H. Ledoux

LEÇONS

de

GEOMETRIE INFINITESIMALE

par

Lucien GODEAUX

Professeur à l'Université de Liége.

IMPRIMERIE LITHOGRAPHIE

AUG. PHOLIEN

57, RUE SUR LA FONTAINE. 57

LIÉGE

1933.

Table des matières.

Chapitre I

Courbes gauches et surfaces développables.

§ I.- Trièdre de Frenet en un point d'une courbe gauche.

1.- Equations de la courbe.- Considérons, en axes rectangulaires, les points donnés par

$$x = \varphi_1(u), \quad y = \varphi_2(u), \quad z = \varphi_3(u), \qquad (1)$$

sous les hypothèses suivantes :

1°) Les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 sont finies, continues et admettent des dérivées finies et continues jusqu'au troisième ordre au moins, dans l'intervalle (u_0, U) ;

2°) Les dérivées premières φ_1', φ_2', φ_3' ne s'annulent pas simultanément dans l'intervalle (u_0, U).

L'ensemble des points x, y, z donnés par les équations (1) lorsque u varie dans l'intervalle (u_0, U) est un arc de courbe Γ. On conviendra de prendre pour sens positif de la courbe Γ le sens des u croissants.

L'élément linéaire de la courbe Γ est

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

où nous conviendrons de prendre le radical positivement, de manière à avoir

$$\frac{ds}{du} > 0.$$

2.- Tangente.- La tangente en un point M est la limite d'une courbe MM' lorsque M' tend vers M. Sous les hypothèses faites, la tangente existe en tout point de Γ et est unique. Ses équations sont

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}.$$

Les cosinus directeurs de la tangente sont

$$\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \ldots$$

Nous conviendrons de prendre le radical avec le signe + ; on aura donc

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \beta = \frac{dy}{ds}, \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

3.- Plan normal et normales. - Le plan normal en un point M d'une courbe gauche est le plan perpendiculaire à la tangente en ce point. Son équation est donc

$$\alpha (X - x) + \beta (Y - y) + \gamma (Z - z) = 0.$$

Toute droite passant par M et située dans le plan normal en ce point est appelée normale à la courbe au point M.

4.- Plans tangents et plan osculateur. - On appelle plan tangent en un point M à la courbe Γ tout plan passant par la tangente en ce point.

Le plan osculateur à Γ en un de ses points M est la limite d'un plan passant par M et par deux autres points M_1, M_2 de la courbe, tendant simultanément vers M. Son équation est

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Nous l'écrirons sous la forme

$$A (X - x) + B (Y - y) + C (Z - z) = 0$$

en posant

$$A = dy\, d^2z - dz\, d^2y, \quad B = dz\, d^2x - dx\, d^2z, \quad C = dx\, d^2y - dy\, d^2x.$$

Le plan osculateur passe par la tangente en M.

Le plan osculateur en un point M est la limite d'un plan tangent en M passant par un point M_1 de la courbe tendant vers M. C'est également la limite d'un plan passant par M et parallèle à la tangente en un point M_1 tendant vers M.

5.- Normale principale. - On appelle normale principale en un point M la normale en ce point située dans le plan osculateur. Ses équations sont donc

$$\frac{X - x}{B\gamma - C\beta} = \frac{Y - y}{C\alpha - A\gamma} = \frac{Z - z}{A\beta - B\alpha}.$$

Observons que l'on a

$$d\alpha = d\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{ds^2} = \frac{B\gamma - C\beta}{ds^2}, \ldots$$

Les équations de la normale principale peuvent donc s'écrire

$$\frac{X-x}{d\alpha} = \frac{Y-y}{d\beta} = \frac{Z-z}{d\gamma}.$$

Les cosinus directeurs λ, μ, ν sont

$$\lambda = \frac{d\alpha}{\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2}}, \quad \mu = \frac{d\beta}{\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2}}, \quad \nu = \frac{d\gamma}{\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2}}.$$

On conviendra de prendre le radical avec le signe +.

6.- __Binormale__.- On appelle binormale à Γ en un point M la normale au plan osculateur en ce point. Ses équations sont

$$\frac{X-x}{A} = \frac{Y-y}{B} = \frac{Z-z}{C}.$$

Ses cosinus directeurs sont

$$a = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad b = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad c = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

On conviendra de prendre le radical avec le signe +.

7.- __Trièdre de Frenet__.- On appelle trièdre de Frenet en un point M de la courbe Γ le trièdre trirectangle ayant pour arêtes la tangente MT, la normale principale MN et la binormale MB. Ses faces sont le plan osculateur MTN, le plan normal MNB et le plan rectifiant MBT.

On passe du trièdre de référence au trièdre de Frenet par une transformation orthogonale directe.

§ 2.- Première courbure ou flexion d'une courbe gauche.

8.- __Indicatrice sphérique__.- On appelle indicatrice sphérique Γ' de la courbe Γ le lieu d'un point M' situé à la distance OM' = 1 de l'origine, porté sur la parallèle à la tangente MT à Γ, passant par l'origine et dirigée dans le même sens.

Les équations de la courbe Γ' sont donc

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma.$$

9.- __Définition de la courbure__.- Soient M, M_1 deux points distincts de Γ. On appelle :

1°) Courbure totale de l'arc MM_1 l'angle ε fait par les tangentes orientées à Γ en M, M_1. Si M', M'_1 sont les points de l'indicatrice sphérique Γ' correspondant à M, M_1, on a $\varepsilon = (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM'_1})$.

2°) Courbure moyenne de l'arc MM_1 le rapport de la courbure totale ε à la longueur de l'arc MM_1.

3°) Courbure de la courbe Γ au point M la limite de la courbure moyenne de l'arc MM_1 lorsque M_1 tend vers M.

10.- <u>Calcul de la courbure</u>. - Soient Δs la longueur de l'arc de courbe MM_1, $\Delta\sigma$ celui de l'arc $M'M'_1$ de l'indicatrice Γ'. Lorsque M_1 tend vers M, M'_1 tend vers M' et l'arc $\Delta\sigma$ est un infiniment petit équivalent à la corde $M'M'_1$ et par conséquent à la mesure ε de l'arc de grand cercle $M'M'_1$ tracé sur la sphère de rayon 1 de centre O.

La courbure $\frac{1}{R}$ de la courbe Γ au point M est par suite

$$\frac{1}{R} = \lim \frac{\varepsilon}{\Delta s} = \lim \frac{\varepsilon}{\Delta\sigma}\cdot\frac{\Delta\sigma}{\Delta s} = \lim \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} = \frac{d\sigma}{ds}$$

d'où

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\frac{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2}}.$$

On a

$$d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = \frac{1}{ds^6}\left[(A^2+B^2+C^2)ds^2 - (A\,dx + B\,dy + C\,dz)^2\right] = \frac{A^2+B^2+C^2}{ds^4}.$$

Par suite

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{ds^3}.$$

Par les conventions faites plus haut, $\frac{1}{R}$ est toujours positif. La quantité R est appelée rayon de courbure.

11.- <u>Circonférence osculatrice</u>. - On appelle circonférence osculatrice en un point M à la courbe Γ la limite de la circonférence passant par M et par deux points M_1, M_2 de la courbe tendant simultanément vers M. Cette circonférence appartient donc au plan osculateur

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0$$

au point M. Les coordonnées x_0, y_0, z_0 de son centre et son rayon R_1 satisfont aux équations

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R_1^2,$$
$$(x-x_0)dx + (y-y_0)dy + (z-z_0)dz = 0,$$
$$(x-x_0)d^2x + (y-y_0)d^2y + (z-z_0)d^2z + ds^2 = 0.$$

On en déduit

$$x - x_0 = -\frac{B\,dz - C\,dy}{A^2+B^2+C^2}\,ds^2 = -\frac{d\alpha\, ds^5}{A^2+B^2+C^2},\ldots$$

et, en tenant compte de

$$A^2+B^2+C^2 = (d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2)ds^4,$$

$$R_1^2 = R^2.$$

Le centre de la circonférence osculatrice est appelé centre de courbure ; il appartient à la normale principale et ses coordonnées sont

$$x_0 = x + \frac{d\alpha\, ds^5}{A^2+B^2+C^2} = x + R^2\frac{d\alpha}{ds}, \quad y_0 = y + R^2\frac{d\beta}{ds}, \quad z_0 = z + R^2\frac{d\gamma}{ds}.$$

Le lieu du centre de courbure et la développée de la courbe Γ.

12.- Expression de la courbure.- Supposons que dans les équations de Γ, le paramètre u soit égal à s ;

$$x = \varphi_1(s),\ y = \varphi_2(s),\ z = \varphi_3(s).$$

Soient M un point de paramètre s, M_1 le point de paramètre $s + \Delta s$, M' un point pris sur la tangente MT en M et tel que $MM' = \Delta s$. Posons $d = M'M_1$. Les coordonnées de M' sont

$$x' = x + \alpha\Delta s,\ y' = y + \beta\Delta s,\ z' = z + \gamma\Delta s,$$

celles de M_1 sont

$$x_1 = x + \alpha\Delta s + \frac{\overline{\Delta s}^2}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2} + \varepsilon_1\right),\ y_1 = y + \beta\Delta s + \frac{\overline{\Delta s}^2}{2}\left(\frac{d^2y}{ds^2} + \varepsilon_2\right).$$

$$z_1 = z + \gamma\Delta s + \frac{\overline{\Delta s}^2}{2}\left(\frac{d^2z}{ds^2} + \varepsilon_3\right),$$

ε_1, ε_2, ε_3 tendant vers zéro en même temps que Δs. On a

$$d = \sqrt{\Sigma(x'-x_1)^2} = \frac{\Delta s^2}{2}\sqrt{\Sigma\left(\frac{d^2x}{ds^2} + \varepsilon_1\right)^2},$$

d'où

$$\lim \frac{2d}{\Delta s^2} = \sqrt{\Sigma\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2} = \frac{1}{R}.$$

§ 3.- Seconde courbure ou torsion des courbes gauches.

13.- Indicatrice sphérique complémentaire.- Par l'origine menons des parallèles aux binormales de la courbe Γ, orientées dans le même sens. Le lieu des points situés sur ces parallèles à la distance 1 de l'origine est appelé indicatrice complémentaire Γ''. Les équations de cette courbe sont

$$x = a,\ y = b,\ z = c.$$

14.- Définition de la torsion.- Soient M, M_1 deux points de Γ, M'', M''_1 les points correspondants de l'indicatrice Γ''. On appelle

1°) torsion totale de l'arc MM_1 l'angle η des plans osculateurs en M, M_1. C'est donc l'angle des binormales en M, M_1 ou encore l'angle des droites OM'', OM''_1.

2°) torsion moyenne de l'arc MM_1 le rapport de la torsion totale η à la longueur de l'arc.

3°) torsion au point M la limite de la torsion moyenne de l'arc MM_1 lorsque M_1 tend vers M.

15.- Calcul de la torsion.- Appelons Δs la longueur de l'arc MM_1, $\Delta\sigma'$ la longueur de l'arc $M''M''_1$ de Γ''. Lorsque M_1 tend vers M, l'arc $\Delta\sigma'$ et la longueur de la corde $M''M''_1$ sont des infiniment petits équivalents ; par conséquent $\Delta\sigma'$ et η sont des infiniment petits équivalents.

La torsion $\frac{1}{T}$ en M a pour valeur

$$\frac{1}{T} = \lim \frac{\eta}{\Delta s} = \lim \frac{\eta}{\Delta\sigma'} \cdot \frac{\Delta\sigma'}{\Delta s} = \lim \frac{\Delta\sigma'}{\Delta s} = \frac{d\sigma'}{ds},$$

d'où

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\frac{da^2+db^2+dc^2}{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

On a

$$a = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad da = \frac{C(CdA - AdC) - B(AdB - BdA)}{(A^2+B^2+C^2)^{3/2}},$$

$$da^2+db^2+dc^2 = \frac{\sum (BdC - CdB)^2}{(A^2+B^2+C^2)}.$$

Observons que

$$BdC - CdB = \begin{vmatrix} dx & d^2x & d^3x \\ dy & d^2y & d^3y \\ dz & d^2z & d^3z \end{vmatrix} dx = \Delta dx, \dots ;$$

par suite

$$\frac{1}{T} = \frac{\pm \Delta}{A^2+B^2+C^2}.$$

On conviendra de prendre le signe $-$ et on aura donc

$$\frac{1}{T} = \frac{-\Delta}{A^2+B^2+C^2}.$$

Bien qu'elle n'ait pas une interprétation géométrique analogue à celle de R, la quantité T est appelée rayon de torsion.

16.- Sphère osculatrice.- On appelle sphère osculatrice en M à la courbe Γ la limite d'une sphère passant par M et par trois points M_1, M_2, M_3 de Γ tendant simultanément vers M.

Soient u, u_1, u_2, u_3 les paramètres des points M, M_1, M_2, M_3 et

$$(X-x_1)^2 + (Y-y_1)^2 + (Z-z_1)^2 - \rho^2 = 0, \qquad (1)$$

l'équation d'une sphère. Lorsque l'on remplace X, Y, Z par $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_3(u)$, le premier membre de cette équation devient une fonction $F(u)$. On exprimera que la sphère (1) passe par M, M_1, M_2, M_3 en écrivant

$$F(u)=0,\ F(u_1)=0,\ F(u_2)=0,\ F(u_3)=0.$$

D'après le théorème de Rolle, on aura

$$F'(u'_1)=0,\ F'(u'_2)=0,\ F'(u'_3)=0,$$

u'_1, u'_2, u'_3 étant compris entre le plus petit et le plus grand des nombres u, u_1, u_2, u_3. On aura ensuite

$$F''(u''_1)=0,\ F''(u''_2)=0,\ F'''(u'''_1=0),$$

u''_1, u''_2, u'''_1 étant compris entre le plus petit et le plus grand des nombres $u, \ldots, u_3$. Lorsque M_1, M_2, M_3 tendent vers M, on a, à la limite

$$F(u)=0,\ F'(u)=0,\ F''(u)=0,\ F'''(u)=0.$$

Le centre et le rayon de la sphère osculatrice seront donnés par les équations

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\rho^2,$$
$$(x-x_1)dx+(y-y_1)dy+(z-z_1)dz=0,$$
$$(x-x_1)d^2x+(y-y_1)d^2y+(z-z_1)d^2z+ds^2=0$$
$$(x-x_1)d^3x+(y-y_1)d^3y+(z-z_1)d^3z+3\,ds\,d^2s=0.$$

On en déduit

$$x_1=x+\frac{\Delta x\, ds^2+3A\, ds\, d^2s}{\Delta},\quad y_1=y+\frac{\Delta y\, ds^2+3B\, ds\, d^2s}{\Delta},\quad z_1=z+\frac{\Delta z\, ds^2+3C\, ds\, d^2s}{\Delta}$$

Δx, Δy, Δz étant les mineurs de dx, dy, dz dans Δ.

On en conclut que l'équation de la sphère osculatrice peut s'écrire sous la forme

$$\Delta\left[(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2\right]$$
$$+2\,ds^2\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} - 2\,ds\,d^2s\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0$$

Cette sphère passe par la circonférence osculatrice en M. Le rayon de la sphère osculatrice sera calculé plus loin.

§ 4.- Formules de Frenet.

17.- <u>Premier groupe</u>.- En désignant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de courbure relatif au point M de la courbe Γ, on a

$$\frac{x_0-x}{R}=R\frac{d\alpha}{ds},\quad \frac{y_0-y}{R}=R\frac{d\beta}{ds},\quad \frac{z_0-z}{R}=R\frac{d\gamma}{ds}$$

Les premiers membres de ces équations ne sont autres que les cosinus directeurs λ, μ, ν de la normale principale ; on a donc

$$\frac{d\alpha}{\lambda} = \frac{d\beta}{\mu} = \frac{d\gamma}{\nu} = \frac{ds}{R} \qquad (I)$$

18.- Second groupe.- Des relations

$$a^2+b^2+c^2=1, \quad a\alpha+b\beta+c\gamma=0, \quad a\lambda+b\mu+c\nu=0,$$

on déduit

$$a\,da+b\,db+c\,dc=0, \quad \alpha\,da+\beta\,db+\gamma\,dc=0$$

en observant que

$$a\,d\alpha+b\,d\beta+c\,d\gamma=(a\lambda+b\mu+c\nu)\frac{ds}{R}=0.$$

Il en résulte que da, db, dc sont proportionnels aux cosinus directeurs de la normale principale.

$$\frac{da}{\lambda}=\frac{db}{\mu}=\frac{dc}{\nu}.$$

La valeur commune de ces rapports est

$$\sqrt{\frac{da^2+db^2+dc^2}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}=\frac{ds}{T}.$$

On a donc

$$\frac{da}{\lambda}=\frac{db}{\mu}=\frac{dc}{\nu}=\frac{ds}{T}. \qquad (II)$$

19.- Troisième groupe.- On a

$$\alpha^2+\lambda^2+a^2=1,$$

$$\alpha\,d\alpha+a\,da+\lambda\,d\lambda=0,$$

$$\lambda\left(\alpha\frac{ds}{R}+a\frac{ds}{T}+d\lambda\right)=0$$

Par suite

$$\frac{d\lambda}{ds}=-\frac{\alpha}{R}-\frac{a}{T}, \quad \frac{d\mu}{ds}=-\frac{\beta}{R}-\frac{b}{T}, \quad \frac{d\nu}{ds}=-\frac{\gamma}{R}-\frac{c}{T}. \qquad (III)$$

20.- Equations d'une courbe rapportée à un trièdre de Frenet.- Soient M un point de la courbe Γ, $M\xi$ la tangente, $M\eta$ la normale principale et $M\zeta$ la binormale. Prenons s comme paramètre, l'origine M étant donnée par $s=0$. On a, pour équation de la courbe Γ,

$$\xi = a_1 s + b_1 s^2 + c_1 s^3 + \dots,$$

$$\eta = a_2 s + b_2 s^2 + c_2 s^3 + \dots,$$

$$\zeta = a_3 s + b_3 s^2 + c_3 s^3 + \dots,$$

avec, au point $s=0$,

$$\alpha_0 = 1, \quad \beta_0 = 0, \quad \gamma_0 = 0,$$

$$\lambda_0 = 0, \quad \mu_0 = 1, \quad \nu_0 = 0,$$

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad c_0 = 1.$$

Le calcul de α, β, γ donne $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$; celui de λ, μ, ν donne $b_1 = 0$, $b_2 = \frac{1}{2R_0}$, $b_3 = 0$; R_0 étant le rayon de courbure en M. On calculera c_1, c_2, c_3 en utilisant les relations (II) et on aura, T_0 étant le rayon de torsion au point M,

$$\xi = s - \frac{s^3}{6R_0^2} + \dots$$

$$\eta = \frac{s^2}{2R_0} - \frac{s^3}{6R_0^2}\left(\frac{dR}{ds}\right)_0 + \dots$$

$$\zeta = - \frac{s^3}{6R_0T_0} + \dots$$

Le calcul de T_0, au moyen de la formule du nº 15, montre que la convention faite sur le signe de Δ a été respectée dans la formation des formules (II).

21.- Position de la courbe par rapport au plan osculateur.- Le plan osculateur en M est le plan $\zeta = 0$ et la distance d'un point de paramètre Δs à ce plan est

$$\delta = \overline{\Delta s}^3\left(-\frac{1}{6R_0T_0} + \varepsilon\right),$$

ε tendant vers zéro en même temps que Δs.

Pour Δs suffisamment petit, δ a le signe de $-\frac{\Delta s}{T_0}$ et par suite la courbe traverse le plan osculateur.

22.- Rayon de la sphère osculatrice.- Le centre de la sphère osculatrice est déterminé par l'équation

$$\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) + \gamma(z - z_1) = 0$$

et ses dérivées par rapport à u. En tenant compte des formules de Frenet, on peut écrire ces équations sous la forme

$$\lambda(x - x_1) + \mu(y - y_1) + \nu(z - z_1) + R = 0,$$

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) - T\frac{dR}{ds} = 0.$$

La distance du centre de la sphère au plan osculateur

$$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0$$

est donnée par

$$\delta^2 = \left[a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1)\right]^2 = T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2.$$

Le rayon de la sphère osculatrice est donc

$$\rho^2 = R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2.$$

§ 5.- Equations intrinsèques des courbes.

23.- Définition.- On appelle équations intrinsèques d'une courbe les relations

$$R = f(s), \quad T = \varphi(s) \qquad (1)$$

donnant les expressions des rayons de courbure et de torsion de cette courbe en fonction de la longueur s de l'arc.

24.- Détermination d'une courbe par ses équations intrinsèques. - Considérons le système d'équations différentielles

$$\frac{dl}{ds} = \frac{m}{f(s)}, \quad \frac{dm}{ds} = -\frac{l}{f(s)} - \frac{n}{\varphi(s)}, \quad \frac{dn}{ds} = \frac{m}{\varphi(s)}. \qquad (2)$$

Si l_1, m_1, n_1 et l_2, m_2, n_2 sont deux intégrales de ce système, distinctes ou non, on a

$$\frac{d}{ds}(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) = 0,$$

d'où

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = C^{te}.$$

D'après les équations (1) et les formules de Frenet, $(\alpha, \lambda, a), (\beta, \mu, b), (\gamma, \nu, c)$ sont trois intégrales du système (2).

Considérons trois solutions distinctes $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3)$ du système (2) se réduisant respectivement, pour $s = s_0$, à des quantités $(\alpha_0, \lambda_0, a_0), (\beta_0, \mu_0, b_0), (\gamma_0, \nu_0, c_0)$ où $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0), (\lambda_0, \mu_0, \nu_0), (a_0, b_0, c_0)$ sont les cosinus directeurs des arêtes d'un trièdre trirectangle de sommet x_0, y_0, z_0. On aura

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = \alpha_0^2 + \lambda_0^2 + \mu_0^2 = 1, \ldots,$$
$$l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = \beta_0 \gamma_0 + \mu_0 \nu_0 + b_0 c_0 = 0, \ldots$$

Cela étant, considérons la courbe

$$x = x_0 + \int_{s_0}^{s} l_1\, ds, \quad y = y_0 + \int_{s_0}^{s} l_2\, ds, \quad z = z_0 + \int_{s_0}^{s} l_3\, ds. \qquad (3)$$

On trouve aisément, pour les cosinus directeurs des arêtes du trièdre principal en un point M de la courbe (3), les valeurs

$$\alpha = l_1, \quad \beta = l_2, \quad \gamma = l_3,$$
$$\lambda = m_1, \quad \mu = m_2, \quad \nu = m_3,$$
$$a = n_1, \quad b = n_2, \quad c = n_3.$$

De plus, s représente la longueur d'arc de cette courbe et les rayons de courbure et de torsion sont

$$R = f(s), \quad T = \varphi(s).$$

Il en résulte qu'une courbe est complètement déterminée par ses équations intrinsèques, une fois choisi le trièdre principal en un point. Par suite les équations intrinsèques déterminent une courbe à des mouvements près.

25.- Courbes de torsion nulle.- Appliquons ce qui précède au cas où les équations intrinsèques sont

$$R = f(s) \ , \ \frac{1}{T} = 0 \ .$$

Les équations (2) deviennent

$$\frac{dl}{ds} = \frac{m}{f(s)} \ , \ \frac{dm}{ds} = -\frac{l}{f(s)} \ , \ \frac{dn}{ds} = 0 .$$

On en déduit

$$l\,dl + m\,dm = 0 \ , \ l^2 + m^2 = C_1 \ , \ n = C_2 \ .$$

Prenons pour valeurs initiales $x_0 = y_0 = z_0 = 0$; $\alpha_0 = 1, \lambda_0 = a_0 = 0$; $\beta_0 = 0, \mu_0 = 1, b_0 = 0$; $\gamma_0 = \nu_0 = 0, c_0 = 1$. On aura donc $l_3^2 + m_3^2 = 0$, $n_3 = 1$. Par conséquent

$$\frac{m_3\,dl_3}{ds} - \frac{l_3\,dm_3}{ds} = \frac{m_3^2 + l_3^2}{f(s)} = 0$$

$$l_3 = C m_3 .$$

On en déduit $l_3 = m_3 = 0$ et

$$z = \int_{s_0}^{s} l_3\,ds = 0 .$$

Une courbe de torsion nulle est une courbe plane.

26.- Courbes à courbures constantes.- Considérons les courbes données par

$$R = R_0 \ , \ T = T_0 \ ,$$

R_0 et T_0 étant des constantes. Des équations

$$\frac{dl}{ds} = \frac{m}{R_0} \ , \ \frac{dm}{ds} = -\frac{l}{R_0} - \frac{n}{T_0} \ , \ \frac{dn}{ds} = \frac{m}{T_0} \ ,$$

on déduit

$$\frac{1}{T_0}\frac{dl}{ds} = \frac{1}{R_0}\frac{dn}{ds} \ , \ \frac{l}{T_0} - \frac{n}{R_0} = C_1$$

$$\frac{d^2m}{ds^2} + k^2 m = 0 \ , \ m = C_2 \cos ks + C_3 \sin ks ,$$

moyennant $k^2 = \frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{T_0^2}$;

$$T_0 l + R_0 n = k R_0 T_0 (C_2 \sin ks - C_3 \cos ks).$$

On a donc

$$l = \frac{1}{k R^0} (C_2 \sin ks - C_3 \cos ks) + \frac{C_1}{k^2 T_0} ,$$

$$m = C_2 \cos ks + C_3 \sin ks ,$$

$$n = \frac{1}{k T_0} (C_2 \sin ks - C_3 \cos ks) - \frac{C_1}{k^2 R_0} .$$

Prenons comme valeurs initiales, pour $s = 0$,

$$x_0 = \frac{1}{k^2 R_0} \ , \ \alpha_0 = 0 \ , \ \lambda_0 = -1 \ , \ a_0 = 0 \ ,$$

$$y_0 = 0 \ , \ \beta_0 = \cos\theta \ , \ \mu_0 = 0 \ , \ b_0 = -\sin\theta ,$$

$$z_0 = 0 \ , \ \gamma_0 = \sin\theta \ , \ \nu_0 = 0 \ , \ c_0 = \cos\theta ,$$

moyennant $\operatorname{tg}\theta = -\frac{R_0}{T_0}$. On a

$$l_1 = -\frac{1}{kR_0}\sin ks \;,\; l_2 = \frac{1}{kR_0}\cos ks \;,\; l_3 = -\frac{1}{kT_0}\;,$$

d'où

$$x = \frac{1}{k^2R_0}\cos ks \;,\; y = \frac{1}{k^2R_0}\sin ks \;,\; z = -\frac{s}{kT_0}\;.$$

Cette courbe est une hélice cylindrique.

27.- Equation intrinsèque d'une courbe plane.- Si Γ est une courbe plane, située dans le plan $z=0$ et si l'on désigne par α l'angle de sa tangente orientée en un point M avec l'axe des x, on a

$$R = \frac{ds}{d\alpha}\;.$$

On sait d'ailleurs que R est affecté d'un signe.

Si la courbe est donnée par son équation intrinsèque

$$R = f(s)$$

on a

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{f(s)} \;,\; \alpha = \alpha_0 + \int_{s_0}^{s}\frac{ds}{f(s)} = F(s) + \alpha_0$$

Des formules

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} \;,\; \sin\alpha = \frac{dy}{ds}\;,$$

on déduit

$$x = x_0 + \int_{s_0}^{s}\cos\left[F(s)+\alpha_0\right]ds \;,\; y = y_0 + \int_{s_0}^{s}\sin\left[F(s)+\alpha_0\right]ds\;.$$

Ce sont les équations de la courbe, obtenues à un mouvement près.

§6.- Surfaces développables.

28.- Définition et premières propriétés.- Une surface développable est l'enveloppe d'un plan dépendant d'un paramètre : Soit

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

l'équation d'un plan A, B, C, D dépendant d'un paramètre u.

La développable enveloppée par ce plan est le lieu de la droite déterminée par les plans (1) et

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0\;. \qquad (2)$$

L'arête de rebroussement est le lieu du point commun aux plans (1), (2) et

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0\;. \qquad (3)$$

La droite commune aux plans (1), (2) est tangente à l'arête de rebroussement au point déterminé sur cette droite par le plan (3). Le plan osculateur en ce point à l'arête de rebroussement est le plan (1) ; ce plan est tangent à la surface en chaque point de la droite (1), (2).

29.- <u>Courbes tracées sur une développable</u>.- Soient

$$x = \varphi_1(s),\ y = \varphi_2(s),\ z = \varphi_3(s)$$

les équations de l'arête de rebroussement Γ d'une développable F. Une courbe Γ_1 tracée sur F sera représentée par

$$x_1 = x + l\alpha,\ y_1 = y + l\beta,\ z_1 = z + l\gamma,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la tangente à Γ en $M(x, y, z)$ et l une fonction de s représentant la distance de M au point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ de Γ_1 situé sur la tangente à Γ en M.

On a

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{dx}{ds} + l\frac{d\alpha}{ds} + \alpha\frac{dl}{ds} = \alpha\left(1 + \frac{dl}{ds}\right) + l\frac{\lambda}{R}, \dots,$$

d'où, pour l'élément linéaire de Γ_1,

$$ds_1^2 = \left[\left(1 + \frac{dl}{ds}\right)^2 + \frac{l^2}{R^2}\right]ds^2.$$

Les cosinus directeurs de la tangente en M_1 à Γ_1 sont

$$\alpha_1 = \frac{\alpha\left(1 + \frac{dl}{ds}\right) + l\frac{\lambda}{R}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dl}{ds}\right)^2 + \frac{l^2}{R^2}}}, \beta_1 = \dots, \gamma_1 = \dots$$

L'angle τ des tangentes en M à Γ et en M_1 à Γ_1 est donné par

$$\cos\tau = \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = \frac{1 + \frac{dl}{ds}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dl}{ds}\right)^2 + \frac{l^2}{R^2}}}.$$

On en déduit

$$\sin\tau = \frac{\frac{l}{R}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dl}{ds}\right)^2 + \frac{l^2}{R^2}}}$$

et par suite on a

$$\alpha_1 = \alpha\cos\tau + \lambda\sin\tau.$$

Nous utiliserons pour la courbe Γ_1, les mêmes notations que pour la courbe Γ, mais affectées de l'indice 1. On a

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = \frac{d\alpha}{ds}\cos\tau + \frac{d\lambda}{ds}\sin\tau - \alpha\frac{d\tau}{ds}\sin\tau + \lambda\frac{d\tau}{ds}\cos\tau$$

ou

$$\frac{\lambda_1}{R_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{\lambda}{R}\cos\tau - \left(\frac{\alpha}{R} + \frac{a}{T}\right)\sin\tau - (\alpha\sin\tau - \lambda\cos\tau)\frac{d\tau}{ds},$$

et deux formules analogues. Elevons les deux membres de ces trois formules au carré et additionnons membre à membre. Il vient

$$\frac{1}{R_1^2}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = \frac{\sin^2\tau}{T^2} + \left(\frac{1}{R} + \frac{d\tau}{ds}\right)^2,$$

relation donnant le rayon de courbure de la courbe Γ_1.

30.- Développement d'une développable sur un plan.- Prenons dans le plan $z = 0$, une courbe plane Γ' d'équation intrinsèque $R = f(s)$, $f(s)$ étant l'expression du rayon de courbure de la courbe Γ.

A un point M de paramètre s de Γ nous faisons correspondre le point M' de même paramètre de Γ'. Au point M_1 situé sur la tangente à Γ en M, à la distance $MM_1 = l$ de M, nous faisons correspondre le point M'_1 situé sur la tangente à Γ' en M_1 à la distance $l = M'M'_1$ de M'.

En d'autres termes, au point

$$x_1 = x + l\alpha,\ y_1 = y + l\beta,\ z_1 = z + l\gamma \qquad (M_1)$$

de F, nous faisons correspondre le point

$$x'_1 = x' + \alpha' l,\ y'_1 = y' + \beta' l \qquad (M'_1)$$

du plan $z = 0$, α' et β' étant les cosinus directeurs de la tangente à Γ' au point M' de même paramètre que M.

On a

$$\frac{dx'_1}{ds} = \alpha'\left(1 + \frac{dl}{ds}\right) + l\,\frac{d\alpha'}{ds} = \alpha'\left(1 + \frac{dl}{ds}\right) + l\,\frac{\lambda'}{R},\quad \frac{dy'_1}{ds} = \beta'\left(1 + \frac{dl}{ds}\right) + l\,\frac{\mu'}{R},$$

λ', μ' étant les cosinus directeurs de la normale à la courbe Γ'_1, lieu de M'_1, au point M'_1.

L'élément linéaire ds'_1 de Γ'_1 est donné par

$$\left(\frac{ds'_1}{ds}\right)^2 = \left(1 + \frac{dl}{ds}\right)^2 + \frac{l^2}{R^2} = \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2,$$

d'où $ds'_1 = ds_1$.

L'angle τ' des tangentes à Γ', Γ'_1 en M', M'_1 est donnée par

$$\cos\tau' = \alpha'\alpha'_1 + \beta'\beta'_1 = \frac{1 + \dfrac{dl}{ds}}{\sqrt{\left(1 + \dfrac{dl}{ds}\right)^2 + \dfrac{l^2}{R^2}}} = \cos\tau.$$

On a également $\operatorname{tg}\tau' = \operatorname{tg}\tau$, d'où $\tau' = \tau$.

<u>Dans le développement d'une surface développable sur un plan, il y a conservation des longueurs et des angles.</u>

31.- Formule de Catalan.- Désignons par R_1, R'_1 les rayons de courbure des courbes Γ_1, Γ'_1 en deux points homologues M_1, M'_1. Nous pouvons appliquer, pour obtenir R'_1, la formule obtenue pour R_1 (n° 29) ; nous avons ainsi

$$\frac{1}{R_1'^2}\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = \left(\frac{1}{R}+\frac{d\tau}{ds}\right)^2.$$

Appelons θ l'angle fait par le plan osculateur en M_1 à Γ et par le plan tangent en ce point à la surface développable (c'est-à-dire le plan osculateur à Γ en M). L'intersection de ces plans est la tangente M_1T_1 à Γ_1 en M_1. Si M_1N_1 est la normale principale à Γ_1 en M_1 dans le trièdre formé par les droites MM_1, M_1T_1, M_1N_1, nous avons

$$\cos(MM_1, M_1N_1) = \sin\tau \cos\theta,$$

$$\cos(MM_1, M_1N_1) = \alpha\lambda_1 + \beta\mu_1 + \gamma\nu_1.$$

En utilisant les valeurs de λ_1, μ_1, ν_1 calculées plus haut (nº 29), on a

$$\frac{1}{R_1}\left(\alpha\lambda_1+\beta\mu_1+\gamma\nu_1\right)\frac{ds_1}{ds} = -\left(\frac{1}{R}+\frac{d\tau}{ds}\right)\sin\tau.$$

Par suite

$$\frac{1}{R_1}\frac{ds_1}{ds}\cos\theta = -\frac{1}{R}-\frac{d\tau}{ds},$$

d'où

$$\frac{1}{R_1'^2} = \frac{1}{R_1^2}\cos^2\theta, \quad \frac{1}{R_1'} = \pm\frac{1}{R_1}\cos\theta.$$

Cette formule est applicable au cas où la courbe Γ_1 coïncide avec Γ et M_1 avec M. Dans ce cas, on a $\theta = 0$, $R_1 = R_1' = R$; on doit donc prendre le signe + dans la formule précédente. On obtient ainsi la formule de Catalan

$$\frac{1}{R_1'} = \frac{1}{R_1}\cos\theta.$$

Chapitre II

Premiers éléments de la théorie des surfaces.

§1.- Coordonnées curvilignes.

32.- Définitions.- Considérons les équations

$$x = \varphi_1(u,v) \quad , \quad y = \varphi_2(u,v) \quad , \quad z = \varphi_3(u,v) \qquad (1)$$

et interprétons x, y, z comme les coordonnées rectangulaires d'un point. Nous supposerons que les seconds membres sont des fonctions finies et continues, ainsi que leurs dérivées des trois premiers ordres, pour les valeurs de u, v considérées.

Posons

$$L = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \quad , \quad M = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \quad , \quad N = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} .$$

Dans le plan (u,v), les équations

$$L = 0 \quad , \quad M = 0 , \quad N = 0 \qquad (2)$$

représentent en général trois courbes. Si ces équations étaient vérifiées identiquement dans tout le plan, on sait que les équations (1) représenteraient une courbe. Nous supposerons que ce cas ne se présente pas et nous ne considérerons que les points u, v appartenant à une aire ne contenant aucun point commun aux trois courbes (2). Dans ces conditions, les équations (1) représentent une surface (ou portion de surface) S dont tous les points sont ordinaires.

Si dans les équations (1), on pose $u = c^{te}$ ou $v = c^{te}$, on obtient des courbes tracées sur S que nous appellerons respectivement courbes v et courbes u. Les courbes u et les courbes v forment sur la surface S une configuration analogue à celle des parallèles aux axes Ox, Oy dans un plan. Par un point P de S passent une courbe u et une courbe v; si ces courbes sont données par

$$x = \varphi_1(u,v_0) \, , \, y = \varphi_2(u,v_0) \, , \, z = \varphi_3(u,v_0) \, ; \, x = \varphi_1(u_0,v) \, , \, y = \varphi_2(u_0,v) \, , \, z = \varphi_3(u_0,v) ,$$

u_0, v_0 sont appelées coordonnées curvilignes du point P.

Une courbe tracée sur la surface S est représentée soit

par une équation
$$\psi(u,v)=0,$$
soit par des équations paramétriques
$$u=\psi_1(t), \quad v=\psi_2(t).$$

33.- Élément linéaire.- L'élément linéaire d'une courbe $u=u(t)$, $v=v(t)$ tracée sur la surface S est donnée par
$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Posons
$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \quad G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2;$$
il vient
$$ds^2=\left[E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right]dt^2.$$

L'expression
$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2 \qquad (3)$$
est appelée élément linéaire de la surface.

Observons que l'on a
$$EG-F^2=L^2+M^2+N^2>0, \quad E>0,$$
par suite le second membre de la relation (3) est une formes quadratique définie positive.

34.- Plan tangent et normale.- Le plan tangent en un point M a pour équation
$$L(X-x)+M(Y-y)+N(Z-z)=0.$$
La normale en ce point a pour cosinus directeurs
$$l=\frac{L}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad m=\frac{M}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad n=\frac{N}{\sqrt{EG-F^2}}.$$
Nous conviendrons de l'orientation à donner à la normale en prenant le radical du dénominateur avec le signe +.

35.- Angle de deux courbes.- Considérons deux courbes $u=u(t)$, $v=v(t)$ et $u=u(\tau)$, $v=v(\tau)$ tracées sur S et issues d'un même point M. Posons $du=\frac{du}{dt}dt$, $dv=\frac{dv}{dt}dt$, $\delta u=\frac{du}{d\tau}d\tau$, $\delta v=\frac{dv}{d\tau}d\tau$. Les tangentes en M à ces courbes ont respectivement pour cosinus directeurs
$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv}{\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}}, \quad \frac{\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv}{\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}}, \quad \frac{\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv}{\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}}$$
$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u}\delta u+\frac{\partial x}{\partial v}\delta v}{\sqrt{E\,\delta u^2+2F\,\delta u\,\delta v+G\,\delta v^2}}, \quad \frac{\frac{\partial y}{\partial u}\delta u+\frac{\partial y}{\partial v}\delta v}{\sqrt{E\,\delta u^2+2F\,\delta u\,\delta v+G\,\delta v^2}}, \quad \frac{\frac{\partial z}{\partial u}\delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\delta v}{\sqrt{E\,\delta u^2+2F\,\delta u\,\delta v+G\,\delta v^2}}$$

L'angle V des deux courbes est donc donné par la formule

$$\cos V = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)(E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2)}},$$

dans laquelle on conviendra de prendre le radical avec le signe +.

En particulier, l'angle d'une ligne tracée sur S avec une ligne u est donnée par

$$\cos V = \frac{E\,du + F\,dv}{\sqrt{E}\,ds}.$$

L'angle d'une ligne avec une courbe v est donné par

$$\cos V = \frac{F\,du + G\,dv}{\sqrt{G}\,ds}.$$

Enfin, l'angle des lignes coordonnées est donné par

$$\cos(u\,v) = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que deux lignes soient orthogonales est

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0.$$

En particulier, pour que les lignes u, v soient orthogonales, il faut et il suffit que l'on ait $F = 0$.

36.– Élément d'aire. – On sait que l'élément d'aire d'une surface a pour expression

$$d\sigma = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma},$$

γ étant l'angle fait par la normale à la surface avec l'axe Oz, sous l'hypothèse que ces deux droites ne soient pas perpendiculaires. On a

$$\cos\gamma = \frac{N}{+\sqrt{EG - F^2}},$$

$$dx\,dy = \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) = N\,du\,dv.$$

Par suite, on a

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Cette formule est générale, car on pourrait l'obtenir en remplaçant l'axe des z par l'axe des x ou l'axe des y.

37.– Changement de coordonnées. – Supposons que l'on veuille prendre comme nouvelles lignes coordonnées des lignes u_1, v_1 définies par

$$u_1 = u_1(u, v), \quad v_1 = v_1(u, v). \qquad (1)$$

Soit, par rapport aux nouvelles coordonnées,

$$ds^2 = E_1\,du_1^2 + 2F_1\,du_1\,dv_1 + G_1\,dv_1^2. \qquad (2)$$

En faisant la substitution (1) dans l'équation (2) on doit retrouver

$$d\sigma^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

On a donc

$$E = E_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 + 2F_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial u} + G_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2$$

$$F = E_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + F_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial u}\right) + G_1\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}$$

$$G = E_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + 2F_1\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial v} + G_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2.$$

Résolvons ces équations par rapport à E_1, F_1, G_1 et posons

$$J = \frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)},$$

$$\Delta_1(\varphi) = \frac{1}{EG - F^2}\left[E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right],$$

$$\nabla(\varphi,\psi) = \frac{1}{EG - F^2}\left[E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right], \text{ Beltrami.}$$

où Δ_1 est le paramètre différentiel du premier ordre, ∇ (nabla) le paramètre différentiel mixte du premier ordre de la surface. On obtient

$$E_1 = \frac{EG - F^2}{J^2}\Delta_1(v_1),\quad F_1 = \frac{-(EG - F^2)}{J^2}\nabla(u_1, v_1),\quad G_1 = \frac{EG - F^2}{J^2}\Delta_1(u_1).$$

Observons que l'on a

$$d\sigma = \sqrt{E_1G_1 - F_1^2}\,du_1\,dv_1 = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv,$$

d'où

$$\Delta_1(u_1)\,\Delta_1(v_1) - \nabla^2(u_1, v_1) = \frac{J^2}{EG - F^2}.$$

§ 2.- Systèmes isothermes.

38.- <u>Systèmes orthogonaux</u>.- Nous avons vu que la condition nécessaire et suffisante pour que les lignes coordonnées u, v soient orthogonales est $F = 0$. Par conséquent, si l'on veut passer d'un système quelconque u, v à un système orthogonal u_1, v_1, on devra choisir $u_1(u, v)$, $v_1(u, v)$ de manière à avoir $\nabla(u_1, v_1) = 0$, c'est-à-dire

$$E\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial v} - F\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial u}\right) + G\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} = 0. \qquad (1)$$

L'une des familles de courbes, par exemple u_1, peut être choisie arbitrairement. Les courbes v_1 sont alors les trajectoires orthogonales de la famille des courbes u_1. Sur une courbe v_1, on a

$$\frac{\partial v_1}{\partial u}\,du + \frac{\partial v_1}{\partial v}\,dv = 0$$

et par suite l'équation différentielle des courbes v_1 est

$$\left(E\frac{\partial u_1}{\partial v} - F\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)du + \left(F\frac{\partial u_1}{\partial v} - G\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)dv = 0 . \qquad (2)$$

Observons que pour déterminer les courbes v_1, il suffit de connaître l'équation différentielle

$$P\,du + Q\,dv = 0$$

des courbes u_1. L'équation différentielle (2) des courbes v_1 devient alors

$$(EQ - FP)\,du + (FQ - GP)\,dv = 0.$$

39.- Systèmes isothermes. - On appelle système isotherme ou isométrique un système orthogonal ($F=0$) pour lequel on a $E = G$.

La surface étant rapportée à des coordonnées u, v quelconques, cherchons à déterminer un système isotherme

$$\alpha(u,v) = C^{te}, \quad \beta(u,v) = C^{te}.$$

Nous devons avoir

$$\nabla(\alpha,\beta) = 0 \quad , \quad \Delta_1(\alpha) = \Delta_1(\beta). \qquad (1)$$

La première de ces équations donne

$$\left(E\frac{\partial\alpha}{\partial v} - F\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)\frac{\partial\beta}{\partial v} - \left(F\frac{\partial\alpha}{\partial v} - G\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)\frac{\partial\beta}{\partial u} = 0.$$

Posons

$$\frac{\partial\beta}{\partial u} = h\left(E\frac{\partial\alpha}{\partial v} - F\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial\beta}{\partial v} = h\left(F\frac{\partial\alpha}{\partial v} - G\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)$$

On a

$$E\frac{\partial\beta}{\partial v} - F\frac{\partial\beta}{\partial u} = -h\,(EG-F^2)\frac{\partial\alpha}{\partial u} \quad , \quad F\frac{\partial\beta}{\partial v} - G\frac{\partial\beta}{\partial u} = -h\,(EG-F^2)\frac{\partial\alpha}{\partial v}.$$

On en déduit

$$\Delta_1(\beta) = h^2\,(EG-F^2)\,\Delta_1(\alpha)$$

d'où, par (1)

$$h = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Nous avons donc

$$\frac{\partial\beta}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(E\frac{\partial\alpha}{\partial v} - F\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial\beta}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(F\frac{\partial\alpha}{\partial v} - G\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right). \qquad (2)$$

La relation

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)$$

donne

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(E\frac{\partial\alpha}{\partial v} - F\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(F\frac{\partial\alpha}{\partial v} - G\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)\right]. \qquad (3)$$

L'expression

$$\Delta_2(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(F\frac{\partial\varphi}{\partial v} - G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\right\}\right]$$

est appelée paramètre différentiel du second ordre de la surface. L'équation (3) équivaut à

$$\Delta_2(\alpha) = 0. \qquad (3')$$

Ayant choisi pour α une solution de l'équation (3'), les équations (2) fourniront β (à une constante additive près). On observera qu'en résolvant les équations (2) par rapport à α, on a

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{-1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(E\frac{\partial\beta}{\partial v} - F\frac{\partial\beta}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial\alpha}{\partial v} = \frac{-1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(F\frac{\partial\beta}{\partial v} - G\frac{\partial\beta}{\partial u}\right), \qquad (4)$$

et par suite

$$\Delta_2(\beta) = 0.$$

Si nous prenons les lignes α, β comme lignes coordonnées, nous aurons

$$ds^2 = E_1 d\alpha^2 + G_1 d\beta^2$$

avec

$$E_1 = \frac{EG-F^2}{J^2}\Delta_1(\beta), \quad G_1 = \frac{EG-F^2}{J^2}\Delta_1(\alpha)$$

On a

$$\Delta_1(\alpha)\Delta_1(\beta) - \nabla^2(\alpha,\beta) = \Delta_1(\alpha)\Delta_1(\beta) = \frac{J^2}{EG-F^2},$$

donc

$$E_1 = G_1 = \frac{1}{\Delta_1(\alpha)} = \frac{1}{\Delta_1(\beta)} = \lambda(\alpha,\beta).$$

et

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

40.- <u>Paramètres isométriques</u>. - Supposons la surface rapportée à un système isotherme et faisons la substitution

$$\alpha = \alpha(u), \beta = \beta(v).$$

Le ds^2 prend la forme

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

où

$$E = \lambda\alpha'^2, \quad G = \lambda\beta'^2$$

et le rapport de E à G est le produit d'une fonction de u seule pour une fonction de v seule.

Inversement, si la surface est rapportée à des lignes u, v telles que le ds^2 ait la forme

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2,$$

le rapport $E : G$ étant le produit $U : V$ d'une fonction U de u seule par une fonction $\frac{1}{V}$ de v seule, posons

$$E = \lambda U, \; G = \lambda V.$$

On a

$$ds^2 = \lambda(U du^2 + V dv^2)$$

Posons encore

$$\alpha = \int\sqrt{U}\,du, \quad \beta = \int\sqrt{V}\,dv.$$

On obtient le système isotherme
$$ds^2 = \lambda\,(d\alpha^2 + d\beta^2).$$
α et β sont appelés paramètres isométriques.

41.- Lignes de longueur nulle.- On peut arriver aux systèmes isothermes de la manière suivante. On a
$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \left[\sqrt{E}\,du + \left(F + i\sqrt{EG-F^2}\right)\frac{dv}{\sqrt{E}}\right]\left[\sqrt{E}\,du + \left(F - i\sqrt{EG-F^2}\right)\frac{dv}{\sqrt{E}}\right].$$
Si $\mu + i\nu$ est un facteur intégrant de
$$\sqrt{E}\,du + \left(F + i\sqrt{EG-F^2}\right)\frac{dv}{\sqrt{E}},$$
c'est-à-dire si l'on a
$$(\mu + i\nu)\left[\sqrt{E}\,du + \left(F + i\sqrt{EG-F^2}\right)\frac{dv}{\sqrt{E}}\right] = d\alpha + i\,d\beta$$
$\mu - i\nu$ est facteur intégrant de l'imaginaire conjuguée et on a
$$(\mu - i\nu)\left[\sqrt{E}\,du + \left(F - i\sqrt{EG-F^2}\right)\frac{dv}{\sqrt{E}}\right] = d\alpha - i\,d\beta\,.$$

En posant $\lambda = \dfrac{1}{\mu^2+\nu^2}$, on a, par multiplication,
$$ds^2 = \lambda\,(d\alpha^2 + d\beta^2),$$
c'est-à-dire un système isotherme.

