Elles passent trois fois par les points $(\alpha,1),\ldots,(\alpha,5)$, une fois par les points $(\alpha,6),(\alpha,6,1),(\alpha,6,2)$. Elles ne peuvent passer 12 fois par le point $(\beta,1)$ comme on le voit en prenant les intersections avec les courbes C^{15}. Elles passent 5 fois par $(\beta,1)$, deux fois par $(\beta,2),\ldots,(\beta,6)$, une fois par $(\beta,7),(\beta,7,1)$, 3 fois par $(\beta,1,1),(\beta,1,2)$, deux fois par $(\beta,1,3),(\beta,1,3,1),(\beta,1,3,2)$.

Aux domaines des points $(\alpha,7,2),(\beta,7,1),(\beta,1,3,2)$ correspondent sur la surface Φ_5 une droite ρ_6, une droite ρ_5 et une droite ρ_7. La surface Φ_5 est donc la projection de Φ_4 à partir d'un point O_4 commun aux droites ρ_3 et τ. Ce point est simple pour la surface Φ_4 et la droite ρ_7 est exceptionnelle, de degré virtuel -1. La surface Φ_5 est d'ordre n-11.

8. Sur les surfaces $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ nous avons respectivement les relations fonctionnelles

$$\Gamma \equiv \Gamma^1 + \rho_1 + \tau + \rho_2 ,$$
$$\Gamma^1 \equiv \Gamma^2 + \rho_3 + \rho_4 ,$$
$$\Gamma^2 \equiv \Gamma^3 + \rho_5 + \tau ,$$
$$\Gamma^3 \equiv \Gamma^4 + \rho_3 + \rho_6 .$$

On en déduit

$$\Gamma \equiv \Gamma^4 + \rho_1 + 2\tau + \rho_2 + 2\rho_3 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_6$$

qui donne la structure du point de diramation O' de la surface multiple Φ. Les droites $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_6$ ont le degré virtuel -2 et τ a le degré virtuel -3.

Nous avons dit plus haut qu'aux courbes C^3 correspondaient sur Φ_1 les sections de cette surface par les hyperplans passant par la droite τ. On a en effet

$$\Gamma^1 - \rho_1 - \tau \equiv \Gamma^1 + \rho_2$$

etces courbes rencontrent la droite τ en deux points variables. A τ correspond sur Φ_2 une courbe infiniment petite située dans le domaine du point O_2.

(1) <u>Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications</u> (Roma Ed. Cremonese, 1963).

(2) Nous désignons par $(\alpha,1)$ le point infiniment voisin de O sur la droite a et par $(\beta,1)$ celui qui est situé sur la droite b. Les points infiniment voisins successifs de $(\alpha,1)$ unis pour l'involution et situés sur une branche linéaire sont désignés par $(\alpha,2),(\alpha,3),\dots$. Si le point (α,k) est uni de seconde espèce pour I, il contient dans son domaine du premier ordre deux points unis dont l'un est $(\alpha,k+1)$ et l'autre sera désigné par $(\alpha,k,1)$. De même, si ce point est uni de seconde espèce, il possède deux points unis infiniment voisins qui sont désignés par $(\alpha,k,1,1)$ et $(\alpha,k,2)$. De même pour les points infiniment voisins de $(\beta,1)$.