SUR CERTAINS POINTS UNIS ISOLÉS DES INVOLUTIONS CYCLIQUES D'ORDRE 17 APPARTENANT À UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

par

LUCIEN GODEAUX

Dans une note récente [1]), nous avons indiqué une méthode pour déterminer la structure des points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Nous en faisons ici une application à certains points unis d'une involution d'ordre 17. Nous estimons que de telles applications ne sont pas sans intérêt : non seulement que la méthode que nous avons imaginée conduit au but assigné, mais qu'elle permet également de déterminer la structure du point de diramation d'une surface image de l'involution. Un tel point est singulier pour cette surface et, au point de vue des transformation birationnelles, il est équivalent à un certain ensembie de courbes rationnelles qu'il s'agit de déterminer. Précisément, dans le cas considéré ici, le point de diramation est équivalent à un ensemble de six courbes rationnelles, l'une de degré virtuel -3, les autres de degré virtuel -2. Nous déterminons la configuration formée par ces courbes.

Dans le cours du travail, nous avons à considérer des courbes homologues tracées sur des surfaces birationnellement équivalentes ; nous les désignons par le même symbole, quelle que soit la surface envisagée.

1. Soit F une surface algébrique normale de l'espace S_R à R dimensions, transformée en soi par une homographie H, cyclique de période 17, possédant 17 axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{16}$. Nous supposerons que seul l'axe σ_0 rencontre la surface F, en un nombre fini de

1) *Structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (C. R., juillet 1948). Voir aussi notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935) et différentes notes en cours d'impression dans le Bulletin de l'Académie de Belgique et dans celui de la Société des Sciences de Liége, 1948.

points, et nous désignerons par Σ_i la gerbe formée par les hyperplans passant par $\sigma_0, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{16}$.

Le système des sections hyperplanes de F sera désigné par $| C |$ et les systèmes linéaires partiels découpés par les hyperplans de Σ_0, $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{16}$ seront désignés respectivement par $| C_0 |, | C_1 |, \dots, | C_{16}|$.

L'homographie H engendre, sur la surface F, une involution I_{17}, d'ordre 17, ayant un nombre fini de points unis: les points de rencontre de F avec l'espace σ_0. Les systèmes linéaires partiels $| C_0 |, | C_1 |, \dots, | C_{16} |$ appartiennent à l'involution I_{17}; le premier est dépourvu de points-base et les autres ont pour points-base les points unis de l'involution.

Soit r la dimension de $| C_0 |$. En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions, nous obtenons une surface normale Φ, image de l'involution. Nous désignerons par n l'ordre de Φ et par π le genre de ses sections hyperplanes Γ_0. La surface F est alors d'ordre $17\,n$ et les courbes C ont le genre $17\,\pi-16$.

2. Soit A un point uni non parfait de l'involution I_{17}, c'est-à-dire un point de F appartenant à l'axe σ_0 de H et en lequel le plan tangent α à F s'appuie en un point sur deux des axes $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{16}$. Nous supposerons d'une manière précise que le plan α, qui ne rencontre σ_0 qu'au seul point A, s'appuie en un point sur l'espace σ_1 et en un point sur l'espace σ_{11}. Nous désignerons respectivement par a, b les droites du faisceau (A, α) s'appuyant la première sur σ_1, la seconde sur σ_{11}.

Appelons C'_0 les courbes C_0 passant par A. Elles ont en ce point une certaine multiplicité, inférieure à 17, les tangentes étant confondues avec les droites a, b. Soit C_0'' les courbes C'_0 assujetties à toucher en A une droite distincte de a, b; C_0''' les courbes C_0'' assujetties à toucher en A une droite distincte de a, b; et ainsi de suite. Nous formons ainsi une suite de systèmes linéaires $| C_0' |, | C_0'' |, |C_0''' |, \dots$ ayant en A des multiplicités croissantes, les tangentes étant confondues avec a, b. On parvient ainsi à un dernier système $| C_0^{(\gamma)} |$, dont les courbes ont en A la multiplicité 17, les tangentes étant variables.

Notre but est en premier lieu de déterminer le comportement des courbes $C_0', C_0'', C_0''', \dots$ au point A.

Soit A_0 le point qui correspond sur Φ au point A, c'est-à-dire le point de Φ qui représente le groupe de l'involution I_{17} formé du point A compté 17 fois.

