SUR CERTAINS POINTS UNIS DES INVOLUTIONS CYCLIQUES APPARTENANT À UNE SURFACE ALGEBRIQUE*).

L. Godeaux.

Présenté en juillet 1948.

Dans une note récente (1), nous avons exposé une méthode permettant de déterminer la structure des points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et celle des points de diramation correspondants de la surface image d'une de ces involutions. Nous nous proposons d'utiliser cette méthode dans un cas déterminé, de manière à en montrer les modalités d'application.

Rappelons tout d'abord quelques points que nous avons établis antérieurement (2).

Soient F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier impair p et T la transformation birationelle de F en soi génératrice de cette involution.

Supposons que l'involution possède un point uni isolé A, simple pour la surface. A une courbe tracée sur F et passant simplement par A, T fait correspondre une courbe passant simplement par A. Faisons correspondre la tangente à la seconde courbe à la tangente à la première. Nous obtenons ainsi, dans le faisceau des tangentes à F en A, une correspondance biunivoque qui est nécessairement soit l'identité, soit une homographie de période p. Dans le premier cas, le point est dit uni parfait, dans le second, uni non parfait. Dans le premier cas, à une courbe passant par A, T fait correspondre une courbe touchant la première en A. C'est du second cas que nous allons nous occuper.

Pour voir de plus près ce qui se passe dans le second cas, transformons birationnellement la surface F en une surface F' de telle sorte qu'au point A corresponde sur F' une courbe exceptionnelle a' (On peut par exemple supposer que F appartient à un espace linéaire S_r à r dimensions, $r > 3$, et projeter F de A sur une hyperplan S_{r-1} ne passant pas par ce point. Sur la projection F' de F, la courbe a' est une droite, trace du plan tangent à F en A sur l'hyperplan S_{r-1}). A T correspond une transformation birationnelle T' de F' en soi, engendrant une involution I_p'.

*) Conférence faite à l'Université Masaryk de Brno le 26 mai 1948.

La transformation T' laisse fixe la courbe a' et détermine sur celle-ci une involution d'ordre p ayant deux points unis A_1', A_2'. Ces points sont évidemment des points unis isolés de l'involution I'_p. Les poínts A_1', A_2' peuvent être des points unis parfaits ou non parfaits de I_p.' Dans le second cas, on peut recommencer le raisonnement précédent, et ainti de suite. Ce que nous appelons structure du point uni A, c'est l'ensemble des points unis infiniment voisins successifs de A, que le passage de F à F' et ainsi de suite, fait apparaître comme des points propres.

Nous aurons à nous servir d'un principe, quasi évident, que nous rappellerons succinctement.

Supposons que nous connaissions sur F un système linéaire de courbes $|C|$ transformées chacune en soi par T et ayant en A une certaine multiplicité ϱ inférieure à p. Les tangentes à ces courbes en A doivent être confondues avec les tangentes t_1, t_2 unies dans l'homographie déterminée dans le faisceau des tangentes à F en A. Soit ϱ_1 le nombre des tangentes à ces courbes confondues avec t_1 par exemple. Lorsque l'on passe de F à F', au point infiniment voisin de A sur t_1, correspond l'un des points A_1', A_2', par exemple A_1', et les transformées C' des courbes C passent par A_1'. Si A_1' est un point uni parfait de I_p', il est multiple d'ordre ϱ_1 pour les courbes C_1, qui ont en ce point des tangentes variables. Mais si A_1' est uni non parfait, les courbes C' peuveat avoir en ce point une multiplicité ϱ_1', inférieure à ϱ_1. Dans ce cas, les courbes C' ont en commun une suite de points multiples unis, infiniment voisins successifs de A', le premier de ces points étant sur a' et la somme des multiplicités valant $\varrho_1 - \varrho_1'$. Naturellement, la multiplicité du premier de ces points ne peut excéder le nombre des tangentes aux courbes C', en A_1' qui sont en même temps tangentes à a'.

