REMARQUES SUR LES SURFACES RÉGLÉES

Si l'on considère, sur l'hyperquadrique d'un espace linéaire à cinq dimensions dont les points représentent les droites de l'espace ordinaire, les surfaces images des tangentes asymptotiques d'une surface non réglée, ces dex surfaces sont consécutives dans une suite de Laplace dont l'étude permet d'obtenir des propriétés nouvelles de la surface d'où l'on est parti. Cette suite de Laplace a été considérée par MM. Bompiani (1), Tzitzeica (2), Terracini (3) et par nous-même (4). Nous nous proposons, dans cette note, d'examiner le cas où l'on part d'une surface réglée.

1. Soit (x) une surface de l'espace ordinaire S_3, rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 du point x satisfont au système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable (5)

$$\left.\begin{aligned} x^{20} + 2\,a_1\,x^{10} + 2\,b\,x^{01} + c_1\,x = 0 \\ x^{02} + 2\,b_1\,x^{01} + 2\,a\,x^{10} + c_2\,x = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

où les coëfficients sont des fonctions analytiques de u, v.

---

(1) Bompiani: «Sull'equazione di Laplace *(Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXIV, 1912). I fondamenti geometrici della teoria proiettiva delle curve e delle superficie. Appendice II à l'ouvrage: Geometria proiettiva differenziale de MM. Fubini et Cech (Bologne, 1927).

(2) Tzitzeica: «Géométrie différentielle projective des réseaux». (Paris en Bucarest, 1924).

(3) Terracini: «Sulla teoria delle congruenze W» *(Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, 1927). «Nuove ricerche sulle congruenze W» *(Atti del R. Istituto Veneto*, 1927-1928).

(4) L. Godeaux: «Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé» *(Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 1927-1928). Voir aussi une série de notes parues dans le même recueil, depuis 1928. «Sur les surfaces dont les quadrique de Lie n'ont que trois poins caractéristiques» *(Bulletin de la Société mathématique de France*, 1928). «Sur quelques familles de quadriques attachées aux points d'une surface» *(Annales de la Société polonaise de Mathématiques*, 1928.

(5) Si φ estune fonction analytique de u, v, nous posons.

$$\varphi^{ik} = \frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial u^i\,\partial v^k}$$

En exprimant les conditions d'intégrabilité, on trouve

$$a_1^{01} = b_1^{10}.$$

On posera donc

$$2\, a_1 = -\, \theta^{10}, \qquad 2\, b_1 = -\, \theta^{01},$$

θ étant une fonction analytique de u, v.

2. Soit Q l'hyperquadrique de l'espace linéaire à cinq dimensions S_5 représentant les droites de l'espace S_3. Désignons par U le point de Q qui représente la tangente $x\,x^{10}$ à l'asymptotique u au point x. Les coordonnées de U peuvent s'écrire

$$U_{ik} = e^{-\theta}\,(x_i\, x_k^{10} - x_k\, x_i^{10}).$$

Nous écrirons, en abrégé,

$$U = e^{-\theta}\,|\, x\, x^{10}\,|.$$

De même, V représentant sur Q la tangente $x\,x^{01}$ à l'asymptotique v au point x, nous poserons

$$V = e^{-\theta}\,|\, x\, x^{01}\,|.$$

On a, entre les coordonnées des points U, V, les relations

$$\left. \begin{array}{l} U^{10} + 2\, b\, V = 0 \\ V^{01} + 2\, a\, U = 0 \end{array} \right\} \qquad [2]$$

Si a, b ne sont pas identiquement nulles, les points U, V se succèdent dans une suite de Laplace (Bompiani, Tzitzeica) et ces points décrivent des surfaces (U), (V). Nous avons montré que cette suite de Laplace est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q.

3. Supposons que l'une des fonctions a, b, par exemple b, soit identiquement nulle. On a alors

$$U^{10} = 0\,,$$

et les coordonnées du point U sont indépendantes de u. Le point U décrit une courbe (U) et la surface (x) est une réglée dont les droites sont les lignes u (sur les quelles u varie).

Réciproquement, si la surface x est une réglée, ses génératrices rectilignes sont des asymptotiques. Supponsons que ce soient les lignes u; alors les coordonnées du point U ne dépendent que de v et ce point décrit une courbe. La fonction b est identiquement nulle.