Les lignes qui satisfont à l'une des équations
$$\sqrt{E}\,du + \left(F + i\sqrt{EG-F^2}\right)\frac{dv}{\sqrt{E}} = 0, \quad \sqrt{E}\,du + \left(F - i\sqrt{EG-F^2}\right)\frac{dv}{\sqrt{E}} = 0$$
sont appelées lignes de longueur nulle. Ce sont des lignes imaginaires. Les paramètres directeurs de la tangente à l'une de ces lignes sont $\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$, $\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$, $\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$. La somme des carrés de ces quantités est nulle ($ds^2 = 0$), donc les tangentes aux lignes de longueur nulle s'appuient sur le cercle imaginaire à l'infini.

42.- Application aux surfaces de révolution.- Soit S une surface de révolution d'axe Oz ; nous définirons un point M de cette surface par l'angle ω fait par le plan passant par M et Oz, avec le plan Oxz, et par la distance ρ du point M à Oz. Les équations de S sont
$$x = \rho\cos\omega\,,\quad y = \rho\sin\omega\,,\quad z = f(\rho)\,.$$
Dans le plan $y = 0$, l'équation $z = f(x)$ représente le méridien de la surface situé dans ce plan. On a
$$ds^2 = (1 + f_1^2)\,d\rho^2 + \rho^2\,d\omega^2.$$

Posons
$$u = \int\sqrt{1 + f_1^2}\;d\rho,$$

u désignant la longueur d'arc d'un méridien. Il vient
$$ds^2 = du^2 + \rho^2 d\omega^2 = \rho^2 \left(\frac{du^2}{\rho^2} + d\omega^2\right) .$$
Les quantités $u_1 = \int \frac{du}{\rho}$ et ω sont des paramètres isométriques et on peut écrire
$$ds^2 = \rho^2 \left(du_1^2 + d\omega^2\right) .$$

§3.- Représentation conforme.

43.- Définitions.- Considérons deux surfaces S, S' liées par une correspondance biunivoque et continue, tout au moins entre les portions des surfaces qui seront considérées. Nous pouvons supposer que les deux surfaces sont toutes deux rapportées à des lignes u, v, deux points homologues ayant les mêmes coordonnées curvilignes. Soient
$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 , \quad ds'^2 = E'du^2 + 2F'du\,dv + G'dv^2$$
les éléments linéaires des deux surfaces.

La correspondance sera appelée correspondance conforme ou représentation conforme d'une des surfaces S, S' sur l'autre lorsqu'il y a conservation des angles. D'une manière précise, si M et M' sont deux points homologues de S, S', Γ, Γ_1 deux courbes de S passant par M ; Γ', Γ'_1 les deux courbes correspondantes de S' passant par M', l'angle des tangentes à Γ, Γ_1 en M est égal à l'angle des tangentes à Γ', Γ'_1 en M'.

44.- Conditions pour que deux surfaces soient en représentation conforme l'une sur l'autre.- Si $\varphi(u,v)=0$ est l'équation d'une courbe Γ tracée sur S et passant par M, la direction de la tangente à Γ en M est fixée par le rapport $\frac{du}{dv}$ tiré de
$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv . \qquad (1)$$
Les cosinus directeurs de cette tangente sont en effet
$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv}{ds} , \frac{\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv}{ds} , \frac{\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv}{ds} ,$$
les différentielles étant prises sur $\varphi(u,v)=0$. La courbe Γ', homologue de Γ sur S', est représentée par la même équation $\varphi(u,v)=0$ et la direction de la tangente est également déterminée par le rapport $\frac{du}{dv}$ tiré de (1). Il en résulte que les tangentes aux courbes homologues Γ, Γ' passant par deux points homologues M, M' de S, S' se correspondent dans une

homographie. Pour que la correspondance soit conforme, il faut et il suffit qu'à deux tangentes rectangulaires quelconques à S en M correspondent deux tangentes rectangulaires à S' en M'. En d'autres termes, les équations

$$E\, du\, \delta u + F\,(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G\, dv\, \delta v = 0,$$
$$E'\, du\, \delta u + F'(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G'\, dv\, \delta v = 0$$

doivent être identiques. On doit donc avoir

$$\frac{E}{E'} = \frac{F}{F'} = \frac{G}{G'}.$$

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que S et S' soient en correspondance conforme.

Observons que si les rapports précédents sont égaux à l'unité, on a $ds = ds'$ et il y a en outre conservation des longueurs.

45.- **Représentation conforme sur un plan.** - La représentation conforme d'une surface sur un plan revient à la recherche des systèmes isothermes. Si en effet on connaît un système isotherme de la surface S, pour lequel

$$ds^2 = \lambda\,(du^2 + dv^2),$$

en prenant pour coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un plan $\xi = u$, $\eta = v$, on obtient une représentation conforme de la surface sur le plan, car l'élément linéaire de celui-ci est $ds'^2 = d\xi^2 + d\eta^2$.

Appliquons ce qui précède aux surfaces de révolution, en reprenant les notations du nº 42. Les relations

$$\xi = \int \frac{du}{\rho}, \quad \eta = \omega$$

donnent une représentation conforme sur un plan. Aux méridiens correspondent les droites parallèles à l'axe des ξ et aux parallèles de la surface, les droites parallèles à l'axe des η.

Aux droites du plan correspondent sur la surface de révolution des courbes coupant sous un angle constant les méridiens ; ces courbes sont appelées loxodromies.

46.- **Représentation conforme de la sphère sur un plan.** - Ce problème est celui de la construction des cartes géographiques. Considérons la sphère de rayon 1 et, conservant les notations précédentes, nous avons

$$x = \rho \cos\omega, \quad y = \rho \sin\omega, \quad z = \sqrt{1-\rho^2}.$$

Nous posons

$$u = \int \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \operatorname{arc\,sin} \rho \ , \quad \rho = \sin u ,$$

$$ds^2 = du^2 + \sin^2 u \, d\omega^2 = \sin^2 u \left(\frac{du^2}{\sin^2 u} + d\omega^2 \right)$$

$$u_1 = \int \frac{du}{\sin u} = \log \operatorname{tg} \frac{u}{2} \ , \quad ds^2 = \sin^2 u \left(du_1^2 + d\omega^2 \right).$$

k étant une constante, nous obtiendrons la représentation conforme sur un plan en posant

$$u_1 = k\xi \ , \quad \omega = k\eta ,$$

d'où

$$ds^2 = 4k^2 \frac{e^{k\xi}}{(1+e^{2k\xi})^2} \left(d\xi^2 + d\eta^2 \right) .$$

On obtient ainsi la projection de Mercator.

On peut également représenter la sphère de rayon 1 par

$$x = \cos u \sin v \ , \ y = \sin u \sin v \ , \ z = \cos v ,$$

u étant la longitude et v la latitude. On a alors

$$ds^2 = \sin^2 v \, du^2 + dv^2 = \sin^2 v \left(du^2 + \frac{dv^2}{\sin^2 v} \right) .$$

Les paramètres isométriques sont

$$u, \quad v_1 = \int \frac{dv}{\sin v} = \log \operatorname{tg} \frac{v}{2} .$$

On peut arriver à une représentation conforme en suivant la méthode précédente. Nous poserons plutôt

$$u = \theta \ , \quad \frac{dv}{\sin v} = \frac{dr}{r}$$

et nous interpréterons r et θ comme coordonnées polaires d'un plan. Nous aurons ainsi, k étant une constante,

$$r = k \operatorname{tg} \frac{v}{2} \ , \quad ds^2 = 4 \frac{k^2}{(r^2+k^2)^2} \left(r^2 d\theta^2 + dr^2 \right)$$

l'élément linéaire du plan étant

$$ds'^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2 ,$$

on obtient une représentation conforme qui n'est autre que la projection de la sphère sur le plan $z = 0$ à partir du point $v = 0$, doublée d'une homothétie de centre O, dans le plan $z = 0$.

Chapitre III

Courbure des surfaces

§ 1.- Courbure des courbes tracées sur une surface.

47.- Expression de la courbure d'une courbe. - Soient $u = u(t)$, $v = v(t)$ les équations d'une courbe Γ tracée sur la surface S ; α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente à Γ en un point x, y, z, t ; λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale principale, R le rayon de courbure. Les cosinus directeurs de la normale à la surface S au point considéré étant l, m, n, l'angle θ de la normale à la surface et de la normale principale est donné par

$$\cos\theta = l\lambda + m\mu + n\nu .$$

D'après les formules de Frenet, on a

$$\lambda = R\frac{d\alpha}{ds}, \quad \mu = R\frac{d\beta}{ds}, \quad \nu = R\frac{d\gamma}{ds}$$

d'où

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{l\,d\alpha + m\,d\beta + n\,d\gamma}{ds} .$$

En différentiant l'identité

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$$

le long de Γ, on a

$$l\,d\alpha + m\,d\beta + n\,d\gamma + \alpha\,dl + \beta\,dm + \gamma\,dn = 0 .$$

Posons

$$D = l\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + m\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + n\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \sum l\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad D' = \sum l\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, \quad D'' = \sum l\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} .$$

On a successivement

$$\alpha = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}, \ldots,$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\, l = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\, l = 0,$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\, dl + D\,du + D'\,dv = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\, dl + D'\,du + D''\,dv = 0$$

d'où

$$\sum l\,d\alpha = \frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{ds}$$

et

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}. \qquad (1)$$

Suivant la convention faite dans l'étude des courbes gauches, R est essentiellement positif, par suite $\cos\theta$ a le signe du second membre et précisément du numérateur du second membre.

48.- Théorème de Meusnier.- Considérons une seconde courbe Γ_1 tracée sur S et ayant, au point M considéré, même tangente que la courbe Γ ; soient R_1 le rayon de courbure de Γ_1, θ_1 l'angle fait par la normale principale en M à Γ_1 avec la normale à la surface. Dans la formule (1), le second membre ne dépend que du rapport $\frac{du}{dv}$, qui est le même pour Γ et Γ_1, par suite, on aura

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{\cos\theta_1}{R_1}. \qquad (2)$$

Si Γ et Γ_1 ont de plus même plan osculateur en M, comme R_1 est positif, on aura $\cos\theta_1 = \cos\theta$ et $\theta_1 = \theta$; par suite les normales principales à Γ et à Γ_1 coïncident et les courbes ont même courbure en M. En particulier, si Γ_1 est la section de S par le plan osculateur à Γ en M, cette courbe plane a même courbure en M que la courbe Γ. L'étude des courbures des courbes tracées sur une surface revient donc à celles des courbures des sections planes de la surface.

Considérons la section Γ_n de la surface par un plan passant par la normale à la surface en M et par la tangente à Γ en ce point. La courbe Γ_n est appelée section normale de la surface en M. L'angle fait par la normale à Γ_n avec la normale à la surface est égal à 0 ou à π. Si R_n est le rayon de courbure de Γ_n en M, la formule (2) donne

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{\pm 1}{R_n}$$

Nous conviendrons d'affecter R_n d'un signe, de manière à avoir

$$R = R_n \cos\theta. \qquad (3)$$

R_n est donc positif si la normale à Γ_n en M a la même orientation que la normale à la surface ; il est négatif dans le cas contraire.

Désignons par C le centre de courbure de la courbe Γ. Ce point appartient au plan de Γ_n et, lorsque θ varie, il décrit un cercle (C) tangent en M à la surface et rencontrant une seconde fois la normale en M à la surface en un point C_n. Si l'on rapporte le plan de Γ_n à un axe polaire d'origine M et coïncidant en position et en sens avec la normale à la surface, le cercle (C) a pour équation (3). Il en résulte que C_n est le centre de courbure de Γ_n. Les droites MC, C_nC sont rectangulaires, donc

<u>Théorème de Meusnier</u>. <u>Le centre de courbure en un point M d'une courbe tracée sur une surface est la projection sur le plan osculateur à cette courbe en M du centre de courbure de la section normale ayant même tangente que la courbe au point M.</u>

Le cercle (C) est appelé cercle de Meusnier. La droite C_nC est la droite polaire de la courbe Γ.

49.- <u>Remarque</u>.- La convention faite sur le signe de R_n est conforme à celle qui régit le signe de la courbure des courbes planes. Appliquons en effet ce qui précède à la section par le plan $x=0$ de la surface $z=f(x,y)$, tangente à l'origine au plan des xy. Au point O, on a $R_n = t_0 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{x=0,y=0}$.

50.- <u>Courbure géodésique</u>.- Désignons par C_g l'intersection de la droite polaire C_nC avec le plan tangent à la surface. La droite MC_g est une normale à la courbe Γ, appelée normale géodésique de cette courbe. C_g est appelé centre de courbure géodésique de la courbe Γ en M.

Soit Γ' la projection orthogonale de la courbe Γ sur le plan tangent à la surface en M. Sur le cylindre projetant, les courbes Γ et Γ' ont même tangente en M et Γ' est une section normale en M. La droite C_gC étant perpendiculaire au plan osculateur en M à Γ, C_g est le centre de courbure de la courbe Γ' en M d'après le théorème de Meusnier (appliqué au cylindre projetant).

Nous orienterons la normale géodésique de manière à ce que le trièdre de Frenet de la courbe Γ en M et le trièdre formé par la tangente à Γ en M, la normale géodésique et la normale à la surface (trièdre de Darboux-Ribaucour) soient directement superposables. On passe du trièdre de Frenet à celui de Darboux-Ribaucour par une rotation d'amplitude $\theta - \frac{\pi}{2}$ autour de la tangente à Γ. La distance orientée R_g de M à C_g est donnée par

$$R = R_g \sin\theta \ ;$$

R_g est appelé rayon de courbure géodésique de Γ en M et $\frac{1}{R_g}$, courbure géodésique.

51.- Cas exceptionnels.- Lorsque, dans la formule (1), les quantités du, dv vérifient la relation

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0\ , \qquad (4)$$

on a $\frac{\cos\theta}{R} = 0$. Si $\frac{1}{R} = 0$, $\cos\theta \neq 0$, la courbe Γ a un point d'inflexion en M. Il en est de même de la section normale. Si on a $\cos\theta = 0$, la formule (1) ne détermine plus R et le plan osculateur en M à la courbe Γ coïncide avec le plan tangent à la surface. Les courbes possédant cette propriété en tout point sont appelées courbes asymptotiques. L'équation (4) montre que par un point de la surface passent deux courbes asymptotiques.

Si, dans l'équation (1), du, dv vérifient la condition

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0,$$

c'est-à-dire que la courbe Γ est tangente à une des lignes de longueur nulle passant par M, R est en général nul.

52.- Directions principales.- Les valeurs λ_1, λ_2 de λ rendant extremum la fonction

$$\frac{D\lambda^2 + 2D'\lambda + D''}{E\lambda^2 + 2F\lambda + G}$$

sont les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 \\ D & D' & D'' \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0 .$$

Les tangentes à la surface S au point M correspondant aux valeurs λ_1, λ_2 du rapport $\frac{du}{dv}$ sont appelées tangentes principales. Ces deux tangentes sont perpendiculaires, car on a

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{DG - D''E}{DF - D'E}, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{D'G - D''F}{DF - D'E}$$

et par suite la relation

$$E\lambda_1\lambda_2 + F(\lambda_1 + \lambda_2) + G = 0,$$

est une identité.

Les rayons de courbure des sections normales en M correspondant aux directions principales sont appelés rayons de courbure principaux ; les sections normales envisagées, sections principales.

53.- Lignes de courbure.- On appelle ligne de courbure d'une surface une ligne tracée sur cette surface et ayant pour tangentes des tangentes principales de la surface.

L'équation différentielle des lignes de courbure de la surface S est

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ D & D' & D'' \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0 .$$

Une surface possède donc ∞^1 lignes de courbure et par chaque point de la surface passent deux de ces lignes.

Aux points de la surface pour lesquels on a

$$\frac{D}{E} = \frac{D'}{F} = \frac{D''}{G} ,$$

les lignes de courbure sont indéterminées. De tels points sont appelés ombilics.

T 54.- Indicatrice de Dupin.- L'étude de la courbure en un point M des courbes tracées sur une surface revient à l'étude de la courbure des sections normales en ce point.

Considérons le trièdre $M\xi\eta\zeta$ formé par la tangente $M\xi$ à la courbe u passant par M, la tangente $M\eta$ à la courbe v et la normale $M\zeta$ en M à la surface. Les cosinus directeurs de $M\xi$, $M\eta$ sont respectivement

$$l_1 = \frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}, \quad m_1 = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}, \quad n_1 = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}} ,$$

$$l_2 = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{G}} , \qquad m_2 = \frac{\partial y}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{G}} , \quad n_2 = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{G}} ,$$

en observant que sur une courbe u, on a $ds^2 = E\,du^2$ et sur une courbe v, $ds^2 = G\,dv^2$.

Les cosinus directeurs d'une tangente Mt quelconque à une courbe Γ sont donnés par

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds} = \sqrt{E}\quad l_1\frac{du}{ds} + \sqrt{G}\,.\,l_2\frac{dv}{ds} ,$$

$$\frac{dy}{ds} = \sqrt{E}\quad m_1\frac{du}{ds} + \sqrt{G}\,m_2\frac{dv}{ds} , \quad \frac{dz}{ds} = \sqrt{E}\,n_1\frac{du}{ds} + \sqrt{G}\,n_2\frac{dv}{ds} .$$

Les quantités

$$\xi_1 = \sqrt{E}\frac{du}{ds} , \quad \eta_1 = \sqrt{G}\frac{dv}{ds}$$

sont donc les paramètres directeurs de la droite Mt par rapport aux axes $M\xi$, $M\eta$.

La formule donnant la courbure de la section normale en M ayant Mt pour tangente devient

$$\frac{1}{R_n} = D\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2D'\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + D''\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = \frac{D}{E}\xi_1^2 + 2\frac{D'}{\sqrt{EG}}\xi_1\eta_1 + \frac{D''}{G}\eta_1^2 .$$

Considérons dans le plan tangent à M à la surface, la courbe

$$\frac{D}{E}\xi^2 + 2\frac{D'}{\sqrt{EG}}\xi\eta + \frac{D''}{G}\eta^2 = k, \qquad (1)$$

où k est une constante finie et non nulle. La distance ρ du point de cette courbe situé sur la tangente Mt est donnée par la relation

$$R_n = \frac{1}{k}\rho^2. \qquad (2)$$

La connaissance de la courbe (1), appelée indicatrice de Dupin, implique donc la connaissance des courbures des sections normales.

La constante k ne peut être choisie arbitrairement. De (1), on tire

$$\xi = \frac{E}{D}\left[-\frac{D'}{\sqrt{EG}}\eta \pm \sqrt{\frac{(D'^2 - DD'')\eta^2}{EG} + \frac{D}{E}k}\,\right].$$

Observons que E et G sont positifs. Trois cas peuvent se présenter :

1°) $D'^2 - DD'' < 0$. Alors k doit avoir le signe de D et l'indicatrice est une ellipse.

2°) $D'^2 - DD'' = 0$. k doit avoir le signe de D et l'indicatrice se compose de deux droites parallèles symétriques par rapport à l'origine M.

3°) $D'^2 - DD'' > 0$. La constante k peut avoir un signe quelconque et l'indicatrice se compose de deux hyperboles conjuguées.

55.- <u>Classification des points d'une surface</u>.- Les points d'une surface sont classés d'après la nature de l'indicatrice correspondante. Le point est dit elliptique, parabolique ou hyperbolique suivant que $D'^2 - DD''$ est négatif, nul ou positif.

En un point elliptique, k a un signe déterminé et, d'après (2), R_n a toujours le même signe. Par suite, les sections normales Γ_n tournent leur concavité dans le même sens et la surface ne peut traverser le plan tangent.

En un point parabolique, R_n a toujours le même signe ou est infini pour

$$\frac{D}{\sqrt{E}}\xi + \frac{D'}{\sqrt{G}}\eta = 0.$$

On ne peut en tirer aucune conclusion sur la position de la surface par rapport au plan tangent.

En un point hyperbolique, k et par suite R_n peuvent être positifs ou négatifs. La surface traverse le plan tangent. Observons que dans ce cas, les asymptotes de l'indicatrice sont données par

$$\mathcal{D}\, du^2 + 2\,\mathcal{D}'\, du\, dv + \mathcal{D}''\, dv^2 = 0.$$

Ce sont donc les tangentes aux asymptotiques de la surface passant par le point M.

Supposons qu'au point M, toutes les sections normales aient même courbure ; l'indicatrice est alors un cercle et on a, en introduisant l'angle (u, v) des lignes coordonnées par la formule

$$\cos(u, v) = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

$$\frac{\mathcal{D}}{E} = \frac{\mathcal{D}'}{F} = \frac{\mathcal{D}''}{G}.$$

Le point M est donc un ombilic.

56.- <u>Axes de l'indicatrice</u>.- Pour obtenir les axes de l'indicatrice, nous allons supposer que la surface est rapportée à ses lignes de courbure. Si les lignes u, v sont les lignes de courbure, elles sont rectangulaires et on a $F = 0$. Par suite EG est différent de zéro. D'autre part, l'équation des lignes de courbure doivent se réduire à $du\, dv = 0$, on a $\mathcal{D}'E = 0$, $\mathcal{D}'G = 0$, d'où $\mathcal{D} = 0$.

Cela étant, l'indicatrice du point M a pour équation

$$\frac{\mathcal{D}}{E}\xi^2 + \frac{\mathcal{D}''}{G}\eta^2 = k,$$

donc les axes de l'indicatrice sont les tangentes aux lignes de courbure, c'est-à-dire les directions principales.

§ 2.- Courbures d'une surface.

57.- <u>Equation aux courbures principales</u>.- Soient R_1, R_2 les rayons de courbure principaux de la surface au point M. Ces quantités sont données par la formule

$$\frac{1}{R} = \frac{\mathcal{D}\, du^2 + 2\,\mathcal{D}'\, du\, dv + \mathcal{D}''\, dv^2}{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2},$$

où $\frac{du}{dv}$ correspond à une des tangentes principales et par conséquent rend extrêmum le second membre. On a donc

$$\frac{1}{R} = \frac{\mathcal{D}\, du + \mathcal{D}'\, dv}{E\, du + F\, dv} = \frac{\mathcal{D}'\, du + \mathcal{D}''\, dv}{F\, du + G\, dv}. \qquad (1)$$

En éliminant du, dv entre ces relations, on obtient l'équation aux courbures principales

$$(EG - F^2)\frac{1}{R^2} - (E\mathcal{D}'' + G\mathcal{D} - 2F\mathcal{D}')\frac{1}{R} + \mathcal{D}\mathcal{D}'' - \mathcal{D}'^2 = 0.$$

Remarquons que les équations (1) donnent l'équation des lignes de courbure sous la forme

$$\begin{vmatrix} \mathcal{D}\,du + \mathcal{D}'\,dv & \mathcal{D}'\,du + \mathcal{D}''\,dv \\ E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

58.- <u>Courbure moyenne et formules d'Euler</u>.- Rapportons la surface à ses lignes de courbure ; nous avons donc $F = 0$ et $\mathcal{D}' = 0$. En supposant que R_1 corresponde à la section normale passant par la tangente à la ligne u, on a

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\mathcal{D}}{E}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\mathcal{D}''}{G}.$$

Considérons une tangente Mt faisant avec la ligne u un angle ω. Nous avons, sur une section normale Γ tangente à Mt en M,

$$\cos\omega = \sqrt{E}\,\frac{du}{ds}, \quad \sin\omega = \sqrt{G}\,\frac{dv}{ds}.$$

La courbure de Γ en M est donnée par

$$\frac{1}{R} = \frac{\mathcal{D}\,du^2 + \mathcal{D}''\,dv^2}{ds^2} = \frac{E}{R_1}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{G}{R_2}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2}.$$

C'est la première formule d'Euler.

Considérons une seconde section normale Γ' perpendiculaire en M à Γ. Si l'on désigne par $\frac{1}{R'}$ sa courbure, nous aurons

$$\frac{1}{R'} = \frac{\sin^2\omega}{R_1} + \frac{\cos^2\omega}{R_2}.$$

Par conséquent les courbures de deux sections normales perpendiculaires en M ont une somme constante, car on a

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{constante}.$$

C'est la seconde formule d'Euler.

La quantité $H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ est appelée courbure moyenne de la surface. Dans le cas où les lignes coordonnées de la surface sont quelconques, la valeur de H est donnée par l'équation aux courbures principales ; on a précisément

$$H = \frac{E\mathcal{D}'' + G\mathcal{D} - 2F\mathcal{D}'}{EG - F^2}.$$

59.- <u>Courbure totale</u>.- A côté de la courbure moyenne d'Euler, Gauss a introduit la courbure totale $K = \frac{1}{R_1 R_2}$. Nous verrons plus tard comment on peut obtenir la courbure totale d'une surface par une généralisation de la méthode qui a servi à introduire la courbure d'une courbe.

La valeur de la courbure totale est donnée par l'équation aux courbures principales ; on a

$$K = \frac{\mathcal{D}\mathcal{D}'' - \mathcal{D}'^2}{EG - F^2}.$$

60.- Surface à courbure totale nulle.- Une surface dont la courbure totale est nulle en tout point est caractérisée par

$$DD'' - D'^2 = 0 . \qquad (1)$$

Prenons comme variables indépendantes les coordonnées x, y et comme fonction inconnue z. En employant les notations de Monge, l'équation précédente devient

$$rt - s^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial(p,q)}{\partial(x,y)} = 0 .$$

On a donc $q = f(p)$. D'autre part, on a également

$$\frac{\partial(z - px - qy, p)}{\partial(x,y)} = 0$$

donc

$$z - px - qy = \varphi(p) .$$

Le plan tangent à la surface est donc

$$z - px - y f(p) - \varphi(p) = 0$$

et la surface est une développable. La réciproque est vraie, c'est-à-dire que toute développable a la courbure totale nulle.

Observons en outre que l'équation (1) définit les surfaces dont tous les points sont paraboliques, ou encore dont les asymptotiques en chaque point sont confondues.

§3.- Torsion des courbes tracées sur une surface.

61.- Torsion géodésique.- Considérons une courbe Γ tracée sur la surface S et soit M un point de Γ ordinaire pour la courbe et la surface. Au point M nous attacherons

a) le trièdre de Frenet constitué par la tangente Mt (cosinus directeurs α, β, γ), la normale principale Mn (cos. dir. λ, μ, ν) et la binormale Mb (cos. dir. a, b, c) à la courbe Γ ;

b) le trièdre de Darboux - Ribaucour constitué par Mt, la normale géodésique Mg à Γ (cos. dir. ξ, η, ζ) et la normale MN à la surface (cos. dir. l, m, n) ;

Nous désignerons par θ l'angle des droites Mn, MN et nous rappellerons que les trièdres précédents sont par hypothèse directement superposables. Si l'on fait tourner le trièdre de Frenet d'un angle $\theta - \frac{\pi}{2}$ autour de Mt, Mn vient coïncider avec Mg et Mb avec MN. L'angle de Mb avec MN est donc $\frac{\pi}{2} - \theta$ et on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta = al + bm + cn .$$

Par dérivation le long de Γ, on a

$$\cos\theta\, d\theta = l\,da + m\,db + n\,dc + a\,dl + b\,dm + c\,dn$$

et, en vertu du second groupe de formules de Frenet,

$$\cos\theta\, d\theta = a\,dl + b\,dm + c\,dn + \frac{ds}{T}(l\lambda + m\mu + n\nu),$$

$$\cos\theta\left(d\theta - \frac{ds}{T}\right) = a\,dl + b\,dm + c\,dn.$$

La quantité $\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}$ est appelée torsion géodésique de la courbe Γ au point M.

On peut également obtenir cette quantité d'une autre manière. En différentiant le long de Γ l'équation

$$\cos\theta = \lambda l + \mu m + \nu n,$$

et en tenant compte du troisième groupe de formules de Frenet, on a

$$-\sin\theta\, d\theta = \lambda\,dl + \mu\,dm + \nu\,dn - \frac{l\alpha + m\beta + n\gamma}{R}ds - \frac{la + mb + nc}{T}ds,$$

d'où

$$\sin\theta\left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}\right) = \frac{\lambda\,dl + \mu\,dm + \nu\,dn}{ds}.$$

62.- <u>Calcul de la torsion géodésique</u>.- Observons que l'angle de Mn avec Mg est égal à $\theta - \frac{\pi}{2}$ et que celui de Mb avec Mg est égal à $\theta - \pi$. On a donc

$$\xi = \lambda\sin\theta - a\cos\theta, \quad \eta = \mu\sin\theta - b\cos\theta, \quad \zeta = \nu\sin\theta - c\cos\theta.$$

En dérivant la première de ces relations par rapport à s le long de Γ, on a

$$\frac{d\xi}{ds} = \lambda\cos\theta\frac{d\theta}{ds} + a\sin\theta\frac{d\theta}{ds} + \frac{d\lambda}{ds}\sin\theta - \frac{da}{ds}\cos\theta$$

et, par les formules de Frenet,

$$\frac{d\xi}{ds} = (\lambda\cos\theta + a\sin\theta)\left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{T}\right) - \frac{\alpha}{R}\sin\theta.$$

On a deux formules analogues pour η et ζ. Par conséquent,

$$\Sigma\, l\frac{d\xi}{ds} = \left(\Sigma\, l\lambda\cos\theta + \Sigma\, la\sin\theta\right)\left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{T}\right) - \frac{\Sigma\alpha l}{R}\sin\theta$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = -\Sigma\, l\frac{d\xi}{ds} = \Sigma\,\xi\frac{dl}{ds}.$$

Le trièdre de Darboux-Ribaucour MtgN étant directement superposable au trièdre de Frenet et par suite au trièdre de référence Oxyz, on a

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ l & m & n \end{vmatrix} = 1.$$

Par suite

$$\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{ds}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ dl & dm & dn \\ l & m & n \end{vmatrix} = \frac{1}{ds^2}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ dl & dm & dn \\ l & m & n \end{vmatrix};$$

Observons que l'on a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ l & m & n \end{vmatrix} = lL + mM + nN = \sqrt{EG - F^2},$$

et en multipliant ligne par ligne

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ dl & dm & dn \\ l & m & n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ l & m & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum \frac{\partial x}{\partial u} dx & \sum \frac{\partial x}{\partial v} dx & 0 \\ \sum \frac{\partial x}{\partial u} dl & \sum \frac{\partial x}{\partial v} dl & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On a $\quad \sum \frac{\partial x}{\partial u} dx = E\,du + F\,dv \quad , \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v} dx = F\,du + G\,dv$

D'autre part, de

$$\sum l \frac{\partial x}{\partial u} = 0,$$

on déduit

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u} dl = -\sum l \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du - \sum l \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} dv = -(D\,du + D'\,dv)$$

De même, on a

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v} dl = -(D'\,du + D''\,dv).$$

Le produit des deux déterminants est donc

$$-\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ D\,du + D'\,dv & D'\,du + D''\,dv \end{vmatrix}$$

et on a finalement

$$\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{-1}{\sqrt{EG - F^2}\,ds^2}\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ D\,du + D'\,dv & D'\,du + D''\,dv \end{vmatrix}.$$

Chapitre IV

Systèmes de courbes tracées sur une surface.

§1. - Lignes conjuguées et lignes asymptotiques.

63. - Définition des lignes conjuguées. - Considérons, sur la surface S, une courbe Γ d'équations $u = u(t)$, $v = v(t)$, et la développable enveloppée par les plans tangents à la surface aux points de Γ. Par un point M de Γ passe une droite de la développable, appartenant au plan tangent à S en ce point. La direction de cette droite est appelée direction conjuguée à la direction de la tangente à Γ en M.

Le plan tangent à la surface en M a pour équation
$$l(X-x)+m(Y-y)+n(Z-z)=0$$
et la droite de la développable passant par M est découpée sur ce plan par le plan
$$(X-x)\,dl+(Y-y)\,dm+(Z-z)\,dn=0,$$
les différentielles étant prises par rapport à t. Si l'on représente par δx, δy, δz les composantes d'un déplacement le long de cette droite, on a donc
$$\frac{\delta x}{m\,dn-n\,dm}=\frac{\delta y}{n\,dl-l\,dn}=\frac{\delta z}{l\,dm-m\,dl}.$$
Ces relations sont équivalentes aux équations $\qquad \delta x\,dl+\delta y\,dm+\delta z\,dn=0$
$$\left.\begin{aligned}\delta x\,dl+\delta y\,dm+\delta z\,dn&=0,\\ l\,\delta x+m\,\delta y+n\,\delta z&=0,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$
dont la seconde est une identité. Transformons la relation (1) en remarquant que
$$\delta x=\frac{\partial x}{\partial u}\,\delta u+\frac{\partial x}{\partial v}\,\delta v,\ldots\ \sum\frac{\partial x}{\partial u}\,dl=D\,du+D'dv,\ \sum\frac{\partial x}{\partial v}\,dl=D'du+D''dv$$
Nous obtenons
$$D\,du\,\delta u+D'(du\,\delta v+dv\,\delta u)+D''\,dv\,\delta v=0,\qquad(2)$$
condition nécessaire et suffisante pour que deux directions du, dv et δu, δv soient conjuguées.

On remarquera que deux directions conjuguées sont des diamètres conjugués par rapport à l'indicatrice du point considéré.

64.- <u>Réseaux conjugués</u>. - Deux systèmes ∞^1 de courbes forment un réseau conjugué si les courbes des deux systèmes passant par un point quelconque ont des directions conjuguées.

Si les courbes de l'un des systèmes sont données par leur équation différentielle

$$P\,du + Q\,dv = 0,$$

l'équation différentielle des courbes du second système est, d'après la condition (2),

$$(\mathcal{D}Q - \mathcal{D}'P)\,du + (\mathcal{D}'Q - \mathcal{D}''P)\,dv = 0.$$

65.- <u>Surface rapportée à un réseau conjugué</u>. - Supposons que les lignes coordonnées u, v forment un réseau conjugué. L'équation (2) doit être satisfaite pour $dv = 0$ et $\delta u = 0$. On doit donc avoir $\mathcal{D}' = 0$ et cette condition est nécessaire et suffisante.

On en déduit en particulier que les lignes de courbure forment un système conjugué, puisque parmi les conditions pour qu'une surface soit rapportée à ses lignes de courbure se trouve $\mathcal{D}' = 0$.

La condition $\mathcal{D}' = 0$ équivaut à

$$\left| \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} \right| = 0.$$

Il existe donc une relation (équation de Laplace)

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + a\frac{\partial \omega}{\partial u} + b\frac{\partial \omega}{\partial v} = 0 \qquad (3)$$

vérifiée par les coordonnées d'un point de la surface.

Réciproquement, si les coordonnées x, y, z d'un point d'une surface satisfont à la relation (3), on a $\mathcal{D}' = 0$ et les courbes u, v forment un réseau conjugué.

Pour obtenir les expressions de a, b, observons que l'on a

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} = -\sum \frac{\partial x}{\partial u}\left(a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v}\right) = -aE - bF$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} = -aF - bG$$

La relation (3) prend donc la forme

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial \omega}{\partial u} & \dfrac{\partial \omega}{\partial v} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial v} & E & F \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial u} & F & G \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$2\left(EG - F^2\right)\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} + \left(F\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial E}{\partial v}\right)\frac{\partial\omega}{\partial u} + \left(F\frac{\partial E}{\partial v} - E\frac{\partial G}{\partial u}\right)\frac{\partial\omega}{\partial v} = 0. \quad (4)$$

66.- Propriété des lignes de courbure. - Supposons que la surface soit rapportée à ses lignes de courbure u, v. Ces courbes étant orthogonales, on a

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0. \quad F=0 \quad (5)$$

Il en résulte que l'expression $x^2+y^2+z^2$ satisfait, en même temps que x, y, z, à l'équation (3). Pour $\omega = x^2+y^2+z^2$, l'équation (3) devient en effet

$$2\sum x\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v}\right] + 2\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \equiv 0.$$

Réciproquement, si $x^2+y^2+z^2$ satisfait à la même équation (3) que x, y, z, on a la relation (5) et les courbes u, v sont des lignes conjuguées orthogonales ; leurs tangentes en un point sont donc les axes de l'indicatrice et par suite ces courbes sont des lignes de courbure.

67.- Propriété caractéristique de la sphère.- Proposons-nous de rechercher les surfaces dont toutes les lignes conjuguées sont orthogonales. Dans ce cas, les équations (2) et

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0$$

doivent être identiques et on doit avoir

$$\mathcal{D} : \mathcal{D}' : \mathcal{D}'' = E : F : G.$$

Appelons h la valeur commune des rapports $\mathcal{D}:E$, $\mathcal{D}':F$, $\mathcal{D}'':G$ et supposons en premier lieu $h \neq 0$. De $\sum l^2 = 1$, on déduit $\sum l\frac{\partial l}{\partial u} = 0$ et par suite la droite de paramètres directeurs $\frac{\partial l}{\partial u}$, $\frac{\partial m}{\partial u}$, $\frac{\partial n}{\partial u}$ est perpendiculaire à la normale à la surface et on a

$$\frac{\partial l}{\partial u} = A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial m}{\partial u} = A\frac{\partial y}{\partial u} + B\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial n}{\partial u} = A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v}.$$

On en déduit

$$\sum\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = AE + BF = -\sum l\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\mathcal{D} = -hE$$

d'où

$$\frac{\partial l}{\partial u} + h\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial m}{\partial u} + h\frac{\partial y}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial n}{\partial u} + h\frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

On a de même

$$\frac{\partial l}{\partial v} + h\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial m}{\partial v} + h\frac{\partial y}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial n}{\partial v} + h\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

On tire de ces six relations

$$\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0 \quad \text{et } \lambda = C^{te}.$$

On a par conséquent, x_0, y_0, z_0 étant des constantes

$$l = -C(x-x_0), \quad m = -C(y-y_0), \quad n = -C(z-z_0).$$

La surface est donc la sphère

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \frac{1}{C^2}.$$

Supposons maintenant $\lambda = 0$. On a $AE + BF = 0$ et de même $AF + BG = 0$, d'où $A = 0$, $B = 0$. Par suite l, m, n sont des constantes et la surface est un plan.

Une surface dont tous les points sont des ombilics est donc une sphère (ou en particulier un plan).

68.- __Lignes asymptotiques.__ - Si une ligne tracée sur la surface est sa propre conjuguée, son équation différentielle est, d'après (2),

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0. \qquad (6)$$

Ces lignes sont donc les asymptotiques de la surface (n° 51). Si Γ est une ligne asymptotique, la développable enveloppée par les plans tangents à la surface le long de Γ a pour arête de rebroussement Γ et par suite le plan tangent à la surface en un point de Γ coïncide avec le plan osculateur à cette courbe en ce point. On retrouve ainsi la propriété géométrique qui avait servi de définition aux lignes asymptotiques.

69.- __Surface rapportée à ses lignes asymptotiques.__ - Si les lignes coordonnées u, v d'une surface sont ses asymptotiques, l'équation (6) doit être satisfaite pour $du = 0$, $dv = 0$ et on a donc $D = 0$, $D'' = 0$. Cette condition est nécessaire et suffisante. Les relations

$$D = \left| \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} \right| = 0, \quad D'' = \left| \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} \right| = 0$$

montrent que les coordonnées x, y, z des points de la surface satisfont aux relations

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + A_1 \frac{\partial \omega}{\partial u} + B_1 \frac{\partial \omega}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} + A_2 \frac{\partial \omega}{\partial u} + B_2 \frac{\partial \omega}{\partial v} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Réciproquement, si les coordonnées des points d'une surface satisfont aux équations (5), les lignes asymptotiques de cette surface sont les lignes u, v.

Pour obtenir les expressions de $A_1, \ldots, B_2$, observons que l'on a

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} = A_1 E + B_1 F$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} = A_1 F + B_1 G.$$

Par conséquent

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} & \frac{\partial\omega}{\partial u} & \frac{\partial\omega}{\partial v} \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & E & F \\ -\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & F & G \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(EG-F^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \left[\frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u} - F\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right]\frac{\partial\omega}{\partial u} - \left[\frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v} - E\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\right]\frac{\partial\omega}{\partial v} = 0.$$

On trouve de même

$$(EG-F^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} - \left[\frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\right]\frac{\partial\omega}{\partial u} + \left[\frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v} - F\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right]\frac{\partial\omega}{\partial v} = 0.$$

70.- <u>Surfaces réglées</u>.- Une surface réglée a des équations de la forme

$$x = \varphi_1(v) + u\,\psi_1(v), \quad y = \varphi_2(v) + u\,\psi_2(v), \quad z = \varphi_3(v) + u\,\psi_3(v),$$

les génératrices rectilignes étant les lignes u.

On a $D = 0$ et par suite, les lignes u sont des asymptotiques, car l'équation (6) est satisfaite pour $dv = 0$. D'autre part, l'équation (6) se réduit à

$$2\,|\psi\ \ \varphi'\ \ \psi'|\,du + |\psi\ \ \varphi' + u\psi'\ \ \varphi'' + u\psi''|\,dv = 0.$$

Cette équation différentielle définit les asymptotiques non rectilignes de la surface. On remarquera que c'est une équation de Riccati. Nous reviendrons plus loin sur ces surfaces.

71.- <u>Surfaces de translation</u>.- Sophus Lie a appelé surfaces de translation les surfaces définies par

$$x = \varphi_1(u) + \psi_1(v), \quad y = \varphi_2(u) + \psi_2(v), \quad z = \varphi_3(u) + \psi_3(v).$$

Lorsque v est fixe, ces équations représentent une courbe u. Si nous faisons varier v, la courbe u se déplace sans se déformer. Les courbes v possèdent la même propriété, d'où le nom de surface de translation.

Les coordonnées x, y, z du point de la surface satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} = 0$$

et réciproquement, si les coordonnées des points d'une surface satisfont à cette équation, c'est une surface de translation. Les courbes u, v forment donc un réseau conjugué.

§ 2.- Lignes de courbure.

72.- Propriété caractéristique des lignes de courbure.- Soit Γ une courbe d'équations $u = u(t)$, $v = v(t)$ tracée sur S. Les normales à la surface aux points de Γ engendrent une surface appelée normalie. Proposons-nous de déterminer Γ par la condition que la normalie soit une développable.

Un point quelconque de la normalie a pour coordonnées

$$x + wl, \quad y + wm, \quad z + wn$$

et ce point engendre la normalie lorsque t et w varient. Le plan tangent en ce point à la normalie a pour équation

$$\begin{vmatrix} X - x & dx + w\,dl & l \end{vmatrix} = 0,$$

les différentielles étant prises par rapport à t. Pour que ce plan reste fixe lorsque w varie, il faut que l'on ait

$$dx = k\,dl, \quad dy = k\,dm, \quad dz = k\,dn,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = k\left(\frac{\partial l}{\partial u} du + \frac{\partial l}{\partial v} dv\right), \ldots$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $\frac{\partial x}{\partial u}$ et les deux membres des deux équations analogues par $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, puis additionnons membre à membre, il vient

$$E\,du + F\,dv = k\left(\sum \frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} du + \sum \frac{\partial l}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} dv\right) = -k\,(D\,du + D'dv). \quad (1)$$

En multipliant par $\frac{\partial x}{\partial v}, \ldots$, on aura de même

$$F\,du + G\,dv = -k\,(D'du + D''dv). \quad (2)$$

L'élimination de k donne l'équation différentielle de Γ sous la forme

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & D\,du + D'dv \\ F\,du + G\,dv & D'du + D''dv \end{vmatrix} = 0.$$

La courbe Γ est donc une ligne de courbure (nos 53, 57).

Les lignes dont les normalies sont développables sont des lignes de courbure. La réciproque est évidente.

Remarque.- Nous avons écarté implicitement, dans ce qui précède, les surfaces planes, pour lesquelles $dl = 0$, $dm = 0$, $dn = 0$.

73.- Formules d'Olinde Rodrigues.- Considérons une ligne de courbure de la surface en un point M et soit R_1 le rayon de courbure principal correspondant. Les différentielles étant prises sur cette courbe, nous avons (no 57)

$$\frac{1}{R_1} = \frac{D\,du + D'\,dv}{E\,du + F\,dv} = \frac{D'\,du + D''\,dv}{F\,du + G\,dv},$$

d'où, en utilisant les relations (1), (2),

$$R_1 + k = 0.$$

Nous avons donc, le long d'une ligne de courbure, le premier groupe de formules d'Olinde Rodrigues

$$dx + R_1\,dl = 0, \quad dy + R_1\,dm = 0, \quad dz + R_1\,dn = 0.$$

On a de même, le long de l'autre ligne de courbure,

$$dx + R_2\,dl = 0, \quad dy + R_2\,dm = 0, \quad dz + R_2\,dn = 0.$$

74.- Torsion géodésique des lignes de courbure.- L'expression de la torsion géodésique $\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}$ d'une courbe, calculée plus haut (nº 62), montre que la torsion géodésique d'une ligne de courbure est nulle (Lancret). La torsion géodésique est également nulle en un point pour une courbe tangente en ce point à une des directions principales.

Réciproquement, les lignes à torsion géodésique nulle,

$$\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = 0,$$

sont des lignes de courbure de la surface.

75.- Formule d'Ossian Bonnet.- Reprenons les trièdres de Frenet et de Darboux-Ribaucour attachés à une courbe en un point M (nº 61). Nous avons

$$l = \lambda\cos\theta + a\sin\theta, \quad m = \mu\cos\theta + b\sin\theta, \quad n = \nu\cos\theta + c\sin\theta.$$

En dérivant la première équation le long de la courbe et en utilisant les formules de Frenet, on a

$$\frac{dl}{ds} = -\frac{\alpha}{R}\cos\theta - \left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}\right)(a\cos\theta - \lambda\sin\theta)$$

ou

$$\frac{dl}{ds} = -\frac{\alpha}{R}\cos\theta + \xi\left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}\right),$$

et deux formules analogues pour $\frac{dm}{ds}$ et $\frac{dn}{ds}$.

Soient Mt_1, Mt_2 les tangentes principales en M ; l_1, m_1, n_1 les cosinus directeurs de Mt_1 ; l_2, m_2, n_2 ceux de Mt_2 ; ds_1, ds_2 les éléments d'arc des lignes de courbure correspondantes ; R_1, R_2 les rayons de courbure correspondants. La droite de paramètres directeurs $\frac{dl}{ds}$, $\frac{dm}{ds}$, $\frac{dn}{ds}$ est parallèle au plan tangent à la surface et on a

$$\frac{dl}{ds} = Al_1 + Bl_2, \quad \frac{dm}{ds} = Am_1 + Bm_2, \quad \frac{dn}{ds} = An_1 + Bn_2.$$

On a

$$A = \Sigma l_1 \frac{dl}{ds} = \Sigma l_1 \frac{dl}{ds_1}\frac{ds_1}{ds}\Big| = \Sigma l_1 \frac{dl}{ds_1}\cos\omega,$$

ω étant l'angle de la tangente Mt à la courbe avec Mt_1. D'autre part, les formules d'Olinde Rodrigues donnent

$$\frac{dl}{ds_1} = -\frac{1}{R_1}\frac{dx}{ds_1} = -\frac{l_1}{R_1}, \quad \frac{dm}{ds_1} = -\frac{m_1}{R_1}, \quad \frac{dn}{ds_1} = -\frac{n_1}{R_1},$$

par suite

$$A = -\Sigma l_1^2 \frac{\cos\omega}{R_1} = -\frac{\cos\omega}{R_1}.$$

On a de même

$$B = -\frac{\sin\omega}{R_2}$$

et par conséquent

$$\frac{dl}{ds} = -\frac{\sin\omega}{R_1} l_1 - \frac{\sin\omega}{R_2} l_2, \ldots$$

En comparant à la première expression de $\frac{dl}{ds}$, on a donc

$$l_1 \frac{\cos\omega}{R_1} + l_2 \frac{\sin\omega}{R_2} - \frac{\alpha}{R}\cos\theta + \xi\left(\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}\right)$$

et deux formules analogues. Multiplions la formule précédente et les analogues par

$$\alpha = l_1\cos\omega + l_2\sin\omega, \beta = m_1\cos\omega + m_2\sin\omega, \gamma = n_1\cos\omega + n_2\sin\omega$$

et additionnons les résultats membre à membre. On obtient

$$\frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2} = \frac{\cos\theta}{R},$$

c'est-à-dire la formule d'Euler (n° 58).

Multiplions les formules obtenues respectivement par

$$\xi = -l_1\sin\omega + l_2\cos\omega, \quad \eta = -m_1\sin\omega + m_2\cos\omega, \zeta = -n_1\sin\omega + n_2\cos\omega$$

et additionnons. On obtient

$$\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = \sin\omega\cos\omega\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

C'est la formule d'Ossian Bonnet.

76.- <u>Théorèmes de Joachimsthal</u>.- Soient S, S' deux surfaces se coupant suivant une courbe Γ, ligne de courbure pour chacune des deux surfaces. Les normales MN, MN' à S, S' en un point M de Γ appartiennent au plan normal à la courbe. Soient θ, θ' les angles faits par ces normales avec la normale principale Mn à la courbe Γ. En M, on a

$$\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = 0, \quad \frac{1}{T} - \frac{d\theta'}{ds} = 0, \quad d(\theta' - \theta) = 0.$$

Or, $\theta' - \theta$ n'est autre que l'angle des deux surfaces en M. Cet angle est donc constant en tout point de Γ.

<u>Si deux surfaces se coupent suivant une ligne de courbure, leur angle est constant le long de cette ligne.</u>

Réciproquement, si $\theta' - \theta$ est constant le long de Γ, les torsions géodésiques en tout point de Γ sur chacune des deux surfaces sont égales. Si l'une est nulle, il en est de même de l'autre.

<u>Si deux surfaces se coupent sous un angle constant suivant</u>

une courbe qui est ligne de courbure pour l'une des surfaces, cette courbe est aussi ligne de courbure pour l'autre surface.

Ces deux théorèmes sont dus à Joachimsthal - Comme toute courbe tracée sur une sphère ou sur un plan est une ligne de courbure de cette surface, on en déduit les propriétés suivantes :

Si une ligne de courbure d'une surface est plane ou sphérique, le plan ou la sphère qui la contient coupe la surface sous un angle constant. Réciproquement, si un plan ou une sphère coupe une surface sous un angle constant, l'intersection est une ligne de courbure de la surface.