Soit Φ une surface image de l'involution I_p, c'est-à-dire une surface dont les points correspondent aux groupes de l'involution. Au point uni A qui, compté p fois, forme un groupe de I_p, correspond sur Φ un point de diramation A' qui est singulier pour le surface. Il s'agit de déterminer cette singularité. En général, le cône tangent à Φ au point A' se scinde en deux parties. Dans l'exemple que nous considérons ici, il se scinde en trois parties et c'est ce qui fait l'intérêt de cet exemplé.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution I_{13} d'ordre 13, cyclique, ne possédant qu'un nombre fini de points

unis. Nous pouvons transformer birationnellement la surface F en une surface normale dans un espace linéaire S_r à r dimensions, sur laquelle l'involution I_{13} est engendrée par une homographie cyclique H, de période 13, possédant 13 axes ponctuels (3). C'est cette surface que nous désignerons dorénavant par F. Soit $|C|$ le système de ses sections hyperplanes.

Désignons par $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{12}$ les axes ponctuels de l'homographie H et par $r_0, r_1, \ldots, r_{12}$ leurs dimensions respectives. Soient $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{12}$ les systèmes linéaires d'hyperplans de S_r définis de la maniére suivante: Le systéme Σ_i est formé des hyperplans passant par les axes $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{12}$ sauf par σ_i. Les hyperplans des systèmes $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{12}$ découpent sur F des systèmes linéaires partiels $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{12}|$, appartenant à l'involution I_{13}. Nous avons montré que l'on peut construire F de manière que seul l'espace σ_0 rencontre la surface, aux points unis de l'involution I_{13} (4). De plus, on peut supposer r_0 aussi grand qu'on le veut.

Le système $|C_0|$ est dépourvu de points-base et si l'on rapporte projectivement les courbes de ce système aux hyperplans d'un espace linéaire S' à r_0 dimensions, aux groupes de I_{13}' correspondent les points d'une surface Φ, image de l'involution.

Désignons par Γ_0 les sections hyperplanes de Φ, par π leur genre et par n l'ordre de la surface. Le système $|C_0|$ et par suite le système $|C|$ est de degrè $13n$ et, d'après la formule de Zeuthen, de genre $13\pi - 12$.

Aux systèmes $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{12}|$, qui ont comme points-base les points unis de I_{13}, correspondent sur Φ des systèmes linéaires complets $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_{12}|$.

A chacun des axes de l'homographie H, est attachée une racine treizième de l'unité. Si ε est une racine primitive d'ordre 13 de l'unité, nous pouvons toujours supposer que les racines attachées à $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{12}$ sont respectivement $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{12}$.

2. Soit A un point uni non parfait de l'involution I_{13}. Le plan tangent α à F en A est uni pour H et s'appuie en un point sur deux des axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{12}$. Nous supposerons précisément au'il s'appuie en un point sur σ_1 et en un point sur σ_5 Dans le plan α, H détermine une homographie non homologique, de période 13, ayant ces deux points d'appui et le point A comme points unis. Nous désignerons par a_1 et a_5 les tangentes à F en A s'appuyant respectivement sur σ_1, σ_5.

Les courbes C_0 passant par A acquièrent en ce point une certaine multiplicité inférieure à 13 et ont leurs tangentes confondues avec a_1, a_5. Nous désignerons par C'_0 ces courbes.

Les courbes C_0' assujetties à toucher en A une droite du plan α distincte de a_1, a_5, acquiérent en ce point une multiplicité supérieure à la précédente et au plus égale à 13. Soient C_0'' ces courbes. Si les courbes C_0'' ont en A la multiplicité 13, elles ont des tangentes variables en ce point. Dans le cas contraire, elles ont comme tangentes a_1, a_5. Nous désignerons par C_0''' les courbes C_0'' assujetties à toucher en A une droite distincte de a_1, a_5, et ainsi de suite.

Nous désignerons par A' le point qui, sur Φ, correspond au point A. Soient Γ_0', Γ_0'', . . . , les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C_0', C_0'', ... Elles sont découpées sur la surface par des hyperplans passant par A'.

3. Les hyperplans de Σ_1 coupent le plan α suivant la droite a_5 et les courbes C_1 ont donc un point simple en A et y touchent la droite a_5.

Les hyperplans de Σ_5 coupent le plan α suivant la droite a_1 et les courbes C_5 passent simplement par A en y touchant la droite a_1.

