LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie royale de Belgique
Professeur à l'Université de Liège

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

PRÉFACE DE M. RENÉ GARNIER
Professeur de Géométrie supérieure à la Sorbonne

TOME Ier

Transformations birationnelles

Géométrie projective hyperspatiale

PUBLIÉ AVEC LE CONCOURS
DE LA FONDATION UNIVERSITAIRE DE BELGIQUE

SCIENCES ET LETTRES, LIÈGE
1948

PRÉFACE

On sait — et il est devenu banal de le répéter — que toute géométrie est l'étude des propriétés d'un ensemble de points, ou, plutôt, d'éléments, qui sont invariantes par un certain groupe de transformations. Par exemple, pour la géométrie qui nous est le plus familière à tous, les transformations mises en jeu sont les déplacements ; elles laissent invariants les longueurs et les angles, propriété qui joue un rôle essentiel dès les premières pages d'un traité de géométrie élémentaire.

Depuis un siècle la construction de ces géométries s'est réalisée dans les directions les plus diverses, et l'une des plus inattendues sans doute trouve son origine dans une notion due à Riemann : celle d'une classe de courbes birationnellement identiques. A leur sujet, l'illustre géomètre de Göttingen établissait déjà un résultat fondamental : toutes les courbes d'une même classe ont un « caractère » commun, un certain entier, positif ou nul, le genre p. *Riemann insistait plutôt sur la signification topologique ou analytique du genre ; mais il montrait aussi qu'on peut le calculer par un procédé purement géométrique : en cherchant le nombre des intersections mobiles d'une courbe algébrique avec ses premières polaires. Ainsi s'introduisait une notion aussi simple que fondamentale : celle d'une série linéaire appartenant à une courbe algébrique* C, *ou d'un groupe de points découpé sur* C *par une courbe variable dans un système linéaire*

$$\lambda_0 f_0(x, y) + \ldots + \lambda_r f_r(x, y) = 0 ;$$

par une transformation birationnelle de C *en* C′, *une série de* C *se change en une série linéaire de* C′, *possédant le même nombre de points et dépendant du même nombre de paramètres.*

La géométrie sur une courbe algébrique n'est pas autre chose que l'étude des propriétés birationnellement invariantes de la courbe et de ses séries linéaires. A partir d'un mémoire classique de Brill et Nöther, qui constitue son acte de naissance, cette géométrie se développa de la manière la plus rapide et la plus brillante, et un autre problème se posa naturellement *aux chercheurs : étendre la théorie aux surfaces algébriques, les systèmes linéaire de courbes découpées par les surfaces*

$$\lambda_0 f_0(x, y, z) + \ldots + \lambda_r f_r(x, y, z) = 0$$

remplaçant les séries linéaires de points : question singulièrement plus ardue, et qui devait attendre longtemps encore sa première réponse.

Actuellement, l'ensemble des résultats obtenus dans cette double direction constitue l'une des plus belles acquisitions de la Science moderne. Mais, fait remarquable, il n'en existait jusqu'à présent aucune exposition générale, — si l'on excepte certains chapitres importants de la géométrie sur une courbe algébrique. Pour combler une telle lacune, nul n'était plus qualifié que l'éminent mathématicien de Liège, dont l'œuvre scientifique s'étend aux chapitres les plus divers de la géométrie algébrique. Les leçons dont il entreprend la publication doivent former cinq parties ; les deux premières paraissent aujourd'hui ; elles sont consacrées aux transformations birationnelles du plan et de l'espace, ainsi qu'à la géométrie projective hyperspatiale.

Procédant à partir de résultats classiques de la géométrie projective, l'auteur introduit d'abord la transformation quadratique qui, après l'homographie, est la plus simple des transformations birationnelles, et que l'on étudie en géométrie élémentaire dans un cas remarquable, riche en propriétés métriques : l'inversion. La transformation quadratique possède la propriété essentielle de n'être pas biunivoque sans exception : elle change certains points en droites ; ce sont les éléments fondamentaux de la transformation. Cette propriété, singulière au premier abord, s'avère aussitôt comme extrêmement précieuse, car elle permet l'analyse des points multiples d'une courbe algébrique ; elle montre qu'un point multiple A *peut être considéré comme la réunion d'un point multiple proprement dit et d'un nombre fini de points multiples fictifs, situés dans les « domaines » successifs de* A *; de plus, par un nombre fini de transformations quadratiques successives, on peut disperser les points fictifs et changer ainsi une courbe algébrique quelconque en une courbe ne possédant que des points multiples ordinaires ; des opérations ultérieures permettent même de supposer que la transformée finale ne possède que des points doubles. Ce sont là des résultats fondamentaux, qui interviennent constamment en géométrie ; M. Godeaux les établit d'une manière à la fois simple, naturelle et rigoureuse ; il ne fait appel au calcul que dans la stricte mesure nécessaire, et de manière à ne jamais masquer le développement intrinsèque de la démonstration. Cette constatation s'impose dès le début de l'ouvrage, et, à tout moment, son exposé conservera le même caractère : c'est une route royale, qui mène le lecteur aux résul-*

tats fondamentaux avec le minimum d'efforts, et en lui fournissant pourtant l'outil le mieux approprié à la recherche.

Ainsi, apparaissent les notions essentielles de série, de genre, de dimension effective ou virtuelle d'un système, de courbe fondamentale, de système jacobien, ... Les propriétés fondamentales des transformations crémoniennes, le célèbre théorème de Nöther sur leur décomposition en produit de transformations quadratiques sont exposés en toute rigueur ; de nombreux exemples permettent au lecteur de se familiariser avec ces notions fondamentales et le préparent à une étude plus difficile : l'extension de la théorie à l'espace, dans la mesure toutefois où elle est possible.

Il s'agira d'abord de classer les singularités d'une surface algébrique, de distinguer, par exemple, un tacnode d'un point uniplanaire ; ou, encore d'établir les propriétés essentielles des systèmes linéaires et de leurs courbes fondamentales. Ces questions, dont la connaissance est indispensable à quiconque veut lire un mémoire sur la théorie des surfaces, sont traitées avec tous les détails nécessaires, et de manière, notamment, à permettre l'étude des transformations birationnelles de l'espace et de leurs éléments fondamentaux. Le lecteur en trouvera d'importants exemples à la fin de la première partie.

La considération des systèmes linéaires de dimension quelconque conduit naturellement à l'étude systématique des homographies générales, spéciales, cycliques, si importantes — ces dernières surtout — dans l'étude des involutions. Il s'agit là de propriétés classiques, mais exprimées en langage géométrique. Après la généralisation des notions de courbes et de surfaces l'auteur étudie plus spécialement les courbes et les variétés rationnelles des hyperespaces. Cette théorie est d'autant plus attrayante que, par projection hyperspatiale des variétés, on peut en déduire des propriétés nouvelles et imprévues de surfaces et de courbes appartenant à l'espace ordinaire : c'est ainsi que la surface de Steiner se laisse construire et étudier à partir de la surface de Veronese, variété ∞^2, qui est immergée dans un espace à cinq dimensions. La dernière partie du Cours de M. Godeaux se termine par l'étude de la variété de Segre et par l'exposé des propriétés générales des complexes et des congruences algébriques.

On nous permettra de penser tout spécialement à l'étudiant français : pour lui l'ouvrage de M. Lucien Godeaux sera un guide particulièrement précieux : l'aménagement de nos cours classiques de Licence ne laisse qu'une place très réduite à la théorie générale des courbes et des surfaces algébriques, et, pourtant, beaucoup de jeunes chercheurs se sentent attirés par la géométrie... Or souvent ils sont rebutés par la lecture d'ouvrages et de mémoires, écrits en langues étrangères, ou d'un raccord difficile pour des débutants. Qu'ils commencent par *l'*Introduction à la Géométrie supérieure, *de M. Godeaux, conçue dans le même esprit que l'ouvrage actuel, ce sera pour eux une préparation excellente. En la prolongeant par la* Géométrie algébrique *qui, nous le souhaitons, sera bientôt complète, ils auront acquis la formation nécessaire pour lire avec fruit les travaux modernes. Nous espérons donc que dans la patrie de Chasles, de G. Halphen et de G. Humbert les belles leçons de M. Lucien Godeaux trouveront la plus ample et la plus fructueuse diffusion.*

René Garnier.

AVANT-PROPOS

L'ouvrage que nous publions aujourd'hui est le premier d'une série de trois volumes où seront exposées les questions suivantes :

I. Transformations birationnelles du plan et de l'espace.
II. Introduction à la Géométrie projective hyperspatiale.
III. Géométrie sur une courbe algébrique.
IV. Géométrie algébrique du plan.
V. Géométrie sur une surface algébrique.

Ce premier volume est consacré aux deux premières questions et sert en quelque sorte d'introduction aux deux autres.

Dans la première partie, nous avons exposé, successivement pour le plan et pour l'espace, la théorie des transformations quadratiques, la notion de points infiniment voisins d'un point proprement dit et la théorie des points singuliers des courbes, puis des surfaces algébriques. Nous passons ensuite aux transformations birationnelles, dont nous exposons la théorie générale. Nous nous sommes borné à traiter quelques exemples de ces transformations. Nous traitons aussi, en terminant, la représentation plane des surfaces rationnelles de l'espace ordinaire.

Dans la seconde partie, après avoir défini la Géométrie projective hyperspatiale et indiqué la méthode utilisée pour la classification des homographies et des réciprocités, nous introduisons les variétés algébriques. Nous nous sommes plus particulièrement attaché à l'étude des courbes et des surfaces rationnelles. Nous terminons notre exposé par l'étude des variétés de Segre, que l'on rencontre si fréquemment en Géométrie algébrique, et nous donnons quelques détails sur la représentation de l'espace réglé ordinaire par une hyperquadrique de l'espace à cinq dimensions.

Nous nous sommes efforcé d'être bref et nous nous sommes presque toujours borné aux questions qui nous seront utiles dans les volumes suivants. Notre but n'est pas d'écrire un traité ; nous nous sommes proposé de mettre le plus rapidement possible le lecteur à même d'aborder l'étude des mémoires publiés sur les questions traitées.

Le lecteur trouvera peu d'indications bibliographiques. En ce qui concerne les transformations birationnelles, il pourra trouver une bibliographie détaillée dans les deux fascicules du *Mémorial des Sciences mathématiques* que nous avons consacrés à ces questions (1).

En rédigeant les pages qui vont suivre, nous avons fréquemment consulté certains ouvrages traitant des mêmes questions, notamment ceux de Bertini, Darboux, Enriques, Picard et M. Severi (2).

Nous renvoyons, en certains endroits, à l'*Introduction à la Géométrie supérieure* que nous avons publiée récemment (3). Ces renvois sont indiqués dans le texte par la lettre I, suivie du numéro du chapitre ou du paragraphe.

(1) *Les Transformations birationnelles du plan* (Paris, Gauthier-Villars, 1927). *Les Transformations birationnelles de l'espace* (Paris, Gauthier-Villars, 1934).

(2) E. Bertini, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi*, 2e éd. (Messine, Principato, 1923); — E. Bertini, *Complementi di Geometria proiettiva* (Bologne, Zanichelli, 1928); — G. Darboux, *Principes de Géométrie analytique* (Paris, Gauthier-Villars, 1917); — F. Enriques et O. Chisini, *Courbes et fonctions algébriques d'une variable* (Paris, Gauthier-Villars, 1926); — E. Picard et G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier-Villars, 1897 et 1906); — F. Severi, *Vorlesungen über Algebraische Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1921).

(3) Liège, Edit. Sciences et Lettres, 1946.

PREMIÈRE PARTIE

LES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES

CHAPITRE PREMIER

POINTS SINGULIERS DES COURBES PLANES

§ 1. *Transformations quadratiques du plan*

1. Préliminaires. — Considérons, entre deux plans σ, σ', deux réciprocités θ_1, θ_2. A un point P de σ, ces réciprocités font correspondre deux droites p_1', p_2', en général distinctes, se coupant en un point P' que nous ferons correspondre au point P. Inversement, à un point P' de σ', les réciprocités θ_1^{-1}, θ_2^{-1} font correspondre le point P.

La correspondance qui vient d'être établie entre les plans σ, σ' n'est pas sans exceptions. Considérons en effet dans le plan σ' l'homographie

$$H = \theta_1^{-1}\theta_2$$

et supposons qu'elle ne soit pas homologique. En général, elle aura trois points unis O_1', O_2', O_3', sommets d'un triangle. A la droite $O_2'O_3'$, les réciprocités θ_1^{-1}, θ_2^{-1} font correspondre dans σ un même point O_1 et si P coïncide avec O_1, le point homologue P' est indéterminé sur la droite $O_2'O_3'$. De même, il existe dans σ deux points O_2, O_3 auxquels correspondent les droites $O_3'O_1'$ et $O_1'O_2'$. Il est d'autre part évident qu'aux droites O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2, les deux réciprocités θ_1, θ_2 font toutes deux correspondre respectivement les points O_1', O_2', O_3'. Il y a donc dans chacun des plans σ, σ' trois points exceptionnels, dont le correspondant est indéterminé sur une droite.

Lorsque le point P décrit une droite r du plan σ, les droites p_1', p_2' décrivent deux faisceaux projectifs et par conséquent le point P' décrit une conique C' qui passe par les points O_1', O_2', O_3'. En effet, au point de rencontre de r avec la droite O_2O_3 par exemple, correspondent des droites p_1', p_2' passant par O_1'.

Au point d'intersection de deux droites r_1, r_2 correspond le point de rencontre, distinct des points O_1', O_2', O_3', des coniques correspondantes C_1', C_2'. Et aux droites d'un faisceau de σ correspondent les coniques d'un faisceau de σ'. On en conclut que la correspondance entre les points P de σ et P' de σ' pourrait être obtenue en établissant une projectivité entre les droites du plan σ et les coniques circonscrites au triangle

$O_1'O_2'O_3'$. Ces coniques forment un réseau de degré un, c'est-à-dire un réseau dont deux courbes se rencontrent en un seul point variable avec les courbes.

La correspondance qui vient d'être définie est appelée *transformation quadratique*. Il existe d'autres transformations quadratiques qui sont obtenues en supposant que l'homographie H ne possède que deux points unis, ou un seul point uni.

2. Classification des transformations quadratiques. — Considérons, dans le plan σ, un réseau de coniques de degré un, $|C|$. Il existe trois espèces de réseaux de cette sorte :

1° Réseau formé par les coniques passant par les sommets d'un triangle.

2° Réseau formé par les coniques passant par deux points fixes et tangentes en un de ces points à une droite fixe.

3° Réseau formé par les coniques s'osculant en un point fixe.

En rapportant projectivement les coniques d'un de ces réseaux aux droites d'un plan σ', on obtiendra une transformation quadratique et on aura donc trois espèces de ces transformations.

3. Transformations de première espèce. — Soit $|C|$ un réseau de coniques passant par les sommets O_1, O_2, O_3 d'un triangle. En prenant ce triangle comme triangle de référence, l'équation d'une conique du réseau s'écrit

$$\lambda_1 x_2 x_3 + \lambda_2 x_3 x_1 + \lambda_3 x_1 x_2 = 0 .$$

Nous rapporterons projectivement les coniques C aux droites du plan σ' en posant

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2 . \tag{1}$$

On en déduit

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_2' x_3' : x_3' x_1' : x_1' x_2' \tag{2}$$

et aux droites de σ correspondent donc les coniques $|C'|$ d'équation

$$\lambda_1' x_2' x_3' + \lambda_2' x_3' x_1' + \lambda_3' x_1' x_2' = 0 ,$$

circonscrites au triangle de référence $O_1'O_2'O_3'$.

Les deux plans jouent donc des rôles symétriques.

Considérons une droite

$$a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \tag{3}$$

passant par le point O_1 et les coniques C d'équation

$$x_1(a_2 x_2 + a_3 x_3) + \lambda x_2 x_3 = 0 ,$$

touchant cette droite en O_1. A ces coniques correspondent les droites

$$a_2x_3' + a_3x_2' + \lambda x_1' = 0\,,$$

passant par le point

$$x_1' = 0\,, \quad a_2x_3' + a_3x_2' = 0 \tag{4}$$

de la droite $O_2'O_3'$. Nous conviendrons de traduire cette propriété en disant qu'au point de la droite (3) infiniment voisin du point O_1, correspond le point (4) de la droite $x_1' = 0$. On remarquera que lorsque a_2, a_3 varient, cette correspondance est une projectivité.

Le point O_1 est appelé *point fondamental* de la transformation et la droite x_1' est la *droite fondamentale* associée à ce point.

On voit de même qu'aux points fondamentaux O_2, O_3, O_1', O_2', O_3' sont respectivement associées les droites fondamentales

$$x_2' = 0\,, \quad x_3' = 0\,, \quad x_1 = 0\,, \quad x_2 = 0\,, \quad x_3 = 0\,.$$

Aux points infiniment voisins d'un point fondamental correspondent projectivement les points de la droite fondamentale associée.

