QUADRIQUES ET CONIQUES DE MOUTARD

PAR LUCIEN GODEAUX (LIÈGE, BELGIQUE)

Dans une lettre à Poncelet, dont celui-ci a inséré le texte dans le tome II de ses *Applications d'Analyse et de Géométrie* (1), Moutard a énoncé les trois théorèmes suivants :

I. *Les coniques ayant un contact du quatrième ordre, en un point ordinaire d'une surface, avec les sections de celle-ci par les plans passant par une tangente en ce point, appartiennent à une quadrique* (appelée depuis quadrique de Moutard).

II. *Parmi ces coniques, il en est deux qui ont un contact du cinquième ordre avec la surface.*

III. *Il existe 27 coniques ayant un contact du sixième ordre avec une surface en un point ordinaire de celle-ci.*

Ces théorèmes de Moutard ont été retrouvés plus tard par Darboux, qui les a démontrés en utilisant une surface d'équation

$$z = f(x, y),$$

dont l'origine est un point ordinaire (2).

Plus tard, M. Čech a formé l'équation des quadriques de Moutard relatives à un point quelconque d'une surface et s'est servi de ces quadriques pour d'importantes recherches de Géométrie differentielle (3).

Nous nous proposons de reprendre l'étude des quadriques de Moutard en utilisant la remarque que les quadriques ayant un contact du second ordre avec une surface en un point ordinaire de celle-ci, forment un système homaloïdal. Il est dès lors possible d'utiliser la transformation cremonienne associée à ce système. Cela nous permet d'obtenir très simplement l'équation de la quadrique de Moutard associée à une tangente à la surface, c'est-à-dire l'equation déjà obtenue par M. Cech. Nous démontrons ensuite le second théorème de Moutard, mais sans former les équations des coniques en question. Nous montrons ensuite que l'on ne peut obtenir, par ce procédé, la dèmonstration du troisième théorème de Moutard (4).

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. On sait, d'après Wilczynski, que le facteur de proportionnalité des coordonnées du point générateur x peut être choisi de manière que ces coordonnées satisfassent au système complètement intégrable

$$\left\{ \begin{aligned} & x^{20} + 2\,b\,x^{01} + c_1\,x = 0\,, \\ & x^{02} + 2\,a\,x^{10} + c_2\,x = 0\,. \end{aligned} \right. \tag{1}$$

Les conditions d'intégrabilité sont

$$a^{20} + c_1^{10} + 2\,a\,b\,(\log . ab^2)^{01} = 0\,,$$

$$b^{02} + c_2^{01} + 2\,a\,b\,(\log . a^2\,b)^{10} = 0\,,$$

$$c_1^{02} + 2\,a\,c_1^{10} + 4\,a^{10}\,c_1 = c_2^{20} + 2\,b\,c_2^{01} + 4\,b^{01}\,c_2\,.$$

A un point x non parabolique de la surface nous attachons le tétraèdre ayant pour sommets les points $x, x^{10}, x^{01}, x^{11}$. Tout point de l'espace a des coordonnées de la forme

$$z_1\,x + z_2\,x^{10} + z_3\,x^{01} + z_4\,x^{11}\,;$$

nous dirons que z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales du point considéré.

Les quadriques ayant un contact du second ordre avec la surface (x) au point x ont pour équation locale

$$\lambda_1\,(z_1\,z_4 - z_2\,z_3) + \lambda_2\,z_2\,z_4 + \lambda_3\,z_3\,z_4 + \lambda_4\,z_4^2 = 0\,. \tag{2}$$

Elles forment un système homaloïdal ayant pour base les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01}.