Supposons maintenant que les deux fonctions a, b soient identiquement nulles. On a

$$U^{10} = 0, \qquad V^{01} = 0.$$

Lorsque u varie, le poins U reste fixe et le point V décrit une courbe. Lorsque v varie, le point V reste fixe et le point U décrit une courbe. La surface (x) est doublement réglée et est donc une quadrique. Les courbes (U), (V) sont des coniques dont les plans sont conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q. La réciproque est inmédiate.

On retrouve ainsi les résultats de M. Wilcynski (1) sans avoir à considérer la surface (x) comme enveloppe de ses plans tangents.

4. Avant d'aller plus loin, observons, avec M. Wilcynski, que si l'on fait la substitution

$$x = \overline{x}\, e^{\frac{\theta}{2}},$$

les équations [1] prennent la forme

$$\begin{aligned} \overline{x}^{20} + 2\, b\, \overline{x}^{01} + \overline{c}_1\, \overline{x} &= 0 \\ \overline{x}^{02} + 2\, a\, \overline{x}^{10} + \overline{c}_2\, \overline{x} &= 0. \end{aligned}$$

En changeant de notations, nous écrirons ce système sous la forme

$$\left.\begin{aligned} x^{20} + 2\, b\, x^{01} + c_1\, x &= 0 \\ x^{02} + 2\, a\, x^{10} + c_2\, x &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

et nous poserons

$$U = |\, x\, x^{10} \,|, \quad V = |\, x\, x^{01} \,|.$$

Les équations [2] seront toujours vérifiées, avec les nouvelles notations, par les coordonnées des points U, V.

5. Supposons que la surface (x) soit réglée et que precisément

(1) Wilcynski: «Projective differential geometry of curved surfaces» *(Transactions of te american mathematical Society*, 1907-1909).

la fonction b soit identiquement nulle. Donnons à v une valeur fixe v_0 et faisons varier u. Alors, on sait que la droite $x x^{01}$ engendre la quadrique osculatrice à la surface (x) le long de la génératrice $v = v_0$. Par suite le point V engendre une conique Γ_0.

Les droites $x x^{01}$ appartiennent au complexe linéaire spécial dont l'axe est la droite $v = v_0$. Par suite la conique Γ_0 appartient à l'hyperplan tangent à l'hyperquadrique Q au point U_0 de paramètre v_0 sur la courbe (U). Cet hyperplan coupe Q suivant le cône projetant la conique Γ_0 du point U_0 et les points de ce cône représentent les tangentes à la surface (x) le long de la droite $v = v_0$.

Soient U_0^{01}, U_0^{02} les points U^{01}, U^{02} correspondant à la valeur v_0 du paramètre v. Le plan $U_0\, U_0^{01}\, U_0^{02}$ coupe Q suivant une conique qui représente les génératrices de la quadrique osculatrice à la surface (x) le long de la droite $v = v_0$, de même mode que cette droite. Il en résulte que le plan $U_0\, U_0^{01}\, U_0^{02}$ et le plan de la conique Γ_0 sont conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q.

Lorsque v_0 varie, U_0 décrit la courbe (U) et la conique Γ_0 engendre la surface (V).

6. Possons

$$V_1 = V^{10} - V (\log a)^{10}.$$

Si nous donnons à v la valeur v_0, le point V_1 est situé sur la tangente au point V à la conique Γ_0 et par suite appartient au plan $\tilde{\omega}_0$ de cette conique.

Les conditions d'integrabilité du système [3], où $b \equiv 0$, sont

$$a^{20} + c_2^{10} = 0, \qquad c_1^{01} = 0,$$

$$c_2^{20} = 2\, a\, c_1^{10} + 4\, a^{10}\, c_1.$$

En posant

$$\alpha = 2 (\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4\, c_1,$$

on trouve aisément

$$\alpha^{10} + 2\, \alpha (\log a)^{10} = 0$$

et en suite la relation

$$V_1^{20} + V_1^{10} (\log a)^{10} + \alpha\, V_1 = 0.$$

Par suite, le point V_1, lorsque u varie seul, décrit une droite et, lorsque u, v varient, une surface réglée (V_1).