4. Transformée d'une courbe algébrique. — La courbe Γ, d'équation

$$\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3) = 0$$

d'ordre n, a pour transformée la courbe Γ' d'équation

$$\varphi(x_2'x_3',\ x_3'x_1',\ x_1'x_2') = 0\,,$$

d'ordre $2n$.

Supposons que la courbe Γ ait un point multiple d'ordre s en O_3 et soit

$$x_3^{n-s}\,\varphi_s(x_1,\ x_2) + x_3^{n-s-1}\,\varphi_{s+1}(x_1,\ x_2) + \ldots + \varphi_n(x_1,\ x_2) = 0$$

son équation, où $\varphi_i(x_1,\ x_2)$ est une forme algébrique d'ordre i en x_1, x_2. Sa transformée a pour équation

$$x_3'^{s}\left[\,(x_1'x_2')^{n-s}\,\varphi_s(x_2',\ x_1') + (x_1'x_2')^{n-s-1}x_3'\,\varphi_{s+1}(x_2',\ x_1')\right.$$
$$\left. + \ldots + x_3'^{n-s}\,\varphi_n(x_2',\ x_1')\,\right] = 0\,.$$

On convient de supprimer le facteur $x_3'^{s}$ provenant du passage de la courbe Γ par le point O_1. On considère comme transformée de la courbe Γ la courbe Γ' d'équation

$$(x_1'x_2')^{n-s}\,\varphi_s(x_2',\ x_1') + (x_1'x_2')^{n-s-1}x_3'\,\varphi_{s+1}(x_2',\ x_1')$$
$$+ \ldots + x_3'^{n-s}\,\varphi_n(x_2',\ x_1') = 0\,.$$

Cette courbe est d'ordre $2n - s$; elle a la multiplicité n en O_3' et la multiplicité $n - s$ en chacun des points O_1', O_2'.

En dehors de ces derniers points, elle coupe la droite fondamentale $x_3'=0$ associée au point O_3 aux points

$$x_3'=0\,,\quad \varphi_s(x_2', x_1')=0\,,$$

qui correspondent aux points infiniment voisins de O_3 sur les droites $\varphi_s(x_1, x_2)=0$ tangentes à la courbe Γ en O_3.

De même, aux points de rencontre de la courbe Γ avec la droite fondamentale $x_1=0$ par exemple, en dehors de O_3, correspondent des points infiniment voisins de O_1' appartenant à Γ', ce qui explique que cette courbe a la multiplicité $n-s$ en O_1'.

Plus généralement, *à une courbe* Γ *d'ordre* n *passant* s_1 *fois par* O_1, s_2 *fois par* O_2 *et* s_3 *fois par* O_3, *correspond une courbe* Γ' *d'ordre* $2n-s_1-s_2-s_3$ *ayant en* O_1', O_2', O_3' *respectivement les multiplicités* $n-s_2-s_3$, $n-s_3-s_1$, $n-s_1-s_2$.

Du reste, aux points de rencontre de Γ' et d'une droite, correspondent les points communs à la courbe Γ et à la conique C transformée de la droite, en dehors des points O_1, O_2, O_3.

5. Transformations de seconde espèce. — Considérons un réseau $|C|$ formé de coniques passant par deux points O_1, O_2 et touchant une droite fixe t en O_1, c'est-à-dire un réseau de seconde espèce. Si O_3 est un point de t distinct de O_1, prenons $O_1O_2O_3$ comme triangle de référence. Les courbes C ont alors pour équation

$$\lambda_1 x_2 x_3 + \lambda_2 x_3^2 + \lambda_3 x_1 x_2 = 0\,.$$

Rapportons projectivement les coniques C aux droites de σ' en posant

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2x_3 : x_3^2 : x_1x_2\,. \tag{1}$$

On en déduit

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_2'x_3' : x_1'^2 : x_1'x_2'\,. \tag{2}$$

Aux droites de σ correspondent donc les coniques C' d'équation

$$\lambda_1' x_2' x_3' + \lambda_2' x_1'^2 + \lambda_3' x_1' x_2' = 0\,,$$

passant par les points O_2', O_3' en touchant en O_3' la droite $x_2'=0$. Le réseau $|C'|$ est donc également de seconde espèce et la transformation obtenue est appelée transformation de seconde espèce.

Aux coniques C d'équation

$$x_2(a_1x_1 + a_3x_3) + \lambda x_3^2 = 0\,,$$

tangentes en O_2 à la droite

$$a_1x_1 + a_3x_3 = 0\,,$$

correspondent les droites

$$a_1x_3' + a_3x_1' + \lambda x_2' = 0 ,$$

passant par le point

$$x_2' = 0 , \quad a_1x_3' + a_3x_1' = 0 .$$

Comme dans les transformations de première espèce, *aux points infiniment voisins du point fondamental* O_2 *correspondent, projectivement, les points de la droite fondamentale* $x_2' = 0$. On établirait de même qu'aux points infiniment voisins du point fondamental O_2', correspondent les points de la droite fondamentale $x_2 = 0$.

Considérons maintenant la courbe

$$x_1^{n-1}(a_2x_2 + a_3x_3) + x_1^{n-2}\varphi_2(x_1, x_2) + \ldots + \varphi_n(x_1, x_2) = 0 ,$$

tangente en O_1 à la droite

$$a_2x_2 + a_3x_3 = 0 , \tag{3}$$

distincte de la droite $x_2 = 0$ $(a_3 \neq 0)$. Il lui correspond la courbe

$$(x_2'x_3')^{n-1}(a_2x_1' + a_3x_2') + (x_2'x_3')^{n-2}\, x_1'\varphi_2(x_1', x_2')$$
$$+ \ldots + x_1'^{n-1}\varphi_n(x_1', x_2') = 0 ,$$

tangente en O_3' à la droite

$$a_2x_1' + a_3x_2' = 0 . \tag{4}$$

D'autre part, aux points de la droite (3) correspondent ceux de la droite (4). Au point infiniment voisin de O_1, commun à la courbe donnée et à la droite (3), correspond donc le point infiniment voisin de O_3' commun à la courbe transformée et à la droite (4). Lorsque a_2, a_3 varient, les droites (3) et (4) engendrent des faisceaux projectifs de sommets O_1, O_3'. Donc : *aux points infiniment voisins du point fondamental* O_1 *correspondent, projectivement, les points infiniment voisins du point fondamental* O_3'.

Considérons enfin un faisceau de coniques C,

$$a_2x_3^2 + a_3x_1x_2 + \lambda x_2x_3 = 0 , \tag{5}$$

osculatrices en O_1. Il leur correspond les droites

$$a_2x_2' + a_3x_3' + \lambda x_1' = 0 ,$$

passant par le point

$$x_1' = 0 , \quad a_2x_2' + a_3x_3' = 0 . \tag{6}$$

Appelons O_{11} le point infiniment voisin de O_1 sur la droite $x_2 = 0$. D'après nos conventions de langage, les coniques C passent par O_{11}. Convenons de dire que les coniques (5) osculatrices en O_1, ont en commun les points O_1, O_{11} et un point infiniment voisin de O_{11}. Moyennant cette nouvelle convention de langage, nous pouvons dire qu'*aux points infiniment voisins de* O_{11} *correspondent les points de la droite fondamentale* $x_1'=0$.

On établit de même que si O_{33}' est le point infiniment voisin de O_3' sur la droite $x_2'=0$, aux points infiniment voisins de O_{33}' correspondent les points de la droite $x_3=0$.

6. Transformation d'une courbe algébrique. — Considérons une courbe Γ d'ordre n ayant la multiplicité s en O_1, s' des tangentes étant confondues avec la droite $x_2=0$ $(s' \leqslant s)$. L'équation de la courbe Γ est de la forme

$$x_1^{n-s} x_2^{s'} \varphi_{s-s'}(x_2, x_3) + x_1^{n-s-1} \varphi_{s+1}(x_2, x_3) + \ldots + \varphi_n(x_2, x_3) = 0 .$$

Sa transformée Γ' a pour équation

$$(x_2' x_3')^{n-s} x_1'^{s'-1} \varphi_{s-s'}(x_1', x_2') + (x_2' x_3')^{n-s-1} \varphi_{s+1}(x_1', x_2') + \ldots + x_1'^{n-s-1} \varphi_n(x_1', x_2') = 0.$$

La courbe Γ' est d'ordre $2n-s-1$; elle a la multiplicité $n-s-1$ en O_2', la multiplicité $n-1$ en O_3' et en ce point $n-s$ des tangentes à Γ' sont confondues avec $x_2'=0$, $s'-1$ avec $x_1'=0$, tandis que les $s-s'$ tangentes restantes sont distinctes des droites précédentes.

La droite $x_2=0$ coupe la courbe Γ en $s+1$ points confondus en O_1. Aux $n-s-1$ points de rencontre de cette droite avec la courbe correspondent $n-s-1$ points infiniment voisins de O_2', situés sur les tangentes à la courbe en ce point. Si le point O_1 absorbait plus de $s+1$ points d'intersection de $x_2=0$ avec Γ, ce résultat devrait être modifié.

Lorsque la courbe Γ a la multiplicité s_2 en O_2, la courbe Γ' a l'ordre $2n-s-s_2-1$ et la droite $x_2'=0$ doit être défalquée s_2 fois de la courbe Γ' obtenue plus haut.

Supposons maintenant que la courbe Γ d'ordre n ait en O_1 la multiplicité s_1, en O_2 la multiplicité s_2 ; supposons en outre qu'en O_1, s_1' des tangentes à la courbe soit confondue avec $x_2=0$ et que cette droite coupe la courbe en s_1+s_1'' points confondus en O_1 $(s_1'' \leqslant s_1' \leqslant s_1)$. Une conique C coupe Γ en $2n-s_1-s_1''-s_2$ points en dehors des points fondamentaux et la transformée Γ' de Γ a donc l'ordre $2n-s_1-s_1''-s_2$.

La droite $x_2=0$ coupe Γ en $n-s_1-s_1''$ points en dehors de O_1 ; à ces points correspondent des points infiniment voisins de O_2' et ce point est donc multiple d'ordre $n-s_1-s_1''$ pour Γ'.

La courbe Γ possède s_1-s_1' points infiniment voisins de O_1 non situés sur $x_2=0$, donc la courbe Γ' possède en O_3' s_1-s_1' tangentes distinctes de $x_2'=0$ et de $x_1'=0$. Une droite passant par O_1 coupe Γ en $n-s_1$ points en dehors de O_1 ; sa transformée coupe donc Γ' en $n-s_1$ points en dehors de O_3' et ce point est multiple d'ordre $n-s_1''-s_2$ pour la courbe Γ'.

La droite $x_3=0$ coupe Γ en $n-s_1-s_2$ points en dehors de O_1, O_2, donc Γ' possède autant de points infiniment voisins de O_{33}'. En d'autres termes, il y a $n-s_1-s_2$ coniques C' osculant la courbe Γ' en O_3'. Il y a par conséquent $n-s_1-s_2$ tangentes à la courbe Γ' en O_3' confondues avec la droite $x_2'=0$. Par conséquent, il y a $s_1'-s_1''$ tangentes à la courbe Γ' en O_3' confondues avec la droite $x_1'=0$. Enfin, le point O_2 étant multiple d'ordre s_2 pour Γ, la droite $x_2'=0$ coupe Γ' en s_2 points en dehors de O_3' ; cette droite coupe donc Γ' en $2n-s_1-s_1''-2s_2$ points confondus en O_3'.

7. Transformations de troisième espèce. — Considérons un réseau $|C|$ formé par les coniques C s'osculant en O_3. Choisissons un triangle de référence $O_1O_2O_3$ dont le sommet O_2 appartient à la tangente aux coniques C en O_3. Ces coniques ont pour équation

$$\lambda_1 x_1 x_2 + \lambda_2 x_1^2 + \lambda_3 (x_2^2 - x_1 x_3) = 0 .$$

Rapportons projectivement les coniques C aux droites du plan σ' en posant

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 x_2 : x_1^2 : x_2^2 - x_1 x_3 . \tag{1}$$

On déduit de ces équations

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_2'^2 : x_1' x_2' : x_1'^2 - x_2' x_3' \tag{2}$$

et par conséquent aux droites du plan σ correspondent dans σ' les coniques C',

$$\lambda_1' x_2'^2 + \lambda_2' x_1' x_2' + \lambda_3' (x_1'^2 - x_2' x_3') = 0 ,$$

ayant en O_3' un contact du second ordre, la tangente en ce point étant $x_2'=0$.

Considérons la courbe

$$x_3^{n-1}(a_1 x_1 + a_2 x_2) + x_3^{n-2} \varphi_2(x_1, x_2) + \dots + \varphi_n(x_1, x_2) = 0 ,$$

tangente en O_3 à la droite

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 , \tag{3}$$

distincte de $x_1=0$ $(a_2 \neq 0)$. La courbe a pour transformée une courbe d'ordre $2n-1$,

$$(x_1'^2 - x_2' x_3')^{n-1}(a_1 x_2' + a_2 x_1') + (x_1'^2 - x_2' x_3')^{n-2} x_1' \varphi_2(x_2', x_1') + \dots + x_1'^{n-1} \varphi_n(x_2', x_1') = 0 ,$$

tangente en O_3 à la droite

$$a_1 x_2' + a_2 x_1' = 0 . \tag{4}$$

Aux points de la droite (3) correspondent ceux de la droite (4), par conséquent au point infiniment voisin de O_3 situé sur la courbe donnée et sur la droite (3) correspond le point infiniment voisin de O_3' de la courbe transformée situé sur la droite (4). Lorsque a_1, a_2 varient, les droites (3) et (4) engendrent des faisceaux projectifs, par conséquent : *aux points infiniment voisins de* O_3 *correspondent projectivement les points infiniment voisins de* O_3'.

Considérons maintenant le faisceau de coniques

$$x_3x_1 + a_0x_1^2 + a_1x_1x_2 + a_2x_2^2 + \lambda(b_0x_1 + b_1x_2)x_1 = 0\,,$$

tangentes en O_3 à la droite $x_1 = 0$ et ayant en ce point un contact du second ordre. Ce faisceau n'appartient pas au réseau des courbes C. Il lui correspond le faisceau

$$x_1'^2 - x_2'x_3' + a_0x_2'^2 + a_1x_1'x_2' + a_2x_1'^2 \\ + \lambda(b_0x_2' + b_1x_1')x_2' = 0\,,$$

formé de coniques ayant un contact du second ordre en O_3', la tangente commune étant $x_2' = 0$. Si nous désignons par O_{31} le point infiniment voisin de O_3 sur la droite $x_1 = 0$ et par O_{32}' le point infiniment voisin de O_3' sur $x_2' = 0$, nous pouvons écrire qu'*aux points infiniment voisins de* O_{31} *correspondent projectivement les points infiniment voisins de* O_{32}'.

Considérons enfin le faisceau de coniques C, ayant un contact du troisième ordre en O_3, d'équation

$$a_1x_1x_2 + a_2x_1^2 + a_3(x_2^2 - x_1x_3) + \lambda x_1^2 = 0\,. \tag{5}$$

Il lui correspond le faisceau de droites

$$a_1x_1' + a_2x_2' + a_3x_3' + \lambda x_2' = 0\,,$$

de sommet

$$x_2' = 0\,, \quad a_1x_1' + a_3x_3' = 0\,. \tag{6}$$

Si nous désignons par O_{311} le point infiniment voisin de O_{31} appartenant à toutes les coniques C, nous voyons qu'au point infiniment voisin de O_{311} commun à toutes les coniques (5) correspond le point (6). *Aux points infiniment voisins de* O_{311} *correspondent les points de la droite fondamentale* $x_2' = 0$.

On démontrerait de même qu'aux points infiniment voisins du point O'_{322}, infiniment voisin de O'_{32} et commun à toutes les coniques C′, correspondent les points de la droite fondamentale $x_1 = 0$.

8. Transformée d'une courbe algébrique. — Soit Γ une courbe d'ordre n ayant la multiplicité s en O_2. Supposons que la droite $x_1 = 0$ soit une des tangentes à Γ en O_3, coupant cette courbe en $s + s_1$ points confondus en O_3. Supposons en outre que les coniques C coupent Γ en $s + s_1 + s_2$ points confondus en O_3.

Une conique C rencontre Γ en $2n - s - s_1 - s_2$ points variables, donc la courbe Γ' transformée de Γ est d'ordre $2n - s - s_1 - s_2$.

Une droite passant par O_3 coupe encore Γ en $n - s$ points en dehors de O_3, donc la droite homologue, qui passe par O_3', coupe encore Γ' en $n - s$ points en dehors de O_3' et ce point est multiple d'ordre $n - s_1 - s_2$ pour Γ'.

Une conique γ passant par O_3' et y touchant la droite $x_1 = 0$ mais n'appartenant pas au réseau $|C|$, a pour transformée une conique γ' passant par O_3' et y touchant la droite $x_2' = 0$. La courbe γ rencontre Γ en $2n - s - s_1$ points en dehors de O_3, donc γ' et par suite la droite $x_2' = 0$ coupe Γ' en $2n - s - s_1$ points en dehors de O_3' et par conséquent en $2n - s - s_1 - 2s_2$ points confondus en O_3'.

