SUR CERTAINES SURFACES ALGEBRIQUES POSSEDANT DES POINTS DOUBLES UNIPLANAIRES

par

LUCIEN GODEAUX

Nous nous proposons d'étudier, dans cette note, quelques surfaces possédant des points doubles uniplanaires ; elles sont obtenues en partant de l'équation d'une quadrique tangente aux arêtes du tétraèdre de référence et en remplaçant les coordonnées courantes par des puissances d'ordre p de ces coordonées. Nous nous contentons d'ailleurs de considérer les cas $p=2$, 3 ou 4, l'extension au cas où p est supérieur ne présentant pas de difficulté.

Nous commençons par considérer les courbes planes définies d'une manière analogue aux surfaces précédentes.

1. Posons

$$\varphi_p(x_1, x_2, x_3) = x_1^{2p} + x_2^{2p} + x_3^{2p} - 2x_2^p x_3^p - 2x_3^p x_1^p - 2x_1^p x_2^p$$

Nous allons examiner les propriétés de la courbe $\varphi_p=0$ pour les premières valeurs de p.

Pour $p=1$, la courbe $\varphi_1=0$ est une conique inscrite dans le triangle de référence, les points de contact étant (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0). Toute conique inscrite dans le triangle de référence peut d'ailleurs être représentée par cette équation par un choix convenable du point unitaire.

Pour $p=2$, la courbe $\varphi_2=0$ se décompose en quatre droites

$$-x_1+x_2+x_3=0, \qquad x_1-x_2+x_3=0,$$
$$x_1+x_2-x_3=0, \qquad x_1+x_2+x_3=0.$$

Elle peut être considérée comme une quartique dégénérée ayant six points doubles, deux sur chaque côté du triangle de référence.

Pour $p=3$, la courbe $\varphi_3=0$ est une sextique rencontrant chacun des côtés du triangle de référence en trois points.

Les points de recontre de la courbe avec $x_3=0$ par exemple sont donnés par

$$x_3 = 0, \quad (x_1^3 - x_2^3)^2 = 0$$

ce sont les points $(1, 1, 0)$, $(1, \varepsilon, 0)$, $(1, \varepsilon^2, 0)$, où ε est une racine primitive troisième de l'unité. Il est facile de voir que ces points sont doubles pour la courbe. Envisageons le point $(1, \alpha, 0)$, où α est égal à $1, \varepsilon, \varepsilon^2$. Les dérivées partielles du premier ordre de φ_3 sont nulles en ce point. Les tangentes en ce point sont données par

$$(x_1 - \alpha^2 x_2)^2 = 0.$$

Les deux tangentes sont donc confondues.

Si l'on cherche les points d'intersection de la droite $x_1 = \alpha^2 x_2$ avec la courbe, on trouve

$$x_3^3 (x_3^3 - 4\, x_2^3) = 0$$

donc cette droite rencontre la courbe en trois points confondus au point double $(1, \alpha, 0)$ et ce point est un point de rebroussement ordinaire.

La courbe $\varphi_3=0$ possède neuf points de rebroussement, trois situés sur chacun des côtés du triangle de référence, les tangentes de rebroussement en ces points passant par le sommet opposé.

Notons en passant que le faisceau

$$\varphi_3 + \lambda\,(x_1 x_2 x_3)^2 = 0$$

est un faisceau de Halphen de courbes du sixième ordre.

La courbe $\varphi_4=0$ se compose de quatre coniques

$$- x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \qquad x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

Elle peut être considérée comme une courbe du huitième ordre dégénérée possédant, sur chaque côté du triangle de référence, quatre tacnodes. Considérons en effet un de ces points $(1, 1, 0)$ par exemple. Les deux premières des coniques précédentes passent par ce point et y ont même tangente $x_1-x_2=0$. On peut donc dire que le point (1, 1, 0) est double pour la courbe $\varphi_4=0$ et que le point qui lui est infiniment voisin sur la droite $x_1-x_2=0$ est également double pour la courbe. En d'autres termes, le point (1, 1, 0) est un tacnode de la courbe, la tangente tacnodale passant par le sommet (0, 0, 1) du triangle.