Appelons S_3 l'espace contenant la surface (x) et rapportons projectivement les quadriques (2) aux plans d'un espace S_3' en posant

$$\frac{z_1'}{z_1\,z_4 - z_2\,z_3} = \frac{z_2'}{z_2\,z_4} = \frac{z_3'}{z_3\,z_4} = \frac{z_4'}{-z_4^2}\,. \tag{3}$$

On déduit de ces formules

$$\frac{z_1}{z_1' z_4' - z_2' z_3'} = \frac{z_2}{z_2' z_4'} = \frac{z_3}{z_3' z_4'} = \frac{z_4}{- z_4'^2}. \tag{4}$$

Nous obtenons ainsi, entre les espaces S_3, S_3' une transformations birationnelle T dont les propriétés sont bien connues.

Aux plans

$$\lambda_1' z_1 + \lambda_2' z_2 + \lambda_3' z_3 + \lambda_4' z_4 = 0$$

de S_3 correspondent dans S_3' les quadriques

$$\lambda_1' (z_1' z_4' - z_2' z_3') + \lambda_2' z_2' z_4' + \lambda_3' z_3' z_4' - \lambda_4' z_4'^2 = 0,$$

passant par les droites

$$z_2' = z_4' = 0 \quad , \quad z_3' = z_4' = 0$$

et ayant un contact du second ordre au point $O'(1, 0, 0, 0)$.

Les droites $z_2 = z_4 = 0$ et $z_2' = z_4' = 0$ d'une part, les droites $z_3 = z_4 = 0$ et $z_3' = z_4' = 0$ d'autre part, sont des couples de droites fondamentales de seconde espèce associées.

Aux points du domaine du troisième ordre de x, infiniment voisins des points du domaine du second ordre de x appartenant à toutes les quadriques (2), correspondent les points du plan $z_4' = 0$.

2. Considérons une courbe γ tracée sur la surface (x) et passant par le point x en y ayant comme tangente la droite

$$\eta z_2 - \xi z_3 = 0 \quad , \quad z_4 = 0. \tag{5}$$

Choisissons sur cette courbe un point $x(u + \xi, v + \eta)$ voisin du point x et développons $x(u + \xi, v + \eta)$ en série de Taylor en tenant compte des relations (1). Le point considéré a pour coordonnées locales

$$z_1 = 1 - \frac{1}{2}(c_1 \xi^2 + c_2 \eta^2) - \frac{1}{6}[c_1^{10} \xi^3 + 3(c_1^{01} - 3 b c_2) \xi^2 \eta +$$

$$+ 3(c_2^{10} - 3 a c_1) \xi \mu^2 + c_2^{01} \mu^3] \dots,$$

$$z_2 = \xi - a\,\eta^2 - \frac{1}{6}\,[c_1\,\xi^3 - 12\,ab\,\xi^2\,\eta + 3\,(2a^{10} + c_2)\,\xi\,\eta^2 + 2a^{01}\,\eta^3] + \ldots,$$

$$z_3 = \eta - b\,\xi^2 - \frac{1}{6}\,[2\,b^{10}\,\xi^3 + 3\,(2b^{01} + c_1)\,\xi^2\,\eta - 12\,cb\,\xi\eta^2 + c_2\,\eta^3] + \ldots,$$

$$z_4 = \xi\,\eta - \frac{1}{3}\,(b\,\xi^3 + a\,\eta^3) + \ldots$$

Portons ces valeurs dans le premier membre de l'équation (2); il devient

$$\frac{2}{3}\,\lambda_1\,(b\,\xi^3 + a\,\eta^3) + \lambda_2\,\xi^2\,\eta + \lambda_3\,\xi\,\eta^2 + \ldots,$$

les termes non écrits étant du quatrième degré eu moins en ξ, η.

Il en résulte que les quadriques (2) ayant en x un contact du troisième ordre avec la courbe γ sont données par

$$2\,\lambda_1\,(b\,\xi^3 + a\,\eta^3) + 3\,\lambda_2\,\xi^2\,\eta + 3\,\lambda_3\,\xi\,\eta^2 = 0\,.$$

Par conséquent, au point infiniment voisin de x, dans le domaine du troisième ordre, situé sur la courbe γ, correspond par T le point

$$(6) \qquad z'_1 : z'_2 : z'_3 = 2\,(b\,\xi^3 + a\,\eta^3) : 3\,\xi^2\,\eta : 3\,\xi\,\eta^2\,, \qquad z'_4 = 0\,.$$

Il résulte de la théorie des transformations birationnelles que le point (6) correspond à tous les points du domaine du troisième ordre infiniment voisins du point du domaine du second ordre de x situé sur la courbe γ.