Enfin, une conique C' coupe Γ' en n points en dehors de O_3' et en $3n - 2s - 2s_2$ points confondus en O_3'.

9. Remarque. — Soient σ, σ', σ'' trois plans, T une transformation quadratique entre σ et σ', T' une transformation quadratique entre σ' et σ''. A un point P de σ, T faisait correspondre un point P' de σ' et à ce point, T' fait correspondre un point P''. Il existe donc une transformation biunivoque θ entre les plans σ, σ'', faisant correspondre P'' à P. La transformation θ est appelée produit de la transformation T par T' ; nous écrirons $\theta = TT'$. Observons que θ n'est pas en général une transformation quadratique.

Supposons que T soit une transformation quadratique de seconde espèce, faisant correspondre aux droites de σ des coniques C' de σ' passant par deux points A_1', A_2', touchant une droite a_1' en A_1'. Soit A_3' un point de σ' n'appartenant à aucune des droites a_1', $A_1'A_2'$. Rapportons projectivement les coniques C_1' passant par A_1', A_2', A_3' aux droites de σ''. Nous définissons ainsi une transformation quadratique T' entre σ', σ''. Aux droites de σ', T' fait correspondre des coniques C_1'' passant par trois points A_1'', A_2'', A_3'' de σ''. Aux coniques C', T' fait correspondre des coniques C'' passant par A_1'', A_2'' et par un point A'' de la droite $A_2''A_3''$. Il en résulte qu'à une droite de σ, $\theta = TT'$ fait correspondre une conique C'' et θ est donc une transformation quadratique de première espèce. On a

$$\theta = TT', \qquad T = \theta T'^{-1},$$

donc *une transformation quadratique de seconde espèce est le produit de deux transformations quadratiques de première espèce.*

Supposons maintenant que T soit une transformation quadratique de troisième espèce. Aux droites de σ correspondent des coniques C' s'osculant en un point A_1', ayant donc une tangente fixe a_1' en A_1'. Pour définir T', rapportons projectivement aux droites de σ'' les coniques touchant a_1' en A_1' et passant par un second point A_2' n'appartenant pas à a_1'. T' est donc une transformation de seconde espèce ; elle fait correspondre aux droites de σ' des coniques C_1'' de σ'' passant par deux points A_1'', A_2'' et touchant une droite a_1'' en A_1''. Aux coniques C', T' fait correspondre des coniques C'' passant par A_1'', touchant a_1'' en ce point et passant par un second point A_2''' de $A_1''A_2''$. Par suite, $\theta = TT'$ est une transformation quadratique de seconde espèce.

Une transformation quadratique de troisième espèce est le produit de deux transformations quadratiques de seconde espèce et par conséquent le produit de transformations quadratiques de première espèce.

§ 2. *Concept de points infiniment voisins*

10. Définition. — Nous avons déjà à plusieurs reprises utilisé l'expression « point infiniment voisin » ; c'est une convention de langage que nous allons préciser et étendre.

Considérons une courbe C ayant un point ordinaire en M et la tangente m à cette courbe en ce point. En général, la courbe C et la droite m ont deux points d'intersection confondus en M. Nous conviendrons d'exprimer cette propriété en disant que la courbe C et la droite m ont en commun le point M et un point *fictif*, infiniment voisin de M. Lorsque la courbe C varie en passant toujours simplement par M, la tangente m décrit le faisceau de droites de sommet M et on obtient un ensemble de points fictifs infiniment voisins de M que l'on appelle le *domaine du premier ordre du point* M.

D'après cette convention de langage, deux courbes tangentes en M ont en commun un point du domaine du premier ordre de M. Une courbe ayant en M la multiplicité s et des tangentes distinctes, contient s points du domaine du premier ordre de M.

Soit T une transformation quadratique dont M soit un point fondamental en lequel les coniques du réseau n'ont pas une tangente fixe. T est donc une transformation quadratique de première ou de seconde espèce. Soit m' la droite fondamentale associée au point M. Aux points fictifs du domaine du premier ordre de M, T fait correspondre les points (proprement dits) de la droite m'. A deux courbes C_1, C_2 ayant un contact du premier ordre au point M, correspondent deux courbes C_1', C_2' se coupant au point de m' homologue du point infiniment voisin de M commun aux courbes C_1, C_2.

Considérons un point M' de m' et son domaine du premier ordre. Aux points fictifs de ce domaine, T^{-1} fait correspondre des points fictifs infiniment voisins du point fictif M_1 infiniment voisin de M, homologue de M'. Ces nouveaux points fictifs seront dits appartenir au *domaine du second ordre de* M. Le domaine du second ordre de M sera obtenu en faisant varier M' sur m'.

De proche en proche, on définira ensuite les domaines du troisième, du quatrième, ... ordres du point M. Aux points du domaine d'ordre n du point M', T^{-1} fait correspondre des points du domaine d'ordre $n+1$ du point M.

11. Equations cartésiennes d'une transformation quadratique. — Considérons les paraboles passant par l'origine O de deux axes cartésiens Ox, Oy et tangentes à la droite de l'infini au point à l'infini sur Oy (c'est-à-dire ayant Oy comme diamètre). Elles ont pour équation

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y + \lambda_3 x = 0$$

et forment un réseau de degré 1. Rapportons projectivement ces paraboles aux droites d'un plan rapporté à deux axes O'X, O'Y, en posant

$$X : Y : 1 = x^2 : y : x ,$$

c'est-à-dire en posant

$$X = x , \qquad xY = y ,$$

ou encore

$$x = X , \qquad y = XY .$$

Nous obtenons une transformation quadratique de seconde espèce, qui fait correspondre aux droites du premier plan les hyperboles

$$\mu_1 X + \mu_2 XY + \mu_3 = 0 ,$$

ayant O'Y comme asymptote et O'X comme direction asymptotique.

Aux points du domaine du premier ordre de O correspondent les points de la droite O'Y. En particulier, au point infiniment voisin de O situé sur Ox correspond le point O'. Considérons en effet une courbe algébrique C passant simplement par O en y touchant Ox,

$$y + \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \dots + \varphi_n(x, y) = 0 .$$

Sa transformation a pour équation

$$Y + X\varphi_2(1, Y) + X^2\varphi_3(1, Y) + \dots + X^{n-1}\varphi_n(1, Y) = 0 ;$$

cette courbe passe par O' et y a pour tangente la droite

$$Y + X\varphi_2(1, 0) = 0 .$$

12. Théorème. — *Si deux courbes ont en un point simple un contact d'ordre* n, *elles ont en commun* n *points infiniment voisins successifs de ce point.*

Soient

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0 \tag{1}$$

les équations de deux courbes ayant un contact d'ordre n en O. Pour $x = 0$, les valeurs

$$y_0 = 0, \quad y_0', \quad y_0'', \ \ldots, \ y_0^{(n)}$$

des dérivées de y par rapport à x tirées des équations (1) sont respectivement égales, tandis que les valeurs de $y_0^{(n+1)}$ sont différentes.

Aux courbes (1), la transformation quadratique $x = X$, $y = XY$ font correspondre les courbes

$$\varphi(X, XY) = 0, \qquad \psi(X, XY) = 0 \tag{2}$$

équation où l'on peut mettre X en évidence. Nous supprimerons ce facteur X. On a

$$y' = Y + xY', \quad y'' = 2\,Y' + xY'', \ \ldots, \ y^{(n)} = nY^{(n-1)} + xY^{(n)},$$
$$y^{(n+1)} = (n+1)\,Y^{(n)} + xY^{(n+1)}.$$

Pour $x = X = 0$, les quantités Y_0, Y_0', ..., $Y_0^{(n-1)}$ tirées des équations précédentes sont égales, tandis que les quantités $Y_0^{(n)}$ sont distinctes. Les courbes (2) ont donc un contact d'ordre $n-1$ au point XO, Yy_0'.

Opérons sur les courbes (2) comme nous l'avons fait sur les courbes (1), et ainsi de suite. Après n transformations quadratiques, nous parviendrons à deux courbes qui se coupent sans se toucher. Cela signifie que les courbes (1) ont en commun le point O, un point du domaine du premier ordre de O, ..., un point du domaine d'ordre n de O, mais ont des points distincts dans le domaine d'ordre $n+1$ de O. On traduit cette propriété en disant que les courbes (1) ont en commun le point O et n points infiniment voisins successifs de O, le qualificatif successif indiquant qu'il s'agit de points appartenant à des domaines successifs du point O.

§ 3. *Composition des points singuliers d'une courbe algébrique*

13. Points multiples successifs d'une courbe. — Soit C une courbe algébrique d'ordre n ayant en O un point multiple d'ordre s et τ tangentes distinctes comptant respectivement pour σ_0, σ_1, ..., σ_τ tangentes. On a donc

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots \sigma_\tau = s.$$

Considérons une transformation quadratique T ayant O comme point fondamental et faisant correspondre au domaine du premier ordre de O les points d'une droite a'. À C, T fait correspondre une courbe C'. Désignons par O_1', O_2', ..., O_τ' les points de a' qui correspondent aux points du domaine du premier ordre de O situés sur les tangentes à la courbe C. En dehors des points fondamentaux de T situés sur la droite a', la courbe C' ne peut rencontrer cette droite qu'aux points O_1', O_2', ..., O_τ' et ces points absorbent respectivement σ_1, σ_2, ..., σ_τ intersections.

Soient s_1, s_2, ..., s_τ les multiplicités respectives de O_1', O_2', ..., O_τ' pour la courbe C'. On a

$$s_1 \leqslant \sigma_1, \; s_2 \leqslant \sigma_2, \; \dots \; s_\tau \leqslant \sigma_\tau .$$

Désignons par O_1, O_2, ..., O_τ les points (fictifs) du domaine du premier ordre de O que T^{-1} fait correspondre à O_1', O_2', ..., O_τ'. On dira que la courbe C possède, dans τ directions différentes, τ points infiniment voisins de O respectivement multiples d'ordres s_1, s_2, ..., s_τ.

Recommençons pour chacun des points O_1', O_2', ..., O_τ', le raisonnement qui vient d'être fait pour O. Supposons par exemple que la courbe C' possède τ_i points infiniment voisins de O_i', dans des directions différentes, respectivement multiples d'ordre s_{i1}, s_{i2}, ... pour la courbe. A ces points, T^{-1} fait correspondre τ_i points (fictifs) O_{i1}, O_{i2}, ... du domaine du second ordre de O, infiniment voisins de O_i, que l'on dira être multiples d'ordres s_{i1}, s_{i2}, ...

Et ainsi de suite.

On démontrera plus loin qu'il existe un domaine d'ordre fini de O dans lequel la courbe C n'a plus que des points simples.

14. Exemples. — Points de rebroussement d'une courbe plane. — Soit C une courbe plane ayant un point double en O. Si la courbe a des tangentes distinctes en ce point, elle contient deux points simples infiniment voisins de O, dans des directions différentes.

Supposons que C possède un point de rebroussement en O et prenons la tangente de rebroussement pour axe Ox. L'équation de C s'écrit

$$y^2 + \varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) + \dots = 0 . \qquad (1)$$

Appliquons la transformation $x = x'$, $y = x'y'$. A la courbe C correspond une courbe C' dont l'équation est (nous écrivons, pour plus de simplicité, x et y au lieu de x', y')

$$y^2 + x\varphi_3(1, y) + x^2\varphi_4(1, y) + \dots = 0 . \qquad (2)$$

Cette courbe possède en général un point simple en O', la tangente en ce point étant la droite fondamentale $x = 0$. Le point O est alors un point de rebroussement de première espèce ou cuspide. La courbe C a, en O, deux tangentes confondues et un point simple infiniment voisin de O sur ces tangentes. La tangente de rebroussement en O coupe la courbe C en trois points confondus en O.

La condition nécessaire et suffisante pour que le point O′ soit double pour C′ est que l'on ait $\varphi_3(1, 0) = 0$, c'est-à-dire que le polynome $\varphi_3(x, y)$ ne contienne pas de terme en x^3. Posons

$$\varphi_3(x, y) \equiv y\varphi_2(x, y) .$$

L'équation (2) devient

$$y^2 + xy\varphi_2(1, y) + x^2\varphi_4(1, y) + \ldots = 0 . \tag{3}$$

Les tangentes à C′ en O′ sont données par

$$y^2 + xy\varphi_2(1, 0) + x^2\varphi_4(1, 0) = 0 .$$

Si ces tangentes sont distinctes, le point O est un point de rebroussement de seconde espèce ou tacnode pour la courbe C. Celle-ci possède un point double ordinaire infiniment voisin de O (sur Ox). La tangente de rebroussement O coupe C en quatre points confondus en O et cette condition est suffisante pour que le point O soit un tacnode.

Le point O′ peut à son tour être un cuspide ou un tacnode pour la courbe C′. On analysera cette singularité en opérant une nouvelle transformation quadratique.

Posons

$$\varphi_3(x, y) = y(a_0y^2 + a_1yx + a_2x^2) ,$$
$$\varphi_4(x, y) = b_0y^4 + b_1y^3x + b_2y^2x^2 + b_3yx^3 + b_4x^4 .$$

La condition pour que O′ soit un point de rebroussement pour C′ se traduit par

$$a_2^2 - 4\,b_4 = 0$$

et l'équation (3) s'écrit

$$\begin{aligned}(2\,y + a_2x)^2 + 4\,xy^2(a_0y + a_1)\\ + 4\,x^2y(b_0y^3 + b_1y^2 + b_2y + b_3) + \ldots = 0 .\end{aligned} \tag{4}$$

Opérons sur cette courbe la transformation $x = x'$, $y = x'y'$. On obtient la courbe

$$\begin{aligned}(2\,y + a_2x)^2 + 4\,xy^2(a_0xy + a_1)\\ 4\,xy(b_0x^3y^3 + b_1x^2y^2 + b_2xy + b_3) + \ldots = 0 .\end{aligned} \tag{5}$$

Au point de C′ infiniment voisin de O′ correspond le point $x = 0$, $y = -\frac{1}{2}$. En général, la courbe (5) touche en ce point la droite fondamentale $x = 0$ et la courbe C′ possède un cuspide en O′. Pour que ce point soit double pour la courbe (5), on doit avoir $a_1a_2 - 2b_3 = 0$. Le point O′ est alors un tacnode pour la courbe C′. On pourra alors, par une nouvelle transformation quadratique, étudier ce point double de la courbe (5), et ainsi de suite.

On voit qu'une courbe algébrique peut posséder *un point double auquel sont infiniment voisins successifs* n *points doubles et, dans le domaine d'ordre* n+1, *soit un point simple, soit deux points simples.*

Remarque. — On peut, avant d'opérer la transformation sur la courbe (4), faire un changement de coordonnées en prenant, pour nouvel axe des x, la tangente

$$2y + a_2x = 0$$

au point O′ à la courbe C′. Cela revient à poser

$$x = x_1, \quad 2y + a_2x = y_1 .$$

15. Exemple d'un point quadruple. — Considérons la courbe

$$y^4 + y^2\varphi_3(x, y) + \varphi_6(x, y) + \ldots = 0 . \tag{1}$$

Elle possède un point quadruple à l'origine, les quatre tangentes étant confondues avec la droite $y = 0$.

Effectuons la transformation quadratique $x = x'$, $y = x'y'$. La courbe (1) a pour homologue la courbe

$$y^4 + xy^2\varphi_3(1, y) + x^2\varphi_6(1, y) + \ldots = 0 . \tag{2}$$

Cette courbe possède un point double en O′, les deux tangentes étant confondues avec la droite $x = 0$. Nous savons que les quatre tangentes à la courbe (1) en O étant confondues, la droite fondamentale $x = 0$ doit rencontrer la courbe (2) en quatre points confondus en O′. Si d'ailleurs on fait $x = 0$ dans l'équation (2), elle se réduit à $y^4 = 0$. Le point O′ étant double, recherchons la singularité de la courbe (2) au point infiniment voisin de O′ sur la droite $x = 0$. Dans ce but, changeons les noms des axes ; l'équation (2) s'écrit

$$x^4 + x^2y\varphi_3(1, x) + y^2\varphi_6(1, x) + \ldots = 0 . \tag{2'}$$

Effectuons ensuite la transformation $x = x'$, $y = x'y'$. La courbe (2′) se transforme en

$$x^2 + xy\varphi_3(1, x) + y^2\varphi_6(1, x) + \ldots = 0 . \tag{3}$$

Cette courbe possède un point double à l'origine, les tangentes étant

$$x^2 + xy\varphi_3(1, 0) + y^2\varphi_6(1, 0) = 0$$

et par conséquent distinctes.

La courbe (1) possède donc en O un point quadruple, auquel sont infiniment voisins successifs deux points doubles dont le dernier est ordinaire.

16. Intersections de deux courbes absorbées en un point multiple commun. — Soient C, D deux courbes sans partie commune, ayant en un point O les multiplicités respectives r, s. Supposons que dans le domaine du premier ordre de O, les courbes C, D aient en commun un certain nombre de points multiples d'ordres $r_1, r_2, \ldots$ pour C, d'ordres $s_1, s_2, \ldots$ pour D ; dans le domaine du second ordre de O, des points communs multiples d'ordres $r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{21}, \ldots$ pour C, d'ordres $s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{21}, \ldots$ pour D, etc.