La courbe $\varphi_4=0$ est dégénérée en quatre coniques; elle peut être considérée comme une courbe du huitième ordre possédant douze tacnodes, quatre sur chaque côté du triangle de référence. les tangentes tacnodales passant par le sommet opposé.

2. Posons maintenant

$$\Phi_p \equiv x_1^{2p} + x_2^{2p} + x_3^{2p} + x_4^{2p} - 2\,x_1^p\,x_2^p - 2\,x_1^p\,x_3^p - 2\,x_1^p\,x_4^p - 2\,x_2^p\,x_3^p - 2\,x_2^p\,x_3^p - 2\,x_2^p\,x_4^p - 2\,x_3^p\,x_4^p$$

et étudions la surface $\Phi_p=0$ pour les premières valeurs de p.

La quadrique $\Phi_1=0$ touche les six arêtes du tétraèdre de référence aux points (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), ..., (0, 0, 1, 1).

La surface $\Phi_2=0$, du quatrième ordre, coupe chacune des faces du tétraèdre de référence suivant quatre droites.

Si nous posons

$$\begin{aligned}
\psi_1 &\equiv -x_1+x_2+x_3+x_4,\\
\psi_2 &\equiv x_1-x_2+x_3+x_4,\\
\psi_3 &\equiv x_1+x_2-x_3+x_4,\\
\psi_4 &\equiv x_1+x_2+x_3-x_4,
\end{aligned}$$

nous avons

$$\Phi_2 \equiv 8x_1x_2x_3x_4 - \psi_1\psi_2\psi_3\psi_4.$$

Il en résulte que la surface $\Phi_2=0$ contient les seize droites

$$x_i=0, \quad \psi_k=0, \quad (i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

La surface $\Phi_2=0$ recontre chacune des arêtes du tétraèdre de référence en deux points, qui sont doubles pour la surface. L'arête $x_3=x_4=0$ pour fixer les idées, coupe la surface aux points donnés par

$$x_3 = x_4 = 0, \qquad (x_1^2 - x_2^2)^2 = 0$$

c'est-à-dire aux points (1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0).

Envisageons par exemple le premier de ces points. Les dérivées partielles du premier ordre de Φ_2 y sont nulles et le point est double pour la surface. Le cône tangent a pour équation

$$(x_1 - x_2)^2 - (x_3^2 + x_4^2) = 0$$

Le cône est irréductible, donc le point (1, 1, 0, 0) est double conique pour la surface.

On parvient évidemment à des résultats analogues pour les autres points doubles.

La surface $\Phi_2 = 0$ possède douze points doubles coniques situés par couples sur les arêtes du tétraèdre de référence et contient seize droites.

On vérifie aisément que chaque droite de la surface passe par trois des points doubles et qu'un point double appartient à quatre droites de la surface.

3. Passons à l'étude de la surface du sixième ordre $\Phi_3 = 0$.

La surface $\Phi_3 = 0$ coupe chacune des arêtes du tétraèdre en trois points. Considérons l'arête $x_3 = x_4 = 0$. Les points d'intersection sont donnés par

$$(1, 1, 0, 0), (1, \varepsilon, 0, 0), (1, \varepsilon^2, 0, 0).$$

Envisageons le point (1, α, 0, 0), où α est égal à 1, ε, ε^2. Les dérivées partielles du premier ordre de Φ_3 sont nulles en ce point. La cône tangent a pour équation

$$(x_1 - \alpha^2 x_2)^2 = 0.$$

Le point (1, α, 0, 0) est donc un point double uniplanaire.

Pour étudier la section de la surface par le plan tangent, nous projeterons cette section sur le plan $x_1 = 0$ du sommet O_1 (1, 0, 0, 0) du tédraèdre de référence. Nous obtenons ainsi l'équation

$$4\, x_2^3 (x_3^3 + x_4^3) - (x_3^3 - x_3^4)^2 = 0$$

Elle représente une courbe ayant un point triple en O_2 (0, 1, 0, 0), les trois tangentes étant distinctes et passant respectivement par les points (0, 0, 1, -1), (0, 0, 1, $-\varepsilon$), (0, 0, 1, $-\varepsilon^2$). On observera que ces tangentes rencontrent la courbe en six points confondus au point O_2.