Désignons par $| \Gamma'_0 |, | \Gamma_0'' |, \dots$ les systèmes de courbes, appartenant au système des sections hyperplanes $| \Gamma_0 |$ de Φ, qui correspondent sur cette surface aux systèmes $|C_0'|$, $|C_0''|$ ..... Le système $|C_0'|$ a la dimension $r-1$. Si nous rapportons projectivement ses courbes aux hyperplans d'un espace linéaire à $r-1$ dimensions, il correspond à la surface F une surface Φ_1, image de l'involution, projectivement identique à la projection de la surface Φ à partir du point A_0 sur un hyperplan. Les sections hyperplanes de Φ_1 sont les courbes Γ_0'. Le point A_0 est singulier pour la surface Φ et au domaine de ce point sur cette surface correspond sur Φ_1 un ensemble de courbes qu'il s'agit de déterminer.

Le système $|C_0''|$ a la dimension $r-2$ et le système $|\Gamma_0''|$, sur la surface Φ_1, est découpé par les hyperplans passant par un point A'_0 de la surface. Si l'on rapporte les courbes de $|C_0''|$ aux hyperplans d'un espace à $r-2$ dimensions, on obtient une surface Φ_2, projectivement identique à la projection de Φ_1, à partir de A'_0, sur un hyperplan. La surface Φ_2 a comme sections hyperplanes les courbes Γ_0'' et au domaine du point A'_0 sur Φ_1 correspond sur Φ_2 un ensemble de courbes, et ainsi de suite.

Nous nous proposons en second lieu de déterminer les ensembles de courbes ainsi déterminés sur les surfaces Φ_1, Φ_2, ..., c'est-à-dire la structure du point A_0 sur la surface Φ.

3. Pour atteindre notre but, nous devons déterminer les nombres entiers positifs satisfaisant aux conditions

$$\lambda + \mu < 17, \quad \lambda + 11\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 17).$$

On trouve facilement les solutions

$$\lambda=1,\ \mu=3;\ \lambda=6,\ \mu=1;\ \lambda=2,\ \mu=6;\ \lambda=7,\ \mu=4;$$
$$\lambda=3,\ \mu=9;\ \lambda=12,\ \mu=2;\ \lambda=8,\ \mu=7;\ \lambda=4,\ \mu=12.$$

Les nombres $\lambda+\mu$, λ, μ donnent respectivement les multiplicités avec du point A et les nombres de tangentes confondues avec b et a des courbes C_0', C_0'', ...

Les courbes C'_0 ont en A la multiplicité quatre, trois tangentes étant confondues avec a et la dernière avec b.

Les courbes C_1, C_{11} passent simplement par A en y touchant, les premières la droite b, les secondes la droite a. Chacune de ces courbes doit rencontrer les courbes C_0' en 17 points confondus en A.

Les courbes C_0' ont en commun une suite de dix points fixes, infiniment voisins successifs de A, le premier appartenant à a, et une seconde suite de 13 points fixes, infiniment voisins successifs de A, le premier se trouvant sur b. Nous désignerons par A_1, A_2, ..., A_{10} les points de la première suite, par B_1, B_2, ..., B_{13} ceux de la seconde. Ces points sont unis non parfaits pour l'involution I_{17}, sauf les points A_{10}, B_{13} qui sont unis parfaits.

Les courbes C'_0 ont la multiplicité 3 en A_1, la multiplicité 2 en A_2 et passent simplement par les points $A_3, A_4, \ldots, A_{10}$. Elles ont encore en commun un point simple A_{21}, uni parfait pour I_{17}, infiniment voisin de A_2 et distinct de A_3. Les courbes C_0' passent simplement par les points $B_1, B_2, \ldots, B_{13}$. Deux courbes C_0' ont en commun 3.17 points absorbés en A et par conséquent le système $|\Gamma_0'|$ a le degré $n-3$, c'est-à-dire que la surface Φ_1 a l'ordre $n-3$.

Entre une courbe Γ_0' et la courbe C_0' homologue, nous avons une correspondance $(1,17)$ présentant trois points unis A_{10}, A_{21}, B_{13}. Les courbes C_0' étant de genre $17\pi-26$, la formule de Zeuthen donne pour les courbes Γ_0' le genre $\pi-2$.