Le nombre des intersections des deux courbes C, D absorbées en O est

$$I = rs + I_1,$$

I_1 étant supérieur ou égal à zéro et précisément supérieur à zéro si quelques-uns des nombres $r_1 s_1$, $r_2 s_2$, ... ne sont pas nuls. Alors en effet les courbes ont des tangentes communes en O.

Opérons une transformation quadratique de première espèce ayant O comme point fondamental et soit a' la droite fondamentale associée à O. Aux points du domaine du premier ordre de O, communs aux courbes C, D, correspondent des points O_1', O_2', ... de a', distincts des points fondamentaux de la transformation appartenant à a'. Ces points sont multiples d'ordres $r_1, r_2, \ldots$ pour la transformée C' de C et d'ordres s_1, s_2, ... pour la transformée D' de D.

Soit C_1 une courbe de même ordre que C, ayant en O la multiplicité r et des tangentes distinctes, distinctes des tangentes en O à C. Les courbes C, C_1 déterminent un faisceau dont la courbe générale $\overline{C}$ a en O un point multiple d'ordre r, à tangentes variables. La courbe $\overline{C}$ coupe D en rs points confondus en O. Lorsque $\overline{C}$ tend vers C, I_1 points communs à $\overline{C}$ et à D, en dehors des rs points déjà mentionnés, tendent vers O. Par conséquent I_1 points d'intersection de la transformée C' de C et de D' tendent vers O_1', O_2', ... On a donc

$$I_1 = r_1 s_1 + r_2 s_2 + \ldots + I_2,$$

avec $I_2 \geqslant 0$.

Opérons une première transformation quadratique de première espèce ayant O_1' comme point fondamental de manière à transformer les points du domaine du premier ordre de O_1' en des points proprement dits. Aux points O_2', ... correspondront des points singuliers de même structure de la courbe transformée. Opérons une seconde transformation quadratique de première espèce ayant comme point fondamental la transformée de O_2'. Les points du domaine du premier ordre de O_2' seront transformés en des points proprement dits, tandis que les points homologues des points du domaine du premier ordre de O_1', appartenant à C', D' n'auront été modifiés qu'en position. En continuant l'opération, on transformera finalement C', D' en des courbes C'', D'' pour lesquelles les points des domaines du premier ordre de O_1', O_2', ... appartenant à C', D' seront des points proprement dits de C'', D''. Répétant alors le raisonnement fait pour C', D', on aura

$$I_2 = r_{11}s_{11} + r_{12}s_{12} + \ldots + r_{21}s_{21} + \ldots + I_3 ,$$

avec $I_3 \geqslant 0$.

En continuant de même, on aura finalement

$$I = rs + \Sigma r_i s_i + \Sigma r_{ij} s_{ij} + \Sigma r_{ijk} s_{ijk} + \ldots$$

Le second membre de cette égalité comprend un nombre fini de termes, car I est inférieur au produit des ordres des courbes C, D et est par conséquent fini.

Dans le calcul du nombre de points d'intersection de deux courbes absorbés en un point singulier pour ces deux courbes, les points infiniment voisins doivent être considérés comme des points proprement dits.

17. Problème. — D'après ce que nous avons indiqué plus haut (n° 13), un point singulier d'une courbe algébrique C peut être considéré comme l'ensemble d'un point multiple proprement dit et d'un certain nombre de points fictifs multiples, situés dans les domaines d'ordres successifs du point proprement dit. Un problème se pose : Etant donné un point singulier O d'une courbe C, existe-t-il un nombre fini p tel que dans le domaine d'ordre p du point O, la courbe ne possède plus que des points simples ? C'est ce problème que nous allons résoudre par l'affirmative, en démontrant que la polaire d'un point par rapport à la courbe C passe au moins $s-1$ fois par un point multiple d'ordre s, qu'il soit proprement dit ou fictif. Comme le nombre des points d'intersection d'une courbe et de sa polaire est fini, la solution du problème posé en résultera.

18. Lemme. — *Dans une projectivité entre deux ponctuelles, le groupe polaire d'un point par rapport à un groupe de points donné, a pour homologue le groupe polaire du point correspondant par rapport au groupe de points homologues du groupe donné.*

Soient a, a' les ponctuelles,

$$x_1' : x_2' = \alpha x_1 + \beta x_2 : \gamma x_1 + \delta x_2 , \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

la projectivité, $f(x_1, x_2) = 0$ un groupe de points de a,

$$f'(x_1', x_2') = f'(\alpha x_1 + \beta x_2, \gamma x_1 + \delta x_2) = \rho f(x_1, x_2) = 0$$

le groupe de points homologue sur a'.

Le groupe polaire d'un point y' de a', homologue d'un point y de a, par rapport au groupe de points $f'=0$, a pour équation

$$y_1' \frac{\partial f'}{\partial x_1'} + y_2' \frac{\partial f'}{\partial x_2'} = (\alpha y_1 + \beta y_2) \frac{\partial f'}{\partial x_1'} + (\gamma y_1 + \delta y_2) \frac{\partial f'}{\partial x_2'} = 0 .$$

Or, on a

$$\frac{\partial f'}{\partial x_1} = \alpha \frac{\partial f'}{\partial x_1'} + \gamma \frac{\partial f'}{\partial x_2'} , \quad \frac{\partial f'}{\partial x_2} = \beta \frac{\partial f'}{\partial x_1'} + \delta \frac{\partial f'}{\partial x_2'} ,$$

par conséquent

$$y_1' \frac{\partial f'}{\partial x_1'} + y_2' \frac{\partial f'}{\partial x_2'} = y_1 \frac{\partial f'}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f'}{\partial x_2} = \rho \left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) ,$$

et le lemme est démontré.

19. Comportement des premières polaires d'une courbe en un point singulier. — Considérons une courbe irréductible algébrique C ayant en O un point multiple d'ordre s et, dans le domaine du premier ordre de ce point, des points O_1, O_2, ... multiples d'ordres s_1, s_2, ..., etc. Choisissons deux points P, Q n'appartenant pas à C et tels que les droites OP, OQ, PQ ne soient pas tangentes à la courbe. Opérons la transformation quadratique obtenue en rapportant projectivement les coniques passant par O, P, Q aux droites d'un plan. Soient O′, P′, Q′ les points fondamentaux de la transformation homologue des droites fondamentales PQ, QO, OP. Si n est l'ordre de la courbe C, à celle-ci correspond une courbe C′ d'ordre $2n-s$ ayant la multiplicité n en O′, $n-s$ en P′ et Q′.

Soit a une droite passant par P ; il lui correspond une droite a' passant par P′ et la correspondance détermine une projectivité entre ces droites. Dans cette projectivité, au point infiniment voisin de P sur a correspond le point d'intersection P_1' de a' avec O′Q′. Désignons par Γ la polaire de P par rapport à C, par Γ′ sa transformée. Sur Γ, la droite a découpe le groupe polaire de P par rapport au groupe de points (C, a), donc sur a', Γ′ découpe le groupe polaire de P_1' par rapport au groupe (a', C′) dont on a défalqué le point P′ compté $n-s$ fois. La courbe Γ′ est donc le lieu de ce groupe polaire lorsque P_1' décrit la droite O′Q′.

Prenons O′P′Q′ comme triangle de référence, les sommets ayant pour coordonnées : O′(0, 0, 1), P′(1, 0, 0), Q′(0, 1, 0). L'équation de la courbe C′ est de la forme

$$f \equiv x_1^n \varphi_{n-s}(x_2, x_3) + x_1^{n-1} \varphi_{n-s+1}(x_2, x_3) + \dots \\ + \varphi_{2n-s}(x_2, x_3) = 0 .$$

Si l'équation de la droite a' est

$$x_3 = \lambda x_2 ,$$

l'équation du groupe (a', C'), dont on a défalqué le point P' compté $n - s$ fois, est

$$x_1^n \varphi_{n-s}(1, \lambda) + x_1^{n-1} x_2 \varphi_{n-s+1}(1, \lambda) + \ldots + x_2^n \varphi_{2n-s}(1, \lambda) = 0.$$

Le point P_1' a pour coordonnées (0, 1, λ) et son groupe polaire par rapport au groupe précédent est donné par

$$x_1^{n-1} \varphi_{n-s+1}(1, \lambda) + 2\, x_1^{n-2} x_2 \varphi_{n-s+2}(1, \lambda) + \ldots + n x_2^{n-1} \varphi_{2n-s}(1, \lambda) = 0 .$$

L'équation de Γ' s'obtiendra donc en éliminant λ entre cette équation et celle de la droite a' ; cette équation est donc

$$\psi_1 \equiv x_1^{n-1} \varphi_{n-s+1}(x_2, x_3) + 2\, x_1^{n-2} \varphi_{n-s+2}(x_2, x_3) + \ldots + n\, \varphi_{2n-s}(x_2, x_3) = 0 .$$

D'autre part, la polaire de P' par rapport à C' a pour équation

$$\psi_2 \equiv n x_1^{n-1} \varphi_{n-s}(x_2, x_3) + (n - 1)\, x_1^{n-2} \varphi_{n-s+1}(x_2, x_3) + \ldots + \varphi_{2n-s-1}(x_2, x_3) = 0 .$$

On a identiquement

$$\psi_1 + x_1 \psi_2 \equiv nf .$$

A un point O_1 du domaine du premier ordre de O, multiple d'ordre s_1 pour C, correspond un point O_1' de $x_3 = 0$, multiple d'ordre s_1 pour C'. Le point O_1' est multiple d'ordre $s_1 - 1$ au moins pour la courbe $\psi_2 = 0$, donc il est multiple d'ordre $s_1 - 1$ au moins pour la courbe $\psi_1 = 0$, c'est-à-dire pour la courbe Γ'. Par conséquent, le point fictif O_1 est multiple d'ordre $s_1 - 1$ au moins pour la polaire Γ de P par rapport à C.

On établirait de même, en partant de C', qu'un point de C, multiple d'ordre s_{11}, situé dans le domaine du second ordre de O, est multiple d'ordre $s_{11} - 1$ au moins pour la courbe $\psi_2 = 0$, donc pour la courbe Γ' et par conséquent pour la courbe Γ, et ainsi de suite.

Les premières polaires d'une courbe passent s — 1 *fois au moins par un point multiple d'ordre* s *de la courbe, qu'il soit effectif ou fictif.*

20. Application à l'étude des points singuliers. — Reprenons la courbe C d'ordre n ayant en O un point multiple d'ordre s, auquel sont infiniment voisins dans le domaine du premier ordre des points multiples d'ordre s_1, s_2, ... ; dans le domaine du second ordre, des points multiples d'ordre s_{11}, s_{12}, ..., etc. Soit I le nombre de points d'intersection de C et d'une de ses premières polaires absorbés par le point O. D'après ce qu'on vient de voir, on a

$$I \geqslant s(s-1)+\Sigma s_i(s_i-1)+\Sigma s_{ij}(s_{ij}-1)+\dots.$$

D'autre part, on a $I \leqslant n\ (n-1)$, donc

$$s\,(s-1)+\Sigma s_i\,(s_i-1)+\Sigma s_{ij}\,(s_{ij}-1)+\dots \leqslant n\,(n-1)\,.$$

Il en résulte que le nombre de termes du premier membre est fini et que par suite le nombre des points infiniment voisins de O multiples pour la courbe C est fini.

Il existe un domaine d'ordre fini d'un point singulier d'une courbe algébrique ne contenant plus que des points simples pour la courbe.

21. Branches d'une courbe algébrique. — D'après le théorème précédent, on peut, par un nombre fini de transformations quadratiques, transformer la courbe C en une courbe C_1 sur laquelle, au point singulier O, correspondent un certain nombre ν de points simples P_1, P_2, ..., P_ν.

L'ensemble des points de la courbe C situés à l'intérieur d'un petit cercle de centre P_1, par exemple, est appelé une *branche* ou un *cycle* d'origine P_1 de la courbe C_1.

Aux points des différentes branches de la courbe C_1 d'origines P_1, P_2, ..., P_ν correspondent les points de C situés à l'intérieur d'un petit cercle de centre O. On dit que O est l'origine de ν branches de la courbe C.

Considérons la courbe algébrique

$$y\varphi_0+\varphi_2(x,y)+\varphi_3(x,y)+\dots=0\,, \tag{1}$$

ayant un point simple en O et y touchant l'axe Ox. Opérons la transformation $x=x'$, $y=x'y'$. A la courbe considérée correspond la courbe

$$y\varphi_0+x\varphi_2(1,y)+x^2\varphi_3(1,y)+\dots=0\,,$$

ayant un point simple en O'. La tangente en ce point a pour équation

$$y\varphi_0+x\varphi_2(1,0)=0\,.$$

Pour que cette tangente coïncide avec la droite fondamentale $x=0$, associée à O, il faut que l'on ait $\varphi_0=0$, c'est-à-dire que la courbe (1) ait un point double en O.

On arriverait évidemment à la même conclusion si, au lieu de prendre une transformation quadratique de seconde espèce, on utilisait une transformation de première espèce.

Reprenons la courbe C et considérons une courbe Γ passant simplement par O et par O_1 (c'est-à-dire tangente en O à la courbe C). Opérons une transformation quadratique dont O est un point fondamental et soient a' la droite fondamentale associée, O_1' le point homologue de O_1. Supposons que les tangentes à la transformée C' de C en O_1' ne soient pas toutes confondues avec a'. La transformée Γ' de Γ a un point simple en O_1'. Disposons de cette courbe de telle sorte qu'elle soit tangente à la courbe C'. D'après la remarque faite plus haut, cette tangente est distincte de a'.

Opérons une transformation quadratique dont O_1' soit un point fondamental et soit a'' la droite fondamentale qui lui est associée. Au point infiniment voisin de O_1 situé sur Γ' correspond un point O_{11}'' de a'', multiple d'ordre s_{11} pour la transformée C'' de C' et simple pour la transformée Γ' de Γ. Supposons qu'il soit encore possible de disposer de Γ de manière qu'elle soit tangente à C' en O_{11}'' ; il suffit pour cela que l'une au moins des tangentes à O_{11}'' à C'' soit distincte de a''.

Continuons ces opérations et supposons qu'après un certain nombre de transformations quadratiques, nous arrivions au point P_1 de C_1, la courbe Γ ayant pu être déterminée successivement de manière que sa dernière transformée passe par P_1. La courbe Γ, qui a un point simple en O, épouse en quelque sorte la branche de C, d'origine O, correspondant à la branche de C_1 d'origine P_1. S'il est possible de déterminer la courbe Γ, cette branche est appelée *branche linéaire*. Dans le cas contraire, la branche considérée est appelée superlinéaire.

Si une courbe C possède un point double O auquel sont infiniment voisins successifs p points doubles dont le dernier est ordinaire, le point O est l'origine de deux branches linéaires. Par contre, si le dernier point de la suite est un point de rebroussement, le point O est l'origine d'une seule branche non linéaire.

Considérons une courbe γ_1 passant simplement par O, une courbe γ_2 ayant un contact d'ordre p_1 avec γ_1 en O, une courbe γ_3 ayant un contact d'ordre $p_2 > p_1$ avec γ_1 en O, une courbe γ_4 ayant un contact d'ordre $p_3 > p_2$ en O, les courbes γ_2, γ_3, γ_4 passant simplement par O. L'ensemble des courbes γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 a un point quadruple en O, auquel font suite p_1 points quadruples infiniment voisins successifs. Au dernier de ces points sont infiniment voisins un point simple (sur γ_2) et une suite de $p_2 - p_1$ points triples. Au dernier de ces points sont infiniment voisins un point simple (sur γ_3) et une suite de $p_3 - p_2$ points doubles. Au dernier de ces points sont infiniment voisins deux points simples (sur γ_1 et γ_4). On a ainsi un exemple d'un point quadruple origine de quatre branches linéaires.

22. Remarque. — La théorie des branches ou cycles des courbes algébriques s'introduit d'une manière plus naturelle en partant des systèmes circulaires de Puiseux, comme l'a fait Halphen. Cet aspect de la théorie permet d'ailleurs également d'introduire la notion de points infiniment voisins, comme l'a montré F. Enriques (1).

Nous nous bornerons à ce qui a été dit plus haut. Reprenons cependant l'exemple du point quadruple traité plus haut (n° 15). Le point O ne peut être l'origine de branches linéaires puisque les tangentes en O′ à la courbe (2) sont confondues avec la droite fondamentale $x'=0$.

Partons d'une courbe γ d'équation

$$y^2+\psi_3(x, y)+\psi_4(x, y)+\ldots=0,$$

ayant un point de rebroussement à l'origine, la tangente étant confondue avec les tangentes à la courbe (1). Après la première transformation quadratique, nous obtenons une courbe γ' d'équation

$$y^2+x\psi_3(1, y)+x^2\psi_4(1, y)+\ldots=0;$$

tangente en O′ à la droite fondamentale $x=0$.