On en conclut que le point considéré est un point double uniplanaire ordinaire de la surface ; celle-ci possède donc une droite simple infiniment voisine du point dans le plan tangent et trois points doubles distincts situés sur cette droite. Chacune des droites passant par le point double et par un de ces derniers points ne rencontre plus la surface en dehors du point double considéré.

Nous examinerons plus loin les points doubles de cette nature et nous verrons que la dernière propriété n'apporte pas de modification dans la position des points doubles infiniment voisins du point considéré.

On parvient à des conclusions analogues pour les autres points doubles de la surface.

La surface du sixième ordre $\Phi_3=0$ possède dix-huit points doubles uniplanaires ordinaires situés trois par trois sur les arêtes du tétraèdre de référence; le plan tangent en un de ces points passe par l'arête opposée à celle qui le contient. Une droite passant par un point double et par un des points doubles infiniment voisins recontre la surface en six points confondus.

4. La surface $\Phi_4=0$, du huitième ordre, rencontre chacune des faces du tétraèdre de référence suivant quatre coniques.

En posant

$$\begin{aligned}
\psi_1 &\equiv -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\
\psi_2 &- \quad x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\
\psi_3 &\equiv \quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 \\
\psi_4 &\equiv \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2
\end{aligned}$$

on a identiquement

$$\Phi_4 \equiv 8\,x_1^2\,x_2^2\,x_3^2\,x_4^2 - \psi_1\,\psi_2\,\psi_3\,\psi_4$$

Il en résulte que la quadrique $\psi_i=0$ touche la surface $\Phi_4=0$ suivant les coniques sections de cette quadriques par les faces du tétraèdre de référence.

La surface $\Phi_4=0$ rencontre chacune des arêtes du tétraèdre en quatre points. Considérons pour fixer les idées l'arête $x_3=x_4=0$; elle coupe la surface aux points

$$(1,\ 1,\ 0,\ 0),\ (1,\ -1,\ 0,\ 0),\ (1,\ i,\ 0,\ 0),\ (1,\ -i,\ 0,\ 0).$$

Les dérivées partielles du premier ordre de Φ_4 sont nulles en ces points, donc ils sont doubles pour cette surface. Cherchons l'équation du cône tangent au premier de ces points, par exemple. On trouve

$$(x_1 - x_2)^2 = 0$$

et le point (1, 1, 0, 0) est donc double uniplanaire.

Examinons la section de la surface par le plan $x_1 - x_2 = 0$ en projetant cette section du point O_1 sur la plan $x_1 = 0$. Nous obtenons la courbe

$$4\, x_2^4\,(x_3^4 + x_4^4) - (x_3^4 - x_4^4)^2 = 0 \qquad [1]$$

La section de la surface par le plan tangent au point (1, 1, 0, 0) possède donc un point quadruple en ce point et par conséquent celui-ci est un tacnode.

Les tangentes en O_2 à la courbe (1) rencontrent celle-ci en huit points confondus en O_2. Ces tangentes passent par les points

$$(0,\ 0,\ \sqrt{2},\ \pm i,\ \pm 1).$$

On en conclut qu'au point (1, 1, 0, 0), il y a quatre tangentes, passant par les points précédents, ne recontrant plus la surface en dehors du point considéré.

Nous verrons dans un instant que cette particularité n'entraîne pas l'existence de points doubles dans le voisinage de la droite double de la surface, infiniment voisine du point (1, 1, 0, 0).

On arrive à des conclusions analogues pour les autres points doubles de la surface $\Phi_4 = 0$.

La surface du huitième ordre $\Phi_4 = 0$ coupe chacun des plans du tétraèdre de référence suivant quatre coniques et possède vingt-quatre points doubles tacnodaux situés quatre par quatre sur les arêtes du tétraèdre. En chacun de ces points, le plan tangent passe par l'arête opposée à celle qui le contient et il existe quatre tangentes rencontrant la surface en huit points confondus au point considéré.

5. Nous nous proposons maintenant d'examiner un point double uniplanaire possédant les propriétés suivantes :

a) La section de la surface par le plan tangent en ce point y possède la multiplicité trois et des tangentes distinctes.

b) Une droite passant par le point et par un des points doubles infiniment voisin, rencontre la surface en six points confondus au point considéré.

Représentons par $\varphi_n(x, y, z)$ un polynôme entier, rationnel et homogène en x, y, z et par $\psi_n(x, y)$ un polynôme entier, rationnel et homogène en x, y. Prenons comme origine des coordonnées le point uniplanaire à étudier et comme droite rencontrant la surface en six points confondus à l'origine, l'axe Ox. L'équation de la surface peut s'écrire

$$z^2 + (z\varphi_2 + y\psi_2) + (z\varphi_3 + y\psi_3) + (z\varphi_4 + y\psi_4) + \varphi_6 + \ldots = 0.$$

Effectuons la transformation quadratique

$$x = x', \qquad y = x'y', \qquad z = x'z',$$

qui fait correspondre la nouvelle origine O$'$ $(x' = y' = z' = 0)$ au point infiniment voisin de O sur Ox. Nous obtenons, en supprimant les accents pour simplifier l'écriture,

$$\begin{aligned} z^2 &+ x[z\varphi_2(1, y, z) + y\psi_2(1, y)] + x^2[z\varphi_3(1, y, z) + y\psi_3(1, y)] \\ &+ x^3[z\varphi_4(1, y, z) + y\psi_4(1, y)] + x^4\varphi_6(1, y, z) + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Le point O$'$ est double pour cette surface et le cône tangent en ce point a pour équation

$$z^2 + xz\varphi_2(1, 0, 0) + xy\psi_2(1, 0) = 0.$$

Sous les conditions imposées, on a $\psi_2(1, 0) \neq 0$ et par conséquent le point O$'$ est double conique pour la surface. Par conséquent, O est un point double uniplanaire ordinaire.

6. Envisageons maintenant un tacnode en lequel il existe une tangente rencontrant la surface en huit points confondus en ce tacnode.

Si O est le tacnode et Ox la droite en question, l'équation de la surface peut s'écrire

$$z^2 + z\varphi_2 + (z\varphi_3 + y\psi_3) + (z\varphi_4 + y\psi_4) + \ldots + (z\varphi_6 + y\psi_6) + \varphi_8 + \ldots = 0.$$

Effectuons la transformation quadratique précédemment utilisée ; nous obtenons

$$z^2 + xz\varphi_2(1, y, z) + x^2[z\varphi_3(1, y, z) + y\psi_3(1, y)] + \ldots$$
$$+ x^5[z\varphi_6(1, y, z) + y\psi_6(1, y)] + x^6\varphi_8(1, y, z) + \ldots = 0.$$

Cette surface possède la droite double $O'y$; les plans tangents en un point $(0, y, 0)$ de cette droite à la surface sont

$$yX^2\psi_3(1, 0) + XZ\varphi_2(1, 0, 0) + Z^2 = 0.$$

Au point O', ces deux plans sont distincts et la surface possède un point double auquel est infiniment voisine une droite double infiniment petite, c'est-à-dire un tacnode ordinaire.

Cette conclusion n'est pas modifiée s'il existe encore trois autres tangentes en O jouissant de la même propriété que Ox. Supposons en effet que ces tangentes soient découpées sur le plan Oxy par les plans

$$y = ax, \quad y = bx, \quad y = cx.$$

On aura

$$\psi_3(x, y) \equiv (y - ax)(y - bx)(y - cx)$$

et

$$\psi_3(1, y) \equiv (y - a)(y - b)(y - c).$$

Aux points $y = a$, b ou c de la droite double $O'y$, le terme en X^2 de l'équation des plans tangents disparaîtra, mais les plans seront toujours distincts.

Liége, le 30 décembre 1950.