Si une surface contient un cercle qui en soit une ligne de courbure, il existe une sphère passant par ce cercle et touchant la surface en un point du cercle. D'après le premier théorème de Joachimsthal, cette sphère touche la surface en tout point du cercle.

§3.- Lignes géodésiques.

77.- Définition.- On appelle ligne géodésique d'une surface une ligne dont la normale principale coïncide en tout point avec la normale à la surface.

Si Γ est une géodésique de S et si nous conservons les notations précédentes, on a, le long de Γ,

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\mu}{m} = \frac{\nu}{n}$$

ou

$$\frac{d\alpha}{l} = \frac{d\beta}{m} = \frac{d\gamma}{n}.$$

L'angle θ de la normale principale et de la normale à la surface est égal à 0 ou à π et on a $\sin\theta = 0$. La courbure géodésique d'une ligne géodésique est donc nulle et cette propriété est caractéristique.

D'autre part, on a $d\theta = 0$, donc la torsion géodésique d'une courbe géodésique est égale à la torsion proprement dite de la courbe.

78.- Equation différentielle des géodésiques.- Pour obtenir l'équation différentielle des géodésiques, nous exprimerons que $\sin\theta$ est nul.

Nous avons

$$\lambda = l\cos\theta + \xi\sin\theta \ , \ \mu = m\cos\theta + \eta\sin\theta \ , \ \nu = n\cos\theta + \zeta\sin\theta$$

et, par les formules de Frenet

$$\frac{d\alpha}{ds} = l\,\frac{\cos\theta}{R} + \xi\,\frac{\sin\theta}{R} \ , \ \frac{d\beta}{ds} = m\,\frac{\cos\theta}{R} + \eta\,\frac{\sin\theta}{R} \ , \ \frac{d\gamma}{ds} = n\,\frac{\cos\theta}{R} + \zeta\,\frac{\sin\theta}{R}$$

Multiplions les deux membres de ces équations respectivement par ξ, η, ζ et additionnons-les. On obtient

$$\sum \xi \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin\theta}{R}.$$

On a (cf. n° 62)

$$\sum \xi \frac{d\alpha}{ds} = \sum \xi \frac{d^2x}{ds^2} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{d^2x}{ds^2} & \dfrac{d^2y}{ds^2} & \dfrac{d^2z}{ds^2} \\ l & m & n \end{vmatrix} = \frac{1}{ds^3} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ l & m & n \end{vmatrix}.$$

Formons le produit ligne par ligne

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ l & m & n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ l & m & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ l & m & n \end{vmatrix} \sqrt{EG-F^2}.$$

Nous obtenons

$$\begin{vmatrix} \sum \dfrac{\partial x}{\partial u}\,dx & \sum \dfrac{\partial x}{\partial v}\,dx & \sum l\,dx \\ \sum \dfrac{\partial x}{\partial u}\,d^2x & \sum \dfrac{\partial x}{\partial v}\,d^2x & \sum l\,d^2x \\ \sum \dfrac{\partial x}{\partial u}\,l & \sum \dfrac{\partial x}{\partial v}\,l & \sum l^2 \end{vmatrix}$$

On a

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\,dx = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) = E\,du + F\,dv,$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v}\,dx = \sum \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) = F\,du + G\,dv,$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\,d^2x = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial x}{\partial u}d^2u + \frac{\partial x}{\partial v}d^2v\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}du^2 + \frac{\partial E}{\partial v}du\,dv + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)dv^2 + E\,d^2u + F\,d^2v,$$

$$\sum \frac{\partial x}{\partial v}\,d^2x = \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)du^2 + \frac{\partial G}{\partial u}du\,dv + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}dv^2 + F\,d^2u + G\,d^2v,$$

$$\sum l\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \sum l\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \sum l^2 = 1.$$

On a donc finalement

$$\frac{\sin\theta}{R} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}\,ds^3}\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial u}du^2 + \dfrac{\partial E}{\partial v}du\,dv + \left(\dfrac{\partial F}{\partial v} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial u}\right)dv^2 + E\,d^2u + F\,d^2v \\ F\,du + G\,dv & \left(\dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial v}\right)du^2 + \dfrac{\partial G}{\partial u}du\,dv + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial v}dv^2 + F\,d^2u + G\,d^2v \end{vmatrix}.$$

C'est l'expression de la courbure géodésique d'une courbe.

L'équation différentielle des géodésiques s'obtient en égalant à zéro le déterminant du second membre. On trouve ainsi

$$(EG - F^2)(du\, d^2v - dv\, d^2u) - \left(\frac{1}{2} E \frac{\partial E}{\partial v} - E \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial u}\right) du^3$$
$$+ \left(E \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{3}{2} F \frac{\partial E}{\partial v} + F \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} G \frac{\partial E}{\partial u}\right) du^2 dv - \left(G \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{3}{2} F \frac{\partial G}{\partial u} + F \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} E \frac{\partial G}{\partial v}\right) du\, dv^2.$$
$$+ \left(\frac{1}{2} G \frac{\partial G}{\partial u} - G \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v}\right) dv^3 = 0.$$

C'est une équation différentielle du second ordre, par conséquent il existe une géodésique passant par un point et ayant en ce point une tangente déterminée.

79.- <u>Autre forme de l'équation des géodésiques</u>.- On peut mettre l'équation des géodésiques sous une autre forme, en prenant comme variable indépendante l'élément d'arc de la courbe. On obtient ainsi deux équations différentielles.

Le long d'une géodésique, nous avons

$$\frac{d\alpha}{ds} = \rho l, \quad \frac{d\beta}{ds} = \rho m, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \rho n.$$

On a

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds},$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{d^2 v}{ds^2} = \rho l,$$

et deux équations analogues.

Multiplions les trois équations obtenues par $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ et additionnons membre à membre. Il vient

$$E\frac{d^2u}{ds^2} + F\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{\partial E}{\partial v}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0. \quad (1)$$

En multipliant par $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ et en additionnant, on obtient de même

$$F\frac{d^2u}{ds^2} + G\frac{d^2v}{ds^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial v}\right)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0. \quad (2)$$

Ces équations peuvent se mettre sous la forme

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{d}{ds}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right) &= \frac{\partial E}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2, \\ 2\frac{d}{ds}\left(F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds}\right) &= \frac{\partial E}{\partial v}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial F}{\partial v}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial G}{\partial v}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2. \end{aligned}\right\} (3)$$

Le long de la géodésique, on a d'ailleurs

$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1 \quad (4)$$

On peut d'ailleurs observer qu'en dérivant l'équation (4) par rapport à s, on obtient une relation qui permet, lorsqu'une des équations (3) est satisfaite, d'obtenir l'autre.

80.- <u>Ligne de longueur minimum</u>.- Considérons une ligne tracée sur la surface et joignant deux points P, Q. Désignons par s la longueur d'arc de cette ligne et cherchons à la déterminer par la condition que la distance PQ sur cette ligne soit minimum. On doit avoir

$$\delta \int_P^Q ds = 0.$$

Nous prendrons s comme variable indépendante. On a donc l'équation (4).

Les équations d'Euler sont

$$\frac{\partial}{\partial u} ds - \frac{d}{ds}\frac{\partial ds}{\partial u'} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} ds - \frac{d}{ds}\frac{\partial ds}{\partial v'} = 0,$$

u', v' désignant les dérivées de u, v par rapport à s.

La première de ces équations donne

$$\frac{\partial E}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 - 2\frac{d}{ds}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{du}{ds}\right) = 0,$$

c'est-à-dire la première des équations (3). La deuxième équation d'Euler conduit de même à la seconde des équations (3). Par conséquent <u>sur une surface, les lignes de longueur minimum sont des géodésiques.</u>

81.- <u>Remarque</u>.- La réciproque de ce théorème n'est pas vraie pour toutes les surfaces, c'est-à-dire que les géodésiques ne sont pas nécessairement les lignes de longueur minimum.

Considérons par exemple le cylindre de révolution

$$x = R\cos u, \quad y = R\sin u, \quad z = v.$$

Nous avons $ds^2 = R^2 du^2 + dv^2$. En prenant u comme variable indépendante le long d'une géodésique, l'équation du n° 78 devient $v'' = 0$, d'où $v = C_1 u + C_2$. Les géodésiques du cylindre sont donc les hélices.

$$x = R\cos u, \quad y = R\sin u, \quad z = C_1 u + C_2.$$

Par deux points du cylindre passent des hélices en nombre infini et seule, celle qui ne comprend qu'un arc de spire entre les deux points donnés est la ligne de longueur minimum.

D'ailleurs, le théorème du n° 80 suppose que les points P, Q considérés sont suffisamment voisins ; en d'autres termes, ce théorème est vrai dans de petites portions de la surface.

82.- <u>Equation de Gauss</u>.- Supposons que les lignes u ne soient pas des géodésiques et soit Γ une géodésique coupant les lignes u sous l'angle ω. Nous avons donc

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right), \qquad (1)$$

d'où l'on déduit

$$\sin\omega = \sqrt{\frac{EG - F^2}{E}}\ \frac{dv}{ds}. \qquad (2)$$

Prenons comme variable indépendante sur la courbe Γ l'arc s ; nous avons par la première des équations (3) du n° 79,

$$2\frac{d}{ds}\left(\sqrt{E}\cos\omega\right) = \frac{\partial E}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2.$$

ou

$$2\,ds\,d\left(\sqrt{E}\cos\omega\right) = \frac{\partial E}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}du\,dv + \frac{\partial G}{\partial u}dv^2. \qquad (3)$$

On a d'autre part

$$d\left(\sqrt{E}\cos\omega\right) = \frac{dE}{2\sqrt{E}}\cos\omega - \sqrt{E}\sin\omega\,d\omega,$$

d'où, en utilisant les relations (1) et (2),

$$d\left(\sqrt{E}\cos\omega\right) = \frac{dE}{2E}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right) - \sqrt{EG - F^2}\ \frac{dv}{ds}\,d\omega.$$

En comparant cette équation à l'équation (3), on a, après division par $dv \neq 0$,

$$2\sqrt{EG - F^2}\,d\omega = \frac{F}{E}\left(\frac{\partial E}{\partial u}du + \frac{\partial E}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial E}{\partial v}du - 2\frac{\partial F}{\partial u}du - \frac{\partial G}{\partial u}dv. \qquad (4)$$

C'est l'équation différentielle de Gauss pour les géodésiques.

Lorsque les coordonnées sont orthogonales, l'équation (4) prend la forme particulièrement simple

$$2\sqrt{EG}\,d\omega = \frac{\partial E}{\partial v}du - \frac{\partial G}{\partial u}dv$$

ou

$$d\omega = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E}\right)du - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{G}\right)dv. \qquad (4')$$

83.- __Interprétation géométrique de la courbure géodésique.__- Considérons sur la surface S une courbe Γ et une famille de courbes Γ' coupant Γ à angle droit. Sur chaque courbe Γ' portons, à partir de son point de rencontre avec Γ et dans un sens déterminé, une longueur donnée. Le lieu des extrémités de ces segments curvilignes est une courbe Γ_1 et on obtient ainsi, lorsque la longueur donnée varie, une famille de courbes Γ_1 dont fait partie Γ. Prenons comme lignes coordonnées, sur la surface, les courbes Γ_1 et Γ', les courbes Γ_1 étant les courbes u, les courbes Γ' les courbes v. Nous prendrons pour paramètre v la longueur d'arc des courbes Γ', de sorte que la courbe Γ soit donnée par $v = 0$. De même, sur la courbe Γ, nous supposerons que u est la longueur d'arc.

Puisque sur une courbe v on a $ds = dv$, on aura $G = 1$. D'autre part, sur la courbe Γ, on aura $ds = du$ et, puisque les courbes Γ' sont orthogonales à Γ, on aura $E(u, 0) = 1$, $F(u, 0) = 0$.

Par suite, sur la courbe Γ, on aura $EG - F^2 = 1$. Cela étant, la courbure géodésique de la courbe Γ sera

$$\left(\frac{\sin\theta}{R}\right)_\Gamma = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)_\Gamma$$

Sur la courbe Γ_1, on aura $ds = \sqrt{E}\,du$, d'où

$$\frac{\partial \log ds}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log E}{\partial v} = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}.$$

Sur la courbe Γ, $E = 1$ et par suite

$$\frac{\sin\theta}{R} = -\frac{\partial \log ds}{\partial v}.$$

84.– <u>Lignes géodésiquement parallèles.</u> – Supposons maintenant que les courbes v soient des géodésiques. L'équation des géodésiques (n° 78) doit être satisfaite pour $du = 0$, ce qui donne

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 0.$$

F est donc une fonction de u seule, nulle pour $v = 0$ d'après ce qui précède, donc $F = 0$ et les courbes u, v sont orthogonales. Les courbes u sont donc des trajectoires orthogonales des géodésiques v.

Réciproquement, considérons une famille de géodésiques v et leurs trajectoires orthogonales u. L'équation (4') doit être satisfaite pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, $du = 0$ et d'autre part on a $F = 0$; il vient donc $\frac{\partial G}{\partial u} = 0$ et G est une fonction de v seule. En remplaçant le paramètre v par l'élément de longueur $v_1 = \int\sqrt{G}\,dv$ des lignes v, on a

$$ds^2 = E\,du^2 + dv_1^2.$$

Considérons les courbes $v_1 = v_1^0$, $v_1 = v_1^1$; entre ces courbes, sur une géodésique v, on a la distance curviligne

$$\int_{v_1^0}^{v_1^1} ds = \int_{v_1^0}^{v_1^1} dv = v_1^1 - v_1^0 = C^{te}.$$

Donc, sur deux géodésiques v, les arcs interceptés par deux de leurs trajectoires orthogonales sont égaux.

Deux lignes u sont dites géodésiquement parallèles.

85.– <u>Coordonnées géodésiques polaires.</u> – Soit O un point de la surface. Prenons comme lignes u les géodésiques issues de O et comme lignes v les courbes qui coupent les géodésiques u chacune à une distance constante du point O. Le paramètre u représentera donc la longueur d'arc des courbes u, l'origine étant O. Si

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

on aura, sur une courbe u, quel que soit v,

$$\int_0^u \sqrt{E}\,du = u,$$

d'où $E = 1$. En exprimant que $dv = 0$ satisfait à l'équation des géodésiques (n° 78), on trouve $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$, donc F ne dépend que de v. Pour $u = 0$, v quelconque, les coordonnées x, y, z d'un point de la surface se réduisent à des constantes, coordonnées de O ; on a donc en ce point $F = 0$ quel que soit v et par suite $F = 0$ sur toute la surface.

On a donc finalement

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2$$

et les courbes v sont les trajectoires orthogonales des géodésiques u. Les courbes v sont appelées cercles géodésiques de centre O. Deux cercles géodésiques de même centre sont géodésiquement parallèles.

86.- <u>Condition pour que des courbes soient géodésiquement parallèles.</u>- Cherchons sous quelle condition la famille de courbes

$$\varphi(u, v) = c^{te}$$

est constituée de courbes géodésiquement parallèles. Soient $\psi(u,v) = c^{te}$ les trajectoires orthogonales de ces courbes ; on a, en prenant les courbes φ, ψ comme lignes coordonnées,

$$ds^2 = E_1\, d\varphi^2 + G_1\, d\psi^2.$$

Les courbes $\psi = c^{tes}$ devant être des géodésiques, on doit avoir $\frac{\partial E_1}{\partial \psi} = 0$. E_1 doit être une fonction de φ seule.

Rappelons que l'on a

$$\Delta_1(f) = \frac{E\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} + G\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2},$$

donc actuellement

$$\Delta_1(\varphi) = \frac{1}{E_1} = \Phi(\varphi)$$

Réciproquement, sous cette hypothèse, les courbes $\varphi = c^{te}$ sont géodésiquement parallèles.

En particulier, si l'on prend

$$\varphi_1 = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi)}},$$

c'est-à-dire si l'on prend sur les courbes $\psi = c^{te}$, l'élément de longueur φ_1 comme paramètre, on aura $E_1 = 1$ et la condition

$$\Delta_1(\varphi_1) = 1.$$

87.- <u>Ellipses et hyperboles géodésiques.</u>- Considérons deux courbes Γ, Γ' non géodésiquement parallèles et prenons comme courbes u les lignes géodésiquement parallèles à Γ, comme lignes v, les lignes géodésiquement parallèles à Γ'. De plus, prenons pour paramètre u la distance géodésique entre une courbe v

et Γ', pour paramètre v, la distance géodésique entre une courbe u et la courbe Γ. Soit

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

l'élément linéaire. Nous avons comme conditions

$$\Delta_1(u) = \frac{G}{EG - F^2} = 1 \quad , \quad \Delta_1(v) = \frac{E}{EG - F^2} = 1.$$

Si ω est l'angle des lignes coordonnées, on a

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}} \; , \quad E = G = \frac{1}{\sin^2\omega} \; , \quad F = \frac{\cos\omega}{\sin^2\omega} \; ,$$

d'où

$$ds^2 = \frac{du^2 + 2\cos\omega\,du\,dv + dv^2}{\sin^2\omega}.$$

Posons

$$u + v = 2\alpha \; , \quad u - v = 2\beta$$

et prenons α, β comme nouvelles lignes coordonnées. On obtient

$$ds^2 = \frac{2(1+\cos\omega)}{\sin^2\omega}\,d\alpha^2 + \frac{2(1-\cos\omega)}{\sin^2\omega}\,d\beta^2 = \frac{d\alpha^2}{\sin^2\frac{\omega}{2}} + \frac{d\beta^2}{\cos^2\frac{\omega}{2}}.$$

Les lignes α, β sont donc orthogonales. Les lignes $\alpha = c^{te}$ sont appelées ellipses géodésiques, les lignes $\beta = c^{te}$, hyperboles géodésiques, par analogie avec le plan.

88.- <u>Lignes de longueur nulle.</u>- Si l'on rapporte la surface à ses lignes de longueur nulle, on a $E = G = 0$ et

$$ds^2 = 2F\,du\,dv.$$

L'équation différentielle des géodésiques (n° 78) devient

$$F\left(dv\,d^2u - du\,d^2v\right) + \frac{\partial F}{\partial u}\,dv\,du^2 - \frac{\partial F}{\partial v}\,du\,dv^2 = 0.$$

Elle est satisfaite pour $du = 0$, $dv = 0$, par conséquent les lignes de longueur nulle sont des géodésiques (imaginaires).

Chapitre V

Equations fondamentales de la théorie des surfaces.

§1.- Equations de Gauss et de Codazzi.

89.- <u>Expression des dérivées secondes de x, y, z.</u> -
Ecrivons

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial x}{\partial v} + Cl, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = A\frac{\partial y}{\partial u} + B\frac{\partial y}{\partial v} + Cm, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v} + Cn \quad (1)$$

Le déterminant

$$\left| \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \quad l \right| = \sqrt{EG - F^2}$$

n'étant pas nul, il est possible de déterminer les coefficients A, B, C.

Nous avons déjà utilisé les relations

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}.$$

Multiplions les formules (1) respectivement par $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ et additionnons-les membre à membre. On a

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} = AE + BF.$$

En remplaçant dans l'équation précédente $\frac{\partial x}{\partial u}, \dots$ par $\frac{\partial x}{\partial v}, \dots$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} = AF + BG.$$

Enfin en multipliant les relations (1) par l, m, n et les additionnant, on trouve D = C. Par conséquent, les quantités $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ vérifient l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \frac{\frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u} - F\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial v}}{EG - F^2}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{E\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u}}{EG - F^2}\frac{\partial \theta}{\partial v} + D\lambda, \quad (I)$$

où l'on fait $\theta = x, y, z$; $\lambda = l, m, n$. Nous écrirons cette équation sous la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = A_1\frac{\partial \theta}{\partial u} + B_1\frac{\partial \theta}{\partial v} + D\lambda. \quad (I')$$

On trouve de même que $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u \partial v} = \frac{\frac{1}{2} G \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2} F \frac{\partial G}{\partial u}}{EG - F^2} \frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\frac{1}{2} E \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial v}}{EG - F^2} \frac{\partial\theta}{\partial v} + D'\lambda, \qquad (II)$$

que nous écrivons

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u \partial v} = A_2 \frac{\partial\theta}{\partial u} + B_2 \frac{\partial\theta}{\partial v} + D'\lambda. \qquad (II')$$

Enfin, $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \frac{G \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} G \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2} F \frac{\partial G}{\partial v}}{EG - F^2} \frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\frac{1}{2} E \frac{\partial G}{\partial v} - F \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}}{EG - F^2} \frac{\partial\theta}{\partial v} + D''\lambda, \qquad (III)$$

ce que nous écrivons

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = A_3 \frac{\partial\theta}{\partial u} + B_3 \frac{\partial\theta}{\partial v} + D''\lambda. \qquad (III')$$

90.- Expression des dérivées des cosinus directeurs de la normale.- Ecrivons

$$\frac{\partial l}{\partial u} = a \frac{\partial x}{\partial u} + b \frac{\partial x}{\partial v} + cl, \quad \frac{\partial m}{\partial u} = a \frac{\partial y}{\partial u} + b \frac{\partial y}{\partial v} + cm, \quad \frac{\partial n}{\partial u} = a \frac{\partial z}{\partial u} + b \frac{\partial z}{\partial v} + cn, \quad (1)$$

et observons que de

$$\Sigma l \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \Sigma l \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

on déduit

$$\Sigma \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} = -D, \quad \Sigma \frac{\partial l}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = -D', \quad \Sigma \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = -D', \quad \Sigma \frac{\partial l}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = -D''.$$

Nous multiplierons successivement les équations (1) respectivement par $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ et $\frac{\partial z}{\partial u}$; $\frac{\partial x}{\partial v}$, . . . ; l, m, n et nous additionnerons les résultats membre à membre. Nous obtiendrons ainsi

$$-D = aE + bF, \quad -D' = aF + bG, \quad c = 0.$$

Par conséquent l, m, n satisfont à l'équation

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \frac{FD' - GD}{EG - F^2} \frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{FD - ED'}{EG - F^2} \frac{\partial\theta}{\partial v}, \qquad (IV)$$

que nous écrivons

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = a_1 \frac{\partial\theta}{\partial u} + b_1 \frac{\partial\theta}{\partial v}. \qquad (IV')$$

On obtient de même

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{FD'' - GD'}{EG - F^2} \frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{FD' - ED''}{EG - F^2} \frac{\partial\theta}{\partial v}, \qquad (V)$$

que nous écrivons

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v} = a_2 \frac{\partial\theta}{\partial u} + b_2 \frac{\partial\theta}{\partial v}. \qquad (V')$$

91.- Conditions d'intégrabilité.- Le système formé par les équations (I), (II) et (III) doit être complètement intégrable et par suite on a

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}\right)\quad,\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}\right)$$

c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial v}\left(A_1\frac{\partial\theta}{\partial u}+B_1\frac{\partial\theta}{\partial v}+D\lambda\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(A_2\frac{\partial\theta}{\partial u}+B_2\frac{\partial\theta}{\partial v}+D'\lambda\right)=0\,,\\&\frac{\partial}{\partial v}\left(A_2\frac{\partial\theta}{\partial u}+B_2\frac{\partial\theta}{\partial v}+D'\lambda\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(A_3\frac{\partial\theta}{\partial u}+B_3\frac{\partial\theta}{\partial v}+D''\lambda\right)=0\,.\end{aligned}\right\}\quad(1).$$

Les premiers membres des équations (1) peuvent s'exprimer en fonction de $\frac{\partial\theta}{\partial u}$, $\frac{\partial\theta}{\partial v}$, λ ; soient respectivement

$$\alpha\frac{\partial\theta}{\partial u}+\beta\frac{\partial\theta}{\partial v}+\gamma\lambda\quad,\quad\alpha'\frac{\partial\theta}{\partial u}+\beta'\frac{\partial\theta}{\partial v}+\gamma'\lambda$$

ces expressions. Les conditions d'intégrabilité sont

$$\alpha=0\,,\beta=0\,,\ \alpha'=0\,,\beta'=0\,,\ \gamma=0\,,\ \gamma'=0\,.$$

Les quatre premières conduisent à l'équation de Gauss, les deux dernières aux équations de Codazzi.

92.– <u>Equation de Gauss</u>.– Multiplions le premier membre de la première des équations (1), égalée à $\alpha\frac{\partial\theta}{\partial u}+\beta\frac{\partial\theta}{\partial v}+\gamma\lambda$, par $\frac{\partial\theta}{\partial u}$, puis faisons $\theta=x,y,z$ et additionnons. On obtient ainsi, en tenant compte des équations (I'), (II'), (III'),

$$E\left(\frac{\partial A_1}{\partial v}-\frac{\partial A_2}{\partial u}+B_1A_3-B_2A_2\right)+F\left(\frac{\partial B_1}{\partial v}-\frac{\partial B_2}{\partial u}+A_1B_2-A_2B_1+B_1B_3-B_2^2\right)=E\alpha+F\beta\,.$$

En opérant de même avec $\frac{\partial\theta}{\partial v}$ au lieu de $\frac{\partial\theta}{\partial u}$, on obtient de même

$$F\left(\frac{\partial A_1}{\partial v}-\frac{\partial A_2}{\partial u}+B_1A_3-B_2A_2\right)+G\left(\frac{\partial B_1}{\partial v}-\frac{\partial B_2}{\partial u}+A_1B_2-A_2B_1+B_1B_3-B_2^2\right)-(DD''-D'^2)=F\alpha+G\beta$$

On en déduit les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial B_1}{\partial v}-\frac{\partial B_2}{\partial u}+A_1B_2-A_2B_1+B_1B_3-B_2^2=E\,\frac{DD''-D'^2}{EG-F^2}\,,\qquad(2)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial u}-\frac{\partial A_1}{\partial v}+A_2B_2-A_3B_1=F\,\frac{DD''-D'^2}{EG-F^2}\,.\qquad(3)$$

En partant de la seconde des équations (1), on obtient de même

$$E\left(\frac{\partial A_2}{\partial v}-\frac{\partial A_3}{\partial u}+A_2^2-A_1A_3+A_3B_2-A_2B_3\right)+F\left(\frac{\partial B_2}{\partial v}-\frac{\partial B_3}{\partial u}+A_2B_2-A_3B_1\right)+DD''-D'^2=E\alpha'+F\beta',$$

$$F\left(\frac{\partial A_2}{\partial v}-\frac{\partial A_3}{\partial u}+A_2^2-A_1A_3+A_3B_2-A_2B_3\right)+G\left(\frac{\partial B_2}{\partial v}-\frac{\partial B_3}{\partial u}+A_2B_2-A_3B_1\right)=F\alpha'+G\beta',$$

d'où les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial B_2}{\partial v}-\frac{\partial B_3}{\partial u}+A_2B_2-A_3B_1=F\,\frac{DD''-D'^2}{EG-F^2}\,.\qquad(4)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial u}-\frac{\partial A_2}{\partial v}+A_2B_3-A_3B_2-A_2^2=G\,\frac{DD''-D'^2}{EG-F^2}\,.\qquad(5)$$

$+A_1A_3$

Les quatre équations (2) à (5) se réduisent à une seule. On a en effet

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} = A_1 E + B_1 F \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} = A_2 E + B_2 F ,$$

d'où

$$E\frac{\partial A_1}{\partial v} + F\frac{\partial B_1}{\partial v} + A_1\frac{\partial E}{\partial v} + B_1\frac{\partial F}{\partial v} = E\frac{\partial A_2}{\partial u} + F\frac{\partial B_2}{\partial u} + A_2\frac{\partial E}{\partial u} + B_2\frac{\partial F}{\partial u} ,$$

et en tenant compte des relations

$$\frac{\partial F}{\partial u} = A_2 E + (A_1 + B_2)F + B_1 G \ , \quad \frac{\partial F}{\partial v} = A_3 E + (A_2 + B_3)F + B_2 G ,$$

on a

$$E\left(\frac{\partial A_2}{\partial u} - \frac{\partial A_1}{\partial v} + A_2 B_2 - A_3 B_1\right) = F\left(\frac{\partial B_1}{\partial v} - \frac{\partial B_2}{\partial u} + A_1 B_2 - A_2 B_1 + B_1 B_3 - B_2^2\right)$$

ce qui montre que les équations (2) et (3) sont équivalentes.

En partant de

$$\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} = A_2 F + B_2 G \ , \ \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} = A_3 F + B_3 G$$

on montre de même l'équivalence de (4) et (5).

Enfin, en partant des relations

$$A_1 + B_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\log(EG - F^2) \ , \ A_2 + B_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\log.(EG - F^2),$$

on montrera l'équivalence de (3) et (4).

On obtient donc une seule relation de condition, appelée équation de Gauss. Cette relation exprime que la courbure totale K de la surface ne dépend que de E, F, G et de leurs dérivées. Pour obtenir cette relation sous une forme symétrique, remarquons que l'on a

$$(EG - F^2)(DD'' - D'^2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 & \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} & \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} & \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 & \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 & \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} & \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} & \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 & \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} E & F & \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \\ F & G & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} \\ F & G & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & \Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2 \end{vmatrix} .$$

On a

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} = \Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right)^2 + \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^3 x}{\partial u\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} = \Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right)^2 + \Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^3 x}{\partial u\partial v^2} + \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^3 x}{\partial u^2\partial v},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} = \Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right) + \Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^3 x}{\partial u^2\partial v},$$

et par suite $$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} = -\left[\Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \Sigma\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right)^2\right].$$

On a donc

$$(EG-F^2)(DD''-D'^2) = -(EG-F^2)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right)$$

$$+\begin{vmatrix} E & F & \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \\ F & G & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} \\ F & G & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & 0 \end{vmatrix}.$$

On vérifie que cette équation est équivalente à chacune des équations (2) à (5). On peut d'ailleurs la mettre sous une autre forme en introduisant les quantités $A_1, \dots B_3$. On obtient ainsi

$$\left.\begin{aligned}(EG-F^2)K = DD''-D'^2 = &-\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right)\\ &-\left[EA_1A_3 + F(A_3B_1+A_1B_3) + GB_1B_3\right] + EA_2^2 + 2FA_2B_2 + GB_2^2.\end{aligned}\right\}(\mathrm{VI}).$$

93.- <u>Equations de Codazzi</u>.- Reprenons les équations (1) et multiplions le premier membre de la première, égalé à $\alpha\frac{\partial\theta}{\partial u} + \beta\frac{\partial\theta}{\partial v} + \gamma h$ par h, puis faisons $h = l, m, n$ et additionnons membre à membre. Il vient

$$\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} - A_2 D + (A_1 - B_2)D' + B_1 D'' = 0. \qquad (\mathrm{VII}_1)$$

En opérant de même sur la seconde des équations (1), on a

$$\frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} + A_3 D - (A_2 - B_3)D' - B_2 D'' = 0. \qquad (\mathrm{VII}_2)$$

Les équations (VII) sont les formules de Codazzi.

94.- <u>Effet d'un changement de variable</u>.- Faisons la substitution

$$u_1 = u_1(u,v),\quad v_1 = v_1(u,v),$$

l'élément linéaire de la surface devient (n° 37)

$$ds^2 = E_1\,du_1^2 + 2F_1\,du_1\,dv_1 + G_1\,dv_1^2.$$

Appelons D_1, D_1', D_1'' les fonctions analogues à D, D', D'' formées avec les nouvelles variables.

On a

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 + 2\mathcal{D}'_1 \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial u} + \mathcal{D}''_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2,$$

$$\mathcal{D}' = \mathcal{D}_1 \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + \mathcal{D}'_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial u}\right) + \mathcal{D}''_1 \frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v},$$

$$\mathcal{D}'' = \mathcal{D}_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + 2\mathcal{D}'_1 \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial v} + \mathcal{D}''_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2.$$

Les équations de Gauss et de Codazzi formées avec les coordonnées u_1, v_1 seront des conséquences des équations analogues formées avec les coordonnées u, v. On pourrait d'ailleurs le vérifier par le calcul. Notons que l'on a, en particulier

$$K = \frac{\mathcal{D}\mathcal{D}'' - \mathcal{D}'^2}{EG - F^2} = \frac{\mathcal{D}_1\mathcal{D}''_1 - \mathcal{D}'^2_1}{E_1 G_1 - F_1^2}.$$

95.- <u>Equations de Gauss et de Codazzi par rapport aux lignes de courbure</u>.- Supposons que les lignes u, v soient les lignes de courbure de la surface ; on a donc $F = 0$, $\mathcal{D}' = 0$ et par suite

$$A_1 = \frac{\partial}{\partial u}(\log\sqrt{E}), \quad A_2 = \frac{\partial}{\partial v}(\log\sqrt{E}), \quad A_3 = -\frac{G}{E}\frac{\partial}{\partial u}(\log\sqrt{E}),$$

$$B_1 = -\frac{E}{G}\frac{\partial}{\partial v}(\log\sqrt{E}), \quad B_2 = \frac{\partial}{\partial u}(\log\sqrt{G}), \quad B_3 = \frac{\partial}{\partial v}(\log\sqrt{G}).$$

L'équation de Gauss devient

$$\mathcal{D}\mathcal{D}'' = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right) + G\frac{\partial}{\partial u}(\log\sqrt{G})\frac{\partial}{\partial u}(\log\sqrt{EG}) + E\frac{\partial}{\partial v}(\log\sqrt{E})\frac{\partial}{\partial v}(\log\sqrt{EG}). \quad (\mathrm{VI}')$$

Les équations de Codazzi deviennent

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial v} &= \frac{G\mathcal{D} + E\mathcal{D}''}{G}\frac{\partial}{\partial v}(\log\sqrt{E}), \\ \frac{\partial\mathcal{D}''}{\partial u} &= \frac{G\mathcal{D} + E\mathcal{D}''}{E}\frac{\partial}{\partial u}(\log\sqrt{G}). \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{VII}')$$

95.- <u>Remarque</u>.- Les quantités $A_1, A_2, \ldots$ sont les symboles de Christoffel de seconde espèce attachés à la forme quadratique ds^2. On a

$$A_1 = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}, \quad A_2 = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}, \quad A_3 = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}, \quad B_1 = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}, \quad B_2 = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}, \quad B_3 = \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}.$$

§ 2.- Existence des surfaces.

96.- <u>Position du problème</u>.- Donnons-nous a priori six fonctions $E, F, G, \mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$ de u, v. Pour que ces fonctions puissent être les fonctions formées en partant des équations cartésiennes d'une surface et dénotées par les mêmes caractères, il faut qu'elles satisfassent aux équations de Gauss et de Codazzi. Ces conditions sont-elles suffisantes ? Nous allons démontrer que l'on doit répondre par l'affirmative à cette question. On suppose naturellement $EG - F^2 > 0$.

97.- <u>Equations intrinsèques</u>.- Considérons une surface (M) engendrée par un point M et à chaque point de la surface attachons le trièdre trirectangle appelé trièdre principal et dont les arêtes sont les tangentes Mt_1, Mt_2 aux lignes de courbure et la normale MN à la surface. Supposons la surface (M) rapportée à ses lignes de courbure u, v, Mt_1 étant la tangente à la ligne u. Soient l_1, m_1, n_1 les cosinus directeurs de Mt_1 ; l_2, m_2, n_2 ceux de Mt_2 ; l, m, n ceux de MN.

Nous avons

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad m_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad n_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$l_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad m_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad n_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v}$$

et, par les relations (IV), (V) établies plus haut (n° 90),

$$\frac{\partial l}{\partial u} = -\frac{D}{E} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial m}{\partial u} = -\frac{D}{E} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial n}{\partial u} = -\frac{D}{E} \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial l}{\partial v} = -\frac{D''}{G} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial m}{\partial v} = -\frac{D''}{G} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial n}{\partial v} = -\frac{D''}{G} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Pour abréger, nous représenterons par λ, λ_1, λ_2 l'un des ternes l, l_1, l_2 ; m, m_1, m_2 ; n, n_1, n_2. On a

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{D}{\sqrt{E}} \lambda_1, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = -\frac{D''}{\sqrt{G}} \lambda_2,$$

et ensuite, en utilisant les relations (I), (II), (III)

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \lambda_2 + \frac{D}{\sqrt{E}} \lambda, \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \lambda_2,$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \lambda_1, \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \lambda_1 + \frac{D''}{\sqrt{G}} \lambda.$$

On aura par suite

$$\left.\begin{aligned} d\lambda_1 &= \left[-\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \lambda_2 + \frac{D}{\sqrt{E}} \lambda\right] du + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \lambda_2 \, dv, \\ d\lambda_2 &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \lambda_1 \, du + \left[-\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \lambda_1 + \frac{D''}{\sqrt{G}} \lambda\right] dv, \\ d\lambda &= -\frac{D}{\sqrt{E}} \lambda_1 \, du - \frac{D''}{\sqrt{G}} \lambda_2 \, dv. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Les équations (A) sont les équations intrinsèques de la surface. Les conditions d'intégrabilité de ce système se ramènent aux équations (VI'), (VII') de Gauss et de Codazzi; par conséquent, si ces conditions sont satisfaites, le système (A) est complètement intégrable.

98.- Propriétés du système (A).- Soient h_1, h_2, h et h'_1, h'_2, h' deux intégrales du système (A). On a

$$d(h_1 h'_1 + h_2 h'_2 + h h') = h'_1 \, dh_1 + h'_2 \, dh_2 + h' dh = 0,$$

donc

$$h_1 h'_1 + h_2 h'_2 + h h' = c^{te}.$$

En particulier,

$$h_1^2 + h_2^2 + h^2 = c^{te}.$$

99.- Détermination d'une surface.- Choisissons des fonctions E, G, D, D'' satisfaisant aux équations (VI'), (VII') de Gauss et de Codazzi. Soit ensuite $l_1^{(0)}, m_1^{(0)}, n_1^{(0)}$; $l_2^{(0)}, m_2^{(0)}, n_2^{(0)}$; $l^{(0)}, m^{(0)}, n^{(0)}$ les cosinus directeurs de trois droites arêtes d'un trièdre trirectangle. Les intégrales l_1, l_2, l ; m_1, m_2, m ; n_1, n_2, n qui se réduisent pour $u = 0$, $v = 0$ respectivement à $l_1^{(0)}, l_2^{(0)}, l^{(0)}, \ldots$ vérifient les relations

$$l_1^2 + l_2^2 + l^3 = 1, \quad m_1 n_1 + m_2 n_2 + m n = 0, \ldots$$

et par suite l_1, m_1, n_1 ; l_2, m_2, n_2 ; l, m, n sont les cosinus directeurs des arêtes d'un trièdre trirectangle.

Posons

$$x = \int \sqrt{E}\, l_1 du + \sqrt{G}\, l_2 dv, \quad y = \int \sqrt{E}\, m_1 du + \sqrt{G}\, m_2 dv, \quad z = \int \sqrt{E}\, n_1 du + \sqrt{G}\, n_2 dv, \quad (1)$$

équations qui ont un sens car, en vertu du système (A), les expressions sous le signe sont des différentielles exactes.

Le point x, y, z décrit une surface rapportée à ses lignes de courbure u, v. Il est aisé de vérifier que pour cette surface, les formes fondamentales sont

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2, \quad D\,du^2 + D''\,dv^2.$$

La surface obtenue est unique et, si l'on tient compte du choix des données initiales et des constantes d'intégration intervenant dans les équations (1), on voit que la surface est complètement définie à un déplacement près.

100.- Cas général.- Donnons-nous les six fonctions E, F, G, D, D', D'' et écartons le cas

$$\frac{E}{D} = \frac{F}{D'} = \frac{G}{D''}$$

qui correspond à la sphère (n° 67). Supposons que ces fonctions satisfassent aux équations de Gauss et de Codazzi. De plus, on supposera $EG - F^2 > 0$. Effectuons le changement de variables $u_1 = u_1(u,v)$, $v_1 = v_1(u,v)$ et soient $E_1, F_1, \dots, D''_1$ les expressions de $E, F, \dots, D''$ par rapport à u_1, v_1.

Si les fonctions u_1, v_1 satisfont aux équations

$$E \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial v} \mp F\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial u}\right) + G\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} = 0,$$

$$D \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial v} \mp D'\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial u}\right) + D''\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} = 0,$$

on aura $F_1 = 0$ (n° 37) et $D'_1 = 0$ (n° 94). Or, sauf dans le cas exclus, il est toujours possible de satisfaire à ces conditions et E_1, G_1, D_1, D''_1 satisfont alors aux équations de Gauss et de Codazzi (V') et (VI'). On voit donc que :

<u>Si les fonctions E, F, G, D, D', D'' satisfont aux équations de Gauss et de Codazzi et si de plus on a $EG - F^2 > 0$, la surface est définie à des mouvements près.</u>

Chapitre VI.

Surfaces réglées gauches.

§1.- Propriétés du plan tangent.

101.- Equations d'une surface réglée.- Une surface réglée est engendrée par une droite dont un point décrit une courbe appelée courbe directrice, les paramètres directeurs de la droite étant des fonctions du point variable sur la directrice. Les équations paramétriques d'une surface réglée peuvent donc s'écrire

$$x = \varphi_1(v) + u\psi_1(v), \quad y = \varphi_2(v) + u\psi_2(v), \quad z = \varphi_3(v) + u\psi_3(v), \qquad (1)$$

les équations de la directrice étant obtenues en posant $u = 0$. Les génératrices rectilignes de la surface sont les lignes u.

Le cône, lieu des parallèles menées par l'origine aux droites de la surface a pour équations

$$\frac{x}{\psi_1(v)} = \frac{y}{\psi_2(v)} = \frac{z}{\psi_3(v)};$$

il est appelé cône directeur. Si ce cône se réduit à un faisceau de rayons, la surface est dite à plan directeur.

102.- Plan tangent.- Le plan tangent μ à la surface (1), en un point $M(u, v)$ a pour équation

$$|X - x \quad \psi \quad \varphi' + u\psi'| = 0$$

ou

$$|X - \varphi \quad \psi \quad \varphi'| + u\,|X - \varphi \quad \psi \quad \psi'| = 0.$$

Ce plan passe par la génératrice rectiligne de la surface passant par le point M.

Pour que, lorsque le point M décrit une génératrice rectiligne, le plan tangent reste fixe, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$|\psi \quad \varphi' \quad \psi'| = 0. \qquad (2)$$

La génératrice est alors appelée génératrice singulière de la surface.

Examinons les surfaces réglées dont toutes les génératrices sont singulières. L'équation (2) est alors vérifiée quelle que soit v ; il existe donc deux fonctions $u(v)$, $\rho(v)$ de v telles que

$$\varphi' + u\,\psi' = \rho\,\psi.$$

La surface est le lieu des tangentes à la courbe engendrée par le point

$$x = \varphi_1 + u\,\psi_1\,, \quad y = \varphi_2 + u\,\psi_2\,, \quad z = \varphi_3 + u\,\psi_3\,;$$

c'est donc une développable.

Les surfaces réglées non développables sont appelées surfaces gauches ; ce sont les seules que nous considérerons dans la suite. Nous nous limiterons en outre à la considération des génératrices non singulières.

103.- Surfaces réglées isotropes.- On appelle surface réglée isotrope une surface dont toutes les génératrices rectilignes sont des droites isotropes, c'est-à-dire qui s'appuient sur le cercle absolu. Pour ces surfaces, on a

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$$

et le cône directeur est le cône isotrope ayant pour sommet l'origine.

Sur une telle surface, les génératrices sont des lignes de longueur nulle.

104.- Forme particulière des équations paramétriques.- Ecartons les réglées isotropes et prenons comme paramètre v la longueur d'arc de la courbe directrice ; supposons en outre que les ψ soient les cosinus directeurs de la génératrice. On a donc

$$\Sigma\varphi'^2 = 1\,, \quad \Sigma\psi^2 = 1.$$

Le paramètre u est alors la distance, sur une génératrice, du point considéré au point d'appui sur la directrice.

Désignons par θ l'angle fait par une génératrice et la tangente en son point d'appui à la courbe directrice.

$$\cos\theta = \Sigma\varphi'\psi.$$

Les coefficients de l'élément linéaire sont

$$E = \Sigma\psi^2 = 1\,, \quad F = \Sigma\varphi'\psi + u\,\Sigma\psi\psi' = \cos\theta\,,$$

$$G = \Sigma\varphi'^2 + 2u\,\Sigma\varphi'\psi' + u^2\,\Sigma\psi'^2 = 1 + 2u\,\Sigma\varphi'\psi' + u^2\,\Sigma\psi'^2.$$

Nous poserons

$$M^2 = \Sigma\psi'^2\,, \qquad N = \Sigma\varphi'\psi',$$

d'où

$$ds^2 = du^2 + 2\,du\,dv\,\cos\theta + (1 + 2Nu + M^2u^2)\,dv^2.$$

105.- Angle de deux plans tangents.- Soient $M(u, v)$, $M_1(u, v)$ deux points d'une même génératrice g de la surface. On a

$$EG - F^2 = M^2 u^2 + 2Nu + \sin^2\theta$$

et les cosinus directeurs de la normale en M sont

$$l = \frac{\begin{vmatrix} \psi_2 & \psi_3 \\ u\psi_2' + \varphi_2' & u\psi_3' + \varphi_3' \end{vmatrix}}{\sqrt{M^2u^2 + 2Nu + \sin^2\theta}}, \ldots$$

Les cosinus directeurs de la normale en M_1 s'obtiendront de la même manière et l'angle ω des plans tangents en M, M_1 sera donné par

$$\cos\omega = \frac{\sum \begin{vmatrix} \psi_2 & \psi_3 \\ u\psi_2' + \varphi_2' & u\psi_3' + \varphi_3' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \psi_2 & \psi_3 \\ u_1\psi_2' + \varphi_2' & u_1\psi_3' + \varphi_3' \end{vmatrix}}{\sqrt{(M^2u^2 + 2Nu + \sin^2\theta)(M^2u_1^2 + 2Nu_1 + \sin^2\theta)}}.$$

Nous avons

$$\sum (\psi_2\varphi_3' - \psi_3\varphi_2')^2 = \sum\psi^2 \sum\varphi'^2 - (\sum\psi\varphi')^2 = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta,$$
$$\sum (\psi_2\psi_3' - \psi_3\psi_2') \cdot (\psi_2\varphi_3' - \psi_3\varphi_2') = N,$$
$$\sum (\psi_2\psi_3' - \psi_3\psi_2')^2 = \sum\psi^2 \cdot \sum\psi'^2 - (\sum\psi\psi')^2 = M^2.$$

Par suite

$$\cos\omega = \frac{M^2uu_1 + N(u+u_1) + \sin^2\theta}{\sqrt{(M^2u^2+2Nu+\sin^2\theta)(M^2u_1^2+2Nu_1+\sin^2\theta)}}.$$

La condition de perpendicularité de deux plans tangents est donc

$$M^2uu_1 + N(u+u_1) + \sin^2\theta = 0.$$

Par conséquent, les points de contact des plans tangents orthogonaux le long d'une même génératrice non singulière forment une involution.

106.- Point central.- Considérons deux génératrices g, g_1 données par v, v_1. La plus courte distance de ces deux droites est donnée par

$$\frac{\left|\varphi(v_1) - \varphi(v) \quad \psi(v_1) \quad \psi(v)\right|}{\sqrt{\sum\left[\psi_2(v_1)\psi_3(v) - \psi_3(v_1)\psi_2(v)\right]^2}}.$$

Les équations de la droite portant cette plus courte distance sont

$$\begin{vmatrix} X - \varphi_1(v) \\ \psi_1(v) \\ \psi_2(v)\psi_3(v_1) - \psi_3(v)\psi_2(v_1) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} X - \varphi_1(v_1) \\ \psi_1(v_1) \\ \psi_2(v)\psi_3(v_1) - \psi_3(v)\psi_2(v_1) \end{vmatrix} = 0$$

Faisons tendre g_1 vers g et posons $v_1 = v + \Delta v$. Nous avons

$$\varphi_i(v+\Delta v) = \varphi_i(v) + \frac{\Delta v}{1}\left[\varphi_i'(v) + \varepsilon_i\right],$$
$$\psi_i(v+\Delta v) = \psi_i(v) + \frac{\Delta v}{1}\left[\psi_i'(v) + \varepsilon_i'\right], \qquad (i=1,2,3)$$

les ε tendant vers zéro en même temps que Δv. La limite de la plus courte distance est

$$\frac{|\varphi' \quad \psi' \quad \psi|}{M}\,\Delta v .$$

On a

$$|\varphi' \quad \psi' \quad \psi|^2 = M^2 \sin^2\theta - N^2 .$$

La limite de la plus courte distance est donc

$$d\delta = \frac{\sqrt{M^2\sin^2\theta - N^2}}{M}\,dv.$$

La coordonnée u de l'intersection de la droite g avec la plus courte distance est donnée par

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(v) - \varphi_1(v_1) + u\,\psi_1(v) \\ \psi_1(v_1) \\ \psi_2(v)\,\psi_3(v_1) - \psi_3(v)\,\psi_2(v_1) \end{vmatrix} = 0 .$$ Inf. petit dust. ds De.

A la limite, on a

$$M^2 u + N = 0 .$$

Le point de la génératrice g donné par cette valeur du paramètre u est appelé point central de la génératrice. Le lieu de ce point est la ligne de striction de la surface.

107.- Remarque.- On a vu que les développables étaient caractérisées par

$$|\psi \quad \psi' \quad \varphi'| = 0,$$

c'est-à-dire, d'après ce qui précède, par

$$M^2\sin^2\theta - N^2 = 0 .$$

Pour une développable, la ligne de striction est indéterminée.

108.- Plan asymptote et plan central.- On appelle plan asymptote d'une réglée le long d'une génératrice, le plan tangent à cette surface au point impropre de cette génératrice. Son équation est

$$|X - \varphi \quad \psi \quad \psi'| = 0 .$$

Il est donc parallèle au plan tangent au cône directeur le long de la génératrice correspondante.

Le plan central est le plan tangent à la surface au point central.

Si le plan tangent au point de paramètre u est perpendiculaire au plan asymptote, on a

$$M^2 u + N = 0$$

et par suite le plan central et le plan asymptote sont perpendiculaires.