Changeons les noms des axes et opérons la seconde transformation quadratique sur la courbe

$$x^2+y\psi_3(1, x)+y^2\psi_4(1, x)+\ldots=0.$$

Nous obtenons la courbe γ'' d'équation

$$x+y\psi_3(1; x)+xy^2\psi_4(1, x)+\ldots=0,$$

ayant comme tangente à l'origine

$$x+y\psi_3(1, 0)=0.$$

Faisons coïncider cette tangente avec l'une des tangentes à la courbe (3) au même point. Nous devons avoir

$$[\psi_3(1, 0)]^2-\varphi_3(1, 0)\psi_3(1, 0)+\varphi_6(1, 0)=0,$$

équation qui détermine le coefficient $\psi_3(1, 0)$ de x^3 dans $\psi_3(x, y)$. Il y a deux solutions et par conséquent deux courbes γ. Le point quadruple de la courbe étudiée (n° 15) est donc obtenu par la juxtaposition de deux courbes ayant un même point de rebroussement et même tangente de rebroussement.

§ 4. *Application à la théorie des courbes algébriques*

23. Théorème de Noether. — *Toute courbe algébrique irréductible peut être transformée, par un nombre fini de trans-*

(1) F. Enriques, *Sulla teoria delle singolarità delle curve algebriche* (*Rend. Accademia dei Lincei*, mai 1916); — Enriques-Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, t. II, livre IV, chap. Ier.

Voir aussi L. Godeaux, *Les Transformations birationnelles du plan*, où cette théorie se trouve résumée.

formations quadratiques, en une courbe n'ayant que des points multiples ordinaires (à tangentes distinctes).

Soit C une courbe algébrique. Si O est un point singulier de cette courbe, opérons la transformation quadratique ayant pour points fondamentaux O et deux points P, Q n'appartenant pas à C et tels que les côtés du triangle OPQ coupent C, en dehors de O, en des points distincts. Soient O′, P′, Q′ les points fondamentaux du second plan.

Pour la transformée C′ de C :

1° Les points O′, P′, Q′ sont des points multiples ordinaires ;

2° Un point singulier de C, non fondamental, se transforme en un point singulier de même nature pour C′ ;

3° Les points du domaine du premier ordre de O, multiples pour C, se transforment en des points multiples de C′, situés sur la droite P′Q′.

En opérant sur ceux de ces points qui ne sont pas à tangentes distinctes comme on l'a fait sur O, et ainsi de suite, on arrivera (n° 20) à une transformée de C ne possédant plus que des points multiples ordinaires, en dehors des transformés des points singuliers éventuels de C distincts de O. On opérera sur ceux-ci comme on l'a fait sur O et on arrivera finalement à une courbe ne possédant plus que des points multiples à tangentes distinctes, c'est-à-dire ordinaires.

24. Théorème de Halphen. — *Toute courbe algébrique plane irréductible peut être transformée en une courbe n'ayant que des points doubles ordinaires, la correspondance entre les points des deux courbes étant biunivoque.*

En nous appuyant sur le théorème précédent, nous partirons d'une courbe C n'ayant que des points multiples ordinaires $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Soient $B_1, B_2, \ldots, B_5$ cinq points du plan σ de la courbe C, distincts des points $A_1, A_2, \ldots, A_k$, tels que :

1° Les droites passant par deux des points $A_1, B_1, B_2, \ldots, B_5$ soient toutes distinctes, aucune d'elles ne passant par un des points $A_2, A_3, \ldots, A_k$ et n'étant tangente à la courbe C ;

2° Les coniques passant par cinq des points $A_1, B_1, B_2, \ldots, B_5$ soient distinctes, aucune d'elles ne passant par un des points $A_2, A_3, \ldots, A_k$ et n'étant tangente à la courbe C.

Rapportons projectivement les cubiques passant par les points $A_1, B_1, B_2, \ldots, B_5$ aux plans de l'espace. Aux points de σ correspondent ceux d'une surface cubique F, dépourvue de points doubles. Aux points de σ infiniment voisins de A_1 correspondent sur F les points d'une droite a_1. A la courbe C correspond sur F point par point une courbe $\overline{C}$ rencontrant la droite a_1 en s points distincts, s étant la multiplicité de A_1

pour C. Aux points $A_2, A_3, \ldots, A_k$ correspondent sur F des points $\overline{A}_2, \overline{A}_3, \ldots, \overline{A}_k$ ayant chacun pour la courbe $\overline{C}$ la même multiplicité que le point correspondant pour la courbe C et les tangentes à $\overline{C}$ en ce point étant distinctes.

Soit O un point de l'espace n'appartenant pas à la surface F, ni aux plans tangents à cette surface aux points $\overline{A}_2, \overline{A}_3, \ldots, \overline{A}_k$, ni à la développable lieu des tangentes à $\overline{C}$, ni à la surface lieu des trisécantes de $\overline{C}$, ni à la surface lieu des cordes de $\overline{C}$ telles que les tangentes à cette courbe aux points d'appui de chacune de ces cordes soient coplanaires. Projetons la courbe $\overline{C}$ à partir de O sur un plan σ', nous obtenons une courbe C' correspondant point par point à la courbe C. Aux points $A_2, A_3, \ldots, A_k$ correspondent des points multiples ordinaires $A_2', A_3', \ldots, A_k'$ de C'. Cette courbe possède de plus un certain nombre de points doubles ordinaires provenant des cordes de $\overline{C}$ passant par O.

Recommençons le raisonnement précédent en partant de la courbe C' et du point A_2' et ainsi de suite ; nous parviendrons finalement à une courbe $C^{(k)}$ n'ayant plus que des points doubles ordinaires, ce qui démontre le théorème.

On observera que les coordonnées d'un point d'une des courbes C, $C^{(k)}$ s'expriment en fonctions rationnelles des coordonnées du point homologue de l'autre courbe.

25. Genre d'une courbe plane. — On appelle *genre* d'une courbe plane d'ordre n le nombre

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}\Sigma s(s-1),$$

la sommation étant étendue à tous les points multiples, effectifs ou fictifs, de la courbe.

Théorème. — *Une transformation quadratique n'altère pas le genre d'une courbe.*

Soit C une courbe d'ordre n possédant un point O multiple d'ordre s. Opérons une transformation quadratique ayant pour points fondamentaux O, P, Q, le triangle OPQ n'ayant aucune relation avec la courbe C, sauf qu'un de ses sommets est O. Le genre de C est

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}s(s-1) - \varphi,$$

φ étant le terme qui provient des points multiples de C distincts de O.

La transformée C' de C est d'ordre $2n - s$. En tenant compte de ses multiplicités aux points fondamentaux de la transformation, le genre p' de C' est

$$p' = \frac{1}{2}(2n - s - 1)(2n - s - 2) - \frac{1}{2}n(n-1) - (n-s)(n-s-1) - \varphi,$$

d'où $p' = p$.

Le théorème est démontré pour une transformation quadratique de première espèce. Comme les autres transformations quadratiques sont des produits de transformations de première espèce, le théorème est complètement démontré.

26. Théorème. — *Le genre d'une courbe plane irréductible ne peut être négatif.*

On peut tout d'abord supposer que la courbe irréductible C considérée ne possède que des points multiples ordinaires. Supposons que le genre p de cette courbe puisse être inférieur à zéro. Considérons les courbes d'ordre $n-1$ passant $s-1$ fois par chaque point multiple d'ordre s de C ; elles forment un système linéaire de dimension au moins égale à

$$\frac{1}{2}(n-1)(n+2) - \frac{1}{2}\Sigma s(s-1) = 2(n-1) + p < 2(n-1).$$

Ces courbes rencontrent C, en dehors des points multiples, en

$$n(n-1) - \Sigma s(s-1) = 2(n-1) + 2p < 2(n-1) + p$$

points. Il existe au moins une de ces courbes passant par

$$2(n-1) + 2p + 1 \leqslant 2(n-1) + p$$

points simples arbitraires de C. Mais alors, la courbe C doit comprendre cette courbe comme partie, contrairement à l'hypothèse. On ne peut donc avoir $p < 0$.

27. Théorème de Clebsch. — *Une courbe irréductible de genre* p = 0 *est rationnelle.*

Reprenons le raisonnement précédent en supposant $p = 0$. Par $2n-3$ points simples de C passent ∞^1 courbes d'ordre $n-1$ (passant $s-1$ fois par tout point multiple d'ordre s de C). Il ne peut en effet en passer ∞^2, car alors, il en passerait une par $2n-1$ points de C et cette courbe serait réductible. Les courbes envisagées forment donc un faisceau et chacune d'elles coupe C en un seul point variable. Les coordonnées de ce point s'expriment donc en fonctions rationnelles du paramètre fixant la courbe dans le faisceau. La courbe C est donc rationnelle.

CHAPITRE II

LES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES DU PLAN

§ 1. *Systèmes linéaires de courbes algébriques planes*

28. Préliminaires. — Nous avons défini (I, n° 42) les systèmes algébriques et linéaires de courbes algébriques ; nous avons démontré les théorèmes suivants :

I. *Un système algébrique de courbes d'indice un, privé de partie fixe et de parties multiples variables, est un système linéaire* (I, n^{os} 43, 44).

II. *Un système linéaire de courbes réductibles, privé de partie fixe, est composé au moyen d'un faisceau* (I, n^{os} 45, 46).

Rappelons qu'un système linéaire est représenté par une équation de la forme

$$\lambda_0 f_0(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_r f_r = 0\,, \tag{1}$$

où f_0, f_1, ..., f_r sont des formes algébriques de même degré m. Si la relation (1) ne peut être une identité pour des valeurs non toutes nulles des paramètres λ, le système est de dimension r et par r points du plan passe une courbe et en général une seule du système. Les courbes

$$f_0 = 0\,, \quad f_1 = 0, \quad \ldots, \quad f_r = 0$$

sont dites linéairement indépendantes.

Si les polynomes f_0, f_1, ..., f_r sont divisibles par un même polynome $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, la courbe $\varphi = 0$ est une composante fixe ou partie fixe du système (1).

L'équation d'un système linéaire privé de partie fixe et composé au moyen d'un faisceau

$$\mu_0 \psi_0(x_1, x_2, x_3) + \mu_1 \psi_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{2}$$

est de la forme

$$\lambda_0 \varphi_0(\psi_0, \psi_1) + \lambda_1 \varphi_1(\psi_0, \psi_1) + \ldots + \lambda_r \varphi_r(\psi_0, \psi_1) = 0\,. \tag{3}$$

Si les polynomes φ sont de degré n, chaque courbe du système (3) est formée de n courbes du faisceau (2).

Un système linéaire dont la courbe générale est irréductible est dit *irréductible.*

29. Théorème de Bertini. — *La courbe générale d'un système linéaire privé de composante fixe ne peut avoir de point multiple variable.*

Supposons en effet qu'il puisse exister un système linéaire, privé de partie fixe, dont la courbe générale possède un point multiple variable avec la courbe. Soit

$$f_0(x, y) + \lambda f_1(x, y) \equiv f(x, y, \lambda) = 0 \tag{1}$$

un faisceau appartenant à ce système et privé de partie fixe. Chaque courbe du faisceau (1) possède un point multiple dont les coordonnées x_0, y_0 sont des fonctions

$$x_0 = \varphi_1(\lambda) \ , \qquad y_0 = \varphi_2(\lambda)$$

de λ. On a identiquement, quel que soit λ,

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, \lambda)}{\partial x_0} = 0 \ , \quad \frac{\partial f(x_0, y_0, \lambda)}{\partial y_0} = 0 \ .$$

Dérivons totalement l'équation (1) par rapport à λ ; nous obtenons

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, \lambda)}{\partial x_0} \frac{dx_0}{d\lambda} + \frac{\partial f(x_0, y_0, \lambda)}{\partial y_0} \frac{dy_0}{d\lambda} + \frac{\partial f(x_0, y_0, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \ ,$$

d'où

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, \lambda)}{\partial \lambda} \equiv f_1(x_0, y_0) = 0 \ .$$

Le point multiple appartenant à la courbe $f(x, y, \lambda) = 0$ appartient donc à la courbe $f_1(x, y) = 0$; il appartient par conséquent à toutes les courbes du faisceau et est un point-base de celui-ci ; il ne varie donc pas avec la courbe et le théorème est démontré.

Si la courbe générale d'un système linéaire privé de partie fixe possède un point multiple, celui-ci est donc un point-base du système.

30. Systèmes linéaires complets. — Considérons un système linéaire de courbes planes C d'ordre m ; nous le représenterons par $|C|$. Ce système est défini en général par le passage en certains points fixes du plan : les points-base. La singularité des courbes C en chacun des points-base doit être définie en ce sens que la multiplicité d'un point et éventuellement de points infiniment voisins de celui-ci doit être déterminée. L'ensemble des points-base et des singularités assignés aux courbes C en ces points est appelé *groupe-base* du système linéaire $|C|$.

Si le système linéaire $|C|$ contient toutes les courbes d'ordre m ayant les singularités assignées aux points-base, il est appelé *système linéaire complet par rapport au groupe base* donné.

Observons que les courbes C peuvent éventuellement avoir en certains points-base une multiplicité supérieure à la multiplicité assignée, par suite de certaines propriétés géométriques. Elles peuvent aussi avoir nécessairement une composante fixe.

Les caractères d'un système linéaire complet $|C|$ sont :

1° Le *degré* n, nombre de points d'intersection de deux courbes générales du système, variables avec ces courbes, c'est-à-dire nombre de points d'intersection de deux courbes du système en dehors des points-base ;

2° Le *genre* π, genre de la courbe générale du système ;

3° La *dimension* r.

Il peut arriver que le passage des courbes C par les points-base ne se traduise pas par des conditions indépendantes. Si l'on calcule la dimension du système comme si toutes ces conditions étaient indépendantes, on trouve un nombre ρ qui peut donc être inférieur à la dimension effective r du système. Le nombre ρ est appelé *dimension virtuelle* du système $|C|$. Si $r=\rho$, le système $|C|$ est dit *régulier*, si $r>\rho$, il est dit *surabondant* et le nombre $\omega=r-\rho$ est appelé *surabondance* du système.

31. Remarque. — Il importe d'observer que le théorème de Bertini s'applique également aux points multiples infiniment voisins d'un point-base donné.

Remarquons d'abord que si l'on opère une transformation quadratique, à un système linéaire $|C|$ correspond un système linéaire $|C'|$ de même degré, de même genre et de même dimension. Seuls l'ordre des courbes et le groupe-base peuvent changer.

Supposons que le système $|C|$ ait un point-base O multiple d'ordre s auquel est infiniment voisin un point O_1 multiple d'ordre s_1. Opérons une transformation quadratique ayant O comme point fondamental.

Pour les courbes C', le point O_1 devient un point proprement dit, multiple d'ordre s_1 et est donc un point-base de $|C'|$; donc O_1 est un point-base de $|C|$.

Envisageons encore un système linéaire $|C|$ dont les courbes ont en O un point de rebroussement ordinaire. Opérons une transformation quadratique ayant O comme point fondamental et soit a' la droite fondamentale associée. Aux courbes C correspondent des courbes C' tangentes à la droite

a' ; comme le système $|C'|$ doit être linéaire, le point de contact est nécessairement fixe. Les courbes C ont donc en O même tangente de rebroussement.

32. Courbes fondamentales d'un système linéaire. — Considérons un système linéaire $|C|$, irréductible, complet, de dimension r. Une courbe F qui n'est pas rencontrée en un point variable par les courbes du système $|C|$, est appelée *courbe fondamentale* de ce système. Les courbes fondamentales d'un système de dimension $r > 1$ sont nécessairement en nombre limité ; elles sont complètement déterminées par leurs singularités aux points-base du système.

Les courbes du système linéaire $|C|$ passant par un point d'une courbe fondamentale F, pris en dehors des points-base, comprennent cette courbe comme partie et sont complétées par des courbes C_1, formant nécessairement un système linéaire complet, de dimension $r-1$.

Les coniques C passant par deux points A_1, A_2, par exemple, forment un système linéaire complet $|C|$ de dimension 3 et de degré 2. Ce système admet la droite fondamentale A_1A_2 et les coniques C passant par un point de cette droite, distinct de A_1, A_2, comprennent cette droite et sont complétées par le système de droites du plan.

33. Système jacobien. — Soit $|C|$ un système linéaire de dimension $r-2$. Choisissons dans ce système un réseau Σ. La jacobienne C_j de ce réseau (I, n^os 67-73) est le lieu des points tels que les courbes de ce réseau passant par un de ces points, y ont même tangente.

Les jacobiennes des différents réseaux formés avec les courbes de C appartiennent à un système linéaire. Soit en effet

$$\Sigma\lambda f \equiv \lambda_0 f_0(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r = 0$$

l'équation d'une courbe C. La jacobienne d'un réseau appartenant à $|C|$ a une équation de la forme

$$\frac{\partial\,(\Sigma\lambda f, \Sigma\mu f, \Sigma\nu f)}{\partial\,(x_1, x_2, x_3)} = 0\,.$$

En développant cette équation, on obtient

$$\Sigma \begin{vmatrix} \lambda_i & \lambda_j & \lambda_k \\ \mu_i & \mu_j & \mu_k \\ \nu_i & \nu_j & \nu_k \end{vmatrix} \cdot \frac{\partial\,(f_i, f_j, f_k)}{\partial\,(x_1, x_2, x_3)} = 0\,,$$

ce qui est bien l'équation d'une courbe variable dans un système linéaire.