Le lieu du point (6), lorsque la courbe γ et la tangente (5) varient, est la cubique γ' d'équations

$$3\,z'_1\,z'_2\,z'_3 - 2\,(b\,z'^3_2 + a\,z'^3_3) = 0\,, \qquad z'_4 = 0\,.$$

3. La cubique γ' possède un point double en O' et trois points d'inflexion situés sur la droite $z'_1 = 0$.

On sait qu'une quadrique (2) coupe la surface (x) suivant une courbe ayant un point triple en x. A cette quadrique correspond un plan de S'_3 coupant γ' en trois points qui correspondent aux points du domaine du troisiéme ordre de x situés sur la courbe d'intersection considérée.

En particulier, les tangentes de Darboux au point x correspondent aux points d'inflexion de la courbe γ' et les quadriques de Darboux aux plans passant par la droite

$$z_1' = z_4' = 0$$

contenant ces points d'inflexion.

4. Lorsque l'on applique la transformation T à la surface (x), on obtient une surface (x') de S_3' passant par la courbe γ'.

Considérons une surface cubique ayant un contact du troisième ordre avec la surface (x) au point x. Elle a une équation de la forme

$$\lambda_0 z_1^2 z_4 + z_1 \varphi_2 (z_2, z_3, z_4) + \varphi_3 (z_2, z_3, z_4) = 0, \tag{7}$$

où φ_2 et φ_3 sont des polynomes respectivement de degrés deux et trois.

Une conique, intersection de deux quadriques (2), coupe la surface cubique en trois points en dehors du point x, donc à cette surface correspond dans S_3' une surface cubique passant par la cubique γ'. Les équations (4) donnent, comme transformée de (7), après suppression du facteur z_4^2 (nous supprimons les accents pour simplifier)

$$-\lambda_0 (z_1 z_4 - z_2 z_3)^2 + (z_1 z_4 - z_2 z_3) \varphi_2 (z_2, z_3, -z_4) + z_4 \varphi_3 (z_2, z_3, -z_4) = 0 .$$

Pour notre objet, on doit pouvoir mettre z_4 en évidence et, ce facteur supprimé, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} &\lambda_1 [3 z_1 (z_1 z_4 - z_2 z_3) - 2 (b z_2^3 + a z_3^3)] \\ &+ (z_1 z_4 - z_2 z_3)(\lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 + \lambda_4 z_4) + z_4 (\lambda_{22} z_2^2 + \lambda_{23} z_2 z_3 + \lambda_{33} z_3^2) \\ &+ z_4^2 (\lambda_2' z_2 + \lambda_3' z_3 + \lambda_4' z_4) = 0 . \end{aligned}$$

L'équation (7) prend alors la forme

$$\begin{aligned} &\lambda_1 [3 (z_1 z_4 - z_2 z_3) z_1 + 2 (b z_2^3 + a z_3^3)] + z_1 z_4 (\lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 - \lambda_4 z_4) \\ &+ z_4 (\lambda_{22} z_2^2 + \lambda_{33} z_3^2 + \lambda_{23} z_2 z_3) - z_4^2 (\lambda_2' z_2 + \lambda_3' z_3 - \lambda_4' z_4) = 0 . \end{aligned}$$