109.- Théorème de Chasles.- Soit u_0 le paramètre du point central. L'angle V du plan tangent au point de paramètre u avec le plan central est donné par

$$\cos V = \sqrt{\frac{Nu_0 + \sin^2\theta}{M^2 u^2 + 2Nu + \sin^2\theta}}.$$

On a donc $tg^2 V = \frac{M^2 u_0^2 + Nu_0}{Nu_0 + \sin^2\theta} =$ $\quad tg^2 V = \frac{M^2u^2 + 2Nu - Nu_0 + M^2u_0^2 + Nu_0}{Nu_0 + \sin^2\theta}$

$$tg\, V = (u - u_0)\frac{M}{\sqrt{Nu_0 + \sin^2\theta}}.$$

$tg^2 V = \frac{M^2(u^2 + u_0^2) - 2M^2 u u_0}{Nu_0 + \sin^2\theta}$

$tg\, V = \frac{M}{\sqrt{Nu_0 + \sin^2\theta}}(u - u_0)$

La quantité $u - u_0$ exprime la distance du point de paramètre u au point central. La relation précédente montre que lorsque le point de contact décrit la génératrice, le plan tangent tourne autour de celle-ci. La ponctuelle des points de contact et le faisceau des plans tangents sont projectifs (Chasles).

La quantité

$$k = \frac{\sqrt{Nu_0 + \sin^2\theta}}{M}$$

est appelée paramètre de distribution du plan tangent.

On observera que le paramètre de distribution d'une développable est nul.

110.- Raccordement des surfaces réglées. - Considérons deux surfaces réglées ayant en commun une génératrice g et mêmes plans tangents en trois points M_1, M_2, M_3 de cette génératrice. Le plan tangent à la première réglée en un point M de g est tangent à la seconde en un point M' de g. Les points M, M' correspondent projectivement au faisceau de plans d'axe g, donc les ponctuelles (M), (M') sont projectives. Cette projectivité possède trois points unis M_1, M_2, M_3 et est donc l'identité. Les deux surfaces ont mêmes plans tangents le long de la génératrice g ; on dit qu'elles se raccordent le long de cette génératrice.

§2.- Courbes tracées sur la surface.

111.- Trajectoires orthogonales des génératrices. - L'angle d'une courbe avec une courbe u sur une surface est donné par

$$\cos\omega = \frac{E\,du + F\,dv}{\sqrt{E}\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}}.$$

L'équation différentielle des trajectoires orthogonales des génératrices est donc

$$du + dv \cos\theta = 0,$$ car $E = 1$, $F = \cos\theta$.

et l'équation sous forme finie

$$u + \int \cos\theta \, dv = C^{te}.$$

Supposons en particulier que les lignes v soient les trajectoires orthogonales des génératrices ; on a $\cos\theta = 0$, $\sin^2\theta = 1$ et l'élément linéaire s'écrit

$$ds^2 = du^2 + M^2\left[(u - u_0)^2 + k^2\right] dv^2, \qquad (1)$$

u_0 étant la coordonnée u du point central et k le paramètre de distribution.

L'expression (1) peut encore se simplifier en changeant de paramètre v. Prenons l'intersection du cône directeur et de la sphère de rayon un ayant pour centre l'origine ; la courbe obtenue est appelée indicatrice sphérique de la réglée. L'élément linéaire de cette courbe est

$$dv_1^2 = \Sigma (d\psi)^2 = M^2 dv^2 ;$$

par suite, on a

$$ds^2 = du^2 + \left[(u - u_0)^2 + k^2\right] dv_1^2. \qquad (2)$$

Le centre de courbure géodésique d'une trajectoire orthogonale des génératrices, en un point M, se trouve sur la génératrice passant par ce point, génératrice confondue ici avec la normale géodésique à la courbe.

112.- <u>Propriété de l'équation de Riccati.</u> - On appelle équation de Riccati une équation différentielle de la forme

$$y' = Ay^2 + By + C.$$

Soient y_1, y_2, y_3, y_4 quatre solutions particulières de cette équation. On a

$$y_1' - y_3' = (y_1 - y_3)\left[A(y_1 + y_3) + B\right],$$
$$y_1' - y_4' = (y_1 - y_4)\left[A(y_1 + y_4) + B\right],$$

d'où

$$\frac{y_1' - y_3'}{y_1 - y_3} - \frac{y_1' - y_4'}{y_1 - y_4} = A(y_3 - y_4)$$

et en intégrant

$$\log(y_1 - y_3) - \log(y_1 - y_4) = \int A(y_3 - y_4)\,dx + \log C_1.$$

On aura de même

$$\log(y_2 - y_3) - \log(y_2 - y_4) = \int A(y_3 - y_4)\,dx + \log C_2.$$

On en conclut

$$\frac{y_1 - y_3}{y_1 - y_4} : \frac{y_2 - y_3}{y_2 - y_4} = C^{te}.$$

Le rapport anharmonique de quatre solutions particulières de l'équation de Riccati est donc constant.

113.- <u>Lignes asymptotiques.</u> - Supposons la surface réglée rapportée à ses génératrices rectilignes u et à des courbes v, le paramètre v étant la longueur d'arc des courbes v et le paramètre u la distance sur les génératrices (nº 104). L'équation différentielle des asymptotiques est

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0.$$

On a, en posant $D'_1 = D'\sqrt{EG-F^2}$, $D''_1 = D''\sqrt{EG-F^2}$,

$$D = 0, \quad D'_1 = |\psi\ \varphi'\ \psi'|, \quad D''_1 = |\psi\ \varphi'\ \psi''|u^2 + \big[|\psi\ \psi'\ \varphi''| + |\psi\ \varphi'\ \psi''|\big]u + |\psi\ \varphi'\ \varphi''|.$$

L'équation des asymptotiques se réduit donc aux équations

$$dv = 0, \qquad \frac{du}{dv} = Au^2 + Bu + C.$$

Les génératrices rectilignes forment donc les asymptotiques d'une famille. Les asymptotiques de l'autre famille sont obtenues par intégration d'une équation de Riccati et par suite quatre asymptotiques de cette seconde famille rencontrent les génératrices rectilignes en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.

114.– Lignes de courbure. – L'équation des lignes de courbure est

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ 1 & \cos\theta & M^2u^2+2Nu+1 \\ 0 & D' & D'' \end{vmatrix} = 0,$$

les coordonnées u, v ayant la même interprétation qu'au nº 104.

115.– Théorème d'Ossian-Bonnet. – La courbe géodésique $\frac{1}{R_g}$ d'une courbe v a pour expression (nº 78),

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{\sqrt{M^2u^2+2Nu+\sin^2\theta}} \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta\,\frac{d\theta}{dv} - M^2u - N \\ M^2u^2+2Nu+1 & Mu^2\,\frac{\partial M}{\partial v} + u\,\frac{\partial N}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

En particulier, la courbure géodésique de la courbe directrice $(u=0)$ est donnée par

$$\frac{1}{R_g} = \frac{d\theta}{dv} + \frac{N}{\sin\theta}.$$

Si deux des trois quantités $\frac{1}{R_g}$, $\frac{d\theta}{dv}$, N sont nulles, la troisième l'est également. Or, si $\frac{1}{R_g}$ est nulle, la directrice est une géodésique ; si N est nulle, la directrice est la ligne de striction. Enfin si $\frac{d\theta}{dv}$ est nulle, la directrice coupe les génératrices rectilignes sous un angle constant, Il en résulte que si la directrice possède deux de ces propriétés, elle possède également l'autre. C'est le théorème d'Ossian-Bonnet.

Chapitre VI.

Congruences de droites.

§1.- Foyers, plans focaux et surface focale.

116.- Définitions.- Une congruence de droites est l'ensemble des droites dépendant de deux paramètres. On peut engendrer une congruence de droites en se donnant les paramètres directeurs d'une droite de la congruence passant par un point d'une surface appelée surface directrice. Les équations d'une droite de la congruence s'écrivent

$$x = \varphi_1(u,v) + w\,\psi_1(u,v),\quad y = \varphi_2(u,v) + w\,\psi_1(u,v),\quad z = \varphi_3(u,v) + w\,\psi_3(u,v). \quad (1)$$

La surface directrice est donnée par $w = 0$; cette surface peut se réduire à une courbe ou à un point (gerbe de rayons).

On appelle surface d'une congruence une surface réglée engendrée par des droites de cette congruence. Une surface de la congruence (1) s'obtient en établissant une relation $f(u,v) = 0$.

117.- Foyers.- Soit g une droite de la congruence (1). Considérons les surfaces de la congruence contenant g. On appelle foyer un point de la droite g en lequel toutes les surfaces considérées ont même plan tangent.

Soient u, v les paramètres de g, w le paramètre d'un point M de g. Le plan tangent en M à une surface de la congruence $f(u,v) = 0$ contenant g a pour équation

$$\left| X - \varphi - w\psi \quad \psi \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv + w\left\{\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv\right\} \right| = 0,$$

où

$$\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = 0$$

Pour que ce plan tangent soit indépendant de $f = 0$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\left| \psi \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u} + w\frac{\partial\psi}{\partial u} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} + w\frac{\partial\psi}{\partial v} \right| = 0. \qquad (2)$$

C'est une équation du second degré en w, donc en général une droite de la congruence contient deux foyers.

118. – Surface focale. – On appelle surface focale d'une congruence le lieu des foyers.

Supposons les foyers distincts ; la surface focale se compose alors de deux nappes et nous prendrons une de ces nappes comme surface directrice. L'équation (2) doit être vérifiée pour $w = 0$ et on a

$$\left| \psi \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| = 0.$$

Les droites de la congruence sont donc tangentes à la nappe focale considérée aux foyers correspondants. Il en résulte que la congruence est constituée par les bitangentes à une surface.

119. – Courbe focale. – Supposons que les droites de la congruence (1) s'appuient sur une courbe. Nous pouvons supposer que la surface directrice se réduit à cette courbe ; on peut alors choisir les paramètres u, v de manière à ce que la congruence soit représentée par

$$x = \varphi_1(u) + w\psi_1(u,v), \quad y = \varphi_2(u) + w\psi_2(u,v), \quad z = \varphi_3(u) + w\psi_3(u,v). \quad (3)$$

On a alors

$$\left| \psi \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| \equiv 0$$

et l'équation (2) possède la racine $w = 0$. Les points d'appui des droites de la congruence sur la courbe directrice sont donc des foyers.

120. – Congruences à foyers confondus. – Supposons que la congruence possède une surface focale et prenons-la pour surface directrice. Si les deux foyers sont confondus pour toute droite, l'équation (2) a la racine double $w = 0$ et on a

$$\left| \psi \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| = 0, \quad \left| \psi \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} \right| + \left| \psi \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| = 0.$$

La première équation donne

$$\psi = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

et la dernière donne ensuite

$$D\lambda^2 + 2D'\lambda\mu + D''\mu^2 = 0.$$

La congruence est donc formée par les tangentes asymptotiques d'un mode de la surface focale.

Supposons maintenant que la congruence ait une courbe focale et soit représentée par les équations (3). On doit avoir

$$\left| \psi \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} \right| = 0.$$

Considérons la surface de la congruence donnée par $u = C^{te}$; c'est un cône dont le sommet S appartient à la courbe directrice. Les plans tangents à ce cône ont pour équation

$$\left| X - \varphi \quad \psi \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} \right| = 0 \ ;$$

en tenant compte de la condition précédente, cette équation devient

$$\left| X - \varphi \quad \psi \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right| = 0 .$$ indép. … de v.

Tous ces plans passent donc par la tangente à la courbe au point S et le cône se réduit à un faisceau de rayons. La congruence est le lieu de ∞^1 faisceaux de rayons dont les sommets sont sur une courbe et dont les plans sont tangents à la courbe aux points correspondants.

Il est aisé de voir que si les droites d'une congruence passent par un point fixe (gerbe de rayons), ce point est l'unique foyer.

121.- <u>Développables de la congruence</u>.- Reprenons la congruence (1). Pour que la surface de la congruence définie par $f(u,v) = 0$ et passant par la droite $g(u,v)$ soit développable, il faut et il suffit que l'on ait

$$\left| \psi \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \qquad \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv \right| = 0 . \qquad (4)$$

Les intégrales de l'équation (4) donnent inversement les surfaces développables de la congruence. Cette équation étant du second degré par rapport à $\frac{du}{dv}$, il passe en général deux développables par une droite de la congruence.

Considérons une développable $f(u,v) = 0$ passant par la droite g et soient

$$x = \varphi_1 + w_1 \psi_1 \ , \ y = \varphi_2 + w_1 \psi_2 \ , \ z = \varphi_3 + w_1 \psi_3$$

les équations de l'arête de rebroussement. La tangente à cette courbe au point u, v a pour équations

$$\frac{X - \varphi_1 - w_1 \psi_1}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} dv + w_1 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial u} du + \frac{\partial \psi_1}{\partial v} dv \right)} = \frac{Y - \varphi_2 - w_1 \psi_2}{\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} + w_1 \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial u} du + \frac{\partial \psi_2}{\partial v} dv \right)} = \frac{Z - \varphi_3 - w_1 \psi_3}{\frac{\partial \varphi_3}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} dv + w_1 \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial u} du + \frac{\partial \psi_3}{\partial v} dv \right)} .$$

Cette droite doit coïncider avec la droite g, donc on doit avoir

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} dv + w_1 \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial u} du + \frac{\partial \psi_i}{\partial v} dv \right) = \lambda \psi_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

L'élimination de du, dv, λ entre ces équations donne l'équation (2), par conséquent l'arête de rebroussement d'une développable de la congruence appartient à la surface focale.

122.- <u>Congruences à foyers distincts</u>. - Considérons une congruence à foyers distincts et soient F_1, F_2 les foyers d'une droite g. La surface focale se compose de deux nappes (F_1), (F_2). Il existe, sur la surface (F_1), une famille de courbes qui sont les arêtes de rebroussement des développables de la congruence ; nous disposerons des paramètres u, v de manière à ce que, sur (F_1), ces courbes soient les courbes v et nous prendrons la surface (F_1) comme surface directrice. Toutes les droites de la congruence étant tangentes aux courbes v de la surface (F_1) nous pouvons poser $\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ et l'équation différentielle des développables de la congruence devient

$$(D' du + D'' dv)\, du = 0.$$

L'équation aux directions conjuguées sur la surface (F_1) est

$$D\, du\, \delta u + D'(du\, \delta v + dv\, \delta u) + D''\, dv\, \delta v = 0.$$

Sur la surface (F_1), les développables de la congruence déterminent deux familles de courbes ; les unes sont les courbes v $(du = 0)$, les autres les courbes intégrales de $D' du + D'' dv = 0$; ces courbes forment un réseau conjugué. On pourra donc construire les développables de la congruence de la manière suivante : Considérons une courbe v sur la surface (F_1) et en chaque point de cette courbe, menons la tangente conjuguée à la tangente à cette courbe v ; le lieu de ces droites est une développable dont l'arête de rebroussement appartient à la surface (F_2).

Cette construction donne lieu à une transformation importante : la transformation de Laplace, que nous étudierons plus loin.

Examinons maintenant le cas où la surface focale (F_1) dégénère en une courbe et prenons les équations de la congruence sous la forme (3). L'équation différentielle des développables devient

$$\left| \psi \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad \frac{\partial \psi}{\partial u}\, du + \frac{\partial \psi}{\partial v}\, dv \right| du = 0.$$

Les développables $du = 0$ sont des cônes ayant leurs sommets aux points de la courbe directrice. Les autres développables contiennent cette courbe.

123.- <u>Congruences à foyers confondus</u>. - Supposons que les foyers F_1, F_2 des droites de la congruence (g) soient confondus et examinons le cas où la surface focale (F_1) est une surface proprement dite. Les droites g sont les tangentes aux asymptotiques d'un mode de (F_1) ; nous pouvons supposer que ces asymptotiques soient les courbes v. On a alors $D'' = 0$ et nous pouvons d'autre part poser $\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$. L'équation différentielle des développables se réduit à $D' du^2 = 0$ et par suite les développables passant par une droite de la congruence sont confondues. Ces développables sont les lieux des tangentes aux courbes asymptotiques v.

Lorsque la surface focale (F_1) se réduit à une courbe, il est aisé de voir que l'équation différentielle des développables se réduit à $du^2 = 0$; ces développables sont donc les faisceaux de rayons de la congruence.

124.- Classification des congruences.- D'après ce qui précède, on peut classer les congruences de droites de la manière suivante :

a) Congruence des droites tangentes à deux surfaces (ou à deux nappes d'une surface) ;

b) Congruence des droites s'appuyant sur une courbe et tangentes à une surface ;

c) Congruence des droites s'appuyant sur deux courbes (ou en deux points sur une courbe) ;

d) Congruence des tangentes aux asymptotiques d'un mode d'une surface ;

e) Congruence lieu d'un faisceau de rayons dont le sommet appartient à une courbe et dont le plan passe par la tangente à cette courbe au sommet du faisceau.

Nous nous limiterons, dans ce qui va suivre, aux congruences de la première catégorie.

125.- Plans focaux.- On appelle plans focaux d'une congruence les plans tangents aux surfaces focales. Il en résulte que par une droite de la congruence passent en général deux plans focaux ; ce sont les plans tangents le long de cette droite aux développables de la congruence qui la contiennent.

Si l'on retourne à la définition des foyers, on voit que le plan tangent en un foyer à toutes les surfaces de la congruence passant par cette droite, est un plan focal.

§ 2.- Points limites.

126.- Formes de Kümmer.- Nous ne considérerons que des congruences ayant deux nappes focales distinctes, non dégénérées en des courbes. Une telle congruence ne peut donc être formée de droites isotropes, car alors le cercle absolu serait une courbe focale. Nous pouvons donc supposer que l'on a

$$\Sigma \psi^2 = 1,$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 étant les cosinus directeurs de la droite (1). Dans ces conditions, w est la distance du point de coordonnées (1) au point de rencontre de la droite avec la surface directrice.

Nous poserons

$$\mathcal{E} = \Sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2, \quad \mathcal{F} = \Sigma \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}, \quad \mathcal{G} = \Sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2,$$

$$e = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}, \quad f = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}, \quad f' = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}, \quad g = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}.$$

Les formes différentielles

$$\mathcal{E}\,du^2 + 2\,\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2,$$
$$e\,du^2 + (f+f')\,du\,dv + g\,dv^2$$

ont été introduites par Kümmer.

127.- Nouvelle forme de l'équation différentielle des développables.- L'équation différentielle des développable obtenue plus haut peut s'écrire plus simplement en utilisant les notations de Kümmer. Multiplions les deux membres de cette équation par le déterminant

$$\left| \psi \quad \frac{\partial\psi}{\partial u} \quad \frac{\partial\psi}{\partial v} \right|$$

qui ne peut être nul sous les conditions posées. On obtient l'équation

$$\begin{vmatrix} e\,du + f\,dv & \mathcal{E}\,du + \mathcal{F}\,dv \\ f'\,du + g\,dv & \mathcal{F}\,du + \mathcal{G}\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

Quant à l'équation aux foyers, elle devient

$$\begin{vmatrix} e + w\mathcal{E} & f + w\mathcal{F} \\ f' + w\mathcal{F} & g + w\mathcal{G} \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)\,w^2 + \left[\mathcal{E}g - \mathcal{F}(f+f') + \mathcal{G}e\right]w + eg - ff' = 0.$$

128.- Plus courte distance de deux droites.- Soient g, $\bar{g}$ deux droites de la congruence correspondant respectivement aux paramètres u, v et $u_1 = u + \Delta u$, $v_1 = v + \Delta v$.

Nous poserons

$$\bar{\varphi}_i = \varphi_i(u_1, v_1) = \varphi_i(u,v) + \Delta u \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} + \Delta v \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} + R_i,$$

$$\bar{\psi}_i = \psi_i(u_1, v_1) = \psi_i(u,v) + \Delta u \frac{\partial \psi_i}{\partial u} + \Delta v \frac{\partial \psi_i}{\partial v} + R'_i,$$

$$R_i = \frac{1}{2}\left[\Delta u \frac{\partial}{\partial u} + \Delta v \frac{\partial}{\partial v}\right]^2 \varphi_i(u + \theta_i \Delta u, v + \theta_i \Delta v),\ 0 < \theta_i < 1,$$

$$R'_i = \frac{1}{2}\left[\Delta u \frac{\partial}{\partial u} + \Delta v \frac{\partial}{\partial v}\right]^2 \psi_i(u + \theta_i \Delta u, v + \theta_i \Delta v),\ 0 < \theta'_i < 1.$$

La plus courte distance de g, $\bar{g}$ a pour valeur

$$\Delta\delta = \frac{|\bar{\varphi} - \varphi \quad \bar{\psi} \quad \psi|}{\sqrt{\Sigma(\psi_2 \bar{\psi}_3 - \psi_3 \bar{\psi}_2)^2}}.$$

A la limite, pour Δu, Δv tendant vers zéro, on a

$$d\delta = \frac{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u} du + \frac{\partial\varphi}{\partial v} dv \quad \frac{\partial\psi}{\partial u} du + \frac{\partial\psi}{\partial v} dv \quad \psi\right|}{\sqrt{\Sigma\left[\psi_2\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial u} du + \frac{\partial\psi_3}{\partial v} dv\right) - \psi_3\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial u} du + \frac{\partial\psi_2}{\partial v} dv\right)\right]^2}}$$

Multiplions le numérateur par

$$\left|\psi \quad \frac{\partial\psi}{\partial u} \quad \frac{\partial\psi}{\partial v}\right|,$$

on obtient

$$\begin{vmatrix} e\,du + f\,dv & f'\,du + g\,dv \\ \mathcal{E}\,du + \mathcal{F}\,dv & \mathcal{F}\,du + \mathcal{G}\,dv \end{vmatrix}$$

D'autre part, on a

$$\left|\psi \quad \frac{\partial\psi}{\partial u} \quad \frac{\partial\psi}{\partial v}\right|^2 = \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2.$$

Le dénominateur de $d\delta$ est égal à

$$\sqrt{\mathcal{E}\,du^2 + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2}$$

et par suite, on a

$$d\delta = \frac{\begin{vmatrix} e\,du + f\,dv & f'\,du + g\,dv \\ \mathcal{E}\,du + \mathcal{F}\,dv & \mathcal{F}\,du + \mathcal{G}\,dv \end{vmatrix}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}\ \sqrt{\mathcal{E}\,du^2 + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2}}.$$

Le plan passant par $\bar{g}$ et par la plus courte distance des droites g, $\bar{g}$ a pour équation

$$|X - \bar{\varphi} \quad \bar{\psi} \quad \psi_2\bar{\psi}_3 - \psi_3\bar{\psi}_2| = 0$$

et l'abscisse w du pied de la plus courte distance sur la droite g est donc donnée par

$$|\varphi - \bar{\varphi} \quad \bar{\psi} \quad \psi_2\bar{\psi}_3 - \psi_3\bar{\psi}_2| + w\,|\psi \quad \bar{\psi} \quad \psi_2\bar{\psi}_3 - \psi_3\bar{\psi}_2| = 0.$$

A la limite, pour Δu, Δv tendant vers zéro, on aura

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u} du + \frac{\partial\varphi}{\partial v} dv \quad \psi \quad \psi_2\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial u} du + \frac{\partial\psi_3}{\partial v} dv\right) - \psi_3\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial u} du + \frac{\partial\psi_2}{\partial v} dv\right)\right|$$
$$= w\left|\psi \quad \frac{\partial\psi}{\partial u} du + \frac{\partial\psi}{\partial v} dv \quad \psi_2\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial u} du + \cdots\right)\right|.$$

En multipliant les deux membres de cette relation par

$$\begin{vmatrix} \varphi & \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \end{vmatrix},$$

on trouve

$$w = -\frac{e\,du^2 + (f+f')\,du\,dv + g\,dv^2}{\mathcal{E}\,du^2 + 2\mathcal{F}\,du\,dv + \mathcal{G}\,dv^2}.$$

129.- __Points-limites.__- Ecartons le cas où e, $f+f'$, g sont proportionnels à $\mathcal{E}$, $2\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et cherchons les extrêma de w. Ils sont donnés par les valeurs de du, dv vérifiant la relation

$$\frac{2e\,du + (f+f')\,dv}{\mathcal{E}\,du + \mathcal{F}\,dv} = \frac{(f+f')\,du + 2g\,dv}{\mathcal{F}\,du + \mathcal{G}\,dv}.$$

Les valeurs correspondantes w_1, w_2 de w sont donc racines de l'équation

$$(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)^{?}\, w^2 + [\mathcal{E}g - (f+f')\mathcal{F} + \mathcal{G}e]\,w + eg - \left(\frac{f+f'}{2}\right)^2 = 0.$$

Les points L_1, L_2, d'abscisses w_1, w_2 sont appelés points-limites de la droite g.

Si nous désignons par w'_1, w'_2 les abscisses des foyers F_1, F_2, nous avons, par l'équation du n° 127,

$$w'_1 + w'_2 = -\frac{\mathcal{E}g - (f+f')\mathcal{F} + \mathcal{G}e}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} = w_1 + w_2,$$

par suite, les milieux des segments L_1L_2 et F_1F_2 coïncident.

Lorsque l'on a

$$e : f+f' : g = \mathcal{E} : 2\mathcal{F} : \mathcal{G},$$

le pied de la plus courte distance de la droite g à toute droite infiniment voisine est fixe et les points-limites sont confondus. Les congruences possédant cette propriété ont été étudiées par Ribaucour.

130.- __Plans principaux et surfaces principales.__- Supposons les points limites distincts. On appelle plans principaux les plans passant par g et par les plus courtes distances aboutissant aux points limites.

Le plan passant par g et par la plus courte distance de cette droite à la droite $\bar{g}$ a pour équation

$$|X - \varphi \quad \psi \quad \psi_2\bar{\psi}_3 - \psi_3\bar{\psi}_2| = 0.$$

A la limite, Δu et Δv tendant vers zéro, ce plan devient

$$\Sigma (X - \varphi_1)\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial u}du + \frac{\partial\psi_1}{\partial v}dv\right) = 0.$$

Supposons que du, dv correspondent au point limite L_1 et δu, δv au point limite L_2. Ces quantités satisfont à l'équation

$$\left[2e\mathcal{F}-(f+f')\mathcal{E}\right]du^2+2\left(e\mathcal{G}-g\mathcal{E}\right)du\,dv+\left[\mathcal{G}(f+f')-2g\mathcal{F}\right]=0$$

et on a
$$\frac{du}{dv}\,\frac{\delta u}{\delta v}=-\frac{2g\mathcal{F}-(f+f')\mathcal{G}}{2e\mathcal{F}-(f+f')\mathcal{E}}\ ,\quad \frac{du}{dv}+\frac{\delta u}{\delta v}=-2\,\frac{e\mathcal{G}-g\mathcal{E}}{2e\mathcal{F}-(f+f')\mathcal{E}}.$$

D'autre part
$$\Sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\delta u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\delta v\right)=\mathcal{E}du\,\delta u+\mathcal{F}(du\,\delta v+dv\,\delta u)+\mathcal{G}\,dv\,\delta v.$$

En vertu des relations précédentes, cette expression est identiquement nulle et par suite les plans principaux sont perpendiculaires.

Les surfaces principales sont les surfaces de la congruence dont les points centraux sont des points limites. Si nous supposons u, v fonctions de t, la ligne de striction de la surface de la congruence ainsi obtenue sera donnée par $M^2 w+N=0$. Actuellement, on a

$$M_2=\frac{\mathcal{E}du^2+2\mathcal{F}du\,dv+\mathcal{G}dv^2}{dt^2}\ ,\quad N=\frac{e\,du^2+(f+f')du\,dv+g\,dv^2}{dt^2}.$$

Pour que la surface soit principale, il faut et il suffit que du, dv correspondent à un point limite ; l'équation différentielle des surfaces principales est donc

$$\begin{vmatrix} e\,du+\dfrac{f+f'}{2}dv & \mathcal{E}du+\mathcal{F}dv \\ \dfrac{f+f'}{2}du+g\,dv & \mathcal{F}du+\mathcal{G}dv\end{vmatrix}=0.$$

131.- <u>Surfaces associées à une congruence</u>.- ~~Dans ce~~ Dans ce qui précède, on a associé deux surfaces à une congruence rectiligne : les surfaces focales. On a considéré en outre la famille double des développables et la famille double des surfaces réglées principales. On peut y associer trois autres surfaces :

a) Les deux surfaces limites, lieu des points limites L_1, L_2 ;

b) La surface moyenne, lieu des milieux des segments F_1F_2, L_1L_2 déterminés par les foyers et les points limites.

Lorsqu'il s'agit d'une congruence de Ribaucour (nº 129), ces trois dernières surfaces coïncident.

§ 3.- Congruences de normales.

132.- <u>Définition et propriétés immédiates</u>.- Une congruence de normales est constituée par les normales à une surface. Si nous prenons cette surface pour surface directrice (φ), les développables de la congruence sont des normalies de cette surface et découpent donc, sur la surface (φ), les lignes de courbure. Il en résulte que les plans focaux sont orthogonaux et sont précisément les plans des sections normales principales. Par conséquent, les congruences de normales sont des congruences particulières.

133.- <u>Propriété caractéristique des congruences de normales.</u>- Considérons la congruence

$$x = \varphi_1(u,v) + w\psi_1(u,v), \quad y = \varphi_2(u,v) + w\psi_2(u,v), \quad z = \varphi_3(u,v) + w\psi_3(u,v)$$

et supposons que pour $w = w_0(u,v)$ on ait une surface normale aux rayons de la congruence. Nous supposerons que les ψ sont des cosinus directeurs et nous adopterons les notations de Kümmer.

Nous devons avoir

$$\Sigma\psi\,(d\varphi + w_0\, d\psi + \psi\, dw_0) = 0$$

d'où

$$\frac{\partial w_0}{\partial u} + \Sigma\psi\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial v} + \Sigma\psi\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0.$$

La condition d'intégrabilité donne

$$-\frac{\partial^2 w_0}{\partial u\,\partial v} = \Sigma\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} = \Sigma\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u},$$

d'où $f = f'$.

Réciproquement, si $f = f'$, il existe une fonction w_0 de u, v intégrale de l'équation

$$dw_0 + du\,\Sigma\psi\frac{\partial\varphi}{\partial u} + dv\,\Sigma\psi\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0$$

et les surfaces données par

$$w_0 = -\int\Sigma\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right)$$

sont des trajectoires orthogonales des rayons de la congruence.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence soit une congruence de normales est que l'on ait $f = f'$.

Sous cette condition, les équations aux abscisses des points limites et des foyers coïncident, donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence soit une congruence de normales est que les points limites coïncident avec les foyers.

134.- Développées d'une surface. - On appelle développées d'une surface les surfaces focales de la congruence des normales à une surface.

Considérons une surface (M) que nous prendrons comme surface directrice et la congruence des normales à cette surface. Elle est représentée par

$$x = \varphi_1(u,v) + wl, \quad y = \varphi_2(u,v) + wm, \quad z = \varphi_3(u,v) + wn.$$

Nous avons

$$\sum l \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0, \quad \sum l \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$$

d'où

$$e = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial u} = -D, \quad f = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial u} = -D' = f', \quad g = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial v} = -D''.$$

Nous avons (n° 90)

$$\frac{\partial l}{\partial u} = \frac{FD' - GD}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{FD - ED'}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial l}{\partial v} = \frac{FD'' - GD'}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{FD' - ED''}{EG - F^2}\frac{\partial x}{\partial v},$$

E, F, D se rapportant à la surface (M). Par suite, on a

$$\mathcal{E} = \frac{GD^2 - 2FDD' + ED'^2}{EG - F^2}, \quad \mathcal{F} = \frac{GDD' - F(D'^2 + DD'') + ED'D''}{EG - F^2}, \quad \mathcal{G} = \frac{GD'^2 - 2FD'D'' + ED''^2}{EG - F^2}.$$

L'équation aux foyers (n° 127) devient.

$$(DD'' - D'^2)w^2 - (ED'' - 2FD' + GD)w + EG - F^2 = 0.$$

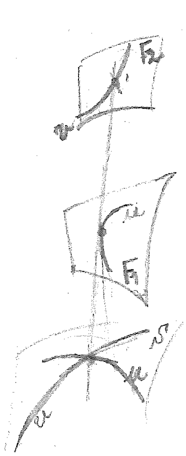
C'est précisément l'équation aux courbures principales (n° 57), par conséquent les racines w de l'équation précédente sont les rayons de courbure principaux et les développées d'une surface sont donc les lieux des centres de courbure principaux.

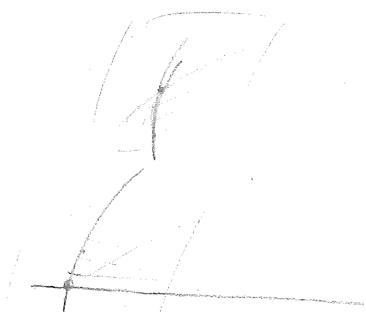
135.- Propriétés des développées. - Soient (M) une surface, (F_1), (F_2) ses développées, surfaces focales de la congruence des normales à la surface (M).

Les plans focaux de la normale en un point M à la surface (M) sont les plans des sections principales de cette surface en ce point ; ils sont rectangulaires et l'un est tangent en F_1 à la surface (F_1), l'autre en F_2 à la surface (F_2). Soient u, v les lignes de courbure de la surface (M) et supposons que lorsque u varie seule, la développable engendrée par la normale aux points de la ligne u considérée ait son arête de rebroussement sur la surface (F_1). Le plan osculateur en F_1 à la ligne u passant par ce point est un plan focal, tangent à la surface (F_2) au point F_2 correspondant. Ce plan est perpendiculaire au plan tangent à (F_1) en F_1. Il en résulte que sur la surface (F_1) les lignes u sont des géodésiques.

De même, sur la surface (F_2) les lignes v sont des géodésiques.

La normale à la surface (F_1) au point F_1 est perpendiculaire au plan tangent à cette surface en ce point, c'est-à-dire au plan tangent à la développable engendrée par les normales à (M) aux points d'une courbe v, ou encore au plan de la section principale de la surface (M) en M, tangent à la courbe v en ce point. Par suite, la normale en F_1 à (F_1) est parallèle à la tangente à la ligne u au point M correspondant sur la surface (M). Et de même, la normale à (F_2) en F_2 est parallèle à la tangente à la ligne v de la surface (M) au point M correspondant.





Chapitre VIII

Représentation sphérique.

§1.- Représentation sphérique des surfaces.

136.- Définition.- Soit (M) une surface engendrée par un point M dont les coordonnées rectangulaires sont fonctions de deux paramètres u, v. Désignons par l, m, n les cosinus directeurs de la normale en M. Par l'origine, menons une semi-droite parallèle à la normale et soit M' son point de rencontre avec la sphère de rayon un ayant pour centre l'origine ; le point M' a pour coordonnées rectangulaires l, m, n.

Le point M' est appelé image sphérique du point M. Lorsque M décrit la surface, le point M' décrit une portion de la sphère qui peut d'ailleurs être recouverte plusieurs fois. On ne considérera une région de la surface (M) à laquelle correspondra une certaine région (M') de la sphère recouverte une seule fois et cette région sera appelée image sphérique de la région considérée sur la surface.

Observons encore que le plan tangent en M à la surface et le plan tangent en M' à la sphère, sont parallèles.

137.- Représentation sphérique des directions conjuguées.- Soient MT_1, MT_2 deux tangentes conjuguées au point M à la surface (M). $M'T'_1$, $M'T'_2$ les tangentes correspondantes dans la représentation sphérique. Utilisons respectivement les symboles d, δ pour les différentielles calculées le long de courbes Γ_1 tangente à MT_1 en M, Γ_2 tangente à MT_2 en M. La condition nécessaire et suffisante pour que les tangentes MT_1, MT_2 soient conjuguées est (nº 63)

$$\delta x\, dl + \delta y\, dm + \delta z\, dn = 0 .$$

Les quantités dl, dm, dn sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la tangente $M'T'_1$, donc les droites $M'T'_1$ et MT_2 sont perpendiculaires. Il en est de même des droites $M'T'_2$ et MT_1.

A une tangente à la surface (M) correspond, dans la représentation sphérique, une perpendiculaire à la direction conjuguée.

Il en résulte que, dans la représentation sphérique,

1°) aux directions principales correspondent des directions parallèles ;

2°) à une direction asymptotique correspond une direction perpendiculaire.

138.- Elément linéaire de la représentation sphérique.- L'élément linéaire de la représentation sphérique est

$$ds'^2 = dl^2 + dm^2 + dn^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2.$$

On peut démontrer, par le calcul, que l'on a

$$ds'^2 = -K\left(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2\right) + H\left(D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''dv^2\right),$$

où

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = \frac{1}{R_1 R_2}, \quad H = \frac{ED'' - 2FD' + GD}{EG - F^2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

sont la courbure totale et la courbure moyenne de la surface (M), R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux. Nous utiliserons de préférence une méthode plus élégante, due à M. Demoulin.

Soient Γ une courbe tracée sur la surface (M), Γ' la courbe qui lui correspond dans la représentation sphérique, MT la tangente à Γ en un point M, MT_1 la tangente conjuguée, M'T' la tangente à Γ' au point M' homologue de M. La courbure $\frac{1}{R}$ de la section normale en M à la surface (M), tangente à MT, est donnée par

$$\frac{1}{R} = \frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

La courbure $\frac{1}{R'}$ de la section normale en M tangente à MT_1 est donnée par

$$\frac{1}{R'} = \frac{D\,\delta u^2 + 2D'\,\delta u\,\delta v + D''\,\delta v^2}{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2},$$

δu, δv indiquent les différentielles le long de cette section normale. On a d'ailleurs

$$D\,du\,\delta u + D'\left(du\,\delta v + dv\,\delta u\right) + D''\,dv\,\delta v = 0.$$

L'angle ω des droites MT, MT_1 est donné par

$$\cos\omega = \frac{E\,du\,\delta u + F\left(du\,\delta v + dv\,\delta u\right) + G\,dv\,\delta u}{\cancel{ds^2\,\delta s^2}\ ds\,\delta s},$$

d'où

$$\sin^2\omega = \frac{\left(EG - F^2\right)\left(du\,\delta v - dv\,\delta u\right)^2}{ds^2\,\delta s^2}.$$

On en déduit

$$RR'\sin^2\omega = \frac{EG - F^2}{DD'' - D'^2} = R_1 R_2 .$$

On a en outre

$$R + R' = \frac{ED'' - 2FD' + GD}{DD'' - D'^2} = R_1 + R_2 .$$

L'élimination de R' entre ces équations donne

$$\sin^2\omega = \frac{R_1 R_2}{R(R_1 + R_2 - R)} .$$

La droite M'T' est perpendiculaire à MT_1, donc l'angle φ des droites MT, M'T' est donné par $\cos^2\varphi = \sin^2\omega$. Or, on a

$$\cos\varphi = \Sigma \frac{dx}{ds} \frac{dl}{ds'} ,$$

d'où

$$\frac{R_1 R_2}{R(R_1 + R_2 - R)} = \frac{(\Sigma\, dx\, dl)^2}{ds^2\, ds'^2}$$

et

$$ds'^2 = \frac{(\Sigma\, dx\, dl)^2}{ds^2} \cdot \frac{R(R_1 + R_2 - R)}{R_1 R_2} .$$

On a d'ailleurs

$$\Sigma\, l\, dx = 0 \;,\; \Sigma\, dx\, dl + \Sigma\, l\, d^2x = 0 \;,\; \Sigma\, dx\, dl = -(D\, du^2 + 2D'\, du\, dv + D''\, dv^2) ,$$

donc, en tenant compte de la valeur de $\frac{1}{R}$

$$ds'^2 = -\frac{R_1 + R_2 - R}{R_1 R_2} \Sigma\, dx\, dl = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\Sigma\, dx\, dl + \frac{R\, \Sigma\, dx\, dl}{R_1 R_2}$$

et enfin

$$ds'^2 = -K(E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2) + H(D\, du^2 + 2D'\, du\, dv + D''\, dv^2).$$

139.- __Courbure totale d'une surface.__- L'élément d'aire dans la représentation sphérique est $d\sigma' = \sqrt{eg - f^2}\, du\, dv$. Or, on a

$$eg - f^2 = K^2(EG - F^2) + H^2(DD'' - D'^2) - KH(ED'' - 2FD' + GD'') = K^2(EG - F^2).$$

Si $d\sigma$ est l'élément d'aire sur la surface, on a donc

$$K = \frac{d\sigma'}{d\sigma} .$$

La courbure totale d'une surface en un point est donc la limite du rapport de deux aires correspondantes dans la représentation sphérique et sur la surface. C'est la propriété analogue à celle qui sert à définir la courbure d'une courbe gauche.

140.- __Propriétés des systèmes conjugués__.- Supposons la surface (M) rapportée à un système conjugué u, v; nous avons donc $D' = 0$. Les lignes u, v correspondant aux lignes coordonnées dans la représentation sphérique sont respectivement perpendiculaires aux lignes v, u, par suite l'angle ω des lignes u, v sur la surface et l'angle ω' des lignes u, v sur la sphère sont liés par une relation. On a

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \cos\omega' = \frac{f}{\sqrt{eg}} = -\frac{FDD''}{\sqrt{EG D^2 D''^2}} = -\frac{FDD''}{\sqrt{EG}.|DD''|},$$

les radicaux étant, d'après la convention fait plus haut, pris positivement.

Si le point considéré est hyperbolique, c'est-à-dire si $-DD''>0$, on a $\cos\omega = \cos\omega'$; si le point est elliptique, on a $-DD''<0$ et $\cos\omega + \cos\omega' = 0$.

141.- Théorème de Enneper.- Considérons une asymptotique de la surface (M) ; le plan osculateur à cette courbe en un point M est tangent en ce point à la surface et la binormale est par suite la normale à la surface. La torsion $\frac{1}{T}$ de l'asymptotique en M est donnée par

$$\frac{1}{T^2} = \frac{dl^2 + dm^2 + dn^2}{ds^2} = \frac{ds'^2}{ds^2}.$$

Mais pour une asymptotique, on a

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''dv^2 = 0,$$

donc

$$\frac{1}{T^2} = \frac{-K(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{ds^2} = -K.$$

Le carré de la torsion d'une asymptotique est donc égal à la courbure totale de la surface, changée de signe. C'est le théorème de Enneper.

142.- Emploi des coordonnées tangentielles.- Le plan tangent à la surface (M) en un point M a pour équation

$$lX + mY + nZ = p, \qquad (1)$$

p représentant la distance algébrique de l'origine à ce plan. Les quantités l, m, n, p forment un système de coordonnées tangentielles. Les coordonnées du point M satisfont à l'équation (1) et à

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial u}X + \frac{\partial m}{\partial u}Y + \frac{\partial n}{\partial u}Z = \frac{\partial p}{\partial u}, \\ \frac{\partial l}{\partial v}X + \frac{\partial m}{\partial v}Y + \frac{\partial n}{\partial v}Z = \frac{\partial p}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Les coordonnées du point M sont donc

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & m & n \\ \frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial m}{\partial u} & \frac{\partial n}{\partial u} \\ \frac{\partial p}{\partial v} & \frac{\partial m}{\partial v} & \frac{\partial n}{\partial v} \end{vmatrix}}{\sqrt{eg - f^2}}, y = \ldots, z = \ldots \qquad (3)$$

en observant que
$$\begin{vmatrix} l & \frac{\partial l}{\partial u} & \frac{\partial l}{\partial v} \end{vmatrix}^2 = eg - f^2.$$

Nous avons
$$\begin{vmatrix} p & m & n \\ \frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial m}{\partial u} & \frac{\partial n}{\partial u} \\ \frac{\partial p}{\partial v} & \frac{\partial m}{\partial v} & \frac{\partial n}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l & m & n \\ \frac{\partial l}{\partial u} & \frac{\partial m}{\partial u} & \frac{\partial n}{\partial u} \\ \frac{\partial l}{\partial v} & \frac{\partial m}{\partial v} & \frac{\partial n}{\partial v} \end{vmatrix}$$
$$= (eg-f^2)lp + e\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial v} - f\left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial u}\right) + g\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial u}$$
$$- l^2(eg-f^2) + (eg-f^2) - e\left(\frac{\partial l}{\partial v}\right)^2 + 2f\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v} - g\left(\frac{\partial l}{\partial u}\right)^2.$$

Observons que le calcul des cosinus directeurs de la normale à la sphère donne
$$l\sqrt{eg-f^2} = \frac{\partial m}{\partial u}\frac{\partial n}{\partial v} - \frac{\partial m}{\partial v}\frac{\partial n}{\partial u}, \dots$$
et que l'on a
$$\Sigma\left(\frac{\partial m}{\partial u}\frac{\partial n}{\partial v} - \frac{\partial m}{\partial v}\frac{\partial n}{\partial u}\right)^2 = eg - f^2.$$
Il en résulte que l'on a
$$(eg-f^2)(1-l^2) - e\left(\frac{\partial l}{\partial v}\right)^2 + 2f\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v} - g\left(\frac{\partial l}{\partial v}\right)^2 = 0.$$

En reprenant l'expression (3), on a donc
$$\left.\begin{aligned} x &= lp + \frac{1}{eg-f^2}\left[e\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial v} - f\left(\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial u} + \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v}\right) + g\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial u}\right], \\ &\text{et de même} \\ y &= mp + \frac{1}{eg-f^2}\left[e\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial m}{\partial v} - f\left(\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial m}{\partial u} + \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial m}{\partial v}\right) + g\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial m}{\partial u}\right], \\ z &= np + \frac{1}{eg-f^2}\left[e\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial n}{\partial v} - f\left(\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial n}{\partial u} + \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial n}{\partial v}\right) + g\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial n}{\partial u}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

Calculons maintenant D, D', D''. Nous avons
$$D = \Sigma\, l\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\Sigma\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

De la première des relations (2), on déduit, en dérivant par rapport à u,
$$\Sigma\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \Sigma x\frac{\partial^2 l}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial u^2},$$
d'où
$$D = -\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + \Sigma x\frac{\partial^2 l}{\partial u^2}. \qquad (4)$$

Nous pouvons écrire, pour $\lambda = l, m, n$
$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} = A\frac{\partial \lambda}{\partial u} + B\frac{\partial \lambda}{\partial v} + C\lambda \qquad (5)$$

Les coefficients A, B, C se calculent de la manière suivante (Cfr. n° 89) :

Multiplions la relation (5) par $\frac{\partial h}{\partial u}$ et additionnons les trois relations obtenues pour $h = l, m, n$. Il vient

$$\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial u} = Ae + Bf.$$

En utilisant $\frac{\partial h}{\partial v}$ au lieu de $\frac{\partial h}{\partial u}$ et en opérant de même, il vient

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v} = Af + Bg.$$

Enfin, en multipliant (5) par h puis en additionnant les relations obtenues pour $h = l, m, n$, on a

$\frac{\partial^2 l}{\partial u^2} = -\Sigma\left(\frac{\partial l}{\partial u}\right)^2 \qquad \Sigma l \frac{\partial l}{\partial u} = 0$

$$C = \Sigma l \frac{\partial^2 l}{\partial u^2} = -e.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} = \frac{\frac{1}{2} g \frac{\partial e}{\partial u} - f\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2} f \frac{\partial e}{\partial v}}{eg - f^2}\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{e\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{1}{2} f \frac{\partial e}{\partial u}}{eg - f^2}\frac{\partial h}{\partial v} - eh$$

La relation (4) devient donc, en tenant compte des relations (2)

$$D = -\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + \frac{\frac{1}{2} g \frac{\partial e}{\partial u} - f\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2} f \frac{\partial e}{\partial v}}{eg - f^2}\frac{\partial p}{\partial u} + \frac{e\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2} e \frac{\partial e}{\partial v} - \frac{1}{2} f \frac{\partial e}{\partial u}}{eg - f^2}\frac{\partial p}{\partial v} - ep. \quad (6)$$

on obtient de même

$$D' = -\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} + \frac{\frac{1}{2} g \frac{\partial e}{\partial v} - \frac{1}{2} f \frac{\partial g}{\partial u}}{eg - f^2}\frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\frac{1}{2} e \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{1}{2} f \frac{\partial e}{\partial v}}{eg - f^2}\frac{\partial p}{\partial v} - fp, \quad (7)$$

$$D'' = -\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} + \frac{g\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{2} g \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{1}{2} f \frac{\partial g}{\partial v}}{eg - f^2}\frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\frac{1}{2} e \frac{\partial g}{\partial v} - f \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{2} f \frac{\partial g}{\partial u}}{eg - f^2}\frac{\partial p}{\partial v} - gp. \quad (8)$$

Nous écrirons en abrégé ces relations sous la forme

$$\left.\begin{aligned} D &= -\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + a_1 \frac{\partial p}{\partial u} + b_1 \frac{\partial p}{\partial v} - ep, \\ D' &= -\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} + a_2 \frac{\partial p}{\partial u} + b_2 \frac{\partial p}{\partial v} - fp, \\ D'' &= -\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} + a_3 \frac{\partial p}{\partial u} + b_3 \frac{\partial p}{\partial v} - gp. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

On voit donc que si l'on se donne les quantités l, m, n fonctions de u, v, c'est-à-dire la représentation sphérique d'une surface, le choix de p, fonction de u, v fournit les coordonnées des points de cette surface.

143. – <u>Surface rapportée à un système conjugué.</u> – Supposons que la surface (M) soit rapportée à un système conjugué u, v. On a alors $D' = 0$ et p satisfait à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - a_2 \frac{\partial \theta}{\partial u} - b_2 \frac{\partial \theta}{\partial v} + f\theta = 0. \quad (10)$$

Observons que l, m, n satisfont également à cette équation.