On a d'autre part

$$V_1^{01} + V(\log a)' = 0.$$

On voit donc que la réglée (V_1) est l'enveloppe des plans $\bar{\omega}$ des coniques Γ de la surface (V).

7. Désignons par

$$\Omega(p, q) = 0$$

l'équation de la polarité de S_5 dont Q est l'hyperquadrique fondamentale, de sorte que l'équation de cette hyperquadrique soit

$$\Omega(p, p) = 0.$$

Nous avons, puisque les plans $U U^{01} U^{02}$ et $\bar{\omega}$ sont conjugués,

$$\Omega(U, V) = 0, \quad \Omega(U, V_1) = 0, \quad \Omega(U, V_1^{10}) = 0.$$
$$\Omega(U^{01}, V) = 0, \quad \Omega(U^{01}, V_1) = 0, \quad \Omega(U^{01}, V_1^{10}) = 0,$$
$$\Omega(U^{02}, V) = 0, \quad \Omega(U^{02}, V_1) = 0, \quad \Omega(U^{02}, V_1^{10}) = 0.$$

Des deux dernières relations, on déduit

$$\Omega(U^{03}, V_1) = 0, \qquad \Omega(U^{03}, V_1^{10}) = 0.$$

La droite $V_1 V_1^{10}$, génératrice rectiligne de la surface (V_1), est donc conjuguée, par rapport à Q, de l'espace linéaire à trois dimensions $U U^{01} U^{02} U^{03}$. Or, cet espace coupe l'hyperquadrique Q suivant les points qui représentent les droites de la congruence linéaire osculatrice le long de la génératrice rectiligne u de la surface (x); par suite, les points de rencontre de la droite $V_1 V_1^{10}$ avec Q représentent les directrices de cette congruence, c'est-à-dire les tangentes flecnodales de la surface (x) s'appuyant sur la génératrice considérée. On observera que le point V_1 n'appartient pas en général à l'hyperquadrique Q, car la droite $V V_1$ est tangente à la conique Γ, donc à Q. Il en résulte que les tangentes flecnodales sont représentées par les points de rencontre de la droite $V_1 V_1^{10}$ avec la conique Γ correspondant à la même valeur de v.

Si ξ est une racine da l'équation

$$\xi^2 + \alpha = 0,$$

les deux tangentes flecnodales correspondant à une génératrice u de la surface (x) sont représentées sur Q par les points

$$G_1 = V_1^{10} + \xi V_1, \qquad G_2 = V_1^{10} - \xi V_1.$$

Les coordonnées de chacun de ces points satisfont d'ailleurs à l'équation

$$G^{10} = \{\xi - (\log a)^{10}\} G.$$

8. Observons que l'on a G étant l'un quelconque des points G_1, G_2,

$$\Omega(U, G) = 0, \quad \Omega(U^{01}, G) = 0, \quad \Omega(U^{02}, G) = 0, \quad \Omega(U^{03}, G) = 0.$$

En dérivant ces relations par rapport à v, on a successivement

$$\Omega(U, G^{01}) = 0, \quad \Omega(U^{01}, G^{01}) = 0, \quad \Omega(U^{02}, G^{01}) = 0,$$
$$\Omega(U, G^{02}) = 0, \quad \Omega(U^{01}, G^{02}) = 0,$$
$$\Omega(U, G^{03}) = 0.$$

Par suite, si g est une des tangentes flecnodales de la surface (x), les génératrices rectilignes de cette surface sont des tangentes flecnodales de la surface (g) engendrée par g. Résultat d'ailleurs connu.

9. Posons.

$$k_1 = -(\log a)^{11}, \quad k_2 = -(\log a k_1)^{11} + k_1,$$

et

$$V_2 = V_1^{10} - V_1 (\log a k_1)^{10}.$$

Nous avons

$$V_2^{01} = k_2 V_1.$$

Le point V_2 décrit l'arête de rebroussement de la développable engendrée par le plan $\bar{\omega}$.

Les points U, V, V , V_2 sont consécutifs dans une suite de Laplace qui se termine dans les deux sens. Dans le sens des v, elle se termine en U en présentant le cas de Laplace; dans le sens des u, elle se termine en V_2 en présentant le cas de Goursat.

Liége, Université, 29 avril 1931.