5. Les surfaces cubiques ayant un contact du quatrième ordre avec la surface (x) au point x ont été considérées par M. B. Segre (5) et par M. Lane (6); elles ont pour équation

$$\lambda_0[2(bz_2^3+az_3^3)-(z_1z_4-z_2z_3)\left\{3z_1-\frac{3}{4}z_2(\log.b)^{10}-\frac{3}{4}z_3(\log.a)^{01}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}b\left(\log.\frac{b^4}{a}\right)^{01}z_2^2z_4+\frac{1}{2}a\left(\log.\frac{a^4}{b}\right)^{10}z_3^2z_4] \tag{8}$$

$$+\lambda_1(z_1z_4-z_2z_3)z_4+\lambda_2z_2z_4^2+\lambda_3z_3z_4^2+\lambda_4z_4^3=0\,.$$

La transformation T leur fait correspondre, dans l'espace S_3', les surfaces cubiques

$$\lambda_0\left[2(bz_2^3+az_3^3)+z_1\left\{3(z_1z_4-z_2z_3)-\frac{3}{4}z_2z_4(\log.b)^{10}-\frac{3}{4}z_3z_4(\log.a)^{01}\right\}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}b\left(\log.\frac{b^4}{a}\right)^{01}z_2^2z_4-\frac{1}{2}a\left(\log.\frac{a^4}{b}\right)^{10}z_3^2z_4\right] \tag{9}$$

$$+\lambda_1z_1z_4^2+\lambda_2z_2z_4^2+\lambda_3z_3z_4^2-\lambda_4z_4^3=0\,.$$

Ces surfaces se raccordent à la surface (x') le long de la courbe γ'. Nous désignerons les surfaces (8) par φ et leur transformées (9) par T, par φ'.

6. Soit P le point de γ' de coordonnées

$$2(b\,\xi^3+a\,\eta^3)\,,\ 3\,\xi^2\,\eta\,,\ 3\,\xi\,\eta^2\,,\ 0\,.$$

A une droite p, tangente aux surfaces φ' en P, correspond dans S_3 une conique ayant en x un contact du quatrième ordre avec les surfaces φ et par conséquent avec la surface (x). Lorsque la tangente p varie et engendre le plan tangent $\overline{\omega}$ aux surfaces φ' en P, la conique transformée varie et engendre une quadrique transformée du plan $\overline{\omega}$; c'est la quadrique de Moutard relative à la droite

$$\eta\,z_2-\xi\,z_3=0\,,\ z_4=0\,.$$

Le plan tangent $\bar{\omega}$ aux surfaces φ' en P a pour équation

$$9\,\xi^3\,\eta^3\,z_1 - 6\,(2\,b\,\xi^3 - a\,\eta^3)\,\xi\,\eta^2\,z_2 - 6\,(2\,a\,\eta^3 - b\,\xi^3)\,\xi^2\,\eta\,z_3$$

$$-z_4\left[4\,(b\,\xi^3 + a\,\eta^3)^2 - \frac{3}{2}\,b^{10}\,\xi^5\,\eta -\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2}\,a^{01}\,\xi\,\eta^5 - 6\,b\,(\log b)^{01}\,\xi^4\,\eta^2 - 6\,a\,(\log a)^{10}\,\xi^2\,\eta^4\right] = 0$$

Il en résulte que la quadrique de Moutard considérée a pour équation

$$9\,\xi^3\,\eta^3\,(z_1\,z_4 - z_2\,z_3) - 6\,(2\,b\,\xi^3 - a\,\eta^3)\,\xi\,\eta^2\,z_2\,z_4 - 6\,(2\,a\,\eta^3 - b\,\xi^3)\,\xi^2\,\eta\,z_3\,z_4$$

$$(10) \qquad + \left[4\,(b\,\xi^3 + a\,\eta^3)^2 - \frac{3}{2}\,b^{10}\,\xi^5\,\eta -\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2}\,a^{01}\,\xi\,\eta^5 - 6\,b\,(\log b)^{01}\,\xi^4\,\eta^2 - 6\,a\,(\log a)^{10}\,\xi^2\,\eta^4\right] z_4^2 = 0\,.$$

C'est, aux notations près, l'équation trouvée par M. Čech.

7. Au point P, il existe deux tangentes asymptotiques à la surface (x'). A ces droites correspondent dans S_3 deux coniques ayant un contact du cinquième ordre avec la surface (x) au point x. Donc, sur la quadrique de Moutard (10), il existe deux coniques dont les plans passent par la droite (5) et qui ont un contact du cinquième ordre avec la surface (x). Ainsi se trouve établi le second théorème de Moutard.

8. Pour que la surface (8) ait un contact d'ordre cinq avec la courbe γ au point x, il faut que l'on ait

$$\lambda_0\,(A_0\,\xi^5 + A_1\,\xi^4\,\eta + A_2\,\xi^3\,\eta^2 + A_3\,\xi^2\,\eta^3 + A_4\,\xi\,\eta^4 + A_5\,\eta^5)$$

$$+\frac{2}{3}\,\lambda_1\,(a\,\eta^3 + b\,\xi^3)\,\xi\,\eta + \lambda_2\,\xi^3\,\eta^2 + \lambda_3\,\xi^2\,\eta^3 = 0\,,$$

où l'on a posé

$$A_0 = -\frac{1}{10}\,b\,(\log.b)^{20} + \frac{1}{40}\,b\,\overline{(\log.b)^{10}}^{\,2} - \frac{b^2}{15}\,(\log.b^4\,a^5)^{01}\,,$$

$$A_1 = \quad 8\,a\,b^2 - \frac{b}{2}(\log.b)^{11} + \frac{1}{8}(\log.b)^{10}(\log.b)^{01},$$

$$A_2 = -\,b\,(\log b)^{02} - \frac{1}{2}\,b\,(\log b)^{01}\left(\log\frac{b^2}{a}\right)^{01} -$$

$$-\frac{20}{3}\,a\,b\,(\log a)^{10} - \frac{7}{3}\,a\,b\,(\log b)^{10} - 2\,b\,c_2,$$

$$A_3 = -\,a\,(\log a)^{20} - \frac{1}{2}\,a\,(\log a)^{10}\left(\log\frac{a^2}{b}\right)^{10} -$$

$$-\frac{20}{3}\,a\,b\,(\log b)^{01} - \frac{7}{3}\,a\,b\,(\log a)^{01} - 2\,a\,c_1,$$

$$A_4 = \quad 8\,a^2\,b - \frac{a}{2}(\log a)^{11} + \frac{1}{8}(\log.a)^{10}(\log.a)^{01},$$

$$A_5 = -\frac{1}{10}\,a\,(\log.a)^{02} + \frac{1}{40}\,a\,\overline{(\log.a)^{01}}^{\,2} - \frac{a^2}{15}(\log.a^4\,b^5)^{10}.$$

Il n'existe donc de surface cubique ayant un contact du cinquième ordre avec la surface (x) au point x que si cette dernière est une surface particulière, caractérisée par les conditions

$$A_0 = 0, \quad A_5 = 0.$$

9. S'il existait une surface cubique F' de S'_3 ayant un contact du troisième ordre avec la surface (x') le long de γ', aux 27 droites de cette surface correspondraient dans S_3 les 27 coniques de Moutard ayant un contact du sixième ordre avec la surface (x) au point x. Nous allons voir qu'une telle surface n'existe pas.

Tout d'abord, à la surface F', T ne peut faire correspondre une surface cubique de S_3, d'après ce qu'on vient de voir.

Ecrivons l'équation de la surface F' sous la forme

$$\lambda_0\,z_4^3 + z_4^2 f_1(z_1, z_2, z_3) + z_4 f_2(z_1, z_2, z_3)$$
$$\lambda\,[3\,z_1(z_1\,z_4 - z_2\,z_3) - 2\,(b\,z_2^3 + a\,z_3^3)] = 0.$$

En opérant la transformation T, on voit qu'à cette surface correspond dans S_3 une surface du quatrième ordre (après suppression du facteur z_4^2). Dans cette equation, les termes qui ne contiennent pas z_4 en facteur sont

$$-f_2(1\,,0\,,0)(z_1 z_4 - z_2 z_3)^2\,, \qquad 3\lambda(z_1 z_4 - z_2 z_3) z_2 z_3\,.$$

Si donc on a

$$f_2(1\,,0\,,0) + 3\lambda = 0\,,$$

le terme en $z_2^2 z_3^2$ disparaît, on peut de nouveau mettre z_4 en évidence et la transformée de F' dans S_3 est une surface cubique. Pour notre objet, il faudra donc supposer

$$f_2(1\,,0\,,0) + 3\lambda \neq 0\,.$$

Désignons par F la surface, du quatrième ordre, qui correspond à F' dans S_3. La surface F doit rencontrer la courbe γ en sept points confondus en x; en d'autres termes, si nous remplaçons dans l'équation de F les coordonnées $z_1\,, z_2\,, z_3\,, z_4$ par leurs expressions en $\xi\,,\eta$, le premier membre de cette équation ne peut comprendre que des termes de degré sept en $\xi\,,\eta$.

Observons maintenant que si, dans l'équation (8), nous désignons par ψ et dans l'équation (9) par ψ' le coefficient de λ_0, l'équation de F' sera nécessariament de la forme

$$\lambda_0\,\psi' + \lambda_1\,z_1\,z_4^2 + \lambda_2\,z_2\,z_4^2 + \lambda_3\,z_3\,z_4^2 - \lambda_4\,z_4^3 + \lambda\,z_1^2\,z_4 = 0\,.$$

Par conséquent, l'équation de F sera la forme

$$\lambda_0\,\psi z_4 + \lambda_1(z_1 z_4 - z_2 z_3) z_4^2 + \lambda_2\,z_2\,z_4^3 + \lambda_3\,z_3 z_4^3 - \lambda_4\,z_4^4 - \lambda(z_1 z_4 - z_2 z_3)^2 = 0.$$

Nous devrons ensuite exprimer qu'en remplaçant les z par leurs expressions en fonction de $\xi\,,\eta$, les termes de degré inférieur à sept disparaissent. Or, si nous faisons cette substitution, nous constatons que les coefficients de $\lambda_0\,,\lambda_1\,,\lambda_2\,,\lambda_3$, sont du septième degré, le coefficient de λ_4 du huitième degré et enfin celui de λ du sixième degré en $\xi\,,\eta$. On en conclut que les conditions imposées entraînent $\lambda = 0$. Par conséquent, la surface F' ne peut exister, comme nous l'avions indiqué.

Liége, le 21 août 1953

BIBLIOGRAPHIE

(1) Paris, GAUTHIER-VILLARS, 1864, pp. 363-364.

(2) G. DARBOUX, *Sur le contact des coniques et des surfaces* (C. R. 1880, t. XCI, pp. 969-971; Bulletin des Sciences Mathématiques, 1880, pp. 348-384). Voir aussi MOUTARD, Sur le contact des coniques et des surfaces (C. R. 1880, t. XCI, pp. 1055-1058).

(3) E. CECH, *Les quadriques de Moutard* (Publications de la Faculté des Sciences de Brno, 1921, pp. 1-17); *L'intorno d'un punto d'una superficie considerato dal punto di vista projettivo* (Annali di Matematica, 1922, Serie 3, Vol. XXXI, pp. 191-207). Voir aussi G. FUBINI et CECH, *Geometria proiettiva differenziale* (Bologna, Zanichelli, 1927), tome II, pp. 457-500.

(4) Nous avions déjà attiré l'attention sur l'usage de cette transformation dans une note parue au Bulletin de la Société royale des Sciences de Liege, 1933.

(5) B SEGRE, *La cubique indicatrice de l'élément linéaire projectif d'une surface* (C. R.; 21 mars 1927).

(6) LANE, *The contact of a cubic surface with an analytic surface* (Transactions of the Amer. Math. Society, 1927, t. 29, pp. 471-480).