Inversement, si l, m, n, p sont quatre fonctions de u, v satisfaisant à l'équation (10), les équations (I) donnent les coordonnées d'un point M décrivant une surface (M) sur laquelle les lignes u, v forment un système conjugué. On suppose naturellement

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Supposons en particulier que les courbes u, v soient les lignes de courbure de la surface (M). On a $F = 0$ et par suite $f = 0$. L'équation (10) prend la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}(\log e)\frac{\partial \theta}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\log g)\frac{\partial \theta}{\partial v} = 0. \qquad (10')$$

Inversement, si l, m, n, p sont quatre solutions linéairement indépendantes de l'équation (10'), telles que l'on ait

$$\Sigma l^2 = 1, \quad \Sigma \frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v} = 0,$$

les équations (I) donnent les coordonnées d'un point M engendrant une surface (M) sur laquelle les lignes u, v sont les lignes de courbure.

144.- <u>Surface rapportée à ses lignes asymptotiques.</u>- Si les lignes u, v sont les asymptotiques sur la surface (M), on a $D = 0$, $D'' = 0$ et par suite p satisfait aux relations

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - a_1 \frac{\partial \theta}{\partial u} - b_1 \frac{\partial \theta}{\partial v} + e\theta = 0, \\ &\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - a_3 \frac{\partial \theta}{\partial u} - b_3 \frac{\partial \theta}{\partial v} + g\theta = 0. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Les quantités l, m, n satisfont également à ces équations.

Inversement, si l, m, n, p sont quatre fonctions de u, v satisfaisant aux équations (1) et telles que

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

le point M donné par les équations (I) décrit une surface (M) sur laquelle les lignes u, v sont les asymptotiques.

145.- <u>Rayons de courbure principaux.</u> - Nous allons rechercher les expressions de $R_1 R_2$, $R_1 + R_2$ en fonction de e, f, g, D, D', D''. Nous avons

$$e = -KE + HD, \quad f = -KF + HD', \quad g = -KG + HD''$$

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{ED'' - 2FD' + GD}{EG - F^2}, \quad K^2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

On en déduit

$$R_1 R_2 = \frac{DD'' - D'^2}{eg - f^2}.$$

On a ensuite

$$eD'' - 2fD' + gD = -K\left(ED'' - 2FD' + GD\right) + 2H\left(DD'' - D'^2\right)$$
$$= -KH\left(EG - F^2\right) + 2H\left(DD'' - D'^2\right) = H\left(DD'' - D'^2\right) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)R_1R_2\left(eg - f^2\right)$$

et par conséquent

$$R_1 + R_2 = \frac{eD'' - 2fD' + gD}{eg - f^2}.$$

§ 2.- Représentation sphérique des congruences de droites.

146.- Définition.- Considérons une droite g d'équations paramétriques

$$x = \varphi_1(u,v) + w\psi_1(u,v),\ y = \varphi_2(u,v) + w\psi_2(u,v),\ z = \varphi_3(u,v) + w\psi_3(u,v),\quad (1)$$

génératrice d'une congruence (g) lorsque u, v varient.

Par l'origine des coordonnées, menons une parallèle à la droite (1) et portons, sur cette droite, le segment $+1$ d'origine O ; l'extrémité G' de ce segment est l'image sphérique du rayon g. A une surface de la congruence, correspondra une courbe dans la représentation sphérique.

Si l'on suppose que les ψ sont les cosinus directeurs de la droite g, on a $\Sigma\psi^2 = 1$ et le point G' a comme coordonnées ψ_1, ψ_2, ψ_3. L'élément linéaire de la représentation sphérique est alors (cfr. ch. VI, § 2)

$$ds'^2 = \mathcal{E}du^2 + 2\mathcal{F}du\,dv + \mathcal{G}dv^2.$$

Nous supposerons dans la suite que u, v varient dans un domaine tel que le point G' n'occupe pas deux fois la même position sur la sphère de rayon un.

Observons que si (g) est une congruence de normales à une surface (M), on est ramené à la représentation sphérique de la surface (M).

147.- Représentation sphérique des surfaces principales.- Supposons que (g) ne soit pas une congruence isotrope ; l'équation différentielle des surfaces principales de (g) est

$$\left(e\mathcal{F} - \mathcal{E}\frac{f+f'}{2}\right)du^2 + \left(e\mathcal{G} - \mathcal{E}g\right)du\,dv - \left(g\mathcal{F} - \mathcal{G}\frac{f+f'}{2}\right)dv^2 = 0.$$

Si nous désignons par du, dv et $\delta u, \delta v$ les directions des lignes correspondant aux surfaces principales dans la représentation sphérique, issues d'un point quelconque, on a

$$\frac{du\,\delta u}{dv\,\delta v} = -\frac{g\mathcal{F} - \mathcal{G}\frac{f+f'}{2}}{e\mathcal{F} - \mathcal{E}\frac{f+f'}{2}},\quad \frac{du}{dv} + \frac{\delta u}{\delta v} = -\frac{e\mathcal{G} - \mathcal{E}g}{e\mathcal{F} - \mathcal{E}\frac{f+f'}{2}}.$$

D'autre part, on a identiquement

$$-\mathcal{E}\left(g\mathcal{F}-\mathcal{G}\frac{f+f'}{2}\right)-\mathcal{F}\left(e\mathcal{G}-\mathcal{E}g\right)+\mathcal{G}\left(e\mathcal{F}-\mathcal{E}\frac{f+f'}{2}\right)=0\ ,$$

d'où

$$\mathcal{E}\,du\,\delta u+\mathcal{F}\left(du\,\delta v+dv\,\delta u\right)+\mathcal{G}\,dv\,\delta v=0\ .$$

Aux surfaces principales correspondent donc, dans la représentation sphérique, un système de lignes orthogonales.

Si nous supposons la congruence rapportée aux paramètres u, v des surfaces principales, nous aurons donc $\mathcal{F}=0$. De plus, l'équation différentielle des surfaces principales devant se réduire à $du\,dv=0$, nous aurons $f+f'=0$.

Supposons en outre que nous prenions, comme surface directrice

$$x=\varphi_1(u,v),\ y=\varphi_2(u,v),\ z=\varphi_3(u,v),$$

la surface moyenne de la congruence, lieu des milieux des segments déterminés sur chaque rayon par les points limites L, L'. Si 2ρ désigne la mesure du segment LL', ρ et $-\rho$ doivent être racines de l'équation aux points limites (n° 129) et on doit avoir

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{G}}=-\frac{e}{g}=\rho \qquad \frac{\mathcal{E}}{e}=-\frac{g}{\mathcal{G}}$$

$$\mathcal{E}g+\mathcal{G}e=0.$$

On aura donc, par un choix convenable des abscisses des points limites

$$e=\rho\mathcal{E}\ ,\qquad g=-\rho\mathcal{G}.$$

148.- Images sphériques des surfaces focales développables.-

Prenons pour paramètres u, v ceux des surfaces ~~focales~~ développables de la congruence et comme surface directrice, la surface moyenne. En appelant $2r$ la distance focale, les foyers seront donnés par $\varphi+r\psi$ et $\varphi-r\psi$.

L'équation des surfaces focales devant se réduire à $du\,dv=0$ et l'équation aux foyers devant avoir deux racines égales et de signes contraires (n° 127), on aura

$$e\mathcal{F}-f'\mathcal{E}=0\ ,\quad g\mathcal{F}-f\mathcal{G}=0\ ,\quad e\mathcal{G}-(f+f')\mathcal{F}+g\mathcal{E}\neq 0.$$

Supposons que le foyer $\varphi+r\psi$ corresponde à la variable u. La tangente à la ligne u sur la surface $(\varphi+r\psi)$ doit coïncider avec la droite et par suite on a

$$\frac{\partial(\varphi+r\psi)}{\partial u}=\lambda\psi\ ,$$

ou

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\left(\lambda-\frac{\partial r}{\partial u}\right)\psi-r\frac{\partial\psi}{\partial u}\ . \qquad (1)$$

Le foyer $\varphi-r\psi$ correspondant à la variable v, on aura de même

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(\mu + \frac{\partial r}{\partial u}\right)\psi + r\,\frac{\partial \psi}{\partial u}\ , \qquad (2)$$

et par conséquent la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\left(\lambda - \frac{\partial r}{\partial u}\right)\psi - r\frac{\partial \psi}{\partial u}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\left(\mu + \frac{\partial r}{\partial v}\right)\psi + r\,\frac{\partial \psi}{\partial v}\right].$$

Observons que l'on a, la normale à la sphère ayant pour cosinus directeurs ψ_1, ψ_2, ψ_3 (Cfr n° 142)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2}\ \frac{\mathcal{G}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v} - \mathcal{F}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial u}}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}\ \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{1}{2}\ \frac{\mathcal{E}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial u} - \mathcal{F}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v}}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}\ \frac{\partial \psi}{\partial v} - \mathcal{F}\psi = a_2\frac{\partial \psi}{\partial u} + b_2\frac{\partial \psi}{\partial v} - \mathcal{F}\psi.$$

La relation précédente donne les conditions

$$\lambda = 2\left(\frac{\partial r}{\partial u} + b_2 r\right), \quad \mu = -2\left(\frac{\partial r}{\partial v} + a_2 r\right)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial \mu}{\partial u} - 2\,\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v} + 2r\mathcal{F} = 0.$$

En substituant dans la dernière les valeurs de λ, μ données par les deux premières formules, on trouve

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v} + a_2\,\frac{\partial r}{\partial u} + b_2\,\frac{\partial r}{\partial v} + \left[\frac{\partial a_2}{\partial u} + \frac{\partial b_2}{\partial v} + \mathcal{F}\right] r = 0. \qquad (3)$$

La demi distance focale doit donc satisfaire à une équation de Laplace.

Inversement, si nous choisissons $\psi_1(u,v)$, $\psi_2(u,v)$, $\psi_3(u,v)$ sous la condition $\Sigma\psi^2 = 1$, puis $r(u,v)$ solution de l'équation (3), on pourra déterminer φ_1, φ_2, φ_3 par les équations (1) et (2). En d'autres termes, la congruence sera déterminée par le choix de la représentation sphérique de ses surfaces focales.

Chapitre IX

Correspondances entre deux surfaces.

§1.- Considérations générales.

149.- Définition.- Considérons une surface (M), lieu du point M de coordonnées

$$x = \varphi_1(u,v),\ y = \varphi_2(u,v),\ z = \varphi_3(u,v)$$

et une surface (M'), lieu du point M' de coordonnées

$$x = \varphi'_1(u',v'),\ y = \varphi'_2(u',v'),\ z = \varphi'_3(u',v').$$

Supposons que l'on ait deux relations

$$\psi_1(u,v,u',v') = 0, \quad \psi_2(u,v,u',v') = 0. \qquad (1)$$

Ces relations définissent une correspondance entre les surfaces (M), (M'). Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que cette correspondance est continue. De plus, nous limiterons nos considérations à deux régions des surfaces (M), (M') entre lesquelles la correspondance est biunivoque. Nous écarterons enfin les points exceptionnels.

150.- Homographie des tangentes en deux points homologues.- Considérons deux points homologues M, M'. La tangente en M à une ligne Γ tracée sur M est donnée par

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv.$$

La tangente en M' à la courbe Γ' lieu des points homologues sur (M') des points de Γ, est donnée par

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial u'}du' + \frac{\partial\varphi'}{\partial v'}dv'.$$

Les équations (1) donnent

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial u}du + \frac{\partial\psi_1}{\partial v}dv + \frac{\partial\psi_1}{\partial u'}du' + \frac{\partial\psi_1}{\partial v'}dv' = 0,$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial u}du + \frac{\partial\psi_2}{\partial v}dv + \frac{\partial\psi_2}{\partial u'}du' + \frac{\partial\psi_2}{\partial v'}dv' = 0.$$

Les points M, M' n'étant pas exceptionnels par hypothèse, ces relations peuvent être résolues par rapport à du, dv, soit par rapport à du', dv'. Il en résulte qu'il existe une relation bilinéaire entre $\frac{du}{dv}$ et $\frac{du'}{dv'}$. Par conséquent, les tangentes en deux points homologues aux courbes homologues se correspondent dans une homographie.

151.- Systèmes conjugués persistants. - Soient M, M' deux points homologues, les tangentes en ces points aux courbes homologues se correspondent dans une homographie ω. Les tangentes conjuguées en M à la surface (M) forment une involution I et les tangentes conjuguées en M' à (M') forment une involution I'. A l'involution I dans le faisceau de centre M, ω fait correspondre une involution I'' dans le faisceau de centre M'.

Si l'involution I'' ne coïncide pas avec l'involution I', ces deux involutions ont un couple commun (réel ou imaginaire). Il existe donc en M deux tangentes conjuguées auxquelles correspondent deux tangentes conjuguées en M' et par suite, il y aura, sur la surface (M), un système conjugué auquel correspondra un système conjugué sur (M'). Il y aura un système conjugué persistant dans la correspondance.

Si les involutions I'', I' coïncident en tout couple de points homologues M, M', à tout système conjugué de (M) correspondra un système conjugué de (M').

Supposons que nous ayons effectué sur u', v' un changement de variables tel que les équations (1) se réduisent à $u' = u$, $v' = v$; deux points M, M' homologues auront alors les mêmes coordonnées curvilignes u, v. Désignons par L, M, N les expressions D, D', D'' relatives à la surface (M), par L', M', N' les expressions analogues relatives à la surface (M'). Les involutions I, I' sont représentées par

$$L\, du\, \delta u + M(du\, \delta v + dv\, \delta u) + N\, dv\, \delta v = 0,$$
$$L'\, du\, \delta u + M'(du\, \delta v + dv\, \delta u) + N'\, dv\, \delta v = 0.$$

L'involution I'' sera représentée par la première de ces équations. Un réseau conjugué persistant sera donné, sur les deux surfaces, par l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} L\, du + M\, dv & M\, du + N\, dv \\ L'\, du + M'\, dv & M'\, du + N'\, dv \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire par

$$(LM' - L'M)\, du^2 + (LN' - L'N)\, du\, dv + (MN' - M'N)\, dv^2 = 0.$$

Pour que tout réseau conjugué soit persistant, il faut et il suffit que l'on ait $\qquad L : M : N = L' : M' : N'$,

c'est-à-dire que les asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces.

152.- <u>Systèmes orthogonaux persistants</u>.- Le raisonnement qui vient d'être fait peut être reproduit en ce qui concerne les angles. En un point M de (M), les tangentes rectangulaires forment les couples d'une involution J. Au point M' homologue de (M'), les tangentes rectangulaires forment une involution J'. A l'involution J, w fait correspondre, dans le faisceau des tangentes en M', une involution J''. Si J' et J'' ne coïncident pas, elles ont un couple en commun, toujours réel puisque J', J'' sont elliptiques. Il y a par suite deux tangentes rectangulaires en M auxquelles correspondent deux tangentes rectangulaires en M' et par conséquent, il existe un système orthogonal persistant dans la correspondance.

Si J' et J'' coïncident, et si ce fait se présente pour tous les couples de points homologues M, M', à tout système orthogonal de (M) correspond un système orthogonal de (M'). Il en résulte que dans la correspondance entre (M), (M'), les angles sont conservés ; la correspondance est conforme.

Désignons par

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \quad , \quad ds'^2 = E'\,du^2 + 2F'\,du\,dv + G'\,dv^2$$

les carrés des éléments linéaires de (M), (M'). Les involutions J, J' sont représentées par

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0,$$
$$E'\,du\,\delta u + F'(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G'\,dv\,\delta v = 0.$$

L'involution J'' est représentée par la première de ces équations. Le système orthogonal persistant est représenté par l'équation différentielle

$$(EF' - E'F)\,du^2 + (EG' - E'G)\,du\,dv + (FG' - F'G)\,dv^2 = 0.$$

Pour que tout système orthogonal soit persistant, on doit avoir

$$E : F : G = E' : F' : G',$$

condition nécessaire et suffisante pour que la correspondance soit conforme.

153.- <u>Surfaces applicables</u>.- Deux surfaces sont dites applicables l'une sur l'autre lorsqu'elles sont liées par une correspondance telle qu'à un arc de courbe de l'une correspond sur l'autre un arc de courbe de même longueur. Il doit donc y avoir conservation des longueurs et par suite les éléments linéaires des deux surfaces doivent être égaux. On doit donc avoir

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = E'\,du^2 + 2F'\,du\,dv + G'\,dv^2,$$

quels que soient du, dv. Par conséquent, on aura

$$E = E', \quad F = F', \quad G = G'.$$

Il en résulte que lorsque deux surfaces sont applicables, il y a conservation des angles. Par suite, les géométries, sur les deux surfaces, sont identiques.

§ 2.- Surfaces applicables; déformation infiniment petite.

154.- Conditions pour que deux surfaces soient applicables. - Considérons deux surfaces (M), (M') et soient u, v les coordonnées curvilignes sur (M), u', v' les coordonnées curvilignes sur (M'). Pour que ces deux surfaces soient applicables, il doit exister entre elles une correspondance représentée par

$$u' = u'(u,v), \quad v' = v'(u,v) \qquad (1)$$

telle que l'on ait

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = E'\,du'^2 + 2F'\,du'\,dv' + G'\,dv'^2,$$

quels que soient du, dv. Nous avons résolu le problème lorsque la correspondance est précisément $u' = u$, $v' = v$. Nous allons le résoudre dans le cas général.

Sur la surface (M), effectuons le changement de coordonnées défini par les relations (1) et soit

$$ds^2 = E_1\,du'^2 + 2F_1\,du'\,dv' + G_1\,dv'^2$$

la nouvelle expression du carré de l'élément linéaire. Nous avons (nº 37),

$$E_1 = \frac{\Delta_1(v')}{\Delta_1(u')\Delta_1(v') - \nabla^2(u',v')}, \quad F_1 = \frac{-\nabla(u',v')}{\Delta_1(u')\Delta_1(v') - \nabla^2(u',v')}, \quad G_1 = \frac{\Delta_1(u')}{\Delta_1(u')\Delta_1(v') - \nabla^2(u',v')}$$

Les conditions d'applicabilité sont donc

$$\begin{aligned}
\Delta_1(v') &= E'\left[\Delta_1(u')\Delta_1(v') - \nabla^2(u',v')\right],\\
\nabla(u',v') &= -F'\left[\Delta_1(u')\Delta_1(v') - \nabla^2(u',v')\right],\\
\Delta_1(u') &= G'\left[\Delta_1(u')\Delta_1(v') - \nabla^2(u',v')\right].
\end{aligned}$$

Les fonctions $u'(u,v)$, $v'(u,v)$ doivent donc satisfaire à trois équations et par suite deux surfaces ne sont pas applicables en général.

155.- Eléments conservés dans l'applicabilité. - Deux surfaces applicables ayant mêmes coefficients E, F, G des ds^2, tout élément d'une surface qui ne dépend que de E, F, G et de leurs dérivées est conservé dans l'applicabilité. D'après l'équation de Gauss (nº 92, formule VI), la courbure totale K

d'une surface ne dépend que de E, F, G et de leurs dérivées, donc en deux points homologues, deux surfaces applicables ont même courbure totale.

La courbure géodésique d'une courbe s'exprime également en fonction de E, F, G et de leurs dérivées (n° 78) par suite, en deux points homologues de deux courbes homologues tracées sur deux surfaces applicables, les courbures géodésiques de ces courbes sont égales.

Les courbes géodésiques sont caractérisées par la condition d'avoir la courbure géodésique nulle, par suite dans l'applicabilité de deux surfaces, les lignes géodésiques se correspondent.

156.- <u>Exemple de surfaces applicables</u>. - Considérons l'hélicoïde d'équations paramétriques

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega, \quad z = f(\rho) + a\omega \qquad (1)$$

et la surface de révolution

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = \varphi(u). \qquad (2)$$

Les éléments linéaires de ces deux surfaces sont donnés respectivement par

$$ds^2 = (1+f'^2)\,d\rho^2 + 2af'\,d\rho\,d\omega + (a^2+\rho^2)\,d\omega^2, \qquad (3)$$

$$ds'^2 = (1+\varphi'^2)\,du^2 + u^2\,dv^2. \qquad (4)$$

On peut écrire pour le premier

$$ds^2 = (a^2+\rho^2)\left[d\omega + \frac{af'}{a^2+\rho^2}\,d\rho\right]^2 + \frac{a^2+\rho^2(1+f'^2)}{a^2+\rho^2}\,d\rho^2. \qquad (5)$$

Entre les surfaces (1) et (2), établissons la correspondance définie par

$$u = \sqrt{a^2+\rho^2}, \quad v = \omega + \int \frac{af'}{a^2+\rho^2}\,d\rho.$$

L'expression (5) devient

$$ds^2 = \frac{a^2+\rho^2(1+f'^2)}{\rho^2}\,du^2 + u^2\,dv^2.$$

L'hélicoïde sera donc applicable sur la surface de révolution (2) si l'on a

$$1+\varphi'^2 = \frac{a^2+\rho^2(1+f'^2)}{\rho^2},$$

c'est-à-dire

$$\varphi(u) = \int \sqrt{\frac{a^2+(u^2-a^2)\left[f'(\sqrt{u^2-a^2})\right]^2}{u^2-a^2}}\,du.$$

Un hélicoïde est donc toujours applicable sur une surface de révolution (Bour).

157.- <u>Déformation infiniment petite</u>. - Considérons une famille de surfaces S dépendant d'un paramètre t et qui, pour t = 0, se réduit à une surface S_0. Les coordonnées x, y, z d'un point M de S s'écriront

$$x = x_0 + t x_1 + \dots, \quad y = y_0 + t y_1 + \dots, \quad z = z_0 + t z_1 + \dots,$$

x_0, y_0, z_0 étant les coordonnées du point M_0 de S_0 qui correspond au point M de S.

Supposons que toutes les surfaces de la famille considérées soient applicables les unes sur les autres. Nous devons avoir, quel que soit t,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2,$$

c'est-à-dire

$$dx_0\, dx_1 + dy_0\, dy_1 + dz_0\, dz_1 = 0, \dots$$

Le problème de la déformation infiniment petite des surfaces consiste dans l'intégration de la première de ces équations aux différentielles totales.

La question peut être présentée d'une manière un peu différente. Donnons-nous les relations

$$x = x_0 + \varepsilon x_1, \quad y = y_0 + \varepsilon y_1, \quad z = z_0 + \varepsilon z_1,$$

où ε est une quantité très petite dont nous conviendrons de négliger les carrés. L'équation

$$dx_0\, dx_1 + dy_0\, dy_1 + dz_0\, dz_1 = 0 \qquad (1)$$

exprime que les surfaces (x_0, y_0, z_0), (x, y, z) sont applicables l'une sur l'autre.

158.- <u>Considérations géométriques.</u> - Désignons par M, M_0, M_1 respectivement les points (x, y, z), (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1).

Les surfaces (M_0), (M_1) se correspondent point par point et l'équation (1) exprime que deux éléments homologues sont orthogonaux ; on dit que les surfaces se correspondent avec orthogonalité des éléments. La résolution du problème de la déformation infiniment petite revient à la détermination d'une surface correspondant avec orthogonalité des éléments.

Considérons la surface (M') lieu du point

$$x' = x_0 + t x_1, \quad y' = y_0 + t y_1, \quad z' = z_0 + t z_1.$$

Son ds^2 est donné par

$$ds'^2 = \sum dx_0^2 + t^2 \sum dx_1^2.$$

Il n'est pas altéré par le changement de t en $-t$, par suite la surface (M''), lieu du point

$$x'' = x_0 - t x_1, \quad y'' = y_0 - t y_1, \quad z'' = z_0 - t z_1,$$

est applicable sur la surface (M').

Inversement, considérons deux surfaces (M'), (M'') applicables l'une sur l'autre ; on a donc

$$\sum dx'^2 = \sum dx''^2,$$

ce qui peut s'écrire

$$\Sigma\,(dx'+dx'')\,(dx'-dx'')=0.$$

Les surfaces $(x'+x'', y'+y'', z'+z'')$ et $(x'-x'', y'+y'', z'+z'')$ se correspondent donc avec orthogonalité des éléments. Les problèmes de la recherche des couples de surfaces applicables et des couples de surfaces se correspondant avec orthogonalité des éléments sont donc équivalents.

Revenons au problème primitif. La droite M_0M' est appelée directrice de la déformation infiniment petite ; cette droite engendre une congruence.

Nous écarterons, dans ce qui va suivre, les surfaces développables.

159.- Formules de Lelieuvre.- Nous allons établir des formules qui permettront de résoudre le problème de la détermination des surfaces qui se correspondent avec orthogonalité des éléments.

Considérons une surface (M) rapportée à ses asymptotiques u, v. L'équation différentielle des asymptotiques sur une surface est

$$D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2=0,$$

qui peut s'écrire

$$\Sigma\,dl\,dx=0,$$

l, m, n étant les cosinus directeurs de la normale. Actuellement, les coefficients de du^2, dv^2 sont nuls et on a donc

$$\Sigma\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}=0\,,\quad \Sigma\frac{\partial l}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}=0. \qquad (1)$$

D'autre part, on a

$$\Sigma\, l\frac{\partial x}{\partial u}=0\,,\quad \Sigma\, l\frac{\partial x}{\partial v}=0 \qquad (2)$$

d'où

$$\Sigma\frac{\partial l}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}+\Sigma\, l\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=0,\quad \Sigma\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\Sigma\, l\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=0$$

et par conséquent

$$\Sigma\left(\frac{\partial l}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)=0 \qquad (3)$$

qui n'est autre que la condition d'intégrabilité des équations précédentes.

Des équations (1) et (2), on déduit, λ et μ étant des fonctions de u, v,

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\lambda\left(m\frac{\partial n}{\partial u}-n\frac{\partial m}{\partial u}\right),\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=\mu\left(m\frac{\partial n}{\partial v}-n\frac{\partial m}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\lambda\left(n\frac{\partial l}{\partial u}-l\frac{\partial n}{\partial u}\right),\qquad \frac{\partial y}{\partial v}=\mu\left(n\frac{\partial l}{\partial v}-l\frac{\partial n}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\lambda\left(l\frac{\partial m}{\partial u}-m\frac{\partial l}{\partial u}\right),\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\mu\left(l\frac{\partial m}{\partial v}-m\frac{\partial l}{\partial v}\right).$$

En portant ces valeurs dans l'équation (3), on obtient

$$(\lambda+\mu)\begin{vmatrix} l & m & n \\ \frac{\partial l}{\partial u} & \frac{\partial m}{\partial u} & \frac{\partial n}{\partial u} \\ \frac{\partial l}{\partial v} & \frac{\partial m}{\partial v} & \frac{\partial n}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

d'où, comme le déterminant n'est pas nul, $\lambda+\mu=0$.

Celà étant, posons

$$l\sqrt{\lambda}=\theta_1\ ,\ m\sqrt{\lambda}=\theta_2\ ,\ n\sqrt{\lambda}=\theta_3\ .$$

Il vient

$$dx = \left(\theta_2\frac{\partial\theta_3}{\partial u}-\theta_3\frac{\partial\theta_2}{\partial u}\right)du - \left(\theta_2\frac{\partial\theta_3}{\partial v}-\theta_3\frac{\partial\theta_2}{\partial v}\right)dv,$$

$$dy = \left(\theta_3\frac{\partial\theta_1}{\partial u}-\theta_1\frac{\partial\theta_3}{\partial u}\right)du - \left(\theta_3\frac{\partial\theta_1}{\partial v}-\theta_1\frac{\partial\theta_3}{\partial v}\right)dv,$$

$$dz = \left(\theta_1\frac{\partial\theta_2}{\partial u}-\theta_2\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\right)du - \left(\theta_1\frac{\partial\theta_2}{\partial v}-\theta_2\frac{\partial\theta_1}{\partial v}\right)dv.$$

En exprimant que dx, dy, dz sont des différentielles exactes, on trouve

$$\frac{1}{\theta_1}\ \frac{\partial^2\theta_1}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\theta_2}\ \frac{\partial^2\theta_2}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\theta_3}\ \frac{\partial^2\theta_3}{\partial u\,\partial v}.$$

Si $\nu(u,v)$ est la valeur commune de ces rapports, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ satisfont donc à l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \nu\theta\ . \qquad (4)$$

Par conséquent, si $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont trois solutions particulières de l'équation (4), les équations

$$x = \int\left(\theta_2\frac{\partial\theta_3}{\partial u}-\theta_3\frac{\partial\theta_2}{\partial u}\right)du - \left(\theta_2\frac{\partial\theta_3}{\partial v}-\theta_3\frac{\partial\theta_2}{\partial v}\right)dv,$$

$$y = \int\left(\theta_3\frac{\partial\theta_1}{\partial u}-\theta_1\frac{\partial\theta_3}{\partial u}\right)du - \left(\theta_3\frac{\partial\theta_1}{\partial v}-\theta_1\frac{\partial\theta_3}{\partial v}\right)dv,$$

$$z = \int\left(\theta_1\frac{\partial\theta_2}{\partial u}-\theta_2\frac{\partial\theta_1}{\partial u}\right)du - \left(\theta_1\frac{\partial\theta_2}{\partial v}-\theta_2\frac{\partial\theta_1}{\partial v}\right)dv.$$

donnent les coordonnées d'un point M engendrant une surface rapportée à ses asymptotiques. Ces formules sont dues à Lelieuvre.

159.- <u>Remarque</u>.- Avant d'aller plus loin, nous indiquerons l'interprétation géométrique de λ. On a

$$(l^2+m^2+n^2)\lambda = \lambda = \theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2\ .$$

Le ds^2 de la surface est donné par

$$ds^2 = \lambda^2\left(e\,du^2 - 2f\,du\,dv + g\,dv^2\right),$$

où $e=\Sigma\left(\frac{\partial l}{\partial u}\right)^2$, $f=\Sigma\frac{\partial l}{\partial u}\ \frac{\partial l}{\partial v}$, $g=\Sigma\left(\frac{\partial l}{\partial v}\right)^2$. D'autre part, on a $D=0$, $D''=0$ et

$$D' = -\Sigma\frac{\partial l}{\partial v}\ \frac{\partial x}{\partial u} = -\lambda\sqrt{eg-f^2}\ .$$

Par suite, la courbure totale de la surface est

$$K = \frac{-D'^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{\lambda^2}.$$

et on a $R_1 R_2 = -\lambda^2$.

160.- <u>Correspondance avec orthogonalité des éléments</u>.- Reprenons les surfaces (M_0), (M_1) et la relation

$$\Sigma\, dx_0\, dx_1 = 0.$$

Cette relation se traduit par les équations aux dérivées partielles

$$\Sigma \frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \quad \Sigma \frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0, \quad \Sigma \frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0.$$

Supposons la surface (M_0) donnée et rapportée à ses lignes asymptotiques u, v. Exprimons x_0, y_0, z_0 en fonction de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ au moyen des formules de Lelieuvre. Les relations précédentes deviennent

$$\left| \frac{\partial x_1}{\partial u} \quad \theta_1 \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \right| = 0, \quad \left| \frac{\partial x_1}{\partial v} \quad \theta_1 \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial v} \right| = 0,$$

$$\left| \frac{\partial x_1}{\partial u} \quad \theta_1 \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial v} \right| - \left| \frac{\partial x_1}{\partial v} \quad \theta_1 \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \right| = 0.$$

En tenant compte des deux premières équations, on est conduit à poser

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \alpha\theta_1 + \beta\frac{\partial \theta_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \alpha'\theta_1 + \beta'\frac{\partial \theta_1}{\partial v}$$

et des formules analogues pour y_1, z_1. En introduisant ces valeurs dans la dernière relation, on trouve $\beta + \beta' = 0$. Nous pouvons donc poser

$$\beta = -\beta' = \omega.$$

En tenant compte de l'équation (4), nous avons

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v} = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} + \beta\nu\right)\theta_1 + \frac{\partial \beta}{\partial v}\frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \alpha\frac{\partial \theta_1}{\partial v} = \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial u} + \beta'\nu\right)\theta_1 + \frac{\partial \beta'}{\partial u}\frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \alpha'\frac{\partial \theta_1}{\partial u},$$

relation qui doit être satisfaite non seulement pour θ_1, mais aussi pour θ_2, θ_3 comme on le voit en formant $\frac{\partial^2 y_1}{\partial u\partial v}, \frac{\partial^2 z_1}{\partial u \partial v}$. On a donc

$$\alpha = \frac{\partial \beta'}{\partial u} = -\frac{\partial \omega}{\partial u}, \quad \alpha' = \frac{\partial \beta}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial v}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \alpha'}{\partial u} + 2\omega\nu = 0.$$

On en déduit

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v} = \nu\omega.$$

Par conséquent, on a $x_1 = -\int \begin{vmatrix} \theta_1 & \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \\ \omega & \frac{\partial \omega}{\partial u} \end{vmatrix}$

$$x_1 = -\int \left(\theta_1\frac{\partial \omega}{\partial u} - \omega\frac{\partial \theta_1}{\partial u}\right)du - \left(\theta_1\frac{\partial \omega}{\partial v} - \omega\frac{\partial \theta_1}{\partial v}\right)dv,$$

$$y_1 = -\int \left(\theta_2\frac{\partial \omega}{\partial u} - \omega\frac{\partial \theta_2}{\partial u}\right)du - \left(\theta_2\frac{\partial \omega}{\partial v} - \omega\frac{\partial \theta_2}{\partial v}\right)dv,$$

$$z_1 = -\int \left(\theta_3\frac{\partial \omega}{\partial u} - \omega\frac{\partial \theta_3}{\partial u}\right)du - \left(\theta_3\frac{\partial \omega}{\partial v} - \omega\frac{\partial \theta_3}{\partial v}\right)dv,$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \omega$ satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = \nu \theta .$$

161.- Propriété des surfaces se correspondant avec orthogonalité des éléments.- Reprenons les surfaces (M_0), (M_1) et observons que l'on a identiquement

$$\omega \, dx_0 + \theta_3 \, dy_1 - \theta_2 \, dz_1 = 0$$

et deux autres relations analogues qui se déduisent de la précédente par permutation tournante.

D'autre part, on a

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \omega^2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta_1}{\omega}\right) , \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = -\omega^2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta_1}{\omega}\right)$$

et des formules analogues pour y_1, z_1, où θ_1 est remplacé par θ_2 ou θ_3. On en déduit

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \, \partial v} = \frac{\partial \omega^2}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta_1}{\omega}\right) + \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial u \, \partial v}\left(\frac{\theta_1}{\omega}\right) ,$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \, \partial v} = -\frac{\partial \omega^2}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta_1}{\omega}\right) - \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial u \, \partial v}\left(\frac{\theta_1}{\omega}\right) .$$

d'où, par addition

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \, \partial v} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\log \omega\right) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\log \omega\right) \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0 .$$

Il est aisé de vérifier que y_1, z_1 vérifient également cette équation, par conséquent, aux lignes asymptotiques de la surface (M_0) correspondent, sur la surface (M_1), les lignes d'un système conjugué.

162. - Note.- Le problème de la déformation infiniment petite des surfaces a suscité de nombreux travaux, que nous devons nous borner à signaler. On trouvera un exposé de ces travaux dans le 4e volume de la Théorie des surfaces de Darboux et dans la géométrie différentielle de Bianchi ; en particulier, on y trouvera l'exposé des travaux de Weingarten.

§ 3.- Transformation de Sophus Lie.

163.- Préliminaires géométriques.- Soient Σ, Σ' deux espaces à trois dimensions et Ω_1, Ω_2 deux réciprocités entre ces espaces. A un point P de Σ, Ω_1 et Ω_2 font correspondre deux plans en général distincts, se coupant suivant une droite p'. Aux ∞^3 points de Σ correspondent, dans Σ', ∞^3 droites p' formant un complexe Γ'. De même, aux points de Σ' correspondent, dans Σ, les droites d'un complexe Γ.

L'opération $\Omega_2^{-1}\Omega_1$ est une homographie de Σ ; supposons que ce soit une homographie générale, possédant quatre points unis A_1, A_2, A_3, A_4, sommets d'un tétraèdre. A un de ces points Ω_1 et Ω_2 font correspondre, dans Σ', des plans coïncidents et par suite principaux pour le complexe Γ'. Désignons ces plans respectivement par $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4$; ils forment un tétraèdre proprement dit. Aux sommets A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 de ce tétraèdre, Ω_1 et Ω_2 font correspondre des plans coïncidents $\alpha_1 = A_2, A_3, A_4$, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, principaux pour le complexe Γ.

Toute droite passant par l'un des points A_1, A_2, A_3, A_4 appartient à Γ et ces points sont principaux pour le complexe. De même, A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 sont principaux pour le complexe Γ'.

Soient P' un point de Σ', p la droite qui lui correspond dans Σ. Aux points de p, Ω_1 fait correspondre les plans ϖ'_1 passant par une droite p'_1 contenant P' et Ω_2 les plans ϖ'_2 passant par une droite p'_2 contenant P'. Les faisceaux $(\varpi'_1), (\varpi'_2)$ sont projectifs et la droite $\varpi'_1\varpi'_2$ engendre un cône quadratique lieu des droites de Γ' passant par P'. Le complexe Γ' est du second ordre et il en est de même du complexe Γ.

Considérons deux points P, Q de Σ et soient p', q' les droites correspondantes de Γ'. Aux points R de la droite PQ, Ω_1 fait correspondre les plans ρ'_1 passant par une droite r'_1 et Ω_2 les plans ρ'_2 passant par une droite r'_2 ne rencontrant pas r'_1 en général. Les faisceaux $(\rho'_1), (\rho'_2)$ sont projectifs, la droite $\rho'_1\rho'_2$ appartient au complexe Γ' et engendre une demi-quadrique Φ'. En particulier, au point de rencontre de PQ avec le plan α_1, correspond une droite de Φ' passant par A'_1 ; soit s'_1 la droite de la demi-quadrique complémentaire de Φ' passant par A'_1. Φ' passe également par A'_2, A'_3, A'_4 ; soient s'_2, s'_3, s'_4 les droites de la demi-quadrique complémentaire passant par ces points. Le quaterne de plans passant par p' et par les droites s'_1, s'_2, s'_3, s'_4 est projectif au quaterne de plans passant par q' et par les mêmes droites. Par suite, les plans projetant A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 des droites de Γ' ont un rapport anharmonique constant.

Reprenons la droite p' et soient S'_1, S'_2, S'_3, S'_4 ses points de rencontre avec $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4$. Projetons r' de A'_1 sur α'_1 et soient $\bar{s}'$ la projection de s', $\bar{S}'_2, \bar{S}'_3, \bar{S}'_4$ celles de S'_1, S'_2, S'_3, S'_4. Les quaternes $S'_1, \bar{S}'_2, \bar{S}'_3, \bar{S}'_4$ et $S'_1, \bar{S}'_2, S'_1A'_2, S'_1A'_3, S'_1A'_4$ sont projectifs, par suite, les quaternes S'_1, S'_2, S'_3, S'_4 et $r'A'_1, r'A'_2, r'A'_3, r'A'_4$

sont projectifs. Par suite les droites de Γ' coupent les faces du tétraèdre A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 en des points dont le rapport anharmonique est constant et égal à celui des plans projetant de ces droites les sommets du tétraèdre. Le complexe Γ' est donc un complexe tétraédral ou complexe de Reye ; il en est de même de Γ.

Observons que Γ (ou Γ') est le lieu des droites unissant les points homologues dans une homographie $\Omega_2^{-1}\Omega_1$ (ou $\Omega_2\Omega_1^{-1}$) de Σ (ou Σ').

164.- <u>Cas particuliers</u>.- L'étude précédente suppose que les réciprocités Ω_1, Ω_2 sont générales ; nous allons chercher s'il y a moyen de les choisir de manière à ce que le complexe Γ soit dégénéré en deux complexes linéaires.

Soient P un point de Σ, p' la droite correspondante de Γ'. Aux points P' de p', Ω_1 et Ω_2 font correspondre des plans ϖ_1, ϖ_2 formant deux faisceaux $(\varpi_1), (\varpi_2)$ projectifs, dont les axes p_1, p_2 passent par P. La droite $\varpi_1\varpi_2$ engendre le cône du complexe de sommet P. Si Γ dégénère en deux complexes linéaires, ce cône doit dégénérer en deux plans et les faisceaux $(\varpi_1), (\varpi_2)$ doivent être perspectifs. Il doit donc exister, sur toute droite p' de Γ', un point R' auquel correspondent deux plans confondus dans Ω_1, Ω_2.

Le lieu du point R' ne peut être une surface, car alors Γ contiendrait toutes les droites de Σ. Il ne peut non plus être fixe, car Γ' se réduirait à une gerbe de rayons. Par suite, le lieu du point R' est une courbe γ'. Les plans ρ que Ω_1, Ω_2 font correspondre aux points R' de γ' doivent former un faisceau, car il doit en passer un par tout point de Σ. Soit r l'axe de ce faisceau.

A un point R de r, Ω_1, Ω_2 font correspondre des plans ρ'_2, ρ'_2 passant par tous les points de γ'. Deux cas peuvent se présenter :

1°) La courbe γ' est une droite, axe des faisceaux de plans engendrés par ρ'_1, ρ'_2 lorsque R décrit la droite r ;

2°) La courbe γ' n'est pas une droite. Alors, quel que soit R sur r, les plans ρ'_1, ρ'_2 sont confondus en un plan fixe ρ' contenant la courbe γ', qui est donc plane. A tout point R de r, Ω_1 et Ω_2 font correspondre un même plan ρ', par conséquent ces réciprocités sont singulières.

165.- <u>Examen du second cas</u>.- Commençons par étudier les réciprocités singulières Ω_1, Ω_2. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées projectives homogènes de Σ, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 celles de Σ'. Supposons que la droite r ait pour équations $x_3 = x_4 = 0$ et le plan ρ', $x_4 = 0$. La réciprocité Ω_1 a une équation de la forme

$$x_3 (a_{13} x'_1 + a_{23} x'_2 + a_{33} x'_3 + a_{43} x'_4) + x_4 (a_{14} x'_1 + a_{24} x'_2 + a_{34} x'_3 + a_{44} x'_4) + (a_{41} x_1 + a_{42} x_2) x'_4 = 0 .$$

Aux points de l'espace Σ' correspondent des ~~points~~ plans passant par le point

$$a_{41} x_1 + a_{42} x_2 = 0 , x_3 = 0 , x_4 = 0$$

de la droite r. Nous pouvons supposer que ce point est précisément le point O_1 $(x_2 = x_3 = x_4 = 0)$, ce qui revient à supposer $a_{41} = 0$.

Nous supposerons qu'aux points de Σ', Ω_2^{-1} fait correspondre les plans passant par O_2 $(x_1 = x_3 = x_4 = 0)$, ce qui revient à écrire l'équation de cette réciprocité sous la forme

$$x_3 (b_{13} x' + b_{23} x'_2 + b_{33} x'_3 + b_{43} x'_4) + x_4 (b_{14} x'_1 + b_{24} x'_2 + b_{34} x'_3 + b_{44} x'_4) + b_{41} x_1 x'_4 = 0 .$$

Les équations de la courbe γ' s'obtiendront en cherchant le lieu de l'intersection des droites de Σ' correspondant aux points de Σ, avec le plan $x'_4 = 0$. On trouve ainsi que γ' est la conique

$$\begin{vmatrix} a_{13} x'_1 + a_{23} x'_2 + a_{33} x'_3 & a_{14} x'_1 + a_{24} x'_2 + a_{34} x'_3 \\ b_{13} x'_1 + b_{23} x'_2 + b_{33} x'_3 & b_{14} x'_1 + b_{24} x'_2 + b_{34} x'_3 \end{vmatrix} = 0 , \quad x'_4 = 0 .$$

Le complexe Γ' est donc formé par les droites s'appuyant sur une conique γ'.

Aux points du plan $x'_4 = 0$, correspondent dans Σ les droites s'appuyant sur la droite $O_1 O_2$ et formant donc un complexe linéaire spécial. Aux points de Σ' non situés dans le plan $x'_4 = 0$ correspondent les droites d'un complexe linéaire Γ_1 dont l'équation s'obtient de la manière suivante. Si $p_{12}, \dots, p_{34}$ sont les coordonnées axiales de la droite de Σ qui correspond au point x' de Σ', on a

$$\rho p_{12} = - a_{42} b_{41} x'^2_4 , \quad \rho p_{13} = - b_{41} (a_{13} x'_1 + \dots + a_{43} x'_4) x'_4 , \quad \rho p_{14} = - b_{41} (a_{14} x'_1 + \dots + a_{44} x'_4) x'_4 ,$$

$$\rho p_{23} = a_{42} (b_{13} x'_1 + \dots + b_{43} x'_4) x'_4 , \quad \rho p_{24} = a_{42} (b_{14} x'_1 + \dots + b_{44} x'_4) x'_4 , \quad \rho p_{34} = \dots .$$

En éliminant les x' et ρ entre les cinq premières de ces équations, on obtient l'équation de Γ_1,

$$\begin{vmatrix} p_{12} & 0 & 0 & 0 & a_{42} b_{41} \\ p_{13} & b_{41} a_{13} & b_{41} a_{23} & b_{41} a_{33} & b_{41} a_{43} \\ p_{14} & b_{41} a_{14} & b_{41} a_{24} & b_{41} a_{34} & b_{41} a_{44} \\ p_{23} & -a_{42} b_{13} & -a_{42} b_{23} & -a_{42} b_{33} & -a_{42} b_{43} \\ p_{24} & -a_{42} b_{14} & -a_{42} b_{24} & -a_{42} b_{34} & -a_{42} b_{44} \end{vmatrix} = 0 .$$

Ce complexe ne peut être spécial, car à tout point de son axe, Ω_1, Ω_2 devraient faire correspondre deux plans confondus ; l'axe coïnciderait donc avec la droite r, ce qui est impossible.

Si s est une droite de Σ, aux points de s, Ω_1, Ω_2 font correspondre des plans engendrant deux faisceaux projectifs d'axes s'_1, s'_2 et l'intersection des plans homologues engendre une demi-quadrique σ' passant par γ'. En particulier, si la droite s appartient à Γ_1, cette demi-quadrique se réduit au cône projetant γ' du point de Σ homologue de s, point qui est commun aux droites s'_1, s'_2.

Soient P, Q deux points de la droite s, que nous supposerons ne pas appartenir au complexe Γ_1. Soient p', q' les droites de la demi-quadrique σ' qui correspondent à P, Q. Ces droites s'appuient sur γ'. Considérons une droite m' de la demi-quadrique complémentaire σ'_1 ; cette droite s'appuie sur γ' et appartient donc à Γ' ; elle correspond à un point M de Σ. Aux points de la droite MP correspondent les droites de Σ' projetant les points de γ' du point $m'p'$; de même à la droite MQ correspond le cône projetant γ' du point $m'q'$. Le plan Ms est donc le plan polaire de M par rapport à Γ_1 et par suite les droites de la demi-quadrique σ'_1 correspondent aux points de la droite s_1 conjuguée de s par rapport à Γ_1. Nous voyons donc qu'à une droite de Σ correspond une quadrique de Σ' passant par γ', mais que cette quadrique correspond à deux droites de Σ conjuguées par rapport à Γ_1.

Considérons maintenant deux droites s, t qui se coupent en un point P et soient σ', τ' les quadriques correspondantes, p' la droite qui correspond à P et qui appartient à σ', τ'. Les quadriques σ', τ' ont en commun la conique γ', la droite p' et une seconde droite q' coupant p' en un point P' ; elles se touchent donc en ce point P'. Par suite, à deux droites incidentes de Σ correspondent deux quadriques tangentes dans Σ'.

166.- <u>Remarque</u>.- Dans le premier cas considéré plus haut, où la courbe γ' se réduit à une droite, les complexes Γ, Γ' se réduisent à deux complexes linéaires spéciaux. Ce cas ne nous intéresse pas pour la suite.

167.- <u>Transformation de Lie</u>.- La transformation de Lie correspond au cas où la conique γ' est le cercle absolu. En coordonnées cartésiennes rectangulaires homogènes, les réciprocités Ω_1, Ω_2 peuvent s'écrire sous la forme

$$Y(X'+iY') + ZU' - Z'U = 0,$$
$$U(X'-iY') + Z'Y - XU' = 0.$$

La conique γ' a pour équations

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 0, \quad U' = 0$$

et la droite r, $Y=0$, $U=0$. Le complexe Γ_1 est représenté par

$$p_{14} - p_{23} = 0$$

et est bien non spécial.

A une droite ρ de Σ correspond dans Σ' une sphère σ' qui, lorsque ρ appartient à Γ_1, est de rayon nul (cône isotrope). A deux droites incidentes, correspondent deux sphères tangentes.

Appelons avec Lie élément de contact l'ensemble d'un point et d'un plan passant par ce point. Soit (P, ϖ) un élément de contact de Σ et supposons que ϖ ne soit pas le plan polaire de P par rapport au complexe Γ_1. Aux droites du faisceau (P, ϖ) correspondent des sphères tangentes en un point P'; soit ϖ' le plan tangent commun à ces sphères en P'. A l'élément de contact (P, ϖ), la transformation de Lie fait correspondre l'élément de contact (P', ϖ'); on dit que c'est une transformation de contact. Observons qu'à la droite de Γ_1 appartenant au faisceau (P, ϖ), correspond le cône isotrope de sommet P'. Observons en outre que l'élément (P', ϖ') est également l'homologue de l'élément (P_1, ϖ_1), P_1 étant le pôle de ϖ et ϖ_1 le plan polaire de P par rapport à Γ_1.