Considérons les courbes

$$\lambda C_1 + \mu C_5 \tag{1}$$

et supposons que les entiers positifs λ, μ satisfassent aux conditions

$$\lambda + 5\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 13)$$

$$\lambda + \mu \leq 13.$$

Les courbes (1) ont en A la multiplicité $\lambda + \mu$, λ tangentes étant confondues avec a_5 et μ avec a_1. Nous avons montré que parmi les courbes C_0', C''_0, . . . , il en est qui ont en A la même multiplicité que les courbes (1) et inversement (5). En d'autres termes, les courbes

$$\lambda C_1 + \mu C_5 - (\lambda + \mu - 1) C_0$$

appartiennent à l'un des systèmes $|C_0'|$, $|C_0''|$, . . . et inversement, chacun de ces systémes contient des courbes de cette sorte.

Les valeurs possibles ge λ, μ sont:

$$\lambda = 3,\ \mu = 2;\ \lambda = 1,\ \mu = 5;\ \lambda = 8,\ \mu = 1;$$

$$\lambda = 6,\ \mu = 4;\ \lambda = 4,\ \mu = 7;\ \lambda = 2,\ \mu = 10.$$

On en conclut que:

Les courbes C_0' ont en A la multiplicité 5, trois tangentes étant confondues avec a_5 et deux avec a_1;

Les courbes C_0'' ont en A la multiplicité 6, une tangente étant confondues avec a_5 et les cinq autres avec a_1;

Les courbes C_0 ont en A la multiplicité 9, huit tangentes étant confondues avec a_5 et la derniére avec a_1;
et ainsi de suite.

4. Le système $|C_0'|$ a la dimensions $r_0 - 1$. Si nous rapportons projectivement les courbes C_0' aux hyperplans d'un espace linéaire à $r_0 - 1$ dimensions, nous obtenons une surface Φ', projectivement identique à la projection, à partir de A', de la surface Φ sur un hyperplan de l'espace ambiant. Nous pouvons considérer cette projection comme identique à Φ'.

Nous avons établi que les courbes C_1, C_5 rencontrent les courbes C_0', C_0'', ... en 13 points confondus en A.

Les courbes C_0' ayant un point quintuple en A, les courbes C_5 les rencontrent nécessairement en quatre points fixes A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, infiniment voisins successifs de A, doubles pour les courbes C_0', le premier A_{11} appartenant à la droite a_1. Tout point infiniment voisin de A_{14} est nécessairement uni pour l'involution I_{13}, sans quoi les courbes C_0', C_5 auraient encore en commun un point fixe infiniment voisin de A_{14}. En d'autres termes, le point A_{14} est uni parfait pour l'involution I_{13}. Les points A_{11}, A_{12}, A_{13} sont évidemment unis non parfaits pour cette involution.

Les courbes C_1 ont en commun avec les courbes C_0' un point fixe A_{51}, double pour les courbes C_0', infiniment voisin de A sur la droite a_5. Au point A_{51}, sont infiniment voisins, dans une direction, six points fixes successifs A_{52}, A_{53}, ..., A_{57} et, dans une autre direction, un point fixe A_{511}. Ces points sont simples pour les courbes C_0' et les six premiers appartiennent aux courbes C_5. Tous ces points sont unis non parfaits pour I_{13}, sauf les deux derniers A_{57}, A_{511}, qui sont unis parfaits.

Aux points infiniment voisins de A_{14} correspondent, sur la surface Φ', les points d'une courbe rationnelle. Puisque A_{14} est double pour les courbes C_0', cette courbe est une conique que nous désignerons par a_2.

Aux points infiniment voisins de A_{57} et de A_{511} correspondent respectivement sur Φ' deux droites que nous désignerons par β_1, β_1'.

Sur la surface Φ', les courbes Γ_5 rencontrent en un point variable la conique a_2 et les courbes Γ_1 rencontrent la droite β_1 en un point variable également.

En A', la surface Φ a un point quadruple, le cône tangent se décomposant en un cône du second ordre projetant la conique a_2 et en deux plans projetant les droites β_1, β_1'. Il en résulte que la surface Φ' est d'ordre n-4 et que ses sections hyperplanes Γ_0' ont le genre π-3.

Le système $|C_0'|$ doit avoir le degré effectif 13 (n-4) et par conséquent le point A doit absorber 4,13 points d'intersection de deux courbes C_0'. On vérifie qu'il en est bien ainsi.