Le système complet $|C_j|$, comprenant toutes les courbes jacobiennes de $|C|$, est le *système jacobien* de ce système.

Si les courbes C sont d'ordre m, les jacobiennes C_j sont d'ordre $3(m-1)$. En un point-base A de $|C|$, multiple d'ordre s pour les courbes C, les jacobiennes ont en général la multiplicité $3s-1$.

Les courbes fondamentales du système $|C|$ sont des composantes fixes du système jacobien. En effet, les courbes d'un réseau tiré du système $|C|$, passant par un point d'une courbe fondamentale F de ce système, ont même tangente en ce point (la tangente à F). D'ailleurs, en un point de la jacobienne d'un réseau, il existe une courbe de celui-ci qui y possède un point double. Les ∞^1 courbes du réseau comprenant F comme partie sont complétées par les courbes C_1 d'un faisceau, rencontrant F en des points variables, doubles pour les courbes $F+C_1$ considérées.

34. Réseaux homaloïdaux. — On appelle *réseau homaloïdal* un réseau de courbes de degré 1, dépourvu de composante fixe. Un réseau homaloïdal de courbes ne peut être composé au moyen d'un faisceau, car un tel réseau est de degré zéro. De plus, un réseau homaloïdal est complet, car par deux points du plan ne peut passer qu'une courbe du réseau.

Les courbes C d'un réseau homaloïdal $|C|$ sont rationnelles. En effet, si C_0 est une de ces courbes, considérons un faisceau de courbes C ne contenant pas C_0. Une courbe de ce faisceau coupe C_0 en un point et les coordonnées de ce point sont des fonctions rationnelles du paramètre fixant la courbe dans le faisceau.

Les courbes du réseau $|C|$ passant par un point P de la jacobienne C_j de ce réseau doivent se toucher en ce point et ont donc une partie commune F ; elles sont complétées par des courbes C_1 formant un faisceau. Une courbe C ne contenant pas F est rencontrée en un point par chacune des courbes C_1, donc elle ne rencontre pas la courbe F et celle-ci est une courbe fondamentale du réseau $|C|$.

La jacobienne d'un réseau homaloïdal est formée de courbes fondamentales de ce réseau.

Supposons que les courbes du réseau homaloïdal $|C|$ soient d'ordre n et possèdent ν points-base $O_1, O_2, \dots, O_\nu$, distincts ou infiniment voisins, multiples d'ordres $s_1, s_2, \dots, s_\nu$. En exprimant que le réseau est de degré 1, on a

$$s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_\nu^2 = n^2 - 1 . \qquad (1)$$

En exprimant que les courbes C sont rationnelles, on a

$$(n-1)(n-2) - s_1(s_1-1) - s_2(s_2-1) - \dots - s_\nu(s_\nu-1) = 0 ,$$

ou, en tenant compte de (1),

$$s_1 + s_2 + \dots + s_\nu = 3(n-1) . \qquad (2)$$

Toute solution entière des équations (1) et (2), formée de nombres positifs, ne donne cependant pas toujours un réseau homaloïdal, car les courbes de celui-ci doivent être irréductibles.

Le réseau des droites du plan, les trois réseaux de coniques que nous avons considérés dans l'étude des transformations quadratiques, sont des réseaux homaloïdaux.

§ 2. *Théorie générale des transformations birationnelles du plan*

35. Transformations rationnelles. — Soit, dans un plan σ,

$$\lambda_1 f_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 \tag{1}$$

l'équation d'un réseau $|C|$, de degré n, non nécessairement complet. Supposons que ce réseau soit irréductible. Deux courbes de ce réseau se coupent en n points en dehors de la base et on obtient ainsi ∞^2 groupes de n points tels qu'un point du plan appartienne à un seul groupe. On dit que ces ∞^2 groupes de n points forment une involution I_n d'ordre n.

Etablissons une projectivité entre les courbes du réseau (1) et les droites d'un plan σ'. On peut toujours choisir le triangle de référence dans σ' de telle sorte qu'à la courbe (1) corresponde la droite

$$\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3' = 0\ ,$$

c'est-à-dire que l'on ait

$$x_1' : x_2' : x_3' = f_1(x_1, x_2, x_3) : f_2 : f_3\ . \tag{2}$$

A un point x du plan σ distinct des points-base de $|C|$, correspond un point x' de σ'. Inversement, à un point de x' de σ', correspond un groupe de l'involution I_n. Les plans σ', σ, sont liés par une correspondance rationnelle $(1, n)$.

36. Remarque. — Si le réseau $|C|$ était composé au moyen d'un faisceau

$$\mu_0 \psi_0(x_1, x_2, x_3) + \mu_1 \psi_1(x_1, x_2, x_3) = 0\ , \tag{3}$$

et avait par suite pour équation

$$\lambda_1 \varphi_1(\psi_0, \psi_1) + \lambda_2 \varphi_2(\psi_0, \psi_1) + \lambda_3 \varphi_3(\psi_0, \psi_1) = 0\ ,$$

les équations

$$x_1' : x_2' : x_3' = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3$$

feraient correspondre aux points x d'une courbe du faisceau (3) un même point x' de σ'. Le lieu de ce point x' serait une courbe γ' et on n'aurait pas une correspondance rationnelle entre les plans σ', σ.

37. Eléments fondamentaux. — Les équations (2) font correspondre à tout point x de σ un point x' de σ' bien déterminé sauf si le point x est un point-base du réseau $|C|$. Soit O un point proprement dit appartenant à la base de $|C|$, multiple d'ordre s pour les courbes C.

Supposons en premier lieu que les courbes C aient au moins une tangente variable en O et menons par ce point une droite p distincte d'une des tangentes fixes éventuelles des courbes C en O. Aux courbes C passant par un point P de p, correspondent dans σ' les droites d'un faisceau de sommet P'. Le point P' correspond au point P. Lorsque P varie sur p et tend vers O, le faisceau des courbes C passant par P a pour limite le faisceau des courbes C tangentes à p en O. Le point P' a pour limite un point O'. Lorsque la droite p varie dans le faisceau de sommet O, le point O' décrit une courbe Ω'. La courbe Ω' correspond donc au domaine du premier ordre de O ; à un point de Ω' correspondent $n' \leqslant n$ points infiniment voisins de O. Lorsque le point décrit Ω', ce groupe de points engendre une involution dans le domaine du premier ordre de O (ou si l'on préfère, dans le faisceau de droites de sommet O). Cette involution est rationnelle et il en est de même de la courbe Ω'.

Supposons maintenant que les courbes C aient en O des tangentes fixes. Menons par O une droite p et recommençons le raisonnement précédent. Lorsque le point P tend vers O, le faisceau des courbes C passant par P a pour limite le faisceau des courbes C ayant en O une multiplicité s' supérieure s. A ce faisceau correspond dans σ' un faisceau de droites dont le sommet O' reste fixe lorsque la droite p varie dans le faisceau de sommet O.

Les points O, O', la courbe Ω' sont appelés *éléments fondamentaux* de la transformation.

38. Transformations birationnelles. — Supposons que le réseau $|C|$ dont il vient d'être question soit homaloïdal. Alors $n=1$ et les plans σ, σ' sont liés par une correspondance (1,1) que l'on appelle *transformation birationnelle* ou *transformation crémonienne*, du nom du géomètre Cremona qui les a étudiées le premier d'une manière systématique.

Aux points d'une droite du plan σ correspondent dans σ' les points d'une courbe C' qui, lorsque la droite varie, engendre un réseau homaloïdal $|C'|$. Il existe une projectivité entre les droites du plan σ et les courbes de $|C'|$.

Soient r une droite de σ, C' la courbe qui lui correspond dans σ', r' une droite de σ' et C la courbe qui lui correspond dans σ. A un point commun à r et à C, correspond un point commun à r' et à C', donc les courbes C, C' ont le même ordre.

Il est clair que la connaissance du réseau $|C'|$ permet de définir la transformation birationnelle (à une homographie près).

39. Points fondamentaux ordinaires. — Soit T la transformation birationnelle obtenue en rapportant projectivement les courbes d'un réseau homaloïdal $|C|$ de σ aux droites du plan σ'. Désignons par n l'ordre des courbes C et supposons que le réseau $|C|$ possède un point-base O, multiple d'ordre s, les tangentes aux courbes C en O étant toute variables.

Reprenons le raisonnement fait plus haut (n° 37). Les courbes C touchant en O une droite p forment un faisceau ; il leur correspond dans σ' les droites d'un faisceau de sommet O'. Lorsque la droite p décrit le faisceau de sommet O, le point O' décrit une courbe Ω'. Le point O est un point fondamental et la courbe Ω' la courbe fondamentale associée. La courbe Ω' est rationnelle.

A un point de Ω' correspond un point du domaine du premier ordre de O ; une courbe C contenant s de ces points, la droite correspondante de σ' rencontre Ω' en s points. La courbe Ω' est donc d'ordre s.

Une droite de σ ne passe pas en général par O, donc la courbe C' d'ordre n qui lui correspond dans σ' ne rencontre pas en général Ω' et cette courbe est fondamentale pour le réseau $|C'|$.

Une droite p passant par O est coupée par les courbes C en $n-s$ points variables, donc à la droite p correspond une courbe C_1' d'ordre $n-s$, engendrant un faisceau. La courbe C_1' jointe à Ω' donne une courbe C'. La droite p contenant un seul point infiniment voisin de O, les courbes C_1 coupent la courbe Ω' en un seul point variable. Il en résulte que la courbe Ω' ne peut posséder un point multiple en dehors des points-base de $|C'|$.

40. Points fondamentaux singuliers. — Sans établir une théorie générale des points fondamentaux singuliers, nous indiquerons comment on peut déterminer les courbes fondamentales qui leur correspondent. Nous commencerons par traiter quelques exemples.

Supposons que le réseau $|C|$ possède un point-base O, multiple d'ordre s, auquel est infiniment voisin un point-base O_1, multiple d'ordre $s_1 < s$. Supposons en outre qu'en O, une courbe C ait s_1 tangentes confondues avec OO_1 et $s-s_1$ tangentes variables. De plus, pour une courbe C, le point O est l'origine de s branches linéaires. Cela signifie qu'une courbe C a s_1 points simples infiniment voisins de O_1 ; nous les supposerons variables avec la courbe.

En reprenant le raisonnement fait plus haut, on voit qu'aux points du domaine du premier ordre de O correspondent les points d'une courbe Ω', rationnelle. Comme à un point de Ω' correspond un seul point du domaine du premier ordre de O, cette courbe est d'ordre $s - s_1$.

Considérons maintenant une conique γ passant par O et O_1 ; elle est rencontrée par les courbes C en $s + s_1$ points confondus en O. Les courbes C qui coupent γ en $s + s_1 + 1$ points confondus en O forment un faisceau ; il leur correspond dans σ' les droites d'un faisceau de sommet O_1'. Lorsque la conique γ varie, le point O_1' décrit une courbe Ω_1', qui représente les points du domaine du second ordre de O infiniment voisins de O_1. Comme à un point de Ω_1' correspond un seul de ces points, la courbe Ω_1' est d'ordre s_1. Elle ne peut d'ailleurs rencontrer la courbe Ω' en dehors des points-base de $|C'|$, car à un point de rencontre de ces deux courbes en un point distinct des points-base, correspondait dans σ un point du domaine du premier ordre de O, distinct de O_1, qui serait infiniment voisin de O_1, ce qui est absurde. La courbe Ω_1' est évidemment rationnelle.

A une droite p, passant par O, correspond dans σ' une courbe C_1', d'ordre $n - s$ qui, jointe aux courbes Ω', Ω_1', donne une courbe C'. Les courbes C_1' rencontrent la courbe Ω' en un point, mais ne rencontrent pas Ω_1', qui est fondamentale pour le faisceau $|C_1'|$. La courbe C_1' qui contient Ω_1' comme partie correspond dans σ' à la droite OO_1.

Supposons en second lieu que le réseau $|C|$ possède un point-base O, multiple d'ordre s, auquel sont infiniment voisins successifs un point-base O_1 multiple d'ordre $s_1 < s$ et un point-base simple O_2. De plus, nous supposerons que sur une courbe C, O est l'origine de $s - s_2 + 1$ branches, dont $s - s_2$ sont linéaires ($s_2 < s_1 - 1$). Cela signifie qu'une courbe C a, en dehors de O_1, $s - s_1$ points simples dans le domaine du premier ordre de O, variables avec C ; $s_1 - s_2$ points simples infiniment voisins de O_1, variables avec C. Enfin, O est l'origine, sur toute courbe C, d'une branche non linéaire passant par O_1 et O_2.

En répétant le raisonnement qui vient d'être fait, on voit qu'aux points du domaine du premier ordre de O, correspondent dans σ' les points d'une courbe fondamentale Ω' d'ordre $s - s_1$. Aux points du domaine du second ordre de O, infiniment voisins de O_1, correspondent les points d'une courbe fondamentale Ω_1', d'ordre $s_1 - s_2$.

Considérons maintenant une courbe γ d'ordre assez élevé, ayant en O, O_1 et O_2 les mêmes multiplicités que la branche non linéaire d'origine O des courbes C. La courbe γ rencontre les courbes C en $s^2 + s_1^2 + 1$ points confondus en O. Il existe un faisceau de courbes C ayant $s^2 + s_1^2 + 2$ points d'intersection avec γ confondus en O. Il leur correspond dans σ' un faisceau de droites de sommet O_2'. Lorsque la courbe γ varie, ce point O_2' décrit une courbe fondamentale Ω_2'. Comme une courbe C passe simplement par O_2, la courbe Ω_2' est une droite, car Ω_2' est le lieu des points homologues des points infiniment voisins de O_2.

A une droite passant par O correspond dans σ' une courbe C' d'ordre n, formée de Ω', de Ω_1', de Ω_2' comptée s_2 fois et d'une courbe C_1', d'ordre $n-s$, variable dans un faisceau.

Ces deux exemples montrent comment il faut procéder pour étudier un point fondamental singulier. On commence par déterminer les différentes branches d'une courbe générale C dont le point fondamental O envisagé est l'origine. On déterminera, pour chaque branche, une courbe pour laquelle le dernier point d'une branche est un point simple et on recherchera le faisceau des courbes C ayant, avec cette courbe γ, un point d'intersection de plus que la courbe C générale, confondu en O. Le sommet du faisceau de droites correspondant dans σ' aura pour lieu la courbe fondamentale associée à la branche des courbes C envisagée.

Considérons encore, pour terminer, un exemple simple. Supposons que les courbes C aient en O la multiplicité s et ν points $O_1, O_2, \ldots, O^{\nu}$, infiniment voisins de O, dans le domaine du premier ordre, respectivement multiples d'ordre $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$. Supposons en outre

$$s_1+s_2+\ldots+s_\nu=s,$$

de sorte que les courbes C ont en O : s_1 tangentes confondues avec la droite $t_1 \equiv OO_1$, s_2 avec la droite $t_2 \equiv OO_2, \ldots, s_\nu$ avec la droite OO_ν. Enfin, supposons que sur la courbe C générale O soit l'origine de s branches linéaires, le réseau $|C|$ n'ayant aucun point-base dans le domaine du second ordre de O.

Comme on l'a vu plus haut (n° 37), il existe un faisceau de courbes C ayant en O une multiplicité supérieure à s et à ce faisceau correspond dans σ' un faisceau de droites de sommet O'.

Soit γ une conique touchant en O la droite t_1 ; elle rencontre les courbes C en $s+s_1$ points confondus en O. Les courbes C rencontrant γ en $s+s_1+1$ points confondus en O forment un faisceau auquel correspond un faisceau de droites de sommet O_1' de σ'. Lorsque γ varie, O_1' décrit une courbe fondamentale d'ordre s_1. En répétant le même raisonnement pour $O_2, \ldots, O_\nu$, on obtient de même des courbes fondamentales $\Omega_2', \ldots, \Omega_\nu'$ d'ordre $s_2, \ldots, s_\nu$. A une droite passant par O, correspond une courbe C' formée de $\Omega'_1, \Omega_2', \ldots, \Omega_\nu'$ et d'une courbe C_1', d'ordre $n-s$, variable dans un faisceau, ne rencontrant aucune des courbes $\Omega_1', \Omega_2', \ldots, \Omega_\nu'$ en des points variables.

§ 3. *Composition des transformations birationnelles*

41. Préliminaires. — Nous avons défini plus haut le produit de deux transformations quadratiques. Cette définition s'étend sans difficulté aux produits de transformations birationnelles.