Considérons une surface (M_1) de Σ et soient μ_1 le plan tangent en M_1, M_2 le pôle de μ_1, μ_2 le plan polaire de M_1 par rapport à Γ_1. La droite $g = M_1M_2 = \mu_1\mu_2$ décrit une congruence (g) dont les nappes focales sont les surfaces (M_1), (M_2). Soient m'_1, m'_2 les droites isotropes de Σ' qui correspondent à M_1, M_2; ces droites se coupent en un point M', homologue de la droite g. Le point M' décrit une surface (M') dont le plan tangent est le plan $m'_1\, m'_2$. Soit en effet λ une courbe tracée sur (M_1); aux différents points de λ correspondent dans Σ' les génératrices d'une réglée isotrope. Supposons que cette réglée soit une développable et appelons λ' son arête de rebroussement. Si M_1, $\bar{M}_1$ sont deux points de λ; m'_1, $\bar{m}'_1$ les droites correspondantes, lorsque $\bar{M}_1$ tend vers M_1 sur λ, $\bar{m}'_1$ tend vers une droite qui doit rencontrer m'_1 à la limite, Il en résulte que la limite de la droite

$M_1\overline{M}_1$, c'est-à-dire la tangente à h en M_1, appartient à Γ_1. Par conséquent, puisque la droite g appartient au complexe Γ, aux développables de la congruence (g) correspondent, sur (M'), des courbes ayant pour tangentes les droites m'_1, m'_2 ; le plan de ces droites est donc tangent à la surface (M'). Aux développables de (g) correspondent donc, sur (M'), les courbes de longueur nulle. De plus, à une droite du plan μ_1 passant par M_1, et à sa conjuguée du plan μ_2 passant par M_2, correspond une sphère contenant m'_1, m'_2 et par suite tangente à (M') en M'. Enfin, les droites $m'_1\, m'_2$ décrivent une congruence dont les nappes focales sont (M') et le cercle γ'.

168.- <u>Propriété d'une congruence appartenant à un complexe linéaire</u>.- Conservons les notations précédentes et supposons la surface (M_1) non développable et rapportée à des coordonnées curvilignes u, v. Si x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées de M_1, x_2, y_2, z_2 celles de M_2, nous avons la relation

$$x_1 - x_2 - y_1 z_2 + y_2 z_1 = 0 \qquad (1)$$

exprimant que la droite g appartient au complexe Γ_1. Le point impropre de la tangente en M_1 à la courbe u a pour coordonnées homogènes $\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial y_1}{\partial u}, \frac{\partial z_1}{\partial u}, 0$, par suite, on a

$$y_2\frac{\partial z_1}{\partial u} - z_2\frac{\partial y_1}{\partial u} + \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0. \qquad (2)$$

De même, on a

$$y_2\frac{\partial z_1}{\partial v} - z_2\frac{\partial y_1}{\partial v} + \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0 \qquad (3)$$

et en intervertissant les rôles de M_1, M_2,

$$\left.\begin{aligned} y_1\frac{\partial z_2}{\partial u} - z_1\frac{\partial y_2}{\partial u} + \frac{\partial x_2}{\partial u} = 0,\\ y_1\frac{\partial z_2}{\partial v} - z_1\frac{\partial y_2}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial v} = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

De la relation (2) on déduit

$$y_2\frac{\partial^2 z_1}{\partial u^2} - z_2\frac{\partial^2 y_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} + \frac{\partial y_2}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial u} - \frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial z_2}{\partial u} = 0 \qquad (5)$$

Désignons par E_1, F_1, G_1 les quantités E, F, G relatives à (M_1), par L_1, M_1, N_1 les quantités D, D', D'' relatives à la même surface, par E_2, F_2, G_2 et L_2, M_2, N_2 les mêmes quantités relatives à (M_2). En éliminant x_2, y_2, z_2 entre les équations (1), (2), (3) et (5), on obtient

$$\sqrt{E_1G_1 - F_1^2}\, L_1 + \frac{\partial(y_1, z_1)}{\partial(u, v)}\left(\frac{\partial y_2}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial u} - \frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial z_2}{\partial u}\right) = 0.$$

On a de même

$$\sqrt{E_2G_2-F_2^2}\,L_2+\frac{\partial(y_2\, z_2)}{\partial(u,v)}\left(\frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial z_2}{\partial u}-\frac{\partial y_2}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial u}\right)=0\,.$$

Par suite, on a

$$L_1\sqrt{E_1G_1-F_1^2}\;\frac{\partial(y_2,z_1)}{\partial(u,v)}+L_2\sqrt{E_2G_2-F_2^2}\;\frac{\partial(y_1,z_1)}{\partial(u,v)}=0\,.$$

Dans cette relation, seuls L_1, L_2 peuvent être identiquement nuls. De plus, la même relation est vérifiée par N_1 et N_2. Si donc la surface (M_1) est rapportée à ses asymptotiques, c'est-à-dire si l'on a $L_1 = N_1 = 0$, on aura $L_2 = N_2 = 0$ et les courbes u, v sont les asymptotiques de la surface (M_2).

Tout complexe linéaire non spécial pouvant se ramener à Γ_1 par une transformation projective et d'autre part toute congruence appartenant à Γ_1 (c'est-à-dire dont toutes les droites appartiennent à Γ_1) étant une congruence de l'espèce qui vient d'être étudiée, on voit que dans une congruence appartenant à un complexe linéaire, les asymptotiques se correspondent sur les surfaces focales.

169.- Propriété des enveloppes de sphères.- Considérons une sphère

$$(X-x_0)^2+(Y-y_0)^2+(Z-z_0)^2=R^2 \qquad (1)$$

dont le centre et le rayon dépendent d'un paramètre u. L'enveloppe de la sphère (1) s'obtiendra en éliminant u entre l'équation (1) et l'équation

$$(X-x_0)\,dx_0+(Y-y_0)\,dy_0+(Z-z_0)\,dz_0+R\,dR=0 \qquad (2)$$

Ce sera le lieu du cercle représenté par les équations (1) et (2).

Supposons que la famille de sphères soit telle que deux sphères infiniment voisines soient tangentes. La caractéristique d'une sphère se composera alors de deux droites isotropes et le plan (2) sera tangent à la sphère (1). Pour cela, il faut et il suffit que l'on ait

$$dx_0^2+dy_0^2+dz_0^2=dR^2.$$

Si l'on désigne par P_0 le centre de la sphère (1), par P le pied de la normale abaissé de P_0 sur le plan (2), le point P appartient à la surface enveloppe et la droite P_0P, qui a pour équations

$$\frac{X-x_0}{dx_0}=\frac{Y-y_0}{dy_0}=\frac{Z-z_0}{dz_0}$$

sera normale à l'enveloppe en P et tangente en P_0 à la courbe (P_0) lieu des centres des sphères (1). Les normales à l'enveloppe aux points de la courbe (P) forment donc une développable et cette courbe est une ligne de courbure de l'enveloppe.

170.- Propriété de la transformation de Lie.-

Reprenons les surfaces (M_1), (M_2), (M') dont il a été question plus haut (n^{os} 167, 168) et soit λ une courbe tracée sur la surface (M_1). Considérons la développable Λ enveloppée par les plans tangents à la surface (M_1) aux points de λ. Trois cas peuvent se présenter :

1°) L'arête de rebroussement de la développable Λ n'appartient à aucune des surfaces (M_1), (M_2) ;

2°) Cette arête appartient à la surface (M_2) ;

3°) Cette arête appartient à la surface (M_1) ; elle coïncide donc avec λ qui est une asymptotique de (M_1).

Désignons par λ' la courbe qui correspond à λ sur la surface (M'). Dans le premier cas, aux droites de la développable Λ correspondent des sphères tangentes à la surface (M') aux points de λ', mais deux sphères infiniment voisines ne se touchent pas en un point de λ'. Dans le second cas, les sphères qui correspondent aux droites de Λ sont des cônes isotropes et on a vu que la courbe λ' est une courbe de longueur nulle.

Dans le troisième cas, aux droites de Λ correspondent des sphères tangentes à la surface (M') aux points de λ' et deux sphères infiniment voisines sont tangentes en un point de λ'. Par suite, les sphères envisagées enveloppent une surface pour laquelle λ' est une ligne de courbure ; comme cette surface touche (M') le long de la courbe λ', cette ligne est, d'après le théorème de Joachimsthal, une ligne de courbure de la surface (M').

Dans la transformation de Lie, aux asymptotiques d'une surface de Σ correspondent les lignes de courbure de la surface correspondante de Σ'.

On observera que de ce théorème on peut déduire celui qui fut l'objet du n° 168.

171.- Cyclide de Dupin.-

On appelle cyclide de Dupin la surface enveloppe d'une sphère σ' tangentes à trois sphères σ_1, σ_2, σ_3 (ne se touchant pas deux-à-deux).

Appliquons la transformation de Lie à la cyclide de Dupin. Aux sphères σ_1, σ_2, σ_3 correspondent trois droites s_1, s_2, s_3 deux-à-deux gauches (et leurs conjuguées par rapport à Γ_1) ; à la sphère σ' correspond une droite s' (et sa conjuguée par rapport à Γ_1) s'appuyant sur s_1, s_2, s_3. Le lieu de la droite s' est une quadrique Q et la cyclide de Dupin Q' est la transformée de cette quadrique.

La quadrique Q admet deux systèmes de génératrices rectilignes, par conséquent la cyclide Q' est de deux manières l'enveloppe d'une sphère tangente à trois sphères.

Les droites de Q sont les asymptotiques de cette quadrique. Il leur correspond les lignes de courbure de Q'. Considérons par exemple la droite s_1 ; il lui correspond la sphère σ_1 ; la ligne de courbure correspondante est la courbe de Q' appartenant à σ_1, c'est-à-dire la courbe caractéristique de cette sphère. Cette courbe est un cercle et par suite les lignes de courbure de Q' forment deux familles de cercles.

Chapitre X

Étude de quelques surfaces particulières.

§1.- Surfaces W

172.- Développées d'une surface.- Soit (M) une surface rapportée à ses lignes de courbure u, v. Désignons par M_1, M_2 les centres de courbure principaux au point M, par R_1, R_2 les rayons de courbure principaux, par (M_1), (M_2) les développées de (M). Nous supposerons que les normales relatives aux courbes u ont leurs arêtes de rebroussement sur la surface (M_1), R_1 étant le rayon de courbure correspondant.

Si x, y, z sont les coordonnées de M ; l, m, n les cosinus directeurs de la normale à (M) en ce point, les coordonnées du point M_1 sont ($R_1 = MM_1$)

$$x_1 = x + R_1 l, \quad y_1 = y + R_1 m, \quad z_1 = z + R_1 n.$$

D'après les formules d'Olinde Rodrigues, nous avons

$$\frac{\partial x}{\partial u} + R_1 \frac{\partial l}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial u} + R_1 \frac{\partial m}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial u} + R_1 \frac{\partial n}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} + R_2 \frac{\partial l}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial v} + R_2 \frac{\partial m}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial v} + R_2 \frac{\partial n}{\partial v} = 0.$$

Par suite

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = l \frac{\partial R_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial u} = m \frac{\partial R_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial u} = n \frac{\partial R_1}{\partial u}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + l \frac{\partial R_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial v} = \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{\partial y}{\partial v} + m \frac{\partial R_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial v} = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{\partial z}{\partial v}$$

On a donc, pour la surface (M_1),

$$E_1 = \Sigma \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial R_1}{\partial u}\right)^2, \quad F_1 = \frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial R_1}{\partial v}, \quad G_1 = G\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_1}{\partial v}\right)^2.$$

Observons d'autre part que, pour la surface (M), nous avons

$$F = 0, \quad D' = 0, \quad D = \frac{E}{R_1}, \quad D'' = \frac{G}{R_2}.$$

La normale en M_1 à (M_1) étant parallèle à la tangente en M à la ligne u, ses cosinus directeurs sont

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad m_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad n_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

En appelant D_1, D'_1, D''_1 les quantités D, D', D'' relatives à la surface (M_1), on a

$$D_1 = \Sigma l_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial R_1}{\partial u} \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial u} = -\frac{\sqrt{E}}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial u},$$

$$D_1' = \Sigma l_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial R_1}{\partial u} \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial l}{\partial v} = -\frac{F}{\sqrt{E} R_2} \frac{\partial R_1}{\partial u} = 0,$$

$$D_1'' = \Sigma l_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} = -\frac{1}{2\sqrt{E}} \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{\partial G}{\partial u}.$$

La seconde équation de Codazzi donne

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{G}{R_2^2}\frac{\partial R_2}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial D''}{\partial u} = \frac{GD + ED''}{E}\frac{\partial}{\partial u}(\log\sqrt{G})$$

d'où

$$D_1'' = \frac{G}{\sqrt{E}} \frac{R_1}{R_2^2} \frac{\partial R_2}{\partial u}.$$

On a de même, pour la surface (M_2),

$$E_2 = E\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_2}{\partial u}\right)^2, \quad F_2 = \frac{\partial R_2}{\partial u}\frac{\partial R_2}{\partial v}, \quad G_1 = \left(\frac{\partial R_2}{\partial v}\right)^2,$$

$$D_2 = \frac{E}{\sqrt{G}} \frac{R_2}{R_1^2} \frac{\partial R_1}{\partial v}, \quad D_2' = 0, \quad D_2'' = -\frac{\sqrt{G}}{R_2}\frac{\partial R_2}{\partial v}.$$

De $D_1' = 0$, $D_2' = 0$ on déduit qu'aux lignes de courbure de la surface (M) correspondent sur les développées (M_1), (M_2), des réseaux conjugués.

173.- Surfaces W.- On appelle surface W une surface pour laquelle les rayons de courbure principaux sont liés par une relation.

Observons que l'on a

$$\begin{vmatrix} D_1 & D_1'' \\ D_2 & D_2'' \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{EG}}{R_1 R_2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial u} & \frac{\partial R_2}{\partial u} \\ \frac{\partial R_1}{\partial v} & \frac{\partial R_2}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Pour une surface W, le second membre est identiquement nul et réciproquement. Une surface est W sous la condition nécessaire et suffisante

$$D_1 : D_1' : D_1'' = D_2 : D_2' : D_2'',$$

c'est-à-dire lorsque les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la développée (Ribaucour).

174.- Conservation des lignes de courbure.- L'équation différentielle des lignes de courbure sur la surface (M_1) est

$$\begin{vmatrix} E_1\,du + F_1\,dv & D_1\,du \\ F_1\,du + G_1\,dv & D_1''\,dv \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$ER_2^2 \frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial R_1}{\partial v} du^2 + \left[GR_1^2 \frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial R_2}{\partial u} + ER_2^2\left(\frac{\partial R_1}{\partial v}\right)^2 + EG(R_1 - R_2)^2\right] du\,dv + GR_1^2 \frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial R_2}{\partial u} dv^2 = 0.$$

Les lignes de courbure de la surface (M_2) sont données par

$$GR_1^2 \frac{\partial R_2}{\partial u}\frac{\partial R_2}{\partial v} dv^2 + \left[ER_2^2 \frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial R_2}{\partial v} + GR_1^2\left(\frac{\partial R_2}{\partial u}\right)^2 + EG(R_1 - R_2)^2\right] du\,dv + ER_2^2 \frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial R_2}{\partial u} du^2 = 0.$$

Pour qu'il y ait conservation des lignes de courbure sur les surfaces (M_1), (M_2), ces équations doivent être identiques, ce qui entraîne

$$\frac{\partial}{\partial u}(R_1-R_2)=0, \quad \frac{\partial}{\partial v}(R_1-R_2)=0$$

et $R_1-R_2=c^{te}$.

Les surfaces telles que les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de la développée sont donc des surfaces W particulières (Ribaucour).

Les courbures totales des surfaces (M_1), (M_2) sont données par

$$K_1=\frac{D_1 D_1''}{E_1 G_1-F_1^2}=-\frac{1}{(R_1-R_2)^2}, \quad K_2=-\frac{1}{(R_1-R_2)^2}.$$

Ces surfaces sont donc à courbure totale constante négative.

175.- __Conservation des asymptotiques sur une surface et sa développée.__- Pour que les asymptotiques se correspondent sur les surfaces (M), (M_1), on doit avoir

$$D:D':D''=D_1:D_1':D_1''$$

c'est-à-dire

$$\frac{G\sqrt{E}}{R_1 R_2^2}\frac{\partial}{\partial u}(R_1 R_2)=0.$$

La courbure totale K de (M) ne dépend donc que de v. Et réciproquement.

De même, pour que les asymptotiques se correspondent sur les surfaces (M), (M_2), il faut et il suffit que K ne dépende que de u.

Par conséquent, pour que les asymptotiques se correspondent sur les trois surfaces (M), (M_1), (M_2), il faut et il suffit que la surface (M) soit à courbure totale constante.

176.- __Théorème de Halphen.__- Désignons par K_1, K_2 les courbures totales des surfaces (M_1), (M_2). On a

$$K_1=\frac{D_1 D_1''}{E_1 G_1-F_1^2}=-\frac{1}{(R_1-R_2)^2}\frac{\frac{\partial R_2}{\partial u}}{\frac{\partial R_1}{\partial u}},$$

$$K_2=-\frac{1}{(R_1-R_2)^2}\frac{\frac{\partial R_1}{\partial v}}{\frac{\partial R_2}{\partial v}}.$$

On en tire

$$\frac{1}{K_1 K_2}-(R_1-R_2)^4=(R_1-R_2)^4\frac{\frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial R_2}{\partial v}-\frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial R_2}{\partial u}}{\frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial R_2}{\partial u}}$$

Si la surface est W, le second membre est nul et réciproquement. Les surfaces W sont donc caractérisées par

$$\frac{1}{K_1 K_2}-(R_1 R_2)^4=0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit W est que le produit des quatre rayons de courbure principaux aux centres de courbure correspondant à un point de la surface, soit égal à la quatrième puissance de la distance de ces points (Halphen).

177.— <u>Relation entre les surfaces à courbure totale constante et les surfaces à courbure moyenne constante.</u> — Considérons une surface (M) à courbure totale constante K et soit M' un point pris à la distance constante a de M sur la normale à (M). La surface (M') est une surface parallèle à (M). La surface (M') a mêmes normales et mêmes développées que (M). Si l'on désigne par R'_1, R'_2 les rayons de courbure principaux de (M'), on aura donc

$$(R'_1 - a)(R'_2 - a) = \frac{1}{K}.$$

Si l'on prend $a^2 = \frac{1}{K}$, on aura

$$\frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} = \sqrt{K}. \qquad (1)$$

On obtient donc une surface à courbure moyenne constante (imaginaire si K est négatif). Toute surface à courbure totale constante admet donc deux surfaces parallèles à courbure moyenne constante (O. Bonnet).

Inversement, si l'on désigne par R_1, R_2 les rayons de courbure principaux de (M), on a $R'_1 = R_1 + a$, $R'_2 = R_2 + a$ et en partant de la relation (1), on tire $R_1 R_2 = \frac{1}{K}$. A toute surface de courbure moyenne constante et non nulle, correspond une surface parallèle à courbure totale constante.

178.— <u>Surface à courbure totale constante négative.</u> — Soit (M) une surface à courbure totale constante négative $K = -\frac{1}{\rho^2}$, rapportée à ses asymptotiques u, v. Nous avons $R_1 R_2 = -\rho^2$ et (n° 145)

$$D = 0, \quad D'' = 0, \quad \frac{D'^2}{eg - f^2} = \rho^2, \quad R_1 + R_2 = \frac{-2fD'}{eg - f^2},$$

e, f, g étant les coefficients du ds^2 de la représentation sphérique de la surface. On en déduit

$$H = \frac{-2fD'}{eg - f^2} \cdot \frac{1}{\rho^2}$$

et

$$e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 = \frac{1}{\rho^2}\left(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2\right) + \frac{2fD'}{eg - f^2} \cdot \frac{1}{\rho^2} \cdot 2D'\,du\,dv.$$

Par conséquent

$$E = \rho^2 e, \quad F = -\rho^2 f, \quad G = \rho^2 g.$$

En appliquant les formules de Codazzi, on trouve les conditions

$$e\frac{\partial g}{\partial u} - f\frac{\partial e}{\partial v} = 0, \qquad f\frac{\partial g}{\partial u} - g\frac{\partial e}{\partial v} = 0$$

d'où

$$\frac{\partial e}{\partial v} = 0 , \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 0 .$$

On peut substituer à u, v des fonctions de u, v telles que $e = 1$, $g = 1$. Si ω est l'angle des asymptotiques u, v, on a alors

$$ds^2 = \rho^2 (du^2 + 2\, du\, dv \cos\omega + dv^2).$$

Considérons les courbes $u = u_0$, $u = u_1$, $v = v_0$, $v = v_1$ et remarquons que sur les courbes u, v, on a respectivement $ds = \rho\, du$, $ds = \rho\, dv$. Cela étant, sur les courbes $v = v_0$, $v = v_1$, les longueurs d'arcs compris entre les courbes $u = u_0$, $u = u_1$ sont égales à $\rho(u_1 - u_0)$. De même, les arcs des courbes $u = u_0$, $u = u_1$ compris entre $v = v_0$, $v = v_1$ sont égaux à $\rho(v_1 - v_0)$. Les quadrilatères formés d'asymptotiques ont leurs côtés opposés égaux.

§ 2.- Surfaces minima.

179.- Définition.- On appelle surface minima une surface dont la courbure moyenne est nulle :

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0 .$$

Ces surfaces ont été rencontrées dans la résolution du problème suivant, qui explique la désignation qu'elles ont reçues. Étant donné un contour C, trouver la surface d'aire minimum passant par C. Le calcul des variations conduit immédiatement à une condition nécessaire, mais non suffisante, qui est précisément la condition $H = 0$.

On sait d'ailleurs que les surfaces résolvant le problème précédent ont été réalisées par le physicien J. Plateau, au moyen de lamelles de liquide (eau de savon glycérinée).

180.- Premières propriétés des surfaces minima.- Soit (M) une surface minima rapportée à ses lignes de courbure u, v. Nous avons $F = 0$, $D' = 0$, $E = R_1 D$, $G = R_2 D''$. Les formules de Rodrigues donnent

$$\frac{\partial x}{\partial u} + R_1 \frac{\partial l}{\partial u} = 0, \ldots \frac{\partial x}{\partial v} + R_2 \frac{\partial l}{\partial v} = 0, \ldots$$

d'où

$$E = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = R_1^2 \Sigma \left(\frac{\partial l}{\partial u}\right)^2 = R_1^2 e , \quad G = R_2^2 g = R_1^2 g$$

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2 = R_1^2 (e\,du^2 + g\,dv^2).$$

Les lignes de longueur nulle sont données par

$$E\,du^2 + G\,dv^2 = 0 , \qquad (1)$$

c'est-à-dire par

$$R_1 (D\,du^2 - D''\,dv^2) = 0 ; \qquad (2)$$

elles forment donc un système conjugué. Réciproquement, si les lignes de longueur nulle d'une surface forment un système conjugué, les équations (1) et (2) sont équivalentes et on a $R_1 + R_2 = 0$; la surface est donc minima.

Ces résultats sont d'ailleurs une conséquence du fait que l'indicatrice de tout point d'une surface minima est une hyperbole équilatère et que seule une telle conique admet les droites isotropes comme directions conjuguées.

181.- Les surfaces minima sont des surfaces de translation.- Rapportons maintenant une surface minima (M) à ses lignes de longueur nulle u, v. Puisque ces lignes forment un système conjugué, les coordonnées x, y, z d'un point de la surface sont solutions d'une équation de Laplace.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + A \frac{\partial \theta}{\partial u} + B \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0 .$$

De plus, on a

$$E = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 0 , \quad G = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = 0 ,$$

et ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que la surface (M) soit minima.

On déduit des deux dernières relations

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 2 \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -2 \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \left(A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial x}{\partial v}\right) = -2BF = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 2 \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -2 \Sigma \frac{\partial x}{\partial v} \left(A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial x}{\partial v}\right) = -2AF = 0 .$$

Comme F n'est pas nulle, on a $A = B = 0$ et x, y, z sont solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = 0 .$$

On a donc

$$x = \varphi_1(u) + \psi_1(v) , \quad y = \varphi_2(u) + \psi_2(v) , \quad z = \varphi_3(u) + \psi_3(v) , \qquad (1)$$

sous les conditions

$$\overline{\varphi_1'}^2 + \overline{\varphi_2'}^2 + \overline{\varphi_3'}^2 = 0 , \quad \overline{\psi_1'}^2 + \overline{\psi_2'}^2 + \overline{\psi_3'}^2 = 0 . \qquad (2)$$

Les surfaces minima sont donc des surfaces de translation particularisées par les conditions (2).

Remarque.- On écarte, dans ce qui précède, les surfaces par chaque point desquelles passe une seule ligne de longueur nulle et qui sont des développables à génératrices isotropes.

182.- Formules de Weierstrass.- La recherche des surfaces minima revient à la résolution des équations (2). Définissons α par la relation

$$\varphi_1'(u) + i \varphi_2'(u) + \alpha \varphi_3'(u) = 0$$

et supposons que α soit effectivement fonction de u. De la première des équations (2) on déduit

$$\varphi_1' - i\varphi_2' - \frac{1}{\alpha}\varphi_3' = 0 ,$$

d'où

$$\varphi_1' : \varphi_2' : \varphi_3' = 1-\alpha^2 : i(1+\alpha^2) : 2\alpha .$$

Représentons par $\frac{1}{2} f_1(\alpha) \frac{d\alpha}{du}$ la valeur commune des rapports précédents. On a

$$\varphi_1(u) = \frac{1}{2}\int (1-\alpha^2) f_1(\alpha)\, d\alpha ,$$

$$\varphi_2(u) = \frac{i}{2}\int (1+\alpha^2) f_1(\alpha)\, d\alpha ,$$

$$\varphi_3(u) = \int \alpha f_1(\alpha)\, d\alpha .$$

En posant de même

$$\psi_1'(v) - i\psi_2'(v) + \beta\psi_3'(v) = 0$$

et en supposant que β n'est pas une constante, on a

$$\psi_1(v) = \frac{1}{2}\int (1-\beta^2) f_2(\beta)\, d\beta ,$$

$$\psi_2(v) = -\frac{i}{2}\int (1+\beta^2) f_2(\beta)\, d\beta ,$$

$$\psi_3(v) = \int \beta f_2(\beta)\, d\beta .$$

Les équations (1) donneront alors les expressions des coordonnées x, y, z des points de (M). Pour obtenir ces équations sans quadratures, posons

$$f_1(\alpha) = \rho_1'''(\alpha) , \quad f_2(\beta) = \rho_2'''(\beta) ;$$

il vient

$$x = \frac{1}{2}(1-\alpha^2)\rho_1''(\alpha) + \alpha\rho_1'(\alpha) - \rho_1(\alpha) + \frac{1}{2}(1-\beta^2)\rho_2''(\beta) + \beta\rho_2'(\beta) - \rho_2(\beta) ,$$

$$y = \frac{i}{2}(1+\alpha^2)\rho_1''(\alpha) - i\alpha\rho_1'(\alpha) + i\rho_1(\alpha) - \frac{i}{2}(1+\beta^2)\rho_2''(\beta) + i\beta\rho_2'(\beta) - i\rho_2(\beta) ,$$

$$z = \alpha\rho_1''(\alpha) - \rho_1'(\alpha) + \beta\rho_2''(\beta) - \rho_2''(\beta) .$$

Ces formules sont dues à Weierstrass.

Supposons maintenant que α soit une constante. Posons

$$\frac{\varphi_1'(u)}{1-\alpha^2} = \frac{\varphi_2'(u)}{i(1+\alpha^2)} = \frac{\varphi_3'(u)}{2\alpha} = \frac{1}{2} f'(\alpha)$$

On aura

$$\varphi_1' = \frac{1}{2}(1-\alpha^2) f(\alpha) , \quad \varphi_2' = \frac{i}{2}(1+\alpha^2) f(\alpha) , \quad \varphi_3' = \alpha f(\alpha) .$$

Sur la surface (M), les courbes α sont des droites isotropes parallèles et la surface est un cylindre imaginaire. Si α et β sont des constantes, la surface (M) est un plan.

183.- <u>Représentation sphérique des surfaces minima</u>.- En partant des expressions de x, y, z données par les formules précédentes, on a

$$F = \frac{1}{2}(1+\alpha\beta)^2 f_1(\alpha) f_2(\beta) , \quad ds^2 = (1+\alpha\beta)^2 f_1 f_2\, d\alpha\, d\beta .$$

Les cosinus directeurs de la normale sont

$$l = \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}, \quad m = i\frac{\beta-\alpha}{1+\alpha\beta}, \quad n = -\frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta}$$

et l'élément linéaire de la représentation sphérique est donc

$$ds'^2 = \frac{4\,d\alpha\,d\beta}{(1+\alpha\beta)^2}.$$

Nous avons donc, avec les notations habituelles,

$$E : F : G = e : f : g$$

et par suite la représentation sphérique des surfaces minima est une représentation conforme sur la sphère.

Réciproquement, soient (M) une surface, (M') sa représentation sphérique et supposons que cette représentation soit conforme. A une distance t_1 issue de M correspond, dans la représentation sphérique, une direction t_1' issue de M' perpendiculaire à la direction t_2 conjuguée de t_1 en M. Par suite l'angle de deux tangentes à (M) en M est égal à l'angle des directions conjuguées et l'indicatrice en M de la surface (M) est un cercle ou une hyperbole équilatère. La surface (M) est donc une sphère ou une surface minima.

On remarquera d'ailleurs que, pour établir le théorème direct, on eût pu utiliser des coordonnées curvilignes quelconques. Observons en outre que la courbure totale est

$$K = -\frac{4}{(1+\alpha\beta)^4 f_1 f_2}.$$

184.- Lignes asymptotiques des surfaces minima.- Nous avons

$$D = -\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial u} = -\frac{f_1(\alpha)}{1+\alpha\beta}, \quad D' = -\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v} = 0, \quad D'' = -\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial v} = -\frac{f_2(\beta)}{1+\alpha\beta}.$$

Les lignes asymptotiques sont donc données par

$$f_1(\alpha)\,d\alpha^2 + f_2(\beta)\,d\beta^2 = 0,$$

c'est-à-dire par les équations

$$\sqrt{f_1}\,d\alpha + i\sqrt{f_2}\,d\beta = 0, \quad \sqrt{f_1}\,d\alpha - i\sqrt{f_2}\,d\beta = 0.$$

Rapportons la surface minima (M) à ses asymptotiques u, v. Ces courbes forment un système orthogonal et on a donc $F=0$. De plus, on a $D=0$, $D''=0$. Les formules de Codazzi donnent

$$\frac{\partial}{\partial u}\log D' = \frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\frac{E}{G}}, \quad \frac{\partial}{\partial v}\log D' = \frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\frac{G}{E}}.$$

On en déduit que le rapport $E:G$ est le produit d'une fonction de u seule par une fonction de v seule. Par suite, en remplaçant u par une fonction convenable de u et v par une fonction convenable de v (paramètres isométriques), on peut supposer $E=G$ et les asymptotiques d'une surface minima forment donc un système isotherme.

L'élément linéaire de la représentation sphérique est donné par

$$ds'^2 = -KE(du^2+dv^2)$$

et le système qui correspond aux lignes asymptotiques est également isotherme.

Chapitre XI

Transformation et suites de Laplace.

§1.- Lignes conjuguées en coordonnées projectives.

185.- Lignes conjuguées en coordonnées projectives.- Soit (x) une surface lieu d'un point x dont les coordonnées projectives x_1, x_2, x_3, x_4 sont des fonctions analytiques de deux paramètres u, v. L'équation du plan tangent à la surface (x) s'écrira sous la forme

$$\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 = 0, \qquad (1)$$

les ξ dépendant des paramètres u, v.

Les équations paramétriques de la surface s'obtiendront en résolvant les équations (1) et

$$\Sigma X_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = 0, \quad \Sigma X_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial v} = 0, \qquad (2)$$

par rapport aux X. On obtiendra ainsi les coordonnées x d'un point de la surface (x).

Exprimons que les tangentes aux lignes u, v en un point x appartiennent au plan tangent. On a

$$\Sigma \xi \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \Sigma \xi \frac{\partial x}{\partial v} = 0. \qquad (3)$$

Supposons maintenant que les lignes u, v soient conjuguées. Si u varie seule, le plan tangent (1) enveloppe une développable dont la caractéristique est tangente à une ligne v. Cette caractéristique, qui a pour équations

$$\Sigma \xi X = 0, \quad \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u} X = 0 \qquad (4)$$

doit donc passer par le point $x + \frac{\partial x}{\partial v} dv$. On doit donc avoir

$$\Sigma \xi x + \left(\Sigma \xi \frac{\partial x}{\partial v}\right) dv = 0, \quad \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u} x + \left(\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) dv = 0.$$

En vertu de (1), (3) et (2), cette relation se réduit à

$$\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0. \qquad (I)$$

Réciproquement, si la relation (I) est satisfaite, les relations (4) en résultent et les courbes u, v forment un système conjugué sur la surface.

La relation (I) est évidemment équivalente à

$$\sum \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = 0. \qquad (I')$$

186.- <u>Equations de Laplace</u>. - Des relations (2), on déduit, sur la surface (x),

$$\sum x \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} + \sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \sum x \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} + \sum \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = 0$$

et par suite la relation (I) peut s'écrire sous l'une des formes

$$\sum \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad (I'), \qquad \sum x \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = 0. \qquad (I'')$$

Des relations (3), on déduit

$$\sum \xi \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \sum \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \sum \xi \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

La relation (I) est donc équivalente à

$$\sum \xi \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0 \qquad (I''')$$

Les relations (1) pour $X = x$, (3) et (I''') montrent que l'on a

$$\left| \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} \quad x \right| = 0$$

c'est-à-dire que les coordonnées des points x de la surface (x) satisfont à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial x}{\partial u} + b \frac{\partial x}{\partial v} + c x = 0. \qquad (II)$$

De même, les équations (1), (2) pour $X = x$ et (I'') montrent que les coordonnées des plans tangents ξ à la surface (x) satisfont à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} + \alpha \frac{\partial \xi}{\partial u} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \gamma \xi = 0. \qquad (III)$$

Inversement, soient x_1, x_2, x_3, x_4 quatre solutions linéairement indépendantes de l'équation (II). Le point x dont les coordonnées sont x_1, x_2, x_3, x_4 décrit une surface (x) sur laquelle les lignes u, v sont conjuguées. De même, en considérant quatre solutions linéairement indépendantes de l'équation (III), on obtient une surface enveloppe sur laquelle les lignes u, v sont conjuguées.

187.- <u>Remarque I</u>. - Les coordonnées des points de la surface (x) ne peuvent satisfaire à une seconde équation du même type que (III), car alors on aurait une relation de la forme

$$a' \frac{\partial x}{\partial u} + b' \frac{\partial x}{\partial v} + c' x = 0$$

et le point x décrirait une courbe, les solutions x de l'équation précédente dépendant d'une fonction de u, v.

188.- Remarque II :- Une homographie ou une réciprocité n'altère pas la forme des équations (II) ou (III), par suite la notion de courbes conjuguées sur une surface a un caractère projectif.

189.- Remarque III.- Si l'on passe des coordonnées homogènes aux coordonnées cartésiennes ordinaires, l'équation (II) doit être satisfaite pour $x = 1$ et on a $c = 0$. On retrouve ainsi les résultats obtenus plus haut. (Chap. IV, § 1).

190.- Théorème de Koenigs.- Les sections d'une surface par les plans passant par une droite ont pour lignes conjuguées les courbes de contact des cônes circonscrits à la surface et dont les sommets sont situés sur la droite.

Soient (M) une surface et r une droite. Le plan tangent en un point M à la surface (M) coupe la droite r en un point R. Le cône de sommet R, circonscrit à la surface, touche celle-ci le long d'une courbe C passant par M. La tangente à C en M est la conjuguée de la tangente MR à la surface, d'où le théorème.

Le théorème de Koenigs permet de déterminer sur une surface une infinité de systèmes conjugués sans aucune intégration.

§2.- Transformation de Laplace.

191.- Définition.- Soit (x) une surface rapportée à un réseau conjugué u, v. Les coordonnées projectives homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point de la surface satisfont à l'équation (II).

Les plans tangents à la surface aux points d'une ligne u enveloppent une développable dont les droites sont les tangentes aux lignes v aux différents points de la ligne u considérée. Ces droites sont donc déterminées par les points x, $x + \frac{\partial x}{\partial v} dv$, c'est-à-dire par les points x, $\frac{\partial x}{\partial v}$. L'arête de rebroussement de la développable est donc le lieu, lorsque u varie seule, d'un point $\frac{\partial x}{\partial v} + \lambda x$, λ étant une fonction convenablement choisie de u, v. Les droites de la développable étant tangentes à l'arête de rebroussement, l'expression

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial v}+\lambda x\right)$$

doit s'exprimer en fonction de $\frac{\partial x}{\partial v}$, x. On a, en tenant compte de (II),

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial v}+\lambda x\right)=\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\lambda\frac{\partial x}{\partial u}+x\frac{\partial \lambda}{\partial u}=-(a-\lambda)\frac{\partial x}{\partial u}-b\frac{\partial x}{\partial v}-\left(c-\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)x.$$

On doit donc avoir $\lambda = a$. Le point décrivant l'arête de rebroussement est donc

$$x_1=\frac{\partial x}{\partial v}+ax.$$

On l'appelle le transformé de Laplace du point x dans le sens des v.

En intervertissant le rôle des lignes u, v, on définit de même le transformé de Laplace

$$x_{-1}=\frac{\partial x}{\partial u}+bx$$

du point x dans le sens des u.

192.- <u>Invariants d'une équation de Laplace</u>.- On appelle invariants de l'équation de Laplace (II) les expressions

$$h=\frac{\partial a}{\partial u}+ab-c\ ,\quad k=\frac{\partial b}{\partial v}+ab-c\,.$$

Posons, dans l'équation (II), $x=\lambda y$; elle devient

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+\left(a+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)\frac{\partial y}{\partial u}+\left(b+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial \lambda}{\partial u}+b\frac{\partial \lambda}{\partial v}+c\right)y=0.$$

Ses invariants sont $h'=h$, $k'=k$.

Faisons maintenant, dans l'équation (II), la substitution $u=u(u')$, $v=v(v')$. Elle devient

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u'\partial v'}+a\frac{\partial v}{\partial v'}\frac{\partial x}{\partial u'}+b\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial x}{\partial v'}+c\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'}x=0$$

Les invariants de cette équation sont

$$h'=h\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'}\ ,\quad k'=k\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'}$$

Ce sont ces propriétés qui ont fait donner aux quantités h, k le nom d'invariants. Observons que l'on a $\frac{h}{k}=\frac{h'}{k'}$.

193.- <u>Propriétés des transformés de Laplace</u>.- Soit x_1 le transformé de Laplace de x dans le sens des v. On a

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}=\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial a}{\partial u}x=-b\frac{\partial x}{\partial v}-\left(c-\frac{\partial a}{\partial u}\right)x=-b\left(x_1-ax\right)-\left(c-\frac{\partial a}{\partial u}\right)x,$$

d'où

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}+bx_1=hx. \qquad (1)$$

Supposons que h ne soit pas nulle. On a

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\partial v}+b\frac{\partial x_1}{\partial v}+\frac{\partial b}{\partial v}x_1=h\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial v}x,$$

d'où, en remplaçant $\frac{\partial x}{\partial v}$, x par leurs valeurs en fonction de x_1,

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\, \partial v} + \left[a - \frac{\partial}{\partial v}(\log h)\right]\frac{\partial x_1}{\partial u} + b\,\frac{\partial x_1}{\partial v} + \left[\frac{\partial b}{\partial v} + a\,b - h - b\,\frac{\partial}{\partial v}(\log h)\right]x_1 = 0 . \quad (2)$$

Donc, si h n'est pas nulle, le point x_1 décrit en général une surface sur laquelle les lignes u, v forment un réseau conjugué. Le point x est le transformé de Laplace de x_1 dans le sens des ~~v~~. u.

Si h est nulle, la formule (2) montre que les coordonnées du point x_1 ne dépendent pas de u. Lorsque u varie seule, le point x_1 reste fixe et les tangentes aux lignes v aux différents points d'une courbe u forment un cône de sommet x_1. Lorsque v varie, le point x_1 décrit une courbe (x_1).

On parvient à des résultats analogues pour le transformé x_{-1} du point x dans le sens des u.

Revenons au point x_1. Dans le premier cas, où h n'est pas nulle, les invariants de l'équation (2) sont

$$h_1 = h + \frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}(\log h) - \frac{\partial b}{\partial v} = 2h - k - \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}(\log h) \,;\, k_1 = h$$

Dans le second cas, l'équation de Laplace (II) peut être remplacée par les équations

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} + b x_1 = 0 \ , \quad \frac{\partial x}{\partial v} + a x = x_1$$

et par suite, on peut obtenir l'intégrale de l'équation de Laplace par quadratures.

194.- Remarque.- La droite $x x_1$ engendre une congruence dont les développables sont données par $u = c^{te}$, $v = c^{te}$. Il résulte de l'étude des congruences de droites que les foyers d'une droite, supposés distincts, sont les transformés de Laplace l'un de l'autre (n° 122).

195.- Examen des cas où le transformé de Laplace ne décrit pas une surface.- On vient de voir que si h n'est pas nulle, le point x_1 décrit en général une surface. Pour que ce point décrive une courbe, on doit avoir une relation de la forme

$$A\,\frac{\partial x_1}{\partial u} + B\,\frac{\partial x_1}{\partial v} + C x_1 = 0 .$$

Si B est nulle, on a, par (1),

$$A h x + (C - A b) x_1 = 0 ,$$

d'où, puisque les points x, x_1 doivent être indépendants et que A ne peut être nulle, $h = 0$, $C = Ab \neq 0$; on retrouve le cas étudié plus haut, appelé cas de Laplace.

Supposons B non nulle et, en outre, h différent de zéro. S'il existe un transformé de Laplace x_2 de x_1, dans le sens des v, on a

$$x_2 = \frac{\partial x_1}{\partial v} + a_1 x_1 \quad , \quad a_1 = a - \frac{\partial}{\partial v}(\log h) .$$

Par suite

$$Bx_2 + (C - Ab - Ba_1)x_1 + Ahx = 0 \ . \qquad (3)$$

Si cette relation n'est pas une identité, les points x, x_1, x_2 sont en ligne droite. Sous cette hypothèse, dérivons l'équation (3) par rapport à u, en observant que l'on a

$$\frac{\partial x_2}{\partial u} + bx_2 = h_1 x_1 \ , \ \frac{\partial x}{\partial u} = x_{-1} - bx \ ;$$

il vient

$$\frac{\partial B}{\partial u} x_2 + B(h_1 x_1 - bx_2) + \frac{\partial}{\partial u}(C - AB - Ba_1)x_1 + (C - AB - Ba_1)(hx - bx_1) + \frac{\partial}{\partial u}(Ah)x + Ah(x_{-1} - bx) = 0$$

Il en résulte que le point x_{-1} appartient à la droite contenant x, x_1, x_2, ce qui est impossible. L'équation (3) doit donc être une identité et on a

$$x_2 = 0 \ , \quad C - Ab - Ba_1 = 0, \quad A = 0 \, .$$

Le point x_2 ne peut donc exister et le point x_1 satisfait à l'équation

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} + a_1 x_1 = 0 \ . \qquad (4)$$

Les coordonnées de ce point sont donc indépendantes de v et il décrit une courbe (x_1) lorsque u varie. Il en résulte que les développables lieux des tangentes aux courbes v aux points d'une courbe u de la surface (x) ont même arête de rebroussement (x_1). Par conséquent, ces développables coïncident et sont confondues avec la surface (x). Sur la surface (x), les courbes v sont les génératrices rectilignes. Dans ce cas, appelé cas de Goursat, l'équation (4) jointe à l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial v} + ax = x_1 \, ,$$

donne x par quadratures.

Reste à examiner le cas où B n'est pas nulle, mais où $h = 0$. On a alors

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} + bx_1 = 0 \qquad , \ B\frac{\partial x_1}{\partial v} + (C - Ab)x_1 = 0$$

et par suite le point x_1 reste fixe. La surface (x) se réduit à un cône de sommet x_1, sur lequel les génératrices sont les lignes v. Dans ce cas, appelé cas mixte, l'équation de Laplace (I) s'intègre également par quadratures.

§3.- Suites de Laplace.

196.- Définition.- Soit (x) une surface rapportée à un réseau conjugué u, v et dont les coordonnées projectives des points satisfont à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v} + cx = 0 \ . \qquad (1)$$

Soient x_1 le transformé de Laplace de x dans le sens des v, x_2

le transformé de Laplace de x_1 dans le sens des v (s'il existe), ...; soit de même x_{-1} le transformé de Laplace de x dans le sens des u, x_{-2} celui de x_{-1} dans le même sens, ... La suite

$$\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x, x_1, x_2, \ldots$$

est appelée suite de Laplace.

On dit que la suite de Laplace se termine dans le sens des v si un point x_i $(i>0)$ décrit une courbe ; le point x_{i+1} n'existant pas dans ces conditions. De même, si le point x_{-i} $(i>0)$ décrit une courbe, le point x_{-i-1} n'existe pas et on dit que la suite de Laplace se termine dans le sens des u. Lorsque la suite de Laplace ne se termine dans aucun sens, elle est dite illimitée.

Nous représenterons par

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} + a_i \frac{\partial x_i}{\partial u} + b_i \frac{\partial x_i}{\partial v} + c_i x_i = 0$$

l'équation de Laplace satisfaite par les coordonnées du point x_i, par h_i, k_i les invariants de ces équations. On a, par $i>0$

$$a_i = a_{i-1} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\log h_{i-1}\right), \quad b_i = b_{i-1}, \quad c_i = \frac{\partial b_{i-1}}{\partial v} + a_{i-1} b_{i-1} - h_{i-1} - b_{i-1}\frac{\partial}{\partial v}\left(\log h_{i-1}\right);$$

$$a_{-i} = a_{-i+1}, \quad b_{-i} = b_{-i+1} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\log k_{-i+1}\right), \quad c_{-i} = \frac{\partial a_{-i+1}}{\partial u} + a_{-i+1} b_{-i+1} - k_{-i+1} - a_{-i+1}\frac{\partial}{\partial u}\left(\log k_{-i+1}\right);$$

$$h_{i-1} = k_i, \quad k_{-i+1} = h_{-i}.$$

197.- <u>Suites de Laplace terminées</u>.- Supposons que la suite de Laplace se termine au point x_i dans le sens des v. Ce point décrit une courbe et, d'après ce que l'on a vu plus haut, trois cas peuvent se présenter.

a) Cas de Laplace.- Ce cas est caractérisé par $h_{i-1}=0$ et les développables $v=$ cte de la congruence $(x_{i-1}\, x_i)$ engendrée par la droite $x_{i-1} x_i$ sont des cônes de sommets x_i.

b) Cas de Goursat.- La surface (x_{i-1}) est une développable dont l'arête de rebroussement est la courbe lieu du point x_i ; les lignes v de la surface (x_{i-1}) sont les génératrices de cette développable.

c) Cas mixte.- La surface (x_{i-1}) est un cône de sommet x_i et les courbes v de la surface (x_{i-1}) sont les génératrices rectilignes de ce cône.

Une suite de Laplace peut naturellement se terminer dans les deux sens, en présentant des cas différents. L'intérêt des suites terminées résulte du fait que si une équation de Laplace donne naissance à une suite terminée, son intégration se ramène à des quadratures.

198.- <u>Formation d'une suite de Laplace</u>.- Soient x, y deux points consécutifs d'une suite de Laplace. Si l'équation à laquelle x satisfait est l'équation (1), nous avons

$$y = \frac{\partial x}{\partial v} + a x, \quad \frac{\partial y}{\partial u} + b y = h x.$$

Posons $x = \lambda\bar{x}$, $y = \mu\bar{y}$. Nous avons

$$\lambda\frac{\partial\bar{x}}{\partial v} + \bar{x}\left(a\lambda + \frac{\partial\lambda}{\partial v}\right) = \mu\bar{y}, \quad \mu\frac{\partial\bar{y}}{\partial u} + \bar{y}\left(b\mu + \frac{\partial\mu}{\partial u}\right) = \lambda\bar{x}\ h$$

En prenant

$$\lambda = e^{-\int a}, \quad \mu = e^{-\int b},$$

on aura

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial v} = \alpha\bar{y}, \quad \frac{\partial\bar{y}}{\partial u} = \beta\bar{x}.$$

Inversement, si nous considérons deux points x, y tels que

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \alpha y, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \beta x,$$

nous avons

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}(\log\alpha)\frac{\partial x}{\partial v} - \alpha\beta x = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}(\log\beta)\frac{\partial y}{\partial u} - \alpha\beta y = 0$$

et les points x, y décrivent des réseaux; ils sont consécutifs dans une suite de Laplace.

Soient $y_1, y_2 \ldots$ les transformés successifs de Laplace dans le sens des v et $x_1, x_2, \ldots$ ceux de x dans le sens des u.

Pour abréger les écritures, nous représenterons par φ^{ik} la dérivée d'une fonction φ de u, v prise i fois par rapport à u et k fois par rapport à v. Les équations de Laplace vérifiées par les coordonnées des points x, y s'écrivent

$$x^{11} - x^{01}(\log\alpha)^{10} - \alpha\beta x = 0, \quad y^{11} - y^{10}(\log\beta)^{01} - \alpha\beta y = 0.$$

Définissons des nombres $h_1, h_2, \ldots, k_1, k_2, \ldots$ par les formules de récurrence

$$h_i = -(\log\beta h_1\ldots h_{i-1})^{11} + h_{i-1}, \quad h_1 = h_0$$
$$k_i = -(\log\alpha k_1\ldots k_{i-1})^{11} + k_{i-1}, \quad k_1 = k_0.$$

en posant $h_0 = k_0 = \alpha\beta$.

On a

$$y_1 = y^{01} - y(\log\beta)^{01}, \; y_2 = y_1^{01} - y_1(\log\beta h_1)^{01}, \ldots, y_i = y_{i-1}^{01} - y_{i-1}(\log\beta h_1\ldots h_{i-1})^{01},$$
$$x_1 = x^{10} - x(\log\alpha)^{10}, \; x_2 = x_1^{10} - x(\log\alpha k_1)^{10}, \ldots, x_i = x_{i-1}^{10} - x_{i-1}(\log\alpha k_1\ldots k_{i-1})^{10}.$$

Le point y_i vérifie l'équation de Laplace

$$y_i^{11} - y_i^{10}(\log\beta h_1\ldots h_i)^{01} - h_i y_i = 0$$

et le point x_i,

$$x_i^{11} - x_i^{01}(\log\alpha k_1\ldots k_i)^{10} - k_i x_i = 0.$$

Szitzeika

On a de plus

$$y_i^{10} = h_i y_{i-1}, \quad x_i^{01} = k_i x_{i-1}$$

Les invariants de l'équation en y_i sont h_i, h_{i+1}; ceux de l'équation en x_i sont k_i, k_{i+1}. En particulier, ceux de l'équation en y sont $\alpha\beta, h_1$ et ceux de l'équation en x, $\alpha\beta$ et k_1.