D'autre part, le genre d'une courbe C' est égal à

$$13\pi - 12 - 15.$$

Dans la correspondence entre une courbe Γ_0' et la courbe C_0' homologue, les points de diramation sont les points de rencontre de Γ_0' avec a_2, β_1, β_1'. Ces points sont au nombre de 4 et la formule de Zeuthen donne

$$26\,(\pi - 3 - 1) + 4{,}12 = 2\,(13\pi - 12 - 15 - 1),$$

ce qui est une identité.

5. Considérons maintenant les courbes C_0''. Elles ont en A un point multiple d'ordre six, une tangente étant confondues avec a_5 et cinq avec a_1. Ces courbes doivent être rencontrées en 13 points réunis en A par les courbes C_1, C_5.

On en conclut tout d'abord que les courbes C_0'' passent simplement par les points $A_{51}, A_{52}, \ldots, A_{57}$. Mais ces courbes ne passent pas par le point A_{511}.

Le point A_{14} ne peut plus être double pour les courbes C_0'', car alors les points A_{11}, A_{12}, A_{13} seraient doubles au moins pour ces courbes et celles-ci seraient rencontrées en 14 points au moins confondus en A par les courbes C_5. Le point A_{14} est donc simple pour les courbes C_0''. Ces courbes ont précisément un point quadruple en A_{11} et des points simples en A_{12}, A_{13}, A_{14}. De plus, elles ont un point simple A_{111} infiniment voisin de A_{11}, suivi de deux points simples B_1, B_2, infiniment voisins successifs de A_{111}, le dernier étant uni parfait pour I_{13}.

Aux courbes C_0'' correspondent sur Φ' des courbes Γ_0'', découpées par des hyperplans passant par un point A_1' de la surface. Les courbes Γ_0'' rencontrent la conique α_2 en un point, la droite β_1 en un point et ne rencontrent pas la droite β_1', donc le point A_1' appartient à la conique α_2 et à la droite β_1'.

Deux courbes C_0'' ont 5.13 points d'intersection absorbés en A, donc la systéme $|\Gamma_0''|$ a le degré effectiv n-5 et le point A_1' est simple pour la surface Φ'.

La formule de Zeuthen permet de vérifier que les courbes Γ_0'' ont, comme les courbes Γ_0', le genre π-3.

Observons qu'aux points de F infiniment voisins de B_2, correspondent sur Φ' les points infiniment voisins de A_1'.

6. Passons à l'étude des courbes C_0'''. Elles ont en A la multiplicité 9, une tangente coincidant avec a_1 et huit avec a_5.

Les courbes C_0''' sont rencontrées en 13 points confondus en A par les courbes C_1, C_5, par conséquent, elles passent une fois par chacun des points $A_{11}\, A_{12}\, A_{13}\, A_{14}$. Elles ne peuvent d'autre part passer par le point A_{57}, car alors les courbes C_1 les rencontreraient en 16 points au moins confondus en A. Les courbes C_0''' ont nécessairement un point quadruple en A_{51} et un point quadruple en A_{511}.

Les courbes Γ_0''' sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans passant par A_1' et par un second point A_2'. Elles rencontrent la conique α_2 en un point, mais ne rencontrent plus la droite β_1. Par conséquent le point A_2' appartient à cette droite, mais non à la conique α_2.

D'autre part, les courbes Γ_0''' rencontrent la droite β_1' en quatre points variables, tandis que les courbes Γ_0'' ne rencontrent pas cette droite. On en conclut que les hyperplans découpant sur Φ' les courbes Γ_0''' doivent contenir β_1'. Le point A_2' appartient donc à cette droite.

Le degré du système $|\Gamma_0'''|$ est égal à n-9 et, en utilisant la formule de Zeuthen, on voit que les courbes Γ_0''' ont le genre π-6.

Observons que si le point A_2' était multiple pour la surface Φ', les courbes Γ_0''' passeraient par ce point et ne rencontreraient pas la droite β_1' en quatre points variables. On en conclut que ce point est simple pour la surface Φ'.

7. Nous avons, sur la surface Φ', la relation fonctionnelle

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_1'.$$

En désignant par $[\alpha_2, \alpha_2]$ le degré virtuel de la conique α_2 et en tenant compte du fait que cette conique n'est pas rencontrée par les courbes Γ_0, mais est rencontrée en deux points par les courbes Γ_0' et rencontre en un point la droite β_1', on a

$$0 = 2 + [\alpha_2, \alpha_2] + 0 + 1,$$

d'où $[\alpha_2, \alpha_2] = -3$. La conique α_2 a donc le degré virtuel -3.

On trouve de même que la droite β_1 a le degré virtuel -2 et la droite β_1' le degré virtuel -3.

Les courbes Γ_0''' étant découpées par les hyperplans passant par la droite β_1', on a

$$\Gamma_0'' \equiv \Gamma_0''' + \beta_1'$$

c'est-à-dire

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0''' + \alpha_2 + \beta_1 + 2\beta_1'.$$

On retrouve, par les formules classiques sur le degré et le genre de la somme de deux courbes, les résultats obtenus plus haut pour le degré de $|\Gamma_0'''|$, pour son genre et pour le nombre des points d'intersection des courbes Γ_0''' avec β_1'.

8. Nous nous bornerons à énoncer les résultats pour les courbes $C_0^{(4)}$, $C_0^{(5)}$, $C_0^{(6)}$, $C_0^{(7)}$, et pour les courbes correspondantes sur la surface Φ'.

Les courbes $C_0^{(4)}$ ont en A la multiplicité 10, six tangentes étant confondues avec a_5 et quatre avec a_1. Ces courbes passent trois fois par le point A_{11}, une fois par les points A_{111}, B_1, B_2 et trois fois par chacun des points A_{51}, A_{511}.

Les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont les courbes Γ_0''' passant par le point A_1', intersection de la conique α_2 et de la droite β_1'.

Les courbes $C_0^{(5)}$ ont la multiplicité 11 en A, quatre tangentes étant confondues avec a_5 et sept avec a_1. Ces courbes ont des points doubles en A_{51}, A_{511}. Elles ont également des points doubles en A_{11}, A_{111} et en un point A_{112} infiniment voisin de A_{111}; elles passent en outre simplement par un point A_{113} infiniment voisin de A_{112} et par un point B_1, infiniment voisin de A_{113}.

Les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ sont les courbes Γ_0''' touchant en A_1' la droite β_1'.

Les courbes $C_0^{(6)}$ ont la multiplicité 12 en A, deux tangentes étant confondues avec a_5 et dix avec a_1. Elles passent simplement par les points A_{51}, A_{511} et de même simplement par A_{11} et par neuf points infiniment voisins successifs A_{111}, A_{112}, A_{113}, $\ldots$, A_{119}.

Les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ sont les courbes Γ_0''' ayant en A_1' un contact du second ordre avec la droite β_1'.

Enfin, les courbes $C_0^{(7)}$ ont en A un point multiple d'ordre 13, à tangentes variables. Les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ sont les courbes $\Gamma^{0'''}$ ayant en A_1', avec la droite β_1' un contact d'ordre trois.

La figure ci-jointe donne un schéma des comportements des courbes C_0', C_0'', $\ldots$, $C_0^{(6)}$ au point A.

9. Nous allons maintenant construire une surface algébrique contenant une involution cyclique d'ordre 13, ayant des points unis du type qui vient d'être étudié.

Plaçons-nous dans un espace linéaire S_{10} à dix dimensions et considérons l'homographie H' d'équations

$$x_0' : x_1' : \ldots : x_8' : x_9' : x_{10}' = x_0 : x_1 : \ldots : x_8 : \varepsilon x_9 : \varepsilon^5 x_{10},$$

où ε est une racine primitive treizième de l'unité.

Représentons par φ_i un polynome homogène de degré i et par ψ_{13} un polynome homogène de degré 13 par rapport à $x_0, x_1, \ldots, x_8$. Considérons la surface F d'équations

$$x_9^3 x_{10}^2 = \varphi_5, \quad x_9 x_{10}^5 = \varphi_6, \quad x_9^8 x_{10} = \varphi_9,$$
$$x_9^6 x_{10}^4 = \varphi_{10}, \; x_9^4 x_{10}^7 = \varphi_{11}, \; x_9^2 x_{10}^{10} = \varphi_{12},$$
$$x_9^{13} = \varphi_{13}, \; x_{10}^{13} = \psi_{13}.$$

Posons

$$n = 5 \,.\, 6 \,.\, 9 \,.\, 10 \,.\, 11 \,.\, 12 \,.\, 13.$$

La surface F est d'ordre $13n$ et est transformée en elle-même par l'homographie H'. Celle-ci possède trois axes: les points O_9, O_{10} et l'espace à huit dimensions $O_0 O_1 \ldots O_8$.

Sur F, l'homographie H' engendre une involution I_{13}, d'ordre 13, ayant $13n$ points unis:

$$x_9 = 0, \; x_{10} = 0, \; \varphi_5 = 0, \; \varphi_6 = 0, \ldots, \; \varphi_{13} = 0, \; \psi_{13} = 0.$$

On peut supposer sans restriction que l'un de ces points est le point O_0. On est alors conduit à poser

$$\varphi_i \equiv x_0^{i-1} \alpha_i + \ldots,$$
$$\psi_{13} \equiv x_0^{12} \beta_{13} + \ldots,$$

où α_i et β_{13} sont des polynomes homogènes du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_8$.

Le plan tangent à la surface F en O_0 coincide avec le plan $O_0 O_9 O_{10}$ et dans ce plan, H' détermine l'homographie

$$x_0' : x_9' : x_{10}' = x_0 : \varepsilon x_9 : \varepsilon^5 x_{10},$$

ce qui montre que O_0 est bien un point uni de l'espèce étudiée plus haut. Il est d'ailleurs évident que tous les points unis de l'involution considérée sont de même nature.

10. Pour obtenir une image de l'involution I_{13}, il suffit de projeter la surface F de la droite $O_9 O_{10}$ sur l'espace $O_0 O_1 \ldots O_8$, c'est-à-

dire d'éliminer x_9, x_{10} entre les équations de F. On obtient ainsi une surface Φ, d'ordre n, d'équations

$$\left\|\begin{matrix} \varphi_5 & \varphi_9 & \varphi_{10} & \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_6 & \varphi_{10} & \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \end{matrix}\right\| = 0,$$

$$\varphi_5^2 = \varphi_{10},\ \varphi_6^2 = \varphi_{12},\ \varphi_9^2 = \varphi_5\varphi_{13},\ \varphi_{11}^2 = \varphi_9\psi_{13},$$
$$\varphi_5\varphi_6 = \varphi_{11},\ \varphi_9\varphi_{10} = \varphi_6\varphi_{13}.$$

Au point O_0, uni pour I_{13}, correspond sur Φ le point qui occupe la même position. Le cône tangent à la surface Φ en ce point appartient à l'espace

$$\alpha_{10} = 0,\ \alpha_{11} = 0,\ \alpha_{12} = 0.$$

Il se compose du cône quadratique

$$\alpha_9^2 - \alpha_5\alpha_{13} = 0,\ \alpha_6 = 0,\ \beta_{13} = 0$$

et de deux plans

$$\alpha_5 = 0,\ \alpha_9 = 0,\ \alpha_{13} = 0,$$
$$\alpha_9 = 0,\ \alpha_{13} = 0,\ \beta_{13} = 0.$$

Le cône quadratique rencontre le second plan suivant la droite

$$\alpha_6 = \alpha_9 = \alpha_{13} = \beta_{13} = 0$$

et les deux plans se rencontrent suivant la droite

$$\alpha_5 = \alpha_9 = \alpha_{13} = \beta_{13} = 0.$$

La surface Φ possède donc bien au point de diramation O_0 la singularité obtenue plus haut.

Liége, le 26 juin 1948.

(1) *Recherches sur les points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de l'Acad. de Belgique, 1948, pp. 206-228, 288-300). Voir aussi une note en cours d'impression dans le Bulletin de la Société des Sciences de Liége, avril 1948).

(2) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient., No 270, Paris, Hermann, 1935); *Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Mémoires in-8° de l'Académie de Belgique, 1938); *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation* (Annales Scient. de l'Ecole Normale Supérieure, 1938, pp. 193-222); *Sur les points de diramation des surfaces multiples* (Bulletin de la Soc. des Sciences de Liége, 1940, pp. 54-79, 128-137).

(3) *Les involutions cycliques . . .* (Loc. cit.).

(4) *Les involutions cycliques . . .* (Loc. cit.).

(5) *Recherches sur les points unis isolés . . .* (Loc. cit.).