Soient σ, σ', σ'' trois plans, distincts ou superposés, T une transformation birationnelle entre σ et σ'. T' une transformation birationnelle entre σ' et σ''. A un point P de σ, T fait correspondre un point P' de σ' et à ce point P', T' fait correspondre un point P'' de σ''. Il existe donc une transformation birationnelle entre σ et σ'', faisant passer de P à P''. Cette transformation est appelée le produit TT' des transformations T, T'.

Clifford, Noether et Rosanes ont énoncé le théorème suivant :

I. *Toute transformation birationnelle du plan est le produit d'un nombre fini de transformations quadratiques.*

Le théorème a été démontré par Noether, mais cette démonstration n'est pas à l'abri de toute critique. Celle que nous exposerons, basée sur les mêmes concepts que celle de Noether, est due à M. Chisini [1].

Reprenons les transformations T, T', TT' entre les plans σ, σ', σ'' et supposons qu'aux droites de σ, T fasse correspondre le réseau homaloïdal $|C'|$ d'ordre n, de σ'. Le réseau homaloïdal $|C''|$ que TT' fait correspondre aux droites de σ dans σ'' est évidemment le réseau que T' fait correspondre à $|C'|$. Pour démontrer le théorème de Noether, il suffira d'établir qu'il est possible de choisir T' de manière que l'ordre n' des courbes C'' soit inférieur à l'ordre n des courbes C'. Nous démontrerons donc le théorème suivant :

II. *Etant donné un réseau homaloïdal, il est possible de trouver une transformation quadratique, ou un produit de transformations quadratiques, faisant correspondre au réseau donné un réseau homaloïdal dont les courbes ont un ordre moindre.*

42. Propriété des points-base d'un réseau homaloïdal. — Soit $|C|$ un réseau homaloïdal de courbes d'ordre n, possédant ν points-base, distincts ou en partie infiniment voisins,

[1] O. Chisini, *Sul teorema di Noether (Atti della Soc. dei Natur. e Matematici di Modena*, 1921-1922); — Enriques-Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, tome III, pp. 166-173. Voir aussi Godeaux, *Les Transformations birationnelles du plan*, 1927.

$O_1, O_2, \ldots, O_\nu$ respectivement multiples d'ordres $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$. Nous avons

$$s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_\nu^2 = n^2 - 1 , \tag{1}$$

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu = 3(n-1). \tag{2}$$

Supposons les nombres s rangés par ordre non croissant :

$$s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3 \geqslant \ldots \geqslant s_\nu .$$

Nous allons démontrer que l'on a

$$s_1 + s_2 + s_3 > n .$$

Il y a au moins un des nombres s supérieur ou égal à

$$\rho = \frac{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_\nu^2}{s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu} = \frac{n^2 - 1}{3(n-1)} = \frac{n+1}{3} .$$

Posons $s_1 = \rho + \delta$, où $\delta \geqslant 0$. Un des nombres s restants sera au moins égal à

$$\rho' = \frac{s_2^2 + s_3^2 + \ldots + s_\nu^2}{s_2 + s_3 + \ldots + s_\nu} = \rho - \delta \frac{s_1}{s_2 + s_3 + \ldots + s_\nu} .$$

Posons $s_2 = \rho' + \delta'$, où $\delta' \geqslant 0$. Un des nombres s restants sera au moins égal à

$$\rho'' = \frac{s_3^2 + s_4^2 + \ldots + s_\nu^2}{s_3 + s_4 + \ldots + s_\nu} = \rho' - \delta' \frac{s_2}{s_3 + s_4 + \ldots + s_\nu} .$$

Soit $s_3 \geqslant \rho''$ ce nombre.

Le réseau $|C|$ étant irréductible, on a

$$s_1 \leqslant n - 1 , \qquad s_2 \leqslant n - 1$$

et, par (2),

$$s_2 + s_3 + \ldots + s_\nu \leqslant 2(n-1), \quad s_3 + s_4 + \ldots + s_\nu \leqslant n - 1 .$$

Par suite, on a

$$\rho' \geqslant \rho - \frac{1}{2}\delta, \quad s_3 \geqslant \rho'' \geqslant \rho' - \delta' ,$$

$$s_2 + s_3 \geqslant \rho' + \delta' + \rho' - \delta' ,$$

ou

$$s_2 + s_3 \geqslant 2\rho' .$$

On a finalement

$$s_1 + s_2 + s_3 \geqslant \rho + \delta + 2\rho' \geqslant \rho + \delta + 2\rho - \delta ,$$

d'où

$$s_1 + s_2 + s_3 \geqslant 3\rho \quad \text{ou} \quad n + 1 ,$$

ce qui démontre le théorème.

43. Démonstration du théorème II dans quelques cas simples. — Supposons en premier lieu que les points O_1, O_2, O_3 soient distincts. Ils ne peuvent être en ligne droite, car alors les courbes C seraient réductibles. En rapportant projectivement aux droites d'un plan σ' les coniques passant par O_1, O_2, O_3, on transforme les courbes C en des courbes C′ d'ordre

$$2n - s_1 - s_2 - s_3 < n\,,$$

et le théorème II est démontré.

Supposons maintenant qu'un des points O_2, O_3 soit infiniment voisin au point O_1 sur une droite t. En rapportant projectivement les coniques passant par O_1, O_2, O_3 (et par suite touchant t en O_1) aux droites de σ', on transforme $|C|$ en un réseau $|C'|$ dont les courbes auront, comme dans le premier cas, l'ordre inférieur à n.

Supposons enfin que O_2, O_3 soient infiniment voisins *successifs* à O_1, sur une branche linéaire de la courbe C générale. Il suffira de considérer les coniques osculant les courbes C en O_1, passant donc par O_1, O_2, O_3 pour obtenir un réseau homaloïdal de courbes d'ordre inférieur à n, au moyen d'une transformation quadratique de troisième espèce.

Mais un raisonnement analogue aux précédents n'est plus possible lorsque les points O_2, O_3 sont infiniment voisins à O_1 sur une branche non linéaire, ou s'ils sont infiniment voisins à O_1 dans des directions différentes.

44. Lemme. — Si O est un des points-base de multiplicité maximum s du réseau homaloïdal $|C|$, auquel sont infiniment voisins les points O_1, O_2, ..., O_r de multiplicités s_1, s_2, ..., s_r telles que

$$s + s_1 + s_2 + \ldots + s_r > n\,,$$

le réseau $|C|$ possède un autre point-base O_{r+1}, de multiplicité

$$s_{r+1} > \frac{1}{2}(n - s)\,.$$

Désignons par s_{r+2}, s_{r+3}, ..., s_ν les multiplicités des autres points-base O_{r+2}, O_{r+3}, ..., O_ν de C. La multiplicité du point-base de multiplicité maximum s_{r+1} parmi O_{r+1}, O_{r+2}, ..., O_ν vérifie l'inégalité

$$s_{r+1} \geqslant \frac{n^2 - 1 - s^2 - s_1{}^2 - \ldots - s_r{}^2}{3n - 3 - s - s_1 - \ldots - s_r}\,.$$

En effet, on a

$$s_{r+1} \geqslant \frac{s_{r+1}{}^2 + s_{r+2}{}^2 + \ldots + s_\nu{}^2}{s_{r+1} + s_{r+2} + \ldots + s_\nu}$$

et

$$s_{r+1}^2 + s_{r+2}^2 + \ldots + s_\nu^2 = n^2 - 1 - s^2 - s_1^2 - \ldots - s_r^2,$$
$$s_{r+1} + s_{r+2} + \ldots + s_\nu = 3n - 3 - s - s_1 - \ldots - s_r.$$

Or, on a

$$s + s_1 + \ldots + s_r > n, \quad s_1 + s_2 + \ldots + s_r \leqslant s,$$
$$s_1 \leqslant n - s, \quad s_2 \leqslant n - s, \quad \ldots, s_r \leqslant n - s,$$

donc

$$s_{r+1} > \frac{n^2 - 1 - s^2 - (n-s)s}{3(n-1) - n},$$

c'est-à-dire

$$s_{r+1} > \frac{n(n-s)}{2n} \quad \text{ou} \quad \frac{n-s}{2}.$$

Remarquons que les points $O_1, O_2, \ldots, O_r$ peuvent appartenir à des domaines des différents ordres de O.

45. Démonstration du théorème II. — Considérons un réseau homaloïdal $|C|$ de courbes d'ordre n et soit O un point-base de multiplicité maximum s, auquel sont infiniment voisins, dans des directions différentes k points $O_1, O_2, \ldots, O_k$, multiples d'ordres $s_1, s_2, \ldots, s_k$ tels que

$$s_i > \frac{1}{2}(n-s), \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Effectuons une première transformation quadratique en rapportant projectivement aux droites du plan σ les coniques passant par O, O_1 et par un point A_1 quelconque, n'appartenant pas au groupe des points-base de $|C|$. Aux droites de σ correspondent des coniques passant par un point O', par un point infiniment voisin O_1' et par un point A_1'. Aux courbes C correspondent des courbes C_1 d'ordre

$$n_1 = 2n - s - s_1 = n + (n-s) - s_1,$$

ayant en O' la multiplicité $n - s_1$, en O_1' la multiplicité $n - s$. Comme O_1' correspond à la droite fondamentale OA, qui est rencontrée en dehors de O en $n - s$ points variables pour les courbes C, le point O' est l'origine, sur chaque courbe C', de $n - s$ branches linéaires passant par O_1'. De plus, aux points $O_2, O_3, \ldots, O_k$ correspondent des points $O_2', O_3', \ldots, O_k'$ infiniment voisins de O', de mêmes multiplicités.

Rapportons projectivement les coniques passant par O_1', O_2' et par un point A_2 aux droites d'un plan. Aux courbes C' correspondent des courbes C'' d'ordre

$$n_2 = n + 2(n-s) - s_1 - s_2,$$

passant $n+(n-s)-(s_1+s_2)$ fois par un point O'', $n-s$ fois par un point infiniment voisin O_2'', le point O'' étant l'origine de $n-s$ branches linéaires passant par O_2''. Aux points O_1', O_3', ..., O_k' correspondent des points O_1'', O_3'', ..., O_k'' infiniment voisins de O'', ayant les mêmes multiplicités.

Continuons de même jusqu'à épuisement des points O_3'', ..., O_k'' ; nous obtiendrons finalement un réseau homaloïdal $C^{(k)}$, de courbes d'ordre

$$n_k = n + k(n-s) - (s_1 + s_2 + \dots + s_k) ,$$

ayant un point $O^{(k)}$ multiple d'ordre

$$s^{(k)} = n + (k-1)(n-s) - (s_1 + s_2 + \dots + s_k) ,$$

auquel sont infiniment voisins, dans des directions différentes, k points $O_1^{(k)}$, $O_2^{(k)}$, ..., $O_k^{(k)}$, de multiplicités $n-s$. Le point $O^{(k)}$ est l'origine de $k(n-s)$ branches linéaires dont $n-s$ passent par chacun des points précédents. Deux de ces branches, passant par un quelconque des points $O_1^{(k)}$, $O_2^{(k)}$, ..., $O_k^{(k)}$, ne peuvent d'ailleurs s'osculer par construction.

Comme on a

$$s^k + k(n-s) > n_k ,$$

il existe, d'après le lemme précédent, un point A_{k+1} multiple, d'ordre

$$s_{k+1} > \frac{1}{2}(n_k - s^{(k)}) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}(n-s) ,$$

pour les courbes $C^{(k)}$. Ce point ne peut être infiniment voisin de l'un des points $O_1^{(k)}$, $O_2^{(k)}$, ..., $O_k^{(k)}$. Rapportons projectivement les coniques passant par $O^{(k)}$, $O_1^{(k)}$, A_{k+1} aux droites d'un plan. Aux courbes $C^{(k)}$ correspondent des courbes $C^{(k+1)}$ d'ordre

$$n_{k+1} = n + k(n-s) - (s_1 + s_2 + \dots + s_k) - s_{k+1} ,$$

ayant un point multiple $O^{(k-1)}$ d'ordre

$$s^{(k+1)} = n + (k-1)(n-s) - (s_1 + s_2 + \dots + s_k) - s_{k+1} ,$$

auquel sont infiniment voisins $k-1$ points multiples d'ordre $n-s$.

Il existe un point A_{k+2}, à distance finie de $O^{(k+1)}$, multiple d'ordre

$$s_{k+2} > \frac{1}{2}(n-s) .$$

On pourra de nouveau opérer une transformation quadratique en partant des coniques passant par $O^{(k+1)}$, par un des points multiples d'ordre $n-s$ infiniment voisins et par A_{k+2}.

Et ainsi de suite. On parviendra finalement à un réseau homaloïdal $|C^{(2k)}|$ de courbes d'ordre

$$n_{2k} = n + k(n-s) - (s_1 + s_2 + \dots + s_k) - (s_{k+1} + s_{k+2} + \dots + s_{2k}).$$

Or, on a

$$2(s_1 + s_2 + \dots + s_k) > k(n-s),$$

$$2(s_{k+1} + s_{k+2} + \dots s_{2k}) > k(n-s),$$

d'où

$$s_1 + s_2 + \dots + s_k + s_{k+1} + \dots + s_{2k} > k(n-s).$$

On a par conséquent

$$n_{2k} < n.$$

Il nous reste à montrer que le raisonnement précédent s'applique aux cas qui n'ont pas été considérés plus haut (n° 43).

Soient P, P_1, P_2 les points de multiplicités r, r_1, r_2 tels que

$$r + r_1 + r_2 > n.$$

On supposera $r \geqslant r_1 \geqslant r_2$. Si P_1, P_2 sont infiniment voisins successifs de P sur une branche non linéaire, ou sont infiniment voisins de P dans des directions différentes, comme on a

$$r_1 > \frac{1}{2}(n-r)$$

il suffira de prendre $P \equiv O$, $P_1 \equiv O_1$, $r = s$, $r_1 = s_1$ et d'appliquer le théorème précédent pour $k = 1$.

Le théorème II et par suite le théorème de Noether est démontré.

§ 4. *Exemples de transformations birationnelles*

46. Transformation de Jonquières. — Considérons dans un plan σ, un réseau homaloïdal $|C|$ d'ordre n, ayant un point-base O multiple d'ordre $n-1$. Les autres points-base du réseau sont nécessairement simples. Si x est leur nombre, on a, par les équations (1) et (2) établies plus haut (n° 34)

$$x = 2n - 2.$$

Nous supposerons les points-base distincts et nous désignerons les points-base simples par O_1, O_2, ..., O_{2n-2}.

Les courbes fondamentales du réseau $|C|$ sont :

1° Une courbe Ω, d'ordre $n-1$, ayant la multiplicité

$n-2$ en O et passant par les $2(n-1)$ points simples O_1, O_2, ..., O_{2n-2};

2° Les $2n-2$ droites

$$\Omega_1 = OO_1, \quad \Omega_2 = OO_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2n-2} = OO_{2n-2}.$$

Les courbes C passant par un point Ω comprennent cette courbe comme partie et sont complétées par les droites passant par O. A ces droites correspondent, dans le second plan σ', les droites passant par un point O′.

Les courbes C′ qui correspondent dans σ' aux droites de σ, ne peuvent rencontrer les droites passant par O′ qu'en un point variable ; ces courbes, d'ordre n, passent donc $n-1$ fois par O′.

Les courbes C passant par un point de la droite Ω_1, comprennent cette droite comme partie et sont complétées par des courbes d'ordre $n-1$ passant $n-2$ fois par O et une fois par O_2, O_3, ..., O_{2n-2}. Ces courbes forment un faisceau ; il leur correspond dans σ' les droites d'un faisceau de sommet O_1'.

De même, aux droites Ω_1, Ω_2, ..., Ω_{2n-2} correspondent des points O_2', O_3', ..., O'_{2n-2}. Les courbes C′ passent simplement par O_1', O_2', ..., O'_{2n-2}.

Soit r une droite passant par O. Les courbes C tangentes à r en O forment un faisceau auquel correspond dans σ' un faisceau de droites de sommet R′. Le lieu de R′ est la courbe fondamentale Ω' associée à O ; elle est d'ordre $n-1$, égal à la multiplicité de O pour les courbes C. Lorsque r tourne autour de O et vient coïncider avec la droite Ω_1, le faisceau des courbes C touchant r en O contient la droite Ω_1 comme partie fixe et le point R′ coïncide avec O_1'. La courbe Ω' passe donc par O_1' et de même que O_2', O_3', ..., O'_{2n-2}. D'autre part, une droite r forme, avec Ω, une courbe C à laquelle correspond une droite r' passant par O′ et par le point R′ correspondant à r ; c'est le seul point de Ω' se trouvant sur r' en dehors de O′, donc O′ est multiple d'ordre $n-2$ pour Ω'.

Les droites r et r' se correspondent dans une projectivité.

Soit maintenant p une droite passant par O_1. Aux courbes C touchant p en O_1 correspondent les droites de σ' passant par un point P′. Le lieu de ce point est une droite Ω_1', fondamentale, associée à O_1. Lorsque p coïncide avec Ω_1, P′ coïncide avec O_1', donc Ω_1' passe par O_1'. D'autre part, la courbe $\Omega + \Omega_1$ est une courbe C, à laquelle correspond une droite passant par O′ et par O_1' ; cette droite est Ω_1'.