Aux points infiniment voisins de A_{10} correspondent sur Φ_1 les points d'une droite α_1. De même, aux points infiniment voisins de A_{21}, correspondent les points d'une droite α'_1 et aux points infiniment voisins de B_{13} correspondent les points d'une droite β_1 de Φ_1.

On en conclut que le point de diramation A_0 est triple pour la surface Φ, le cône tangent étant formé des trois plans qui projettent de ce point les trois droites α_1, α'_1, β_1.

4. Envisageons les courbes C_0''. Elles ont en A la multiplicité 7, six tangentes étant confondues avec b et la dernière avec a. Les courbes C_1, C_{11} rencontrent chacune les courbes C_0'' en 17 points confondus en A.

Les courbes C_0'' passent simplement par les points $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$; elles passent triplement par le point B_1, doublement par B_2, B_3, B_4, simplement par B_5. Elles ont encore en commun une suite de trois points fixes B_{11}, B_{12}, B'_{13} infiniment voisins successifs de B_1 et un point simple fixe B_{51}, infiniment voisin de B_5. Ces points sont unis pour I_{17} et les points B'_{13}, B_{51} sont unis parfaits.

La surface Φ_2 est d'ordre $n-5$ et ses sections hyperplanes sont de genre $\pi-3$.

Au domaine du point B'_{13} correspond sur Φ_2 une droite β_1' et au domaine du point B_{51}, une droite β_1''. On en conclut que le point A'_0 est double biplanaire pour la surface Φ_1, les plans tangents en ce point étant ceux qui projettent les droites β_1', β_1'' du point A'_0.

Les droites β_1', β_1'' se rencontrent en un point.

Observons que dans le passage de Φ_1 à Φ_2, les droites α_1', β_1 disparaissent, tandis que la droite α_1 continue d'exister sur Φ_2. On en conclut que les droites α_1', β_1 passent par le point double A'_0. A ces droites correspondent sur la surface Φ_2 des points singuliers situés un sur chacune des droites β_1', β_1''.

5. Les courbes C_0''' ont en A la multiplicité huit, six tangentes étant confondues avec a et deux avec b. Elles passent six fois par le point A_1, trois fois par le point A_2 et par le point A_{21}, deux fois par les points B_1, B_2, B_3, B_4, une fois par les points B_5 et B_{51}.

Sur la surface Φ_3, que l'on obtient en rapportant projectivement les courbes C_0''' aux hyperplans d'un espace à $r-3$ dimensions et qui a pour sections hyperplanes les courbes Γ_0''', il correspond au domaine du point A_{21} une cubique gauche α'_1 et à celui du point B_{51}, une droite β_1''. Il en résulte que sur la surface Φ_2, les courbes Γ_0''' sont découpées par les hyperplans passant par le point A_0'' qui représente, sur cette surface, la courbe rationnelle α'_1. Ce point est triple pour la surface Φ_2 et appartient à la droite β_1'. Par conséquent, le point qui représente sur la surface Φ_2 la droite β_1 appartient à la droite β_1''.

La surface Φ_3 a l'ordre $n-8$ et les courbes Γ_0''' le genre $\pi-5$.

6. Passons aux courbes $C_0^{(4)}$. Elles ont en A la multiplicité 11, quatre tangentes sont confondues avec a et sept avec b. Ces courbes passent quatre fois par le point A_1, deux fois par les points A_2, A_{21}, quatre fois par B_1, une fois par les points B_{11}, B_{12}, B'_{13}, deux fois par B_2, une fois par un point B_{21} infiniment voisin de B_2 et une fois par un point B_{211} infiniment voisin de B_{21}.

Considérons la surface Φ_4, obtenue en rapportant projectivement les courbes $C_0^{(4)}$ aux hyperplans d'un espace linéaire à $r-4$ dimensions ; soient $\Gamma_0^{(4)}$ aux hyperplanes. Au domaine du point A_{21} correspond sur Φ_4 une conique α'_1, au domaine du point B'_{13} une droite β_1' et au domaine du point B_{211} une droite β_1'''. Sur la surface Φ_3, les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées par les hyperplans passant par un point A_0''' appartenant aux courbes α'_1 et β_1''. L'ordre de la surface Φ_4 est $n-10$ et le genre de ses sections hyperplanes $\pi-6$. Le point A_0''' est double pour la surface Φ_3. Le domaine de ce point a pour homologue sur Φ_4 les droites β_1', β_1''', donc A_0''' est double biplanaire pour la surface Φ_3.

Observons que dans le passage de Φ_2 à Φ_3, la droite β_1' est remplacée par un point, qui coïncide précisément avec le point A_0'''.

7. Les courbes $C_0^{(5)}$ ont la multiplicité 12 en A, neuf tangentes coïncident avec a et trois avec b. Ces courbes passent quatre fois par le point A_1, deux fois par deux points A_{11}, A_{12} et une fois par un point A_{13} infiniment voisin successifs de A_1, une fois par un point A_{131} infiniment voisin de A_{13}, une fois par les points A_2 et A_{21}, trois fois par B_1, deux fois par B_2, une fois par B_{21} et B_{211}.

Sur la surface Φ_5, obtenue en rapportant projectivement les courbes $C_n'^{(5)}$ aux hyperplans d'un espace à $r-5$ dimensions et dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(5)}$, il correspond aux domaines des points A_{131}, A_{21}, B_{21} respectivement des droites α_1'', α_1', β_1'''. La surface Φ_5 est d'ordre $n-11$ et ses sections hyperplanes $\Gamma_0^{(5)}$ ont le genre $\pi-6$. On en conclu que sur la surface Φ_1, les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ sont découpées par les hyperplans passant par un point $A_0^{(4)}$ appartenant à la conique α_1' et à la droite β_1'. Ce point est simple pour la surface Φ_4 et la droite α_1'' est par conséquent une courbe exceptionnelle.

8. Avant d'aller plus loin, nous allons déterminer la structure du point de diramation A_0.

Nous avons rencontré six courbes rationnelles provenant des domaines des différents ordres du point A_0 sur Φ. Ecrivons-les dans l'ordre

$$\alpha_1,\ \alpha_1',\ \beta_1',\ \beta_1''',\ \beta_1'',\ \beta_1 .$$

Il résulte de ce qui précède que chacune de ces courbes rencontre la précédente et la suivante, mais ne rencontre pas les autres.

Nous avons

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \alpha_1 + \alpha_1' + \beta_1' + \beta_1''' + \beta_1'' + \beta_1 .$$

Soit x le degré virtuel de α_1. En prenant les intersections des courbes précédentes avec α_1, nous avons

$$0 = 1 + x + 1,$$

d'où $x = -2$. La courbe α_1 est de degré virtuel -2.

De même, si x est cette fois le degré virtuel de α_1', nous avons

$$0 = 1 + 1 + x + 1,$$

d'où $x = -3$. La courbe α_1' est de degré virtuel -3.

En tenant compte du fait que les courbes Γ_0' ne rencontrent pas β_1', β_1''', β_1'', mais rencontrent β_1 en un point, on trouve de même que ces quatre courbes ont le degré virtuel -2.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'' + \alpha_1 + \alpha_1' + 2\beta_1' + 2\beta_1''' + 2\beta_1'' + \beta_1 .$$

On vérifie que les courbes Γ_0'' rencontrent chacune des courbes α_1, β_1', β_1'' en un point, mais ne rencontrent pas α_1', β_1''', β_1.

On a ensuite

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0''' + \alpha_1 + 2\alpha_1' + 2\beta_1' + 2\beta_1''' + 2\beta_1'' + \beta_1 ,$$

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(4)} + \alpha_1 + 2\alpha_1' + 3\beta_1' + 3\beta_1''' + 2\beta_1'' + \beta_1 .$$

On vérifie que le nombre des points de rencontre des courbes Γ_0''', $\Gamma_0^{(4)}$ avec les courbes α_1, α_1', ..., β_1 sont bien ceux qui ont été rencontrés plus haut.

Sur Φ_4, les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ sont les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ passant par le

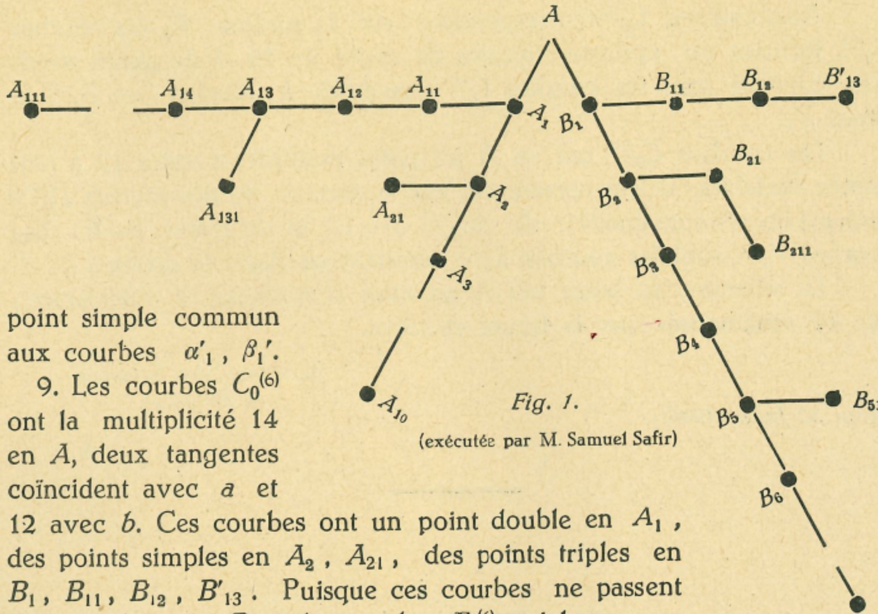

Fig. 1.

(exécutée par M. Samuel Safir)

point simple commun aux courbes α'_1, β_1'.

9. Les courbes $C_0^{(6)}$ ont la multiplicité 14 en A, deux tangentes coïncident avec a et 12 avec b. Ces courbes ont un point double en A_1, des points simples en A_2, A_{21}, des points triples en B_1, B_{11}, B_{12}, B'_{13}. Puisque ces courbes ne passent plus par le point B_{211}, les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ qui leur correspondent sur Φ_4 sont découpées par des hyperplans qui doivent passer par un point appartenant à la droite β_1'''. Ces hyperplans passent d'autre part par le point $A_0^{(4)}$, commun aux courbes α'_1, β_1', puisque les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ sont des courbes $\Gamma_0^{(5)}$ particulières. De plus, les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ doivent rencontrer la droite β_1' en trois points, donc elles sont découpées par les hyperplans passant par cette droite. On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(6)} + \alpha_1 + 2\alpha_1' + 4\beta_1' + 3\beta_1''' + 2\beta_1'' + \beta_1 .$$

La surface Φ_6 obtenue en partant des courbes $C_0^{(6)}$, est d'ordre $n-14$ et ses sections hyperplanes $\Gamma_0^{(6)}$ ont le genre $\pi-8$.

10. Les courbes $C_0^{(7)}$ ont la multiplicité 15 en A, 7 tangentes sont confondues avec a et 8 avec b. Elles passent deux fois par les points A_1, A_{11}, A_{12}, une fois par les points A_{13}, A_{131}, deux fois par les points B_1, B_{11}, B_{12}, B'_{13}.

Sur la surface Φ_4, il leur correspond des courbes $\Gamma_0^{(7)}$, formant un système linéaire de degré $n-15$ et de genre $\pi-8$. Ce sont les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ passant par le point $A_0^{(4)}$.

Les courbes $C_0^{(8)}$ ont la multiplicité 16 en A, *12* tangentes confondues avec a et quatre avec b. Elles passent simplement par le point A_1 et par une suite de 11 points fixes $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, \dots, A_{1,11}$. Elles passent d'autre part simplement par les points B_1, B_{11}, B_{12}, B_{13}'. Le point $A_{1,11}$ est uni parfait pour I_{17}.

Aux courbes $C_0^{(8)}$ correspondent sur la surface Φ_4 les courbes $\Gamma_0^{(6)}$, formant un système linéaire de degré $n-16$ et de genre $\pi-8$. Ces courbes sont les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ assujetties à toucher en $A_0^{(4)}$ la droite β'_1.

Les courbes $C_0^{(9)}$ ont en A un point multiple d'ordre 17 à tangentes variables. Il leur correspond sur la surface Φ_4 des courbes $\Gamma_0^{(9)}$ formant un système linéaire de degré $n-17$ et de gener $\pi-8$. Les courbes $\Gamma_0'^{(9)}$ sont les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ osculant en $A_0^{(4)}$ la droite β'_1.

La structure du point uni A est ainsi complètement déterminée ; elle est schématisée par la figure ci-jointe.

Académie des Sciences
de Belgique

(Reçu 30 Juillet 1948).