199.- <u>Réseaux conjugués à la congruence (xy)</u>. - Considérons sur la droite xy, le point $z = \lambda x - \mu y$. Si, sur la surface (z), les développables de la congruence (xy) découpent un réseau

conjugué u, v, ce réseau est dit conjugué à la congruence.
Cherchons quelles sont les conditions auxquelles λ, μ doivent satisfaire pour que z engendre un réseau conjugué à la congruence (xy).

Posons
$$L = \lambda^{10} - \beta\mu \ , \ M = \mu^{01} - \alpha\lambda ;$$
nous avons
$$z^{10} = Lx + \lambda x^{10} - \mu^{10} y \quad , \quad z^{01} = -My - \mu y^{01} + \lambda^{01} x,$$
et ensuite
$$z^{11} - z^{10}(\log\lambda)^{01} - z^{01}(\log\mu)^{10} - \left[\alpha\beta - (\log\lambda)^{01}(\log\mu)^{10}\right] z = \left[L^{01} - L(\log\lambda)^{01}\right]x - \left[M^{10} - M(\log\mu)^{10}\right]y.$$
Le second membre de cette relation représente un point qui doit coïncider avec z. On doit donc avoir
$$\frac{L^{01} - L(\log\lambda)^{01}}{\lambda} = \frac{M^{10} - M(\log\mu)^{10}}{\mu},$$
c'est-à-dire
$$\left(\frac{L}{\lambda}\right)^{01} = \left(\frac{M}{\mu}\right)^{10}. \qquad (1)$$

Inversement, si cette relation est satisfaite, le point z décrit un réseau conjugué à la congruence (xy).

Si le point z décrit un réseau conjugué à la congruence (xy), il en est de même du point ρz, et réciproquement. L'équation (1) doit donc être vérifiée si l'on remplace λ et μ par $\rho\lambda, \rho\mu$. On le constate d'ailleurs immédiatement en développant les calculs. Disposons de ρ de manière à avoir
$$(\rho\lambda)^{10} - \beta\rho\mu = \lambda\rho^{10} + \rho L = 0,$$
ce qui est toujours possible. Alors l'équation (1) écrite pour $\rho\lambda, \rho\mu$ donne
$$(\rho\mu)^{01} - \alpha\rho\lambda = 0.$$

En changeant de notation, on voit que tout réseau conjugué à la congruence (xy) peut être représenté par $z = \lambda x - \mu y$, où
$$\lambda^{10} - \beta\mu = 0 \ , \ \mu^{01} - \alpha\lambda = 0. \qquad (2)$$
Sous ces conditions, ce point z satisfait à l'équation de Laplace
$$z^{11} - z^{10}(\log\lambda)^{01} - z^{01}(\log\mu)^{10} - \left[\alpha\beta - (\log\lambda)^{01}(\log\mu)^{10}\right] z = 0 \qquad (3)$$

200. - <u>Suite de Laplace inscrite dans une suite donnée.</u> - Le transformé de Laplace du point z dans le sens des v est
$$z_1 = z^{01} - z(\log\lambda)^{01} = -\mu\left[y_1 + y\left(\log\frac{\beta}{\lambda}\right)^{01}\right];$$
le point z_1 appartient donc à la droite yy_1 et décrit un réseau conjugué à cette congruence. De même, le point
$$z_{-1} = z^{10} - z(\log\mu)^{10} = \lambda\left[x_1 + x\left(\log\frac{\alpha}{\mu}\right)^{10}\right],$$
transformé de Laplace de z dans le sens des u, appartient à la droite xx_1 et décrit un réseau conjugué à la congruence (xx_1). Le transformé de Laplace z_2 de z_1 dans le sens des v appartiendra

à la droite $y_1 y_2$, et ainsi de suite. D'une manière générale, si l'on désigne par

$$\dots, z_{-2}, z_{-1}, z, z_1, z_2, \dots$$

la suite de Laplace déterminée par z, cette suite est inscrite dans la suite $\dots, x_1, x, y, y_1, \dots$ en ce sens que le point z_i appartient à la droite $y_{i-1} y_i$ et le point z_{-i} à la droite $x_{i-1} x_i$.

La congruence $(z z_1)$ par exemple, est dite harmonique au réseau (y). La congruence (xy) est dite conjuguée au réseau (z).

201.- <u>Réseau à invariants égaux</u>.- Considérons la surface (x) dont les points satisfont à l'équation de Laplace

$$x^{11} + a x^{10} + b x^{01} + c x = 0. \qquad (1)$$

Supposons que le réseau engendré par le point x soit à invariants égaux. On a $h = k$ d'où $a^{10} = b^{01}$. Posons $x = \lambda \bar{x}$. L'équation de Laplace devient

$$\bar{x}^{11} + \left[a + (\log\lambda)^{01}\right]\bar{x}^{10} + \left[b + (\log\lambda)^{10}\right]\bar{x}^{01} + \left[(\log\lambda)^{11} + (\log\lambda)^{10}(\log\lambda)^{01} + a(\log\lambda)^{10} + b(\log\lambda)^{01} + c\right]\bar{x} = 0.$$

Il existe une fonction λ annulant les coefficients de $\bar{x}^{10}, \bar{x}^{01}$, car on a, pour cette fonction λ,

$$(\log\lambda)^{11} = -a^{10} = -b^{01}.$$

L'équation de Laplace se ramène donc à la forme $h = k = -m$

$$\bar{x}^{11} + m\bar{x} = 0 \quad , \quad (h = k = -m).$$

Les réseaux à invariants égaux ont été considérés par Moutard et l'équation précédente porte le nom d'équation de Moutard.

202.- <u>Coniques de Koenigs</u>.- Reprenons l'équation (1) du n° précédent et soient x_1, x_{-1} les transformés de Laplace du point x. Les trois points x_{-1}, x, x_1 déterminent un plan et tout point de ce plan peut être représenté par $\lambda_{-1} x_{-1} + \lambda x_1 + \lambda_1 x_1$, les λ étant les coordonnées projectives homogènes de ce point. Une conique tangente au point x_{-1} à la droite $x_{-1}x$ et au point x_1 à la droite $x_1 x$ a une équation de la forme

$$\lambda^2 + \varphi \lambda_1 \lambda_{-1} = 0. \qquad (2)$$

Cherchons l'équation de celle de ces coniques osculatrice au point x_{-1} à la ligne v passant par ce point et tracée sur la surface (x_{-1}). Nous avons

$$x_{-1}(u, v+\varepsilon) = x_{-1}(u,v) + \varepsilon x_{-1}^{01} + \frac{\varepsilon^2}{2} x_{-1}^{02} + \dots,$$

d'où

$$x_{-1}(u, v+\varepsilon) = x_{-1} + \varepsilon\left[kx - a x_{-1}\right] + \frac{\varepsilon^2}{2}\left[k x_1^{01} + (k^{01} - 2ak)x - (a^{01} - a^2)x_{-1}\right] + \dots.$$

Les coordonnées λ du point $x_{-1}(u, v+\varepsilon)$ sont donc

$$\lambda_{-1} = 1 - a\varepsilon + \dots, \quad \lambda = k\varepsilon + (k^{01} - 2ak)\frac{\varepsilon^2}{2} + \dots, \quad \lambda_1 = k\frac{\varepsilon^2}{2} + \dots.$$

Pour que ce point appartienne à la conique (2), on doit avoir

$$\left[k + (k^{01} - 2ak)\frac{\varepsilon}{2} + \dots\right]^2 + \varphi(1 - a\varepsilon + \dots)\left(\frac{k}{2} + \dots\right) = 0.$$

Lorsque ε tend vers zéro, on a $\varphi = -2k$ et par suite la conique cherchée a pour équation

$$h^2 - 2k h_1 h_{-1} = 0 .$$

De même, la conique

$$h^2 - 2h h_1 h_{-1} = 0$$

oscule, en x_1, la courbe u tracée sur la surface (x_1).

Ces deux coniques sont les coniques de Koenigs attachées au point x. Lorsqu'elles coïncident, et dans ce cas seulement, le point x engendre un réseau à invariants égaux.

203.– __Congruences de Ribaucour.__– Considérons une droite xy engendrant une congruence (xy), les foyers étant précisément les points x, y. Supposons les surfaces focales rapportées aux variables u, v des développables. On a

$$x^{01} = \alpha y \;, \quad y^{10} = \beta x .$$

La congruence est dite congruence de Ribaucour ou congruence R lorsqu'il existe deux réseaux z, z' conjugués à cette congruence et partageant harmoniquement x, y. Soient

$$z = \lambda x - \mu y \quad , \qquad z' = \lambda x + \mu y ,$$

les points générateurs des deux réseaux conjugués. On doit avoir

$$\left(\frac{\lambda^{10} - \beta\mu}{\lambda}\right)^{01} = \left(\frac{\mu^{01} - \alpha\lambda}{\mu}\right)^{10} , \quad \left(\frac{\lambda^{10} + \beta\mu}{\lambda}\right)^{01} = \left(\frac{\mu^{01} + \alpha\lambda}{\mu}\right)^{10} ,$$

c'est-à-dire

$$(\log\lambda)^{11} - \left(\beta\frac{\mu}{\lambda}\right)^{01} = (\log\mu)^{11} - \left(\alpha\frac{\lambda}{\mu}\right)^{10} , \quad (\log\lambda)^{11} + \left(\beta\frac{\mu}{\lambda}\right)^{01} = (\log\mu)^{11} + \left(\alpha\frac{\lambda}{\mu}\right)^{10} .$$

On en déduit

$$\left(\log\frac{\lambda}{\mu}\right)^{11} = 0 \quad , \quad \left(\beta\frac{\mu}{\lambda}\right)^{01} = \left(\alpha\frac{\lambda}{\mu}\right)^{10} .$$

$\frac{\lambda}{\mu}$ est le produit d'une fonction de u seule par une fonction de v seule. On peut substituer à u, v, dans les équations, d'autres variables u, v telles que l'on ait $\lambda = \mu$. Supposons cette substitution faite. On aura la condition $\alpha^{10} = \beta^{01}$.

Le raisonnement précédent est dû à M. Demoulin.

Les variables u, v étant convenablement choisies, sous la condition $\alpha^{10} = \beta^{01}$, les points $\lambda x - \mu y$, $\lambda x + \mu y$, c'est-à-dire les points $z = x - y$, $z' = x + y$, décrivent des réseaux conjugués à la congruence (xy). On a

$$z^{11} - (\alpha\beta - \alpha^{10})z = 0 \;, \quad z'^{11} - (\alpha\beta + \alpha^{10})z' = 0 .$$

Les points z, z' décrivent donc des réseaux à invariants égaux.

204.– __Congruence de Goursat et quadriques de Tzitzeica.__

On appelle congruence de Goursat une congruence (xy) telle que les foyers x, y décrivent des réseaux conjugués dont les invariants $\alpha\beta$, k_1 de l'équation de Laplace en x sont respectivement égaux aux invariants $\alpha\beta$, k_1

de l'équation en y. On a donc (n° 198) $(\log\alpha)^{11} = (\log\beta)^{11}$ c'est-à-dire, par un choix convenable de u, v, la condition $\alpha = \beta$.

Envisageons les points x_1, x, y, y_1 et supposons qu'ils ne soient pas dans un même plan, c'est-à-dire que les surfaces $(x_1), \dots (y_1)$ ne soient pas planes. Tout point de l'espace a des coordonnées de la forme

$$\lambda_1 x_1 + \lambda x + \mu y + \mu_1 y_1.$$

Considérons les quadriques

$$\lambda\mu + \varphi\lambda_1\mu_1 = 0,$$

passant par les droites xx_1, yy_1, xy_1 et yx_1. Nous déterminerons celle de ces quadriques qui a, au point x_1, un contact du troisième ordre avec la courbe v tracée sur la surface (x_1). Nous avons

$$x_1(u, v+\varepsilon) = x_1(u,v) + \varepsilon x_1^{01} + \frac{\varepsilon^2}{2} x_1^{02} + \frac{\varepsilon^3}{6} x_1^{03} + \dots$$

c'est-à-dire

$$x_1(u, v+\varepsilon) = x_1 + \varepsilon k_1 x + \frac{\varepsilon^2}{2}\left[k_1^{01}x + k_1\alpha y\right] + \frac{\varepsilon^3}{6}\left[k_1^{02}x + 2k_1^{01}\alpha y + k_1\alpha^{01}y + k_1\alpha(\log\beta)^{01}y + k_1\alpha y_1\right] + \dots$$

La condition pour que la quadrique envisagée contienne ce point pour ε tendant vers zéro est $\varphi = -3k_1$ et la quadrique cherchée a pour équation

$$\lambda\mu - 3k_1\lambda_1\mu_1 = 0.$$

De même, la quadrique

$$\lambda\mu - 3h_1\lambda_1\mu_1 = 0$$

a un contact du troisième ordre au point x_1 avec la courbe u tracée sur la surface (x_1). Ces deux quadriques ont été considérées par M. Tzitzeica. Elles coïncident lorsque la congruence (xy) est une congruence de Goursat et seulement dans ce cas.

205. - <u>Caractère projectif des suites de Laplace.</u> - On a vu plus haut que la propriété d'être conjuguées pour deux tangentes a un caractère projectif. Nous allons donner une nouvelle démonstration de cette propriété.

Considérons une suite de Laplace

$$\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots \qquad (I)$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des v et soit $\theta(X, Y) = 0$ l'équation d'une réciprocité. Désignons par y_i le point qui correspond au plan déterminé par les points x_{-i-1}, x_{-i}, x_{-i+1}. On a donc

$$\theta(x_{-i-1}, y_i) = 0, \quad \theta(x_{-i}, y_i) = 0, \quad \theta(x_{-i+1}, y_i) = 0$$

Considérons en particulier le point y_0 et dérivons par rapport à v les deux premières des équations

$$\theta(x_{-1}, y_0) = 0, \ \theta(x_0, y_0) = 0, \ \theta(x_1, y_0) = 0.$$

On a

$$\theta(x_{-1}, y_0^{01}) = 0, \quad \theta(x_0, y_0^{01}) = 0,$$

donc la droite $y_0 y_0^{01}$ correspond à la droite $x_{-1} x_0$. Il en résulte que les points y_0, y_0^{01}, y_1 sont en ligne droite.

Dérivons d'autre part les deux dernières des équations :

$$\theta(x_{-2}, y_1) = 0, \quad \theta(x_{-1}, y_1) = 0, \quad \theta(x_0, y_1) = 0$$

par rapport à u ; il vient

$$\theta(x_{-1}, y_1^{10}) = 0, \quad \theta(x_0, y_1^{10}) = 0,$$

donc les points y_0, y_0^{01}, y_1, y_1^{10} sont en ligne droite et les points y_0, y_1 sont les transformés de Laplace l'un de l'autre. La suite $\ldots, y_1, y_0, y_{-1}, \ldots$ est donc une suite de Laplace, chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des v. Il en résulte qu'une réciprocité change une suite de Laplace en une suite de Laplace. Comme une homographie est le produit de deux réciprocités, le caractère projectif des suites de Laplace en résulte.

Chapitre XII.

Notions de Géométrie projective différentielle.

§ 1.- Equations aux dérivées partielles d'une surface.

206.- Formation des équations aux dérivées partielles.- Considérons une surface (x) lieu d'un point x dont les coordonnées projectives homogènes sont fonctions analytiques de deux paramètres u, v. Des points $x, x^{10}, x^{01}, x^{20}, x^{11}, x^{02}$, quatre seuls peuvent être indépendants et par suite leurs coordonnées sont liées par deux équations.

On ne peut avoir des équations de l'une des formes
$$x^{10}+ax=0\,,\quad x^{01}+bx=0\,,\quad ax^{10}+bx^{01}+cx=0\,,$$
car alors la surface se réduirait à une courbe. Les équations seront donc de l'une des formes
$$\left.\begin{aligned} &x^{11}+ax^{10}+bx^{01}+cx=0\,,\\ &a_1x^{20}+a_1'x^{02}+b_1x^{10}+c_1x^{01}+d_1x=0\,,\end{aligned}\right\}\quad (I)$$
ou
$$\left.\begin{aligned} &x^{20}+p_1x^{11}+a_1x^{10}+b_1x^{01}+c_1x=0\,,\\ &x^{02}+p_2x^{11}+a_2x^{10}+b_2x^{01}+c_2x=0\,.\end{aligned}\right\}\quad (II)$$

Dans le premier cas, les courbes u, v forment un réseau conjugué sur la surface (x). La seconde des équations (I) exprime la liaison entre le point x et ses deux premiers transformés de Laplace dans chaque sens.

Nous nous occuperons plus particulièrement du second cas. Il est important d'observer que chacun des systèmes d'équations (I) et (II) est nécessairement complètement intégrable.

207.- Equation des réseaux conjugués.- Plaçons-nous donc dans le cas du système (II). Le plan tangent à la surface (x) en un point x a pour équation
$$|X \quad x \quad x^{10} \quad x^{01}| = 0\,. \qquad (1)$$
Si le point x décrit une courbe γ, ce plan enveloppe une développable dont la caractéristique est donnée par l'intersection du plan (1) et du plan
$$|X \quad x \quad x^{11} \quad x^{10}(du-p_2dv)-x^{01}(dv-p_1du)| = 0\,. \quad (2)$$

La direction de la tangente conjuguée à la tangente en x à la courbe γ est donc donnée par

$$\frac{\delta u}{du - p_2\, dv} = \frac{\delta v}{-(dv - p_1\, du)} .$$

La condition pour que deux directions soient conjuguées est donc

$$p_1\, du\, \delta u - (du\, \delta v + dv\, \delta u) + p_2\, dv\, \delta v = 0 .$$

Pour que l'équation différentielle

$$A\, du^2 + B\, du\, dv + C\, dv^2 = 0$$

représente un réseau conjugué, il suffit donc que l'on ait

$$p_2 A + B + p_1 C = 0 .$$

208.- Lignes asymptotiques.- D'après ce qui précède, pour qu'une direction soit asymptotique, on doit avoir

$$p_1\, du^2 - 2\, du\, dv + p_2\, dv^2 = 0$$

et cette équation représente les asymptotiques de la surface.

En particulier, si $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, les courbes u, v sont les asymptotiques de la surface. Ce fait est géométriquement évident ; l'équation

$$x^{20} + a_1 x^{10} + b_1 x^{01} + c_1 x = 0$$

par exemple, exprime que le plan osculateur $x\, x^{10}\, x^{20}$ à la courbe u en un point x, coïncide avec le plan tangent $x\, x^{10}\, x^{01}$ à la surface en ce point.

209.- Surfaces réglées.- Observons que si, dans les équations (II), on a $p_1 = 0$, $b_1 = 0$, les courbes u sont des droites et la surface (x) est réglée. De même, si $p_2 = 0$, $a_2 = 0$, la surface (x) est réglée.

Inversement, supposons la surface (x) réglée. Nous pouvons supposer que les courbes u en sont les génératrices rectilignes. Ces génératrices étant des asymptotiques, on a nécessairement $p_1 = 0$. Cela étant, la tangente $x\, x^{10}$ à la ligne u en un point x coïncide avec la ligne u en question ; le point x^{10} est donc un point de la surface. Pour la même raison, le point x^{20} appartient également à la ligne u considérée. Il existe donc une relation linéaire entre les points x, x^{10}, x^{20} et par suite on a $b_1 = 0$.

210.- Surface rapportée à ses asymptotiques.- Si la surface (x) est rapportée à ses asymptotiques u, v, le point x satisfait au système complètement intégrable

$$\left.\begin{aligned} x^{20} + a_1 x^{10} + b_1 x^{01} + c_1 x &= 0 \\ x^{02} + a_2 x^{10} + b_2 x^{01} + c_2 x &= 0 . \end{aligned}\right\}$$

Écrivons les conditions d'intégrabilité en calculant x^{22} de deux manières et en exprimant que les résultats sont identiques. Les coefficients de x^{11} dans les deux relations obtenues sont respectivement

$a_1^{01} - a_2 b_1$, $b_2^{10} - a_2 b_1$. On a donc $a_1^{01} = b_2^{10}$. Cela étant, posons $x = \lambda y$; les équations aux dérivées partielles deviennent

$$y^{20} + y^{10}\left[a_1 + 2(\log\lambda)^{10}\right] + b_1 y^{01} + y\left[\frac{\lambda^{20}}{\lambda} + a_1(\log\lambda)^{10} + b_1(\log\lambda)^{01} + c_1\right] = 0$$

$$y^{02} + a_2 y^{10} + y^{01}\left[b_2 + 2(\log\lambda)^{01}\right] + y\left[\frac{\lambda^{02}}{\lambda} + a_2(\log\lambda)^{10} + b_2(\log\lambda)^{01} + c_2\right] = 0.$$

On peut choisir λ de manière à avoir

$$2(\log\lambda)^{10} + a_1 = 0 \quad , \quad 2(\log\lambda)^{01} + b_2 = 0 ,$$

car on a

$$2(\log\lambda)^{11} = -a_1^{01} = -b_2^{10}.$$

Il est donc possible de fixer le facteur de proportionnalité des coordonnées des points de la surface de manière à ce que les équations aux dérivées partielles prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} x^{20} + 2b x^{01} + c_1 x = 0, \\ x^{02} + 2a x^{10} + c_2 x = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Cette remarque est due à Wilczynski.

Les condition d'intégrabilité prennent, alors la forme

$$a^{20} + c_2^{10} + 2b a^{01} + 4 a b^{01} = 0,$$

$$b^{02} + c_1^{01} + 2ab^{10} + 4 b a^{10} = 0,$$

$$c_1^{02} + 2a c_1^{10} + 4a^{10} c_1 = c_2^{20} + 2b c_2^{01} + 4b^{01} c_2.$$

§2.- Etude d'une surface dans le voisinage d'un de ses points.

211.- Tétraèdre mobile attaché à un point de la surface.- Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v, dont les coordonnées des points satisfont au système

$$\left.\begin{aligned} x^{20} + 2b x^{01} + c_1 x = 0, \\ x^{02} + 2a x^{10} + c_2 x = 0. \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

Les points x, x^{10}, x^{01}, x^{11} ne sont pas en général dans un même plan ; ce sont les sommets d'un tétraèdre que nous attacherons au point x de la surface. Les coordonnées d'un point quelconque peuvent s'écrire sous la forme

$$z_1 x + z_2 x^{10} + z_3 x^{01} + z_4 x^{11} ;$$

nous dirons que z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales de ce point. Les coordonnées locales du point x sont donc $z_2 = z_3 = z_4 = 0$. Le plan tangent à la surface a pour équation locale $z_4 = 0$.

212.- Quadriques de Darboux.- Les quadriques tangentes à la surface (x) au point x ont pour équation locale

$$2 z_1 z_4 + A_{22} z_2^2 + A_{33} z_3^2 + A_{44} z_4^2 + 2A_{23} z_2 z_3 + 2A_{24} z_2 z_4 + 2A_{34} z_3 z_4 = 0. \quad (1)$$

Déterminons celles de ces quadriques qui ont un contact du second ordre avec la surface (x) au point x. A cet effet considérons le point $x(u+\xi, v+\eta)$ de la surface et cherchons ses coordonnées locales. Nous avons

$$\begin{aligned}
&x^{30} + 2bx^{11} + c_1 x^{10} + 2b^{10} x^{01} + c_1^{10} x = 0,\\
&x^{21} - 4abx^{10} + (2b^{01} + c_1)x^{01} + (c_1^{01} - 2bc_2)x = 0,\\
&x^{12} - 4abx^{01} + (2a^{10} + c_2)x^{10} + (c_2^{10} - 2ac_1)x = 0,\\
&x^{03} + 2ax^{11} + 2a^{01}x^{10} + c_2 x^{01} + c_2^{01} x = 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
x(u+\xi, v+\eta) = x + \xi x^{10} + \eta x^{01} &+ \tfrac{1}{2}\left[x^{20}\xi^2 + 2x^{11}\xi\eta + x^{02}\eta^2\right]\\
&+ \tfrac{1}{6}\left[x^{30}\xi^3 + 3x^{21}\xi^2\eta + 3x^{12}\xi\eta^2 + x^{03}\eta^3\right] + \dots,
\end{aligned}$$

d'où, pour les coordonnées locales de ce point,

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1 - \tfrac{1}{2}(c_1\xi^2 + c_2\eta^2) - \tfrac{1}{6}\left[c_1^{10}\xi^3 + 3(c_1^{01} - 2bc_2)\xi^2\eta + 3(c_2^{10} - 2ac_1)\xi\eta^2 + c_2^{01}\eta^3\right] + \dots,\\
z_2 &= \xi - a\eta^2 - \tfrac{1}{6}\left[c_1\xi^3 - 12ab\xi^2\eta + 3(2a^{10} + c_2)\xi\eta^2 + 2a^{01}\eta^3\right] + \dots,\\
z_3 &= \eta - b\xi^2 - \tfrac{1}{6}\left[2b^{10}\xi^3 + 3(2b^{01} + c_1)\xi^2\eta - 12ab\xi\eta^2 + c_2\eta^3\right] + \dots,\\
z_4 &= \xi\eta - \tfrac{1}{3}\left[b\xi^3 + a\eta^3\right] + \dots .
\end{aligned}$$

Substituons dans l'équation (1), puis faisons $\eta = \lambda\xi$. On peut diviser les deux membres par ξ^2 et, après cette division, le terme indépendant est $2\lambda + A_{22} + A_{33}\lambda^2 + 2A_{23}\lambda$. En annulant ce terme, on exprime que la quadrique (1) a un contact du second ordre avec une courbe tracée sur la surface et touchant, en x, la tangente passant par le point $x^{10} + \lambda x^{01}$. En écrivant que ce terme est nul quel que soit λ, on exprimera donc que la quadrique (1) a un contact du second ordre avec la surface. Cela donne $A_{22} = 0$, $A_{33} = 0$, $A_{23} = -1$. Les quadriques cherchées sont données par

$$2(z_1 z_4 - z_2 z_3) + z_4(2A_{24} z_2 + 2A_{34} z_3 + A_{44} z_4) = 0. \quad (2)$$

Substituons encore, dans cette équation, aux z les coordonnées de $x(u+\xi, v+\lambda\xi)$ et divisons par ξ^3 ; le terme indépendant est $2a\lambda^3 - A_{34}\lambda^2 - A_{24}\lambda + 2b$ et l'équation

$$2a\,dv^3 - A_{34}\,du\,dv^2 - A_{24}\,du^2\,dv + 2b\,du^3 = 0$$

donne les directions des tangentes en x à la courbe intersection de (x) et de (2). Lorsque la quadrique varie, ces trois tangentes engendrent une involution d'ordre trois et de rang deux, dont les éléments triples sont donnés par

$$a\,dv^3 + b\,du^3 = 0. \quad (3)$$

Les quadriques

$$2(z_1 z_4 - z_2 z_3) + A_{44} z_4^2 = 0$$

coupent la surface suivant des courbes ayant en x les trois tangentes définies par l'équation (3). Ces quadriques sont appelées quadriques de Darboux. Elles forment un faisceau comprenant le plan tangent compté deux fois.

Les courbes définies par l'équation (3) sont appelées courbes de Darboux de la surface.

213.- Quadrique de Lie.- Considérons les asymptotiques u, v passant par un point x. Les tangentes aux asymptotiques v aux points de la courbe u forment une réglée R_u. Les quadriques de Darboux contiennent la droite xx^{01} et touchent la réglée R_u le long de cette droite ; cherchons celle de ces quadriques qui oscule R_u le long de xx^{01}. A cet effet, considérons le point

$$x^{01}(u+\varepsilon, v) = x^{01} + \varepsilon x^{10} + \frac{\varepsilon^2}{2}\left[4ab\,x^{10} - (2b^{01}+c_1)x^{01} - (c_1^{01} - 2bc_1)x\right] + \dots,$$

dont les coordonnées locales sont

$$z_1 = -\frac{\varepsilon^2}{2}(c_1^{01} - 2bc_1) + \dots,\; z_2 = 2ab\varepsilon^2 + \dots,\; z_3 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}(2b^{01}+c_1) + \dots,\; z_4 = \varepsilon + \dots$$

En substituant ces valeurs des z dans l'équation d'une quadrique de Darboux

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 + \mu z_4^2 = 0,$$

on obtient une équation dont les deux membres sont divisibles par ε^2. Le terme en ε^2 a pour coefficient $\mu - 2ab$. Si donc nous posons $\mu = 2ab$, nous obtiendrons la quadrique cherchée

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2ab\, z_4^2 = 0.$$

Cette quadrique a une équation symétrique, par suite elle oscule également le long de xx^{10} la réglée R_v lieu des tangentes aux courbes u le long de la courbe v. C'est la quadrique de Lie attachée à la surface (x) au point x.

214.- Congruence conjuguée à une surface.- Supposons qu'une droite g, passant par le point x, engendre une congruence conjuguée à la surface (x). L'équation différentielle des développables de la congruence (g) doit correspondre à un réseau conjugué sur (x), c'est-à-dire être de la forme $A\,du^2 - B\,dv^2 = 0$.

La droite g sera déterminée par le point x et un de ses points $\alpha x^{10} + \beta x^{01} + \gamma x^{11}$. Exprimons que le point $hx + \alpha x^{10} + \beta x^{01} + \gamma x^{11}$ de cette droite est un foyer de la congruence. Alors, le point

$$\left[(h + 4ab + \alpha^{10})x^{10} + (\beta^{10} - 2b\alpha - 2b^{01}\gamma - c_1\gamma)x^{01} + (\gamma^{10}+\beta)x^{11}\right]du$$
$$+ \left[(\alpha^{01} - 2a\beta - 2a^{10}\gamma - c_2\gamma)x^{10} + (h + 4ab + \beta^{01})x^{01} + (\gamma^{01}+\alpha)x^{11}\right]dv$$

doit appartenir à la droite g ; on doit donc avoir

$$\frac{(h+4ab+\alpha^{10})du + (\alpha^{01} - 2a\beta - 2a^{10}\gamma - c_2\gamma)dv}{\alpha} = \frac{(\beta^{10} - 2b\alpha - 2b^{01}\gamma - c_1\gamma)du + (h+4ab+\beta^{01})dv}{\beta} =$$
$$= \frac{(\gamma^{10}+\beta)du + (\gamma^{01}+\alpha)dv}{\gamma}.$$

L'élimination de h entre ces équations donnera l'équation différentielles des développables. On obtient ainsi

$$\begin{vmatrix} du & (\alpha^{10}\gamma - \alpha\gamma^{10})\,du + \gamma(\alpha^{01} - 2a\beta - 2a^{10}\gamma - c_2\gamma)\,dv - \alpha(\gamma^{01}+\alpha)\,dv \\ dv & \gamma(\beta^{10} - 2b\alpha - 2b^{01}\gamma - c_1\gamma)\,du - \beta(\gamma^{10}+\beta)\,du + (\beta^{01}\gamma - \beta\gamma^{01})\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

Le terme en $du\,dv$ doit disparaître dans cette équation ; on a donc

$$\alpha^{10}\gamma - \alpha\gamma^{10} = \beta^{01}\gamma - \beta\gamma^{01},$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{10} = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{01}.$$

Il existe donc une fonction $\rho(u,v)$ telle que l'on ait

$$\alpha = \gamma\,(\log\rho)^{01}, \qquad \beta = \gamma\,(\log\rho)^{10}.$$

La droite g est donc déterminée par le point x et le point $x^{10}(\log\rho)^{01} + x^{01}(\log\rho)^{10} + x^{11}$. Ce second point peut d'ailleurs être remplacé par le point

$$\rho^{11}x + \rho^{01}x^{10} + \rho^{10}x^{01} + \rho x^{11} = (\rho x)^{11}.$$

Ce résultat est dû à U. Fubini.

L'équation différentielle des développables devient

$$\left[(\log\rho)^{20} - \overline{(\log\rho)^{10}}^{2} - 2b(\log\rho)^{01} - 2b^{01} - c_1\right]du^2 - \left[(\log\rho)^{02} - \overline{(\log\rho)^{01}}^{2} - 2a(\log\rho)^{20} - 2a^{10} - c_2\right]dv^2 = 0.$$

215.- Congruence de surface focale donnée

\- Considérons une droite tangente au point x à la surface (x) ; elle est complètement déterminée par le point $\lambda x^{10} - \mu x^{01}$ où elle rencontre la droite $x^{10}x^{01}$. Lorsque u, v varient, cette droite g engendre une congruence (g) dont (x) est une nappe de la surface focale. L'équation différentielle des développables d'une famille de la congruence (g) est évidemment

$$\mu\,du + \lambda\,dv = 0;$$

par conséquent l'équation des développables de la seconde famille sera

$$\mu\,du - \lambda\,dv = 0,$$

puisque ces développables touchent (x) le long des lignes conjuguées des premières. Il en résulte que si le second foyer de la droite g est

$$y = \nu x + \lambda x^{10} - \mu x^{01},$$

le point $\lambda y^{10} + \mu y^{01}$ devra appartenir à la droite g. On a

$$y^{10} = (\nu^{10} - c_1\lambda)x + (\nu + \lambda^{10})x^{10} - (\mu^{10} + 2b\lambda)x^{01} - \mu x^{11}, \quad (1)$$

$$y^{01} = (\nu^{01} + c_2\mu)x + (\lambda^{01} + 2a\mu)x^{10} + (\nu - \mu^{01})x^{01} + \lambda x^{11},$$

d'où

$$\lambda y^{10} + \mu y^{01} = \left[\lambda(\nu^{10} - c_1\lambda) + \mu(\nu^{01} + c_2\mu)\right]x + \left[\lambda(\nu + \lambda^{10}) + \mu(\lambda^{01} + 2a\mu)\right]x^{10} - \left[\lambda(\mu^{10} + 2b\lambda) - \mu(\nu - \mu^{01})\right]x^{01}.$$

On doit donc avoir

$$\lambda\mu(\nu + \lambda^{10}) + \mu^2\underbrace{(\lambda^{01} + 2a\mu)}_{L} - \lambda^2\underbrace{(\mu^{10} + 2b\lambda)}_{M} + \lambda\mu(\nu - \mu^{01}) = 0,$$

d'où

$$\nu = -\frac{\mu}{2\lambda}L + \frac{\lambda}{2\mu}M - \frac{1}{2}(\lambda^{10} - \mu^{01}),$$

moyennant

$$L = \lambda^{01} + 2a\mu, \quad M = \mu^{10} + 2b\lambda.$$

Le second foyer est donc

$$y = \left[-\frac{\mu}{2\lambda} L + \frac{\lambda}{2\mu} M - \frac{1}{2}(\lambda^{10} - \mu^{01})\right] x + \lambda x^{10} - \mu x^{01}.$$

Observons que l'on peut, en changeant le facteur de proportionnalité des coordonnées du point y, multiplier λ, μ, ν par un même facteur non nul k ; la valeur de ν donnée plus haut doit être la même. On vérifie qu'il en est ainsi.

216. - Congruences W. - On appelle congruence W une congruence pour laquelle les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale. La congruence des normales à une surface W est donc une congruence W. Nous allons rechercher dans quelles conditions une congruence ayant la surface (x) comme nappe focale est une congruence W. Il suffira évidemment d'écrire que les points $y, y^{10}, y^{01}, y^{20}$ d'une part, les points $y, y^{10}, y^{01}, y^{02}$ d'autre part, sont coplanaires.

Nous pouvons écrire

$$y^{10} - \frac{M}{\mu} y = K_1 x + H_1\left(x^{10} - \frac{\mu}{H_1} x^{11}\right), \qquad (1)$$
$$y^{01} - \frac{L}{\lambda} y = K_2 x + H_2\left(x^{01} + \frac{\lambda}{H_2} x^{11}\right),$$

moyennant

$$K_1 = \nu^{10} - c_1\lambda - \nu\frac{M}{\mu}, \qquad H_1 = \nu + \lambda^{10} - \lambda\frac{M}{\mu},$$
$$K_2 = \nu^{01} + c_2\mu + \nu\frac{L}{\lambda}, \qquad H_2 = \nu - \mu^{01} + \mu\frac{L}{\lambda}.$$

On a d'ailleurs, en remplaçant ν par sa valeur

$$H_1 = -H_2 = -\frac{\mu}{2\lambda} L - \frac{\lambda}{2\mu} M + \frac{1}{2}(\lambda^{10} + \mu^{01}) = H.$$

On déduit des relations précédentes

$$y^{20} - \left(\frac{M}{\mu} y\right)^{10} = -\frac{\mu^2 W}{H} x^{11} + \alpha x + \beta\left(x^{10} - \frac{\mu}{H} x^{11}\right) + \gamma\left(x^{01} - \frac{\lambda}{H} x^{11}\right),$$

où α, β, γ ont certaines valeurs et où

$$W = \left(\frac{L}{\lambda}\right)^{10} - \left(\frac{M}{\mu}\right)^{01}.$$

On peut écrire identiquement

$$y = \nu x + \lambda\left(x^{10} - \frac{\mu}{H} x^{11}\right) - \mu\left(x^{01} - \frac{\lambda}{H} x^{11}\right).$$

Si donc nous écrivons que les points $y, y^{10}, y^{01}, y^{20}$ sont dans un même plan, nous aurons

$$\frac{\mu^2 W}{H} \begin{vmatrix} \nu & \lambda & \mu \\ K_1 & H & 0 \\ K_2 & 0 & -H \end{vmatrix} = 0.$$

Le déterminant ne peut être nul, car les points y, y^{10}, y^{01} ne peuvent être en ligne droite. On a par suite $W = 0$.

Il est bien évident qu'en exprimant que les points $y, y^{10}, y^{01}, y^{02}$ sont dans un même plan, on arrivera à la même condition. Inversement, si $W = 0$, la congruence est une congruence W.

Multiplions les coordonnées de y par une fonction φ telle que

$$\varphi\lambda^{01} + \lambda\varphi^{01} + 2a\varphi\mu = 0, \quad \varphi\mu^{10} + \mu\varphi^{10} + 2b\varphi\lambda = 0,$$

ce qui est possible en vertu de la relation $W = 0$. Remplaçons ensuite, dans ce qui précède, λ, μ, ν par $\lambda\varphi, \mu\varphi, \nu\varphi$. Nous aurons $L = 0$, $M = 0$. Ce sont les conditions qui expriment que la congruence (g) est W, le facteur de proportionnalité des coordonnées de y étant convenablement choisi.

Sous ces conditions, on a

$$y = -\tfrac{1}{2}(\lambda^{10} - \mu^{01})x + \lambda x^{10} - \mu x^{01}.$$

217.- <u>Correspondance de Segre</u>.- Soit γ une courbe tracée sur la surface (x) ; les plans tangents à la surface aux points de γ enveloppant une développable Γ. A la tangente en x à γ, on fait correspondre la génératrice de Γ passant par x et on obtient ainsi la théorie des tangentes conjuguées. C. Segre fait correspondre au plan osculateur à γ au point x le point, situé dans le plan tangent à la surface en x, de l'arête de rebroussement de la développable Γ situé sur la génératrice de Γ passant par x.

La courbe γ étant donnée en posant u, v fonctions d'une variable t, le plan osculateur à γ en x est déterminé par les points x, $x^{10}du + x^{01}dv$, $x^{20}du^2 + 2x^{11}du\,dv + x^{02}dv^2 + x^{10}d^2u + x^{01}d^2v$. Son équation est donc

$$|X \quad x \quad x^{10}du + x^{01}dv \quad -2bx^{01}du^2 + 2x^{11}du\,dv - 2ax^{10}dv^2 + x^{10}d^2u + x^{01}d^2v| = 0,$$

ou

$$|X \quad x \quad x^{10} \quad x^{01}|(du\,d^2v - dv\,d^2u - 2b\,du^3 + 2a\,dv^3)$$
$$+ 2|X \quad x \quad x^{10} \quad x^{11}|d^2u\,dv + 2|X \quad x \quad x^{01} \quad x^{11}|du\,dv^2 = 0.$$

Si nous représentons par $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ les coordonnées projectives tangentielles locales, nous aurons, pour le plan envisagé

$$\xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = 2\,du\,dv^2 : 2\,du^2dv : du\,d^2v - dv\,d^2u - 2b\,du^3 + 2a\,dv^3, \quad \xi_1 = 0.$$

Le point de l'arête de rebroussement de Γ que nous devons considérer est situé sur le plan

$$|X \quad x \quad x^{10} \quad x^{01}| = 0$$

et sur les plans que l'on obtient en dérivant deux fois l'équation précédente par rapport à t. On obtient ainsi les plans

$$|X \quad x \quad x^{10} \quad x^{11}|du - |X \quad x \quad x^{01} \quad x^{11}|dv = 0,$$
$$2a|X \quad x \quad x^{10} \quad x^{11}|dv^2 - 2|X \quad x^{10} \quad x^{01} \quad x^{11}|du\,dv - 2b|X \quad x \quad x^{01} \quad x^{11}|du^2$$
$$+ |X \quad x \quad x^{10} \quad x^{11}|d^2u - |X \quad x \quad x^{01} \quad x^{11}|d^2v = 0.$$

Les équations locales de ces trois plans sont

$$z_4 = 0, \quad z_3\,du - z_2\,dv = 0, \quad (2a\,dv^2 + d^2u)z_3 - (2b\,du^2 + d^2v)z_2 - 2z_1\,du\,dv = 0$$

et le point considéré est donné par

$$z_1 : z_2 : z_3 = du\,d^2v - dv\,d^2u + 2b\,du^3 - 2a\,dv^3 : -2\,du^2dv : -2\,du\,dv^2, \quad z_4 = 0.$$

On en déduit les formules de la correspondance de C. Segre,

$$\frac{\xi_2}{z_2\, z_3^2} = \frac{\xi_3}{z_2^2\, z_3} = \frac{\xi_4}{-z_1 z_2 z_3 - 2(b z_2^3 - a z_3^3)} .$$

C'est une transformation birationnelle du troisième ordre entre la gerbe de plans de sommet x et le plan tangent en ce point à la surface.

La polarité par rapport à la quadrique de Lie détermine, entre la gerbe de plans de sommet x et le plan tangent en ce point la correspondance

$$\xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = z_3 : z_2 : z_1 .$$

Le produit de cette correspondance et de la correspondance de Segre donne, dans le plan $z_4 = 0$,

$$\frac{z_2'}{z_2^2\, z_3} = \frac{z_3'}{z_2\, z_3^2} = \frac{z_1'}{z_1 z_2 z_3 + 2(b z_2^3 - a z_3^3)} .$$

Les points unis de cette correspondance appartiennent aux droites

$$a z_3^3 - b z_2^3 = 0 .$$

En chaque point de la surface se trouvent déterminées trois directions, les directions de C. Segre. Les courbes ayant ces directions pour tangentes sont définies par l'équation différentielle

$$a\, dv^3 - b\, du^3 = 0 .$$

Ce sont les courbes de Segre, conjuguées des courbes de Darboux.

§ 3.- Correspondance ponctuelle entre deux surfaces.

218.- Préliminaires. - Considérons deux surfaces (x), (y), liées par une correspondance ponctuelle continue et biunivoque dans le voisinage des deux points homologues que nous allons considérer. Les deux surfaces seront rapportées aux mêmes coordonnées u, v, deux points homologues ayant les mêmes coordonnées.

Nous supposerons que les coordonnées des points de (x) satisfont au système

$$\left.\begin{array}{l} x^{20} + p_1 x^{11} + a_1 x^{10} + b_1 x^{01} + c_1 x = 0 \\ x^{02} + p_2 x^{11} + a_2 x^{10} + b_2 x^{01} + c_2 x = 0 \end{array}\right\} \quad (I)$$

et les coordonnées des points de (y) au système

$$\left.\begin{array}{l} y^{20} + p_1' y^{11} + a_1' y^{10} + b_1' y^{01} + c_1' y = 0, \\ y^{02} + p_2' y^{11} + a_2' y^{10} + b_2' y^{01} + c_2' y = 0. \end{array}\right\} \quad (II)$$

219.- Système conjugué persistant. - Comme on l'a vu plus haut, il y a au moins un système conjugué de (x) qui se transforme en un système conjugué de (y). On a, sur (x) et sur (y), respectivement

$$p_1\, du\, \delta u - (du\, \delta v + dv\, \delta u) + p_2\, dv\, \delta v = 0,$$
$$p_1'\, du\, \delta u - (du\, \delta v + dv\, \delta u) + p_2'\, dv\, \delta v = 0.$$

Le système conjugué persistant est donc défini par

$$(p_1 - p_1')\, du^2 - (p_1 p_2' - p_2 p_1')\, du\, dv + (p_2 - p_2')\, dv^2 = 0. \quad (1)$$

Les racines $\frac{du}{dv}$, $\frac{\delta u}{\delta v}$ de cette équation vérifient les relations

$$\frac{du\, \delta u}{p_2' - p_2} = \frac{du\, \delta v + dv\, \delta u}{p_1 p_2' - p_2 p_1'} = \frac{dv\, \delta v}{p_1' - p_1}.$$

S'il y a deux systèmes conjugués conservés dans la correspondance, l'équation (1) est une identité et on a $p_1 = p_1'$, $p_2 = p_2'$. Tous les systèmes conjugués sont conservés dans la correspondance. Il en est de même des asymptotiques, définies sur chaque surface par l'équation

$$p_1\, du^2 - 2\, du\, dv + p_2\, dv^2 = 0. \quad (2)$$

Inversement, si les asymptotiques se correspondent, on a $p_1 = p_1'$, $p_2 = p_2'$ et tous les systèmes conjugués sont conservés.

Retournons au cas général et cherchons dans quelles conditions aux asymptotiques de (x) correspondent sur (y) des courbes conjuguées. Les directions asymptotiques $\frac{du}{dv}$, $\frac{\delta u}{\delta v}$ de (x) sont données par (2); on a

$$\frac{du\, \delta u}{p_2} = \frac{du\, \delta v + dv\, \delta u}{2} = \frac{dv\, \delta v}{p_1}.$$

Pour que les courbes correspondantes forment un système conjugué sur (y), on doit avoir

$$p_1 p_2' + p_2 p_1' = 2.$$

Il en résulte qu'aux asymptotiques de (y) correspondent également sur (x) les courbes d'un système conjugué.

220.- <u>Plans osculateurs aux lignes tracées sur (x)</u>.- L'équation du plan osculateur en un point x à la courbe $u = u(t)$, $v = v(t)$ tracée sur (x) est

$$\left| X \quad x \quad x^{10} du + x^{01} dv \quad x^{20} du^2 + 2x^{11} du\, dv + x^{02} dv^2 + x^{10} d^2u + x^{01} d^2v \right| = 0.$$

En posant

$$\Phi_0 = |X \quad x \quad x^{10} \quad x^{01}|, \quad \Phi_1 = |X \quad x \quad x^{10} \quad x^{11}|, \quad \Phi_2 = |X \quad x \quad x^{01} \quad x^{11}|,$$

ce plan peut être représenté par

$$\xi_0 \Phi_0 + \xi_1 \Phi_1 + \xi_2 \Phi_2 = 0,$$

moyennant

$$\left.\begin{aligned} \rho \xi_0 &= -b_1\, du^3 + a_1\, du^2 dv - b_2\, du\, dv^2 + a_2\, dv^3 + du\, d^2v - dv\, d^2u, \\ \rho \xi_1 &= -(p_1\, du^2 - 2\, du\, dv + p_2\, dv^2)\, du, \\ \rho \xi_2 &= -(p_1\, du^2 - 2\, du\, dv + p_2\, dv^2)\, dv. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

On en déduit

$$\xi_2 \frac{du}{dv} = \xi_1, \quad \xi_2^3 \frac{du\, d^2v - dv\, d^2u}{dv^3} = \xi_0(-p_1 \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - p_2 \xi_2^2) + b_1 \xi_1^3 - a_1 \xi_1^2 \xi_2 + b_2 \xi_1 \xi_2^2 - a_2 \xi_2^3. \quad (4)$$

221.- <u>Correspondance entre les plans osculateurs des deux surfaces</u>.- Si x, y

sont deux points homologues des surfaces (x), (y), on sait que les tangentes en ces points aux courbes homologues se correspondent dans une projectivité. M. Bompiani a étudié la correspondance entre les plans osculateurs aux points x, y aux courbes homologues tracées sur (x), (y).

En posant

$$\Phi'_0 = \left| X \quad y \quad y^{10} \quad y^{01} \right|, \quad \Phi'_1 = \left| X \quad y \quad y^{10} \quad y^{11} \right|, \quad \Phi'_2 = \left| X \quad y \quad y^{01} \quad y^{11} \right|,$$

le plan osculateur à la courbe $u = u(t)$, $v = v(t)$ au point y peut s'écrire

$$\eta_0 \Phi'_0 + \eta_1 \Phi'_1 + \eta_2 \Phi'_2 = 0,$$

moyennant, pour η_0, η_1, η_2, des formules analogues aux équations (3), dans lesquelles p_1, p_2, a_1, a_2, b_1, b_2 sont remplacés par $p'_1 \dots$, b'_2.

Les quantités $\frac{du}{dv}$, $\frac{du\, d^2v - dv\, d^2u}{dv^3}$ ont la même valeur pour deux courbes correspondantes, par suite, en utilisant les relations (4) et leurs analogues en η, on trouve

$$\xi_1 \eta_2 = \xi_2 \eta_1,$$

$$\eta_2^3 \left[\xi_0 \left(-p_1 \xi_1^2 + 2 \xi_1 \xi_2 - p_2 \xi_2^2 \right) + b_1 \xi_1^3 - a_1 \xi_1^2 \xi_2 + b_2 \xi_1 \xi_2^2 - a_2 \xi_2^3 \right] =$$
$$= \xi_2^3 \left[\eta_0 \left(-p'_1 \eta_1^2 + 2 \eta_1 \eta_2 - p'_2 \eta_2^2 \right) + b'_1 \eta_1^3 - a'_1 \eta_1^2 \eta_2 + b'_2 \eta_1 \eta_2^2 - a'_2 \eta_2^3 \right].$$

On en déduit

$$\left.\begin{aligned} \rho \xi_0 &= \eta_0 \left(-p'_1 \eta_1^2 - 2 \eta_1 \eta_2 - p'_2 \eta_2^2 \right) + (b'_1 - b_1) \eta_1^3 - (a'_1 - a_1) \eta_1^2 \eta_2 + (b'_2 - b_2) \eta_1 \eta_2^2 - (a'_2 - a_2) \eta_2^3, \\ \rho \xi_1 &= \eta_1 \left(-p_1 \eta_1^2 + 2 \eta_1 \eta_2 - p_2 \eta_2^2 \right), \\ \rho \xi_2 &= \eta_2 \left(-p_1 \eta_1^2 + 2 \eta_1 \eta_2 - p_2 \eta_2^2 \right). \end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

Les plans ξ, η sont donc liées par une correspondance birationnelle du troisième ordre. En général, à un plan η correspond un et un seul plan ξ. Il y a exception lorsque le plan η coïncide :

1°) avec le plan tangent à (y), pour lequel on a $\eta_1 = \eta_2 = 0$, d'où $\xi_0 = \xi_1 = \xi_2 = 0$;

2°) avec l'un des plans ϖ_1, ϖ_2 donnés par

$$p_1 \eta_1^2 - 2 \eta_1 \eta_2 + p_2 \eta_2^2 = 0, \quad \xi_0 = 0.$$

Il en résulte qu'aux plans ξ d'un faisceau correspondent par (III) les plans η enveloppant un cône de troisième classe ayant pour plan double le plan tangent à (y) en y et contenant les plans ϖ_1, ϖ_2.

Si nous interprétons les ξ, η comme coordonnées ponctuelles de deux plans α, α', on voit qu'aux droites de α correspondent dans α' des cubiques planes ayant un point double en $\eta_1 = \eta_2 = 0$, ayant en ce point les tangentes fixes

$$p'_1 \eta_1^2 - 2 \eta_1 \eta_2 + p'_2 \eta_2^2 = 0$$

et passant en outre par les points (qui correspondent à ϖ_1, ϖ_2)

$$p_1 \eta_1^2 - 2 \eta_1 \eta_2 + p_2 \eta_2^2 = 0, \quad \xi_0 = 0.$$

Pour trouver la signification géométrique des plans ϖ_1, ϖ_2, supposons pour simplifier les formules que les u, v sont les asymptotiques sur la surface (x) ; on a alors $p_1 = p_2 = 0$ et les plans ϖ_1, ϖ_2 sont donnés par

$$\eta_1 = 0, \qquad p'_2\eta_0 + (a'_2 - a_2)\eta_2 = 0; \qquad (\varpi_1)$$
$$\eta_2 = 0, \qquad p'_1\eta_0 - (b'_1 - b_1)\eta_1 = 0, \qquad (\varpi_2)$$

Considérons une courbe tracée sur (x) et ayant en x un point d'inflexion. Pour cette courbe osculateur est indéterminé et on a, au point x soit $du = 0$, $d^2u = a_2 dv^2$, soit $dv = 0$, $d^2v = b_1 du^2$. Envisageons le premier cas et portons les valeurs de du, d^2u dans les formules analogues aux (3), relatives à la surface (y).

On a

$$\rho\eta_0 = (a'_2 - a_2)dv^3, \ \rho\eta_1 = 0, \ \rho\eta_2 = -p'_2 dv^3,$$

ce qui donne le plan ϖ_1. On voit donc qu'il existe, sur la surface (x), deux courbes ayant un point d'inflexion en x et tangente l'une à chacune des asymptotiques. Les plans ϖ_1, ϖ_2 sont les plans osculateurs aux courbes de la surface (y) qui correspondent à ces courbes.

222. - Abaissement de l'ordre de la correspondance. - Supposons encore, ce qui ne restreint pas la généralité, que les asymptotiques de la surface (x) soient les courbes u, v. On a $p_1 = 0$, $p_2 = 0$. Pour que la correspondance soit du second ordre, il faut que le second membre de la première des équations (III) soit divisible par η_1 ou par η_2. Pour qu'il soit divisible par η_1 par exemple, on doit avoir

$$p'_2 = 0, \quad a'_2 = a_2.$$

Les asymptotiques v se correspondent sur les surfaces.

Pour que la correspondance (III) se réduise à une homographie, le second membre de la première formule doit être divisible par du, dv, ce qui exige

$$p'_1 = p'_2 = 0, \ a'_2 = a_2, \ b'_1 = b_1.$$

Les surfaces sont alors dites projectivement applicables. Les asymptotiques se correspondent.

Observons que lorsque les asymptotiques se correspondent (correspondances asymptotiques) ou lorsque une seule asymptotique de (x) correspond à une asymptotique de (y) (correspondances semi-asymptotiques), la transformation (III) est en général du troisième ordre.

223. - Systèmes axiaux. - Une droite issue du point x et non située dans le plan tangent peut être représentée par les équations

$$\frac{\Phi_0}{1} = \frac{\Phi_1}{\alpha_1(u,v)} = \frac{\Phi_2}{\alpha_2(u,v)}.$$

On appelle système axial l'ensemble des courbes dont les plans osculateurs passent par la droite donnée. On doit donc avoir

$$\xi_0 + \xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$du\,d^2v - dv\,d^2u = b_1 du^3 - a_1 du^2 dv + b_2 du\,dv^2 - a_2 dv^3 - (p_1 du^2 - 2\,du\,dv + p_2 dv^2)(\alpha_1 du + \alpha_2 dv). \quad (2)$$

Un système axial comprend donc ∞^2 courbes.

224.- Systèmes axiaux persistants. - Considérons la droite

$$\frac{\Phi'_0}{1} = \frac{\Phi'_1}{\beta_1} = \frac{\Phi'_2}{\beta_2}$$

issue du point y et le système axial correspondant sur (y). Pour que ce système corresponde au système (2), on doit avoir

$$\begin{aligned} b_1 - p_1\alpha_1 &= b'_1 - p'_1\beta_1 , \\ -a_1 + 2\alpha_1 - p_1\alpha_2 &= -a'_1 + 2\beta_1 - p'_1\beta_2 , \\ b_2 + 2\alpha_2 - p_2\alpha_1 &= b'_2 + 2\beta_2 - p'_2\beta_1 , \\ + a_2 + p_2\alpha_2 &= a'_2 + p'_2\beta_2 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -p_1\alpha_1 \qquad\qquad + p'_1\beta_1 &= b'_1 - b_1 \\ 2\alpha_1 - p_1\alpha_2 - 2\beta_1 + p'_1\beta_2 &= -a'_1 + a_1 \\ -p_2\alpha_1 + 2\alpha_2 + p'_2\beta_1 - 2\beta_2 &= b'_2 - b_2 \\ p_2\alpha_2 \qquad\qquad - p'_2\beta_2 &= a'_2 - a_2 \end{aligned}$$

Considérons comme inconnues $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Le déterminant du système a pour valeur

$$\begin{vmatrix} -p_1 & 0 & p'_1 & 0 \\ 2 & -p_1 & -2 & p'_1 \\ -p_2 & 2 & +p'_2 & -2 \\ 0 & p_2 & 0 & -p'_2 \end{vmatrix}$$

$$(p_1 p'_2 - p_2 p'_1)^2 + 4(p'_1 - p_1)(p'_2 - p_2) .$$

Si nous posons, ce qui ne restreint pas la généralité, $p_1 = p_2 = 0$, ce déterminant se réduit à $4 p'_1 p'_2$.

1°) $p'_1 p'_2 \neq 0$. Il existe un seul et un seul système axial persistant dans la correspondance entre (x), (y).

2°) $p'_1 \neq 0$, $p'_2 = 0$. On doit avoir $b'_1 = b_1$. Il existe alors ∞^1 systèmes axiaux persistants.

3°) $p'_1 = p'_2 = 0$. On doit avoir $b'_1 = b_1$, $a'_2 = a_2$. A tout système axial correspond un système axial. Les surfaces (x), (y) sont alors projectivement applicables.

Chapitre XIII

Les géométries cayleyennes.

§1.- Construction des géométries cayleyennes.

225.- Distance cayleyenne de deux points.- Considérons deux nombres a, b tous deux réels ou tous deux complexes, et un axe Ox. Posons

$$\varphi(x) = \frac{x-a}{x-b} .$$

Si x_1, x_2 sont les abscisses de deux points réels de Ox, nous appellerons distance cayleyenne de ces deux points l'expression

$$\delta(x_1, x_2) = k \log \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} ,$$

k étant une constante. On a

$$\delta(x_1, x_1) = 0 , \quad \delta(x_1, x_2) + \delta(x_2, x_1) = 0$$

et, si x_3 est un troisième point de Ox

$$\delta(x_1, x_2) + \delta(x_2, x_3) + \delta(x_3, x_1) = 0 .$$

Pour que $\delta(x_1, x_2)$ soit réelle, il faut que $\log \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}$ soit réel ou imaginaire pure, k étant respectivement réelle ou imaginaire pure.

Si a, b sont réels, $\log \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}$ est réel si $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ sont de même signe, c'est-à-dire si les couples de points a, b et x_1, x_2 ne se séparent pas. Si les couples a, b et x_1, x_2 se séparent, $\log \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}$ est imaginaire, mais ne peut être une imaginaire pure.

Si a, b sont imaginaires, posons $a = \alpha + \beta i$, $b = \alpha' + \beta' i$. Lorsque l'on remplace β et β' par $-\beta$ et $-\beta'$, $\log \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}$ est remplacé par son imaginaire conjuguée, c'est-à-dire, puisque c'est une imaginaire pure, change de signe. On doit donc avoir

$$\log \frac{x_1-\alpha-\beta i}{x_1-\alpha'-\beta' i} \cdot \frac{x_2-\alpha'-\beta' i}{x_2-\alpha-\beta i} + \log \frac{x_1-\alpha+\beta i}{x_1-\alpha'+\beta' i} \cdot \frac{x_2-\alpha'+\beta' i}{x_2-\alpha+\beta i} = 0$$

ce qui entraîne $\alpha' = \alpha$, $\beta' = -\beta$.

Deux cas peuvent donc se présenter :

1°) a et b sont réels, les points x_1, x_2 appartiennent à l'un des intervalles ab et k est réelle ;

2°) a et b sont imaginaires conjuguées, k est une imaginaire pure.

226.- Absolu d'une géométrie cayleyenne.- Pour construire une géométrie cayleyenne, il faut pouvoir déterminer, sur chaque droite de l'espace, soit deux points réels, soit deux points imaginaires conjugués. On peut y parvenir en fixant une quadrique Q, appelée absolu de la géométrie, qui fournira par ses intersections avec une droite, sous certaines conditions, les deux points en question.

Soit $f(y,z)=0$ l'équation d'une polarité de l'espace. Tout point de la droite yz déterminée par deux points quelconques y, z a des coordonnées de la forme $m_1 y + m_2 z$. Les points d'intersection de la droite yz avec la quadrique Q fondamentale de la polarité sont donnés par

$$m_1^2 f(y,y) + 2 m_1 m_2 f(y,z) + m_2^2 f(z,z) = 0.$$

On aura alors, pour la distance cayleyenne des points y, z,

$$\delta(y,z) = k \log \frac{f(y,z) + \sqrt{\overline{f(y,z)}^2 - f(y,y)\,f(z,z)}}{f(y,z) - \sqrt{\overline{f(y,z)}^2 - f(y,y)\,f(z,z)}},$$

le signe du radical étant choisi arbitrairement, mais fixé une fois pour toutes.

Pour notre objet, il faut que, quels que soient y, z, $\overline{f(y,z)}^2 - f(y,y)f(z,z)$ soit toujours positive ou toujours négative. Le premier cas se présentera si la quadrique Q est une quadrique elliptique, les points y, z étant toujours choisis dans la région telle que la droite yz rencontre Q et que nous appellerons région intérieure; on prendra alors pour k une quantité réelle. Le second cas se présentera lorsque Q sera une quadrique imaginaire et on prendra alors pour k une imaginaire pure.

Dans le premier cas, la géométrie cayleyenne construite est dite hyperbolique; dans le second, elliptique.

227.- Remarques.- Choisissons un point y. Pour que $\delta(y,z)$ soit nulle, il faut que z vérifie l'équation

$$\overline{f(y,z)}^2 - f(y,y)\,f(z,z) = 0,$$

c'est-à-dire qu'il appartienne au cône de sommet y circonscrit à l'absolu. Dans les conditions imposées, ce cône est imaginaire et par suite $\delta(y,z)$ n'est nulle que si z coïncide avec y.

Pour que $\delta(y,z)$ tende vers l'infini, il faut que $f(z,z)$ tende vers zéro, c'est-à-dire que le point z se rapproche de l'absolu. Cela n'est possible que dans la géométrie hyperbolique.

228.- Angle cayleyen de deux plans.- Soient η, ζ deux plans. Dans le cas de la géométrie hyperbolique, nous supposerons que la droite $\eta\zeta$ coupe Q en deux points distincts.

Représentons par $F(\eta,\zeta)=0$ l'équation tangentielle de la polarité

$f(y,z)=0$. Tout plan passant par la droite $\eta\zeta$ a des coordonnées de la forme $\mu_1\eta+\mu_2\zeta$. Les plans tangents à l'absolu, passant par la droite $\eta\zeta$, sont imaginaires et déterminés par

$$\mu_1^2 F(\eta,\eta)+2\mu_1\mu_2 F(\eta,\zeta)+\mu_2^2 F(\zeta,\zeta)=0.$$

Nous appellerons angle cayleyen des deux plans η,ζ l'expression

$$V(\eta,\zeta)=\frac{1}{2i}\log(\eta,\zeta,\alpha,\beta),$$

α,β étant les plans tangents à l'absolu menés par la droite $\eta\zeta$.

On aura

$$V(\eta,\zeta)=\frac{1}{2i}\log\frac{F(\eta,\zeta)+\sqrt{F(\eta,\zeta)^2-F(\eta,\eta)F(\zeta,\zeta)}}{F(\eta,\zeta)-\sqrt{F(\eta,\zeta)^2-F(\eta,\eta)F(\zeta,\zeta)}}.$$

On en déduit

$$\cos V=\frac{F(\eta,\zeta)}{\sqrt{F(\eta,\eta)F(\zeta,\zeta)}}.$$

229.- Angle cayleyen de deux droites concourantes. - Soient xy, xz deux droites se coupant en un point x situé dans le cas de la géométrie hyperbolique, dans la région intérieure. Tout point du plan xyz a des coordonnées de la forme $m_1x+m_2y+m_3z$. La section de l'absolu par ce plan a pour équation

$$m_1^2 f(x,x)+m_2^2 f(y,y)+m_3^2 f(z,z)+2m_2m_3 f(y,z)+\dots=0.$$

L'équation tangentielle de cette conique est donc $\varphi(\mu,\mu)=0$, en posant

$$\varphi(\mu,\nu)=\begin{vmatrix} 0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \mu_1 & f(x,x) & f(x,y) & f(x,z) \\ \mu_2 & f(x,y) & f(y,y) & f(y,z) \\ \mu_3 & f(x,z) & f(y,z) & f(z,z) \end{vmatrix}.$$

L'angle cayleyen Ω de deux droites μ,ν du plan xyz sera donné par

$$\cos\Omega=\frac{\varphi(\mu,\nu)}{\sqrt{\varphi(\mu,\mu)\varphi(\nu,\nu)}}.$$

En particulier, la droite xy étant donnée par $\mu_1=\mu_2=0$ et la droite xz par $\nu_1=\nu_3=0$, l'angle Ω de ces deux droites sera

$$\cos\Omega=\frac{f(x,x)f(y,z)-f(x,y)f(x,z)}{\sqrt{\left[f(x,y)^2-f(x,x)f(y,y)\right]\left[f(x,z)^2-f(x,x)f(z,z)\right]}}.$$

230.- Condition d'orthogonalité de deux droites concourantes. - La condition d'orthogonalité des droites xy, xz est donnée par $\Omega=\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire par

$$f(x,x)f(y,z)-f(x,y)f(x,z)=0.$$

Cette condition prend une forme plus simple lorsque l'on fixe le facteur de proportionnalité des coordonnées par la condition $f(x,x)=1$ et que l'on suppose $y=x+dx$, $z=x+\delta x$. Elle s'écrit alors

$$f(dx, \delta x) = 0.$$

231.- Condition d'orthogonalité d'une droite et d'un plan.- Considérons un plan ξ et une droite xy coupant ξ au point x. Nous dirons que ce plan et cette droite sont perpendiculaires lorsque la droite est perpendiculaire à toute droite passant par son pied dans le plan.

Si z est un point du plan, nous devons avoir

$$\Sigma \xi z = 0 \quad , \quad f(x,x)\, f(y,z) - f(x,y)\, f(x,z) = 0.$$

Cette dernière relation s'écrit

$$\Sigma z \left[f(x,x) \frac{\partial f}{\partial y} - f(x,y) \frac{\partial f}{\partial x} \right] = 0.$$

Par suite, on a

$$\rho \xi = f(x,x) \frac{\partial f}{\partial y} - f(x,y) \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Ces conditions expriment que le pôle du plan ξ par rapport à Q est le point $y f(x,x) - x f(x,y)$. Or ce point appartient à la droite xy. Les perpendiculaires à un plan passent donc par le pôle de ce plan par rapport à l'absolu et réciproquement.

232.- Mouvements cayleyens.- On appelle mouvement cayleyen une transformation biunivoque de l'espace qui fait correspondre un plan à un plan et qui conserve les distances. La première condition exige qu'un mouvement soit une homographie de l'espace.

Soient H une homographie, x, y deux points, x', y' leurs homologues, A, B les points de l'absolu situés sur la droite xy et A', B' ceux qui sont situés sur x', y'. Pour que H soit un mouvement, on doit avoir $\delta(x,y) = \delta(x', y')$, c'est-à-dire

$$(x\,y\;AB) = (x'y'\;A'B').$$

Il en résulte que H fait correspondre, dans un certain ordre, les points A', B' aux points A, B. Par suite, les mouvements cayleyens sont les homographies de l'espace conservant l'absolu.

§2.- La géométrie cayleyenne elliptique.

233.- Préliminaires.- Supposons l'espace rapporté à un tétraèdre autopolaire par rapport à l'absolu. Nous aurons donc

$$f(y,z) = y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 + y_4 z_4,$$

en choisissant convenablement le point unitaire. Les équations ponctuelles et tangentielles de l'absolu seront

$$f(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \quad , \quad f(\xi,\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 0$$

La distance de deux points y, z sera donnée par

$$\delta(y,z) = \frac{R}{2i} \log. \frac{f(y,z) + i\sqrt{f(y,z)^2 - f(y,y) f(z,z)}}{f(y,z) - i\sqrt{f(y,z)^2 - f(y,y) f(z,z)}}, \quad \left(k = \frac{R}{2i}\right).$$

On en déduit

$$\frac{f_{yz}+i\sqrt{f_{yz}^2-f_{yy}f_{zz}}}{f_{yz}-i\sqrt{f_{yz}^2-f_{yy}f_{zz}}}=e^{\frac{2i\delta}{R}}=\cos\frac{2\delta}{R}+i\sin\frac{2\delta}{R},$$

d'où

$$\cos\frac{2\delta}{R}=\frac{2f_{yz}^2-f_{yy}f_{zz}}{f_{yy}f_{zz}},$$

et enfin

$$\cos\frac{\delta}{R}=\frac{f_{yz}}{\sqrt{f_{yy}f_{zz}}}\,,\quad \sin\frac{\delta}{R}=\frac{\sqrt{f_{yy}f_{zz}-f_{yz}^2}}{\sqrt{f_{yy}f_{zz}}}.$$

Nous conviendrons de fixer le facteur de proportionnalité des coordonnées des points non situés sur l'absolu en posant

$$f_{xx}=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1,$$

et deux points de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 et $-x_1, -x_2, -x_3, -x_4$ seront considérés comme coïncidents. On aura alors

$$\cos\frac{\delta}{R}=f(y,z)\,,\quad \sin\frac{\delta}{R}=\sqrt{1-\overline{f(y,z)}^2}.$$

On fixera de même le facteur de proportionnalité des coordonnées tangentielles en posant

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2=1$$

et l'angle de deux plans η, ξ sera alors donné par

$$\cos V=f(\eta,\xi).$$

234.- <u>Les droites de l'espace elliptique</u>.- Soit xy une droite. Considérons le plan ξ passant par x et perpendiculaire en ce point à la droite. La droite xy passe donc par le pôle du plan ξ par rapport à l'absolu, c'est-à-dire par le point ξ et on a, pour tout point de la droite,

$$x'=m_1x+m_2\xi.$$

On doit avoir $f(x',x')=1$, $f(x,x)=1$, $f(\xi,\xi)=1$, $f(\xi,x)=0$, donc $m_1^2+m_2^2=1$. Si δ est la distance des points x, x', on a

$$\cos\frac{\delta}{R}=f(x,x')=m_1\,,\quad m_2=\sin\frac{\delta}{R},$$

donc

$$x'=x\cos\frac{\delta}{R}+\xi\sin\frac{\delta}{R}.$$

Si ξ' est le plan perpendiculaire à la droite au point x', on a successivement

$$x=x'\cos\frac{\delta}{R}+\xi'\sin\frac{\delta}{R}$$

$$x=x\cos^2\frac{\delta}{R}+\xi\sin\frac{\delta}{R}\cos\frac{\delta}{R}+\xi'\sin\frac{\delta}{R},$$

d'où

$$\xi'=x\sin\frac{\delta}{R}-\xi\cos\frac{\delta}{R}.$$

Une droite est déterminée par un de ses points et le plan normal en ce point.

Le point x'' situé sur la droite xx' à une distance $\delta+R\pi$ de x est donné par

$$x''=x\cos\left(\frac{\delta}{R}+\pi\right)+\xi\sin\left(\frac{\delta}{R}+\pi\right)=-x';$$

il coïncide donc avec x' et les droites de l'espace elliptique ont la longueur $R\pi$.

235.- <u>Mouvements de l'espace elliptique</u>.- Un mouvement est représenté par

$$x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 \quad , (i = 1,2,3,4). \qquad (I)$$

et l'on doit avoir $f(x,x) = 1$, $f(x',x') = 1$. On en déduit

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + a_{3i}^2 + a_{4i}^2 = 1 \ , a_{1i}a_{1k} + a_{2i}a_{2k} + a_{3i}a_{3k} + a_{4i}a_{4k} = 0 \ , (i \neq k).$$

De plus, on a

$$|a_{ik}|^2 = 1.$$

Les formules (I) représentent donc une substitution orthogonale.

Appelons translation un mouvement tel que la distance entre les positions initiale et finale d'un même point ait une valeur constante déterminée δ. Si les formules (I) représentent une translation, on doit avoir

$$f(x,x') = \cos\frac{\delta}{R}.$$

En considérant en particulier les déplacements des sommets du tétraèdre de référence, on a

$$\cos\frac{\delta}{R} = a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44}.$$

Des deux relations précédentes, on déduit $a_{ik} + a_{ki} = 0$ pour $i \neq k$.

A un plan ξ, la translation (I) fait correspondre un plan ξ' et on a

$$\xi_i = a_{1i}\xi'_1 + a_{2i}\xi'_2 + a_{3i}\xi'_3 + a_{4i}\xi'_4, \qquad (i = 1,2,3,4).$$

L'angle des deux plans ξ, ξ' est donné par

$$\cos V = f(\xi,\xi') = \cos\frac{\delta}{R}.$$

Par suite, on a

$$V = \frac{\delta}{R}.$$

236.- <u>Les deux espèces de translations</u>.- D'après les résultats précédents, on peut poser

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = A \ , \ a_{21} = B = \pm a_{43} \ , \ a_{31} = C = \mp a_{42} \ , \ a_{41} = D = \pm a_{32}.$$

Il y a donc deux espèces de translations

$$\left.\begin{aligned}
x'_1 &= Ax_1 - Bx_2 - Cx_3 - Dx_4, \\
x'_2 &= Bx_1 + Ax_2 - Dx_3 + Cx_4, \\
x'_3 &= Cx_1 + Dx_2 + Ax_3 - Bx_4, \\
x'_4 &= Dx_1 - Cx_2 + Bx_3 + Ax_4,
\end{aligned}\right\} \quad (I)$$

$$\left.\begin{aligned}
x'_1 &= Ax_1 - Bx_2 - Cx_3 - Dx_4, \\
x'_2 &= Bx_1 + Ax_2 + Dx_3 - Cx_4, \\
x'_3 &= Cx_1 - Dx_2 + Ax_3 + Bx_4, \\
x'_4 &= Dx_1 + Cx_2 - Bx_3 + Ax_4.
\end{aligned}\right\} \quad (II)$$

De plus, le point $(1,0,0,0)$ étant transporté au point (A,B,C,D), on a

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1.$$

Soient x, x' deux points homologues, ξ un plan passant par x, x' et ξ' le plan homologue. On a $f(\xi,x) = 0$, $f(\xi,x') = 0$.

D'autre part, on a

$$\xi'_1 = A\xi_1 - B\xi_2 - C\xi_3 - D\xi_4 ,$$
$$\xi'_2 = B\xi_1 + A\xi_2 - \varepsilon D\xi_3 + \varepsilon C\xi_4 ,$$
$$\xi'_3 = C\xi_1 + \varepsilon D\xi_2 + A\xi_3 - \varepsilon B\xi_4 ,$$
$$\xi'_4 = D\xi_1 - \varepsilon C\xi_2 + \varepsilon B\xi_3 + A\xi_4 ,$$

avec $\varepsilon = +1$ pour la translation (I), $\varepsilon = -1$ pour la translation (II).

Par suite, on a $f(\xi', x) = 0$, $f(\xi', x') = 0$ et dans chacune des translations, la droite xx' glisse sur elle-même d'une longueur $\delta = R \arccos A$ tandis que le plan ξ tourne autour de cette droite d'un angle $\frac{\delta}{R} = \arccos A$.

Une translation (I) ou (II) est complètement déterminée lorsque l'on se donne une droite qui doit glisser sur elle-même et l'amplitude δ de ce glissement. Considérons une droite r donnée par un de ses points y, par le plan η qui lui est perpendiculaire en y et qui de plus porte le point y en

$$y' = y \cos\frac{\delta}{R} + \eta \sin\frac{\delta}{R} .$$

En posant

$$p_{ik} = y_i \eta_k - y_k \eta_i ,$$

on a

$$y_i y'_k - y_k y'_i = p_{ik} \sin\frac{\delta}{R} .$$

Les équations (I) donnent alors

$$A = \cos\frac{\delta}{R},\ B = (p_{12} + p_{34})\sin\frac{\delta}{R},\ C = (p_{13} + p_{42})\sin\frac{\delta}{R},\ D = (p_{14} + p_{23})\sin\frac{\delta}{R}. \quad (\mathrm{I}')$$

et les équations (II),

$$A = \cos\frac{\delta}{R},\ B = (p_{12} - p_{34})\sin\frac{\delta}{R},\ C = (p_{13} - p_{42})\sin\frac{\delta}{R},\ D = (p_{14} - p_{23})\sin\frac{\delta}{R}. \quad (\mathrm{II}')$$

Les translations sont des homographies telles que par tout point passe une droite unie ; sur chacune de celles-ci, une translation détermine une projectivité ne pouvant avoir un point uni réel, cette projectivité est donc elliptique. Une translation est donc une homographie biaxiale elliptique. On vérifie aisément que les axes de cette homographie sont deux droites imaginaires appartenant à l'absolu. Précisément, ce sont deux génératrices de modes distincts de l'absolu. On trouve ainsi la raison géométrique du fait qu'il y a deux translations portant un point x en un point x' ; la droite xx', unie, coupe l'absolu en deux points par chacun desquels passent deux génératrices rectilignes imaginaires de l'absolu. Les quatre génératrices ainsi obtenues fournissent, de deux manières, les axes d'une homographie biaxiale elliptique.

237.– Parallélisme de Clifford.– Deux droites r, s sont dites parallèles au sens de Clifford lorsqu'elles sont conservées dans une même translation. Il existe deux translations T_1, T_2 faisant correspondre à un point x de r, un point x' de cette droite. Par un point y n'appartenant pas à r, passent deux droites s_1, s_2 unies respectivement pour T_1, T_2 et qui sont parallèles à r au sens de Clifford. Il est évident que lorsque le point x' varie sur la droite r, c'est-à-dire lorsque l'amplitude des translations T_1, T_2 ~~varient~~, les droites s_1, s_2 restent fixes. Par un point, on peut donc mener deux parallèles au sens de Clifford à une droite r.

Considérons, en particulier, les translations portant un point x de la droite r au pôle ξ du plan perpendiculaire à r en x, par rapport à l'absolu. Nous aurons ainsi $\delta = \frac{1}{2}\pi R$ et nous devrons poser dans les formules (I) et (II), moyennant (I') et (II'), respectivement

$$A = 0\ ,\quad B = p_{12}+p_{34}\ ,\quad C = p_{13}+p_{42}\ ,\quad D = p_{14}+p_{23} \qquad (I'')$$
$$A = 0\ ,\quad B = p_{12}-p_{34}\ ,\quad C = p_{13}-p_{42}\ ,\quad D = p_{14}-p_{23}\,. \qquad (II'')$$

On a posé, dans ces relations, $p_{ik} = x_i\xi_k - x_k\xi_i$.

Les parallèles de Clifford menées à r par le point y seront respectivement déterminées par les plans η', η'' perpendiculaires en y à ces droites, et on aura

$$\left.\begin{aligned}
\eta'_1 &= \qquad\qquad - (p_{12}+p_{34})y_2 - (p_{13}+p_{42})y_3 - (p_{14}+p_{23})y_4\,,\\
\eta'_2 &= (p_{12}+p_{34})y_1 \qquad\qquad - (p_{14}+p_{23})y_3 + (p_{13}+p_{42})y_4\,,\\
\eta'_3 &= (p_{13}+p_{42})y_1 + (p_{14}+p_{23})y_2 \qquad\qquad - (p_{12}+p_{34})y_4\,,\\
\eta'_4 &= (p_{14}+p_{23})y_1 - (p_{13}+p_{42})y_2 + (p_{12}+p_{34})y_3\,,
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

et

$$\left.\begin{aligned}
\eta''_1 &= \qquad\qquad - (p_{12}-p_{34})y_2 - (p_{13}-p_{42})y_3 - (p_{14}-p_{23})y_4\,,\\
\eta''_2 &= (p_{12}-p_{34})y_1 \qquad\qquad + (p_{14}-p_{23})y_3 - (p_{13}-p_{42})y_4\,,\\
\eta''_3 &= (p_{13}-p_{42})y_1 - (p_{14}-p_{23})y_2 \qquad\qquad + (p_{12}-p_{34})y_4\,,\\
\eta''_4 &= (p_{14}-p_{23})y_1 + (p_{13}-p_{42})y_2 - (p_{12}-p_{34})y_3
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

La parallèle donnée par les formules (1) est appelée parallèle dextrorsum, l'autre, parallèle sinistrorsum.

En posant $q'_{ik} = y_i\eta'_k - y_k\eta'_i$, nous avons, par les formules (1),

$$q'_{12}+q'_{34} = p_{12}+p_{34}\,,\quad q'_{13}+q'_{42} = p_{13}+p_{42}\,,\quad q'_{14}+q'_{23} = p_{14}+p_{23} \qquad (1')$$

et inversement, en partant de ces relations jointes à $f(\eta, y) = 0$, on retrouve les formules (1).

En posant de même $q''_{ik} = y_i\eta''_k - y_k\eta''_i$, on a

$$q''_{12}-q''_{34} = p_{12}-p_{34}\,,\quad q''_{13}-q''_{42} = p_{13}-p_{42}\,,\quad q''_{14}-q''_{23} = p_{14}-p_{23}\,. \qquad (2')$$

Les équations (1') expriment la condition nécessaire et suffisante pour que la droite $y\eta'$ soit parallèle dextrorsum à la suite $x\xi$, les équations (2'), la condition pour que $y\eta''$ soit parallèle sinistrorsum à $x\xi$.

238.- <u>Angle de parallélisme</u>.- On appelle angle de parallélisme Ω l'angle des parallèles $y\eta'$, $y\eta''$.

On peut supposer, sans restriction, que le point y appartient au plan ξ; on a alors $f(\xi, y) = 0$. Des formules (1), (2), on déduit

$$\eta'_i + \eta''_i = 2\xi_i f(x,y) - 2x_i f(\xi,y) = 2\xi_i f(x,y).$$

Soit d la distance du point y à la droite $x\xi$; on a $\cos\frac{d}{R} = f(x,y)$.
On a ensuite

$$\cos\Omega = f(\eta',\eta'') = 2\overline{f(x,y)}^2 - 1 = 2\cos^2\frac{d}{R} - 1 = \cos\frac{2d}{R},$$

d'où $\Omega = \frac{2d}{R}$.

Les droites $y\eta'$, $y\eta''$ coïncident si $d = 0$ (ce qui est évident) et si $d = \frac{1}{2}\pi R$. Les droites $x\xi$ et $y\eta$ sont alors conjuguées par rapport à l'absolu.

239.– Courbes.– Une courbe sera définie par les équations

$$x_1 = x_1(u),\ x_2 = x_2(u),\ x_3 = x_3(u),\ x_4 = x_4(u)$$

où les seconds membres sont des fonctions continues et différentiables autant de fois qu'il est nécessaire. On aura évidemment $f(x,x) = 1$.

Appelons s la longueur d'arc de la courbe et considérons deux points voisins x, x'. Si h est la longueur de l'arc xx', on a

$$x' = x + \frac{h}{1}\frac{dx}{ds} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2x}{ds^2} + \dots$$

et par suite, si δ est la longueur de la corde xx',

$$\cos\frac{\delta}{R} = f(x,x) + \frac{h}{1} f\left(x,\frac{dx}{ds}\right) + \frac{h^2}{2} f\left(x,\frac{d^2x}{ds^2}\right) + \dots$$

on a

$$f(x,x) = 1,\quad f\left(x,\frac{dx}{ds}\right) = 0,\quad f\left(x,\frac{d^2x}{ds^2}\right) + f\left(\frac{dx}{ds},\frac{dx}{ds}\right) = 0, \dots$$

d'où

$$\cos\frac{\delta}{R} = 1 - \frac{h^2}{2} f\left(\frac{dx}{ds},\frac{dx}{ds}\right) + \dots$$

D'autre part, on a

$$\cos\frac{h}{R} = 1 - \frac{h^2}{2R^2} + \dots$$

Lorsque h tend vers zéro, δ est un infiniment petit équivalent à h et par suite on a, par la comparaison des formules précédentes

$$\frac{1}{R^2} = f\left(\frac{dx}{ds},\frac{dx}{ds}\right) \quad \text{ou} \quad ds^2 = R^2\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2\right).$$

On prendra pour variable indépendante, dans les équations de la courbe, la longueur d'arc s comptée à partir d'une certaine origine.

La tangente à la courbe au point x passe par le point $\xi = R\frac{dx}{ds}$ et le plan ξ est le plan normal à la courbe au point x.

Le plan osculateur ζ à la courbe au point x a pour équation

$$\left| X \quad x \quad \frac{dx}{ds} \quad \frac{d^2x}{ds^2} \right| = 0.$$

Si l'on désigne par $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ les coefficients de X_1, X_2, X_3, X_4 dans cette équation, on aura $\zeta_i = \lambda\Delta_i$, λ étant déterminé par $\lambda^2 f(\Delta_i, \Delta_i) = 1$.

On peut définir la courbure et la torsion d'une courbe par les procédés suivants, que nous nous bornerons à indiquer rapidement.

Par le point $(1,0,0,0)$ menons les parallèles dextrorsum (ou sinistrorsum) à la tangente $x\xi$ et à la binormale $x\xi$. Complétons le tétraèdre autopolaire par rapport à l'absolu ayant ces droites comme arêtes et soient ξ', ξ' les sommets, distincts du point $(1,0,0,0)$, appartenant à ces arêtes. Les courbes décrites par les points ξ', ξ' sont les première et seconde indicatrices dextrorsum (ou sinistrorsum) de la courbe. Soient σ_1, σ_1' les longueurs d'arc sur ces indicatrices. Les courbure et torsion dextrorsum de la courbe au point x seront $\frac{1}{R}\frac{d\sigma_1}{ds}, \frac{d\sigma_1'}{ds}$. On définira de même les courbure et torsion sinistrorsum.

Les deux courbures dextrorsum et sinistrorsum sont égales à

$$\frac{1}{\rho} = R\sqrt{\sum\sum\left(x_i\frac{d^2x_k}{ds^2} - x_k\frac{d^2x_i}{ds^2}\right)},$$

mais les torsions $\frac{1}{\tau_1}, \frac{1}{\tau_2}$ seront distinctes. On a d'ailleurs

$$\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{R} = \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{R}.$$

240.- <u>Les sphères en géométrie elliptique</u>.- Une sphère de centre y et de rayon r a pour équation

$$\overline{f(x,y)}^2 = f(x,x)\,f(y,y)\cos^2\frac{r}{R}.$$

En particulier, une sphère de centre $(0,0,0,1)$ a pour équation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2\,\mathrm{tg}^2\frac{r}{R} = 0.$$

Posons

$$x_1 = \sin\frac{r}{R}\sin\theta\cos\varphi,\; x_2 = \sin\frac{r}{R}\sin\theta\sin\varphi,\; x_3 = \sin\frac{r}{R}\cos\theta,\; x_4 = \cos\frac{r}{R}.$$

Les quantités r, θ, φ sont les coordonnées sphériques de l'espace elliptique. On a

$$ds^2 = dr^2 + R^2\sin^2\frac{r}{R}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

L'analyse de cette forme du ds^2 avec la forme du ds^2 des coupes à temps constant des univers d'Einstein et de De Sitter conduit à une interprétation géométrique de ces univers (voir deux notes que nous avons publiées dans les Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1924 et 1925).

§3.- La Géométrie cayleyenne hyperbolique.

241.- <u>Préliminaires</u>.- Rapportons l'espace à un tétraèdre autopolaire par rapport à l'absolu et choisissons le point unitaire de manière à avoir

$$f(y,z) = y_1z_1 - y_2z_2 - y_3z_3 - y_4z_4 = 0.$$

Les équations ponctuelles et tangentielles de l'absolu sont

$$f(x,x) = 0, \quad -f(\xi,\xi) = 0.$$

Les points de la région intérieure, ou points accessibles, sont caractérisés par $f(x,x) > 0$. Nous fixerons le facteur de proportionnalité des coordonnées en posant $f(x,x)=1$, les points $x, -x$ étant identiques.

Les pôles ξ par rapport à l'absolu des plans ξ contenant des points accessibles sont tels que $f(\xi,\xi)<0$; ils seront appelés points inaccessibles. Nous fixerons le facteur de proportionnalité des plans ξ en posant $f(\xi,\xi)=-1$, les plans ξ et $-\xi$ étant identiques.

En posant $k=\frac{1}{2}R$, on trouvera aisément, pour la distance $\delta(y,z)$ de deux points y, z,

$$\operatorname{ch}\frac{\delta}{R} = f(y,z) \quad , \quad \operatorname{sh}\frac{\delta}{R} = \sqrt{f_{yz}^2 - f_{yy}f_{zz}} \,.$$

L'angle de deux plans η, ζ sera donné par

$$\cos V = f(\eta,\zeta) \,.$$

242.- Les droites de l'espace hyperbolique.- Une droite r est déterminée par un point x et le plan ξ qui lui est perpendiculaire en x. La droite r passe par le point inaccessible ξ. On peut poser, pour tout point x' de r,

$$x' = m_1 x + m_2 \xi \,, \qquad (m_1^2 - m_2^2 = 1) \,.$$

Si δ est la distance xx', on a

$$x' = x \operatorname{ch}\frac{\delta}{R} + \xi \operatorname{sh}\frac{\delta}{R}$$

et le plan ξ', perpendiculaire à r en x' est donné par

$$\xi' = x \operatorname{sh}\frac{\delta}{R} + \xi \operatorname{ch}\frac{\delta}{R} .$$

243.- Parallélisme des droites.- Deux droites r, s coplanaires sont dites sécantes si elles se rencontrent en un point accessible, parallèles si elles se rencontrent en un point de l'absolu, non sécantes si elles se rencontrent en un point inaccessible. Il résulte de ces définitions que par un point (accessible) passent deux parallèles à une droite.

Considérons une droite r déterminée par un point x et le plan ξ qui lui est perpendiculaire en x. Soit y un point n'appartenant pas à r. On peut supposer qu'il appartient à ξ et on désignera par d la distance xy. Si η est le plan perpendiculaire à xy mené par x, on a donc

$$y = x \operatorname{ch}\frac{d}{R} + \eta \operatorname{sh}\frac{d}{R} .$$

Les points du plan $x\xi\eta$ ont des coordonnées de la forme

$$m_1 x + m_2 \xi + m_3 \eta \quad , \quad (m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 = 1) .$$

Les quantités m_1, m_2, m_3 sont les coordonnées projectives des points de ce plan. Les coordonnées du point y sont $\operatorname{ch}\frac{d}{R}$, 0, $\operatorname{sh}\frac{d}{R}$. La droite r a pour équation $m_3 = 0$. La section de l'absolu par le plan $x\xi\eta$ a pour équation

$$m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 = 0 .$$

Les parallèles menées par le point y à la droite r ont pour équations

$$(m_1 - m_2)\, th \frac{d}{R} - m_3 = 0, \qquad (m_1 + m_2)\, th \frac{d}{R} - m_3 = 0.$$

Les coordonnées tangentielles des droites du plan $x\xi\eta$ étant μ_1, μ_2, μ_3 $(\mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2 = -1)$, ces parallèles sont donc données par

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = th \frac{d}{R} : -th \frac{d}{R} : -1, \quad \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = th \frac{d}{R} : th \frac{d}{R} : -1.$$

L'angle ω des deux parallèles vérifie donc la relation

$$\cos \omega = 2\, th^2 \frac{d}{R} - 1.$$

On en déduit

$$\sin^2 \frac{\omega}{2} = 1 - th^2 \frac{d}{R}, \quad \sin^2 \frac{\omega}{2}\, ch^2 \frac{d}{R} = 1.$$

Si l'on convient de prendre pour ω le plus petit des angles fait par les deux parallèles, on a

$$\sin \frac{\omega}{2}\, ch \frac{d}{R} = 1.$$

La droite xy a comme équation $m_2 = 0$ et les angles ω', ω'' que cette droite fait avec les parallèles sont respectivement données par

$$\cos \omega' = th \frac{d}{R}, \quad \cos \omega'' = -th \frac{d}{R}.$$

On en déduit

$$\sin^2 \omega' = \sin^2 \omega'' = \frac{1}{ch^2 \frac{d}{R}} = \sin^2 \frac{\omega}{2}.$$

Par conséquent, la droite xy est la bissectrice de l'angle formée par les deux parallèles menées par y à la droite r.

244.- <u>Élément linéaire de l'espace hyperbolique</u>.- Soient x, x' deux points d'une courbe, s la longueur d'arc sur cette courbe, h la distance curviligne xx', δ la distance rectiligne xx'. On a

$$x' = x + h \frac{dx}{ds} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2x}{ds^2} + \dots$$

$$ch \frac{\delta}{R} = f(x,x) + h\, f\left(x, \frac{dx}{ds}\right) + \frac{h^2}{2} f\left(x, \frac{d^2x}{ds^2}\right) + \dots = 1 - \frac{h^2}{2} f\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dx}{ds}\right) + \dots$$

D'autre part, h et δ étant des infiniments petits équivalents, de

$$ch \frac{\delta}{R} = 1 + \frac{\delta^2}{R^2} + \dots,$$

on déduit

$$ds^2 = R^2 \left(-dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2\right).$$

245.- <u>Les sphères de l'espace hyperbolique</u>.- Soit y un point accessible. On appellera sphère de centre y et de rayon ρ l'ensemble des points accessibles tels que

$$\overline{f(x,y)}^2 = \rho\, f(x,x)\, f(y,y). \qquad (1)$$

C'est donc une quadrique inscrite à l'absolu. Par extension, on appellera sphère l'ensemble des points accessibles dont les coordonnées satisfont à l'équation (1), quel que soit y.

Si y est accessible, on a $f(y,y) = +1$; si δ est la distance des points accessibles x, y, on a

$$\rho = \operatorname{ch}^2 \frac{\delta}{R}.$$

La sphère est appelée endosphère.

Si y est un point inaccessible, on a $f(y,y) = -1$. L'équation $f(x,y) = 0$ représente un plan accessible. Considérons le point

$$x' = x \operatorname{ch} \frac{\delta}{R} + y \operatorname{sh} \frac{\delta}{R}$$

situé à la distance δ de ce plan. On a

$$f(x',y) = f(y,y) \operatorname{sh} \frac{\delta}{R} = -\operatorname{sh} \frac{\delta}{R}.$$

Le lieu du point x' est donc donné par l'équation (1) moyennant $\rho = -\operatorname{sh}^2 \frac{\delta}{R}$. Ce lieu est appelé exosphère ; c'est donc le lieu des points également distants d'un plan.

Reste le cas où y est un point de l'absolu. Nous interprèterons l'équation (1) par un passage à la limite. Si z est un point (inaccessible) de coordonnées $0, z_2, z_3, z_4$, prenons pour y le point de coordonnées $m_0, m_1 z_2, m_1 z_3, m_1 z_4$ et pour ρ, une quantité telle que, pour m_1 tendant vers m_0,

$$\lim \rho \left[m_0^2 - m_1^2 (z_2^2 + z_3^2 + z_4^2) \right] = r,$$

r étant une constante. L'équation (1) devient, à la limite,

$$\overline{f(x,y)}^2 = r f(x,x).$$

Ce lieu est appelé horisphère.

246. - Représentation conforme de l'espace hyperbolique sur un espace euclidien. - Appelons S l'espace projectif contenant l'absolu $f(x,x) = 0$, A la région des points accessibles, S' un espace euclidien rapporté à un trièdre trirectangle $Oxyz$. Posons, ρ étant une constante positive

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2 : 2\rho x : 2\rho y : 2\rho z. \qquad (1)$$

A un plan de S correspond une sphère

$$\lambda_0 (x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2) + 2\rho(\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z) = 0, \qquad (2)$$

de S'. A un point de S' correspond un point de S, mais à un point de S correspondent deux points de S'. La jacobienne du système de sphères (2) est la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2. \qquad (3)$$

On a identiquement, par les formules (1),

$$(x^2 + y^2 + z^2 + \rho^2)^2 (x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2) = (x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2)^2 x_1^2,$$

par conséquent, aux points de l'absolu correspondent, dans S', deux points confondus en un point de la sphère (3) ; aux points de la région A correspondent des points réels et aux points inaccessibles, des points imaginaires.

Les sphères (2) sont orthogonales à la sphère (3), par conséquent, les deux points de S' qui correspondent aux points de A sont l'un dans la région $\mathcal{A}'$, intérieure à la sphère (3), l'autre extérieure à cette sphère. Entre les régions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$, on a donc une correspondance biunivoque qui fait correspondre aux plans des portions de sphères orthogonales à la sphère (3) et aux droites, des portions de cercles orthogonaux à cette sphère.

La sphère (2) correspond au plan

$$h_1 x_1 + h_4 x_2 + h_2 x_3 + h_3 x_4 = 0.$$

Considérons deux plans h et h'. La condition d'orthogonalité cayleyenne de ces plans est $f(h, h') = 0$. La condition d'orthogonalité euclidienne des sphères correspondantes est également $f(h, h') = 0$. Par conséquent, l'angle cayleyen de deux plans est égal à l'angle euclidien des deux sphères correspondantes.

247.- <u>Seconde représentation conforme de l'espace hyperbolique sur l'espace euclidien.</u> - Posons maintenant

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x^2 + y^2 + z^2 + 1 : 2x : 2y : x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

A un plan de S correspond dans S' une sphère

$$h_1 (x^2 + y^2 + z^2 + 1) + 2 h_2 x + 2 h_3 y + h_4 (x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0, \qquad (4)$$

ayant son centre dans le plan $z = 0$. A un point de S' correspond un point de S, mais à un point de S correspondent deux points de S'. On a

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2 (x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2) = 4 z^2 x_1^2,$$

donc aux points de $\mathcal{A}$ correspondent deux points réels, symétriques par rapport au plan $z = 0$. Aux points inaccessibles correspondent des points imaginaires et aux points de l'absolu, correspondent les points de $z = 0$.

Nous avons une correspondance biunivoque entre la région $\mathcal{A}$ et la région de l'espace $z \geq 0$, située au dessus du plan $z = 0$. A un plan correspond une demi-sphère ayant son centre dans $z = 0$ et à une droite, un demi-cercle ayant son centre dans le même plan.

On vérifie aisément que la condition d'orthogonalité cayleyenne de deux plans et la condition d'orthogonalité euclidienne de deux sphères (4), sont identiques. Par suite l'angle cayleyen de deux plans est égal à l'angle euclidien de deux sphères correspondantes.

Note bibliographique.

Les deux principaux ouvrages de Géométrie infinitésimale sont :

Darboux. - Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Paris, 4 vol., 1887-1896.

Bianchi. - Lezioni di Geometria differenziale. Pise, 2 vol., 1902-1903.

Au sujet de la Géométrie projective différentielle, on peut consulter :

Tzitzeica. Géométrie projective différentielle des réseaux. Paris, 1924.

Fubini et Cech. Geometria proiettiva differenziale. Bologne, 2 vol. 1928.

Fubini et Cech. Introduction à la Géométrie projective différentielle. Paris, 1931.

La troisième partie du tome III de l'Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, parue de 1902 à 1927, est consacrée à la Géométrie infinitésimale.

La théorie de la Relativité a donné lieu à de nombreuses recherches de Géométrie infinitésimale, dont il n'a pas été question dans ces leçons. On peut consulter sur ces travaux,

Cartan. Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann. Paris, 1928.