De même, à O_2, O_3, ..., O_{2n-2} sont associées les droites $\Omega_2' = O'O_2'$, $\Omega_3' = O'O_3'$, ..., $\Omega'_{2n-2} = O'O'_{2n-2}$.

Dans la projectivité entre les faisceaux de droites de sommets O, O′, les droites Ω_1, Ω_2, ..., Ω_{2n-2} ont pour homologues les droites Ω_1', Ω_2', ..., Ω'_{2n-2}.

La transformation qui vient d'être étudiée porte le nom de transformation de Jonquières.

47. Cas particuliers. — On obtient un premier cas particulier de la transformation de Jonquières en supposant que les courbes C ont des tangentes fixes en O, c'est-à-dire que les points $O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$ sont infiniment voisins de O (dans des directions différentes). Les tangentes fixes $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{n-1}$ sont des courbes fondamentales de $|C|$.

Soit r une droite passant par O. Les courbes C assujetties à rencontrer r en n points confondus en O acquièrent un point multiple d'ordre n en ce point et se décomposent en n droites : les droites $\Omega_n, \Omega_{n+1}, \ldots, \Omega_{2n-2}$ et une droite variable passant par O. A cet ensemble correspond dans σ' un faisceau de droites de sommet O'. Il y a une projectivité entre les faisceaux de droites de sommets O, O'.

Les courbes C comprenant Ω_n comme partie sont complétées par des courbes d'ordre $n-1$ ayant en O les $n-1$ tangentes $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{n-1}$ et par conséquent décomposées dans les droites $\Omega_{n+1}, \ldots, \Omega_{2n-2}$ et une droite variable passant par O. Il en résulte qu'aux points de la droite Ω_n correspond un point O_n' infiniment voisin de O' sur une droite Ω_n'. En partant de $\Omega_{n+1}, \ldots, \Omega_{2n-2}$, on arrive de même à des points $O'_{n+1}, \ldots, O'_{2n-2}$ infiniment voisins de O' sur des droites $\Omega'_{n+1}, \ldots, \Omega'_{2n-2}$. Il en résulte que les courbes C', d'ordre n, ont la multiplicité $n-1$ en O' et des tangentes fixes $\Omega'_n, \Omega'_{n+1}, \ldots, \Omega'_{2n-2}$.

Les courbes C contenant la droite Ω_1 comme partie sont complétées par des courbes irréductibles d'ordre $n-1$. A ces courbes correspondent dans σ' les droites passant par un point O_1'. Soit d'autre part γ une conique touchant Ω_1 en O ; les courbes C osculant γ en O forment un faisceau auquel correspond un faisceau de droites de sommet P'. Lorsque γ varie, P' décrit une droite Ω_1'. Lorsque γ comprend la droite Ω_1 comme partie, le point P' coïncide avec O_1'. D'autre part, quelle que soit γ, le faisceau des courbes osculant γ en O comprend la courbe formée de Ω_1 et de $\Omega_n, \ldots, \Omega_{2n-2}$, donc la droite Ω_1' coïncide avec la droite $O'O_1'$.

On arrive à des conclusions identiques en partant de $\Omega_2, \ldots, \Omega_{n-1}$.

On peut retrouver ces conclusions analytiquement. Prenons O comme sommet (0, 0, 1) du triangle de référence et soient

$$\varphi_{n-1}(x_1, x_2) = 0 , \qquad \psi_{n-1}(x_1, x_2) = 0$$

l'équation des tangentes fixes aux courbes C et celle des $n-1$

autres droites fondamentales. Les équations de la transformation sont

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 \psi_{n-1}(x_1, x_2) : x_2 \psi_{n-1}(x_1, x_2) : x_3 \varphi_{n-1}(x_1, x_2) + \varphi_n(x_1, x_2) .$$

La transformation inverse est donnée par

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1' \varphi_{n-1}(x_1', x_2') : x_2' \varphi_{n-1}(x_1', x_2') : x_3' \psi_{n-1}(x_1', x_2') - \varphi_n(x_1' x_2').$$

48. Second cas particulier. — Un second cas particulier de la transformation de Jonquières s'obtient en partant d'un réseau $|C|$ de courbes d'ordre n ayant un point O multiple d'ordre $n-1$, $n-1$ tangentes fixes Ω_1, Ω_2, ..., Ω_{n-1}, les branches linéaires des courbes C d'origine O s'osculant en O. Cela revient à supposer que $n-1$ points-base simples O_1, O_2, ..., O_{n-1} sont infiniment voisins de O (dans des directions différentes) et qu'à chacun de ces points est infiniment voisin un point-base simple, O_{n+i-1} étant infiniment voisin de O_i ($i=1$, 2, ..., $n-1$).

Les courbes C touchant en O une droite ont un point multiple d'ordre n en O et sont formées des droites Ω_1, Ω_2, ..., Ω_{n-1} et d'une droite variable passant par O ; il leur correspond les droites passant par un point O′ et il y a une projectivité entre les faisceaux de droites de sommets O, O′.

Soit γ une conique touchant Ω_1 en O et osculant les branches des courbes C tangentes à Ω_1 (c'est-à-dire que γ passe par les points O, O_1, O_n). Les courbes C ayant un contact du troisième ordre avec γ en O forment un faisceau auquel correspond dans σ' un faisceau de droites de sommet P′. Lorsque γ varie, P′ décrit une droite Ω_1'. Le faisceau de courbes C considéré contient la courbe formée de la droite Ω_1 comptée deux fois et des droites Ω_2, Ω_3, ..., Ω_{n-1} quelle que soit la conique γ, par conséquent la droite Ω_1' passe par O′.

On obtient de même $n-2$ droites Ω'_2, ..., Ω'_{n-1} passant par O′, en partant de Ω_2, ..., Ω_{n-1}.

Le réseau $|C'|$, formé de courbes d'ordre n ayant en O la multiplicité $n-1$, ne possède aucun point-base en dehors de O. On peut en conclure qu'il est de même nature que $|C|$. Il est plus simple d'employer la méthode analytique.

Les équations de la transformation sont

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 \varphi_{n-1}(x_1, x_2) : x_2 \varphi_{n-1}(x_1, x_2) : x_3 \varphi_{n-1}(x_1, x_2) + \varphi_n(x_1, x_2) ,$$

où $\varphi_{n-1}(x_1, x_2)=0$ représente l'ensemble des droites Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n.

La transformation inverse a pour équation

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1' \varphi_{n-1}(x_1', x_2') : x_2' \varphi_{n-1}(x_1', x_2') : x_3' \varphi_{n-1}(x_1, x_2') - \varphi_n(x_1, x_2') .$$

49. Réseaux homaloïdaux n'ayant que des points-base de même multiplicité. — Soit $|C|$ un réseau de courbes d'ordre n ayant ν points-base de multiplicité s. On a

$$\nu s^2 = n^2 - 1 , \qquad \nu s = 3(n-1) ,$$

d'où

$$s = \frac{n+1}{3} , \qquad n = 3s - 1 .$$

On en déduit

$$\nu s = 9s - 6, \qquad \nu = 9 - \frac{6}{s} .$$

Les cas suivants peuvent donc se présenter :

1° $s = 1$, $\nu = 3$, $n = 2$. On obtient un réseau de coniques.
2° $s = 2$, $\nu = 6$, $n = 5$.
3° $s = 3$, $\nu = 7$, $n = 8$.
4° $s = 6$, $\nu = 8$, $n = 17$.

Le premier réseau donne une transformation quadratique de première espèce ; nous étudierons les transformations fournies par les autres réseaux.

50. Transformation du cinquième ordre. — Soit $|C|$ un réseau de courbes du cinquième ordre ayant six points-base doubles $O_1, O_2, \ldots, O_6$.

Les courbes fondamentales du réseau sont les coniques passant par cinq des points-base. Nous désignerons par Ω_i la conique passant par les points-base, excepté par O_i.

Les courbes C comptant Ω_1 comme partie forment un faisceau auquel correspond dans σ' un faisceau de droites de sommet O_1', point-base double pour les courbes C', d'ordre cinq. On obtient de même cinq autres points-base O_2', O_3', ..., O_6' doubles pour les courbes C'.

Le réseau $|C'|$ étant de même structure que le réseau $|C|$, les propriétés de la transformation s'obtiennent sans difficulté. Considérons une droite p passant par O_1 ; en considérant les courbes C touchant p en O_1, on obtient, par le procédé habituel, la courbe fondamentale Ω_1' associée à O_1 ; c'est une conique puisque O_1 est double pour les courbes C. Observons que si la droite p est tangente à la conique Ω_2 en O_1, les courbes C touchant cette droite en O_1 comprennent Ω_2 comme partie. Il en résulte que la courbe Ω_1' passe par O_2'. Pour la même raison, Ω_1' passe par les points $O_3', \ldots, O_6'$.

On obtient de même les coniques fondamentales associées à $O_2, O_3, \ldots, O_6$.

Observons en passant que l'on peut obtenir la transformation étudiée en partant de la représentation plane de la surface cubique (I, ch. VI, § 2). Soit F une surface cubique. Considérons sur cette surface un double-six formé de six droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$ et de six droites $b_1, b_2, \ldots, b_6$. Une droite b_i coupe les droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$ sauf a_i. On sait qu'il existe un réseau $|H|$ de cubiques gauches ayant les droites a comme bisécantes, mais ne rencontrant pas les droites b. Les quadriques passant par une courbe H coupent encore F suivant des cubiques gauches K ne rencontrant pas les droites a mais ayant les droites b comme bisécantes. Une courbe H et une courbe K se rencontrent en cinq points.

On peut représenter F sur un plan σ en rapportant projectivement les cubiques K aux droites de ce plan, ou sur un plan σ' en rapportant projectivement les courbes H aux droites de ce plan. Un point de σ et un point de σ' homologues d'un même point de F se correspondent dans une transformation birationnelle T. Aux courbes H correspondent dans σ des quintiques passant doublement par les points homologues des droites a. Aux courbes K correspondent dans σ' des quintiques passant deux fois par les points homologues des droites b. La transformation T est donc bien celle qui a été étudiée.

51. Transformation du huitième ordre. — Soit $|C|$ un réseau homaloïdal de courbes du huitième ordre ayant sept points triples $O_1, O_2, \ldots, O_7$. Les courbes fondamentales sont les cubiques ayant un point double en un point-base et passant par les autres. Nous désignerons par Ω_i la cubique fondamentale ayant un point double en O_i et passant simplement par les autres points fondamentaux.

Les courbes C contenant Ω_1 comme partie formant un faisceau auquel correspond dans σ' un faisceau de droites de sommet O_1', point fondamental multiple d'ordre trois pour les courbes C', d'ordre huit. On obtient de même six autres points fondamentaux, $O_2', O_3', \ldots, O_7'$, triples pour les courbes C'.

On démontre, par la méthode habituelle, qu'aux points infiniment voisins de O_1 correspondent les points d'une cubique fondamentale Ω_1'. Aux points infiniment voisins de O_1' correspondent les points de Ω_1 ; cette courbe a deux points infiniment voisins de O_1, donc Ω_1' a également deux points infiniment voisins de O_1' et a donc un point double en O_1'. D'autre part, les courbes C touchant Ω_2 en O_1 comprennent cette courbe comme partie, donc Ω_1' passe par O_2'. De même cette courbe passe par $O_3', \ldots, O_7'$. On arrive à des conclusions analogues pour les courbes Ω_2', ..., Ω_7' fondamentales, associées à O_2, ..., O_7.

Considérons une des ∞^2 cubiques γ passant par O_1, O_2, ..., O_7. A cette courbe correspond dans σ' une courbe d'ordre 24 comprenant une fois chacune des sept cubiques Ω_1', Ω_2', ..., Ω_7'. Si l'on défalque ces courbes, il reste une cubique γ'. La courbe γ coupe Ω_1 en un point en dehors des points fondamentaux, donc γ' passe par O_1' et de même par O_2', ..., O_7'. La transformation fait donc correspondre au réseau $|\gamma|$ le réseau $|\gamma'|$.

Remarque. — Si l'on considère le réseau des cubiques γ passant par sept points O_1, O_2, ..., O_7, on peut faire correspondre à un point P du plan le point P', neuvième point commun aux courbes γ passant par P. On obtient ainsi une transformation birationnelle involutive. Les couples de points homologues P, P' forment dans le plan une involution d'ordre deux appelée *involution de Geiser*. La transformation ainsi obtenue sera étudiée plus tard. On verra qu'elle possède les mêmes propriétés que la transformation déduite de la précédente en faisant coïncider O_1', O_2', ..., O_7' respectivement avec O_1, O_2, ..., O_7.

52. Transformation du dix-septième ordre. — Considérons le réseau $|C|$ de courbes d'ordre 17 ayant 8 points sextuples O_1, O_2, ..., O_8. Les courbes fondamentales sont les sextiques Ω_1, Ω_2, ..., Ω_8, la courbe Ω_i ayant un point triple en O_i et des points doubles aux autres points fondamentaux.

Aux courbes C contenant Ω_1 correspondent dans σ' les droites passant par un point O_1', fondamental, sextuple pour les courbes C' d'ordre 17. On obtient de même sept autres points O_2, O_3, ..., O_8 sextuples pour les courbes C'.

Aux points infiniment voisins de O_1 correspondent les points d'une courbe fondamentale du sixième ordre Ω_1', ayant un point triple en O_1', puisque Ω_1 a trois de ses points infiniment voisins de O_1.

Aux points infiniment voisins de O_2' correspondent les points de Ω_2, qui a deux de ses points infiniment voisins de O_1, donc Ω_1' a un point double en O_2' et de même en O_3', ..., O_8'.

Les courbes fondamentales Ω_2', ..., Ω_8' associées à O_2, O_3, ..., O_8, sont des sextiques ayant des propriétés analogues.

Aux cubiques γ_3 passant par O_1, O_2, ..., O_8 correspondent des cubiques γ_3' passant par O_1', O_2', ..., O_8'. Les neuvièmes points-base des faisceaux $|\gamma_3|$, $|\gamma_3'|$ se correspondent donc.

A une sextique γ_6 ayant des points doubles en O_1, O_2, ..., O_8 correspond dans σ' une courbe d'ordre 6×17 comprenant deux fois chacune des courbes Ω_1', Ω_2', ..., Ω_8'. Si l'on défalque ces courbes, on obtient une courbe du sixième ordre, γ_6'. La courbe γ_6 coupant chacune des courbes Ω_1, Ω_2, ..., Ω_8 en deux points en dehors des points-base, γ_6' a des points doubles en O_1', O_2', ..., O_8'. Au système linéaire triplement infini $|\gamma_6|$, la transformation fait correspondre le système triplement infini $|\gamma_6'|$.

Remarque. — Si l'on imaginait la transformation précédente dans le cas où les points O_1', O_2', ..., O_8' coïncident avec les points O_1, O_2, ..., O_8, la transformation ferait correspondre le système $|\gamma_6|$ à lui-même. On étudiera plus tard une transformation obtenue de la manière suivante : il existe ∞^2 couples de points P, P′ imposant une seule condition aux courbes de $|\gamma_6|$ qui doivent les contenir. Ces ∞^2 couples de points forment l'*involution de Bertini*. Elle détermine une transformation possédant les mêmes propriétés que la précédente.

§ 5. *Les transformations birationnelles régulières*

53. Préliminaires. — Soit T une transformation birationnelle entre deux plans σ, σ', faisant correspondre aux droites de σ des courbes C′ de σ' et aux droites de σ', des courbes C d'ordre n. Nous dirons que la transformation est régulière si les points-base des réseaux $|C|$, $|C'|$ sont tous ordinaires et à tangentes variables.

Il convient de remarquer qu'il ne suffit pas que l'un des réseaux $|C|$, $|C'|$ n'ait que des points-base ordinaires à tangentes variables pour que la transformation soit régulière. Considérons en effet une transformation quadratique de première espèce T entre deux plans σ, σ'' ; soient O_1, O_2, O_3 les points fondamentaux dans σ, O_1'', O_2'', O_3'' les points fondamentaux dans σ''. Soit maintenant T′ une transformation quadratique de première espèce entre σ'' et σ', dont les points fondamentaux dans σ'' sont O_4'' appartenant à $O_2''O_3''$, O_5'' appartenant à $O_3''O_1''$, O_6'' appartenant à $O_1''O_2''$; soient O_4', O_5', O_6' les points fondamentaux de T′ dans σ'. A O_1'', O_2'', O_3'', T′ fait correspondre des points O_1', O_2', O_3'. A O_4'', O_5'', O_6'', T fait correspondre les points O_4, O_5, O_6 infiniment voisins respectivement de O_1, O_2, O_3.

Aux droites de σ, TT′ fait correspondre dans σ' des courbes C′ du quatrième ordre ayant des points doubles à tangentes variables en O_4', O_5', O_6' et des points simples à tangentes variables O_1', O_2', O_3'. Par contre, aux droites de σ' correspondent dans σ des courbes du quatrième ordre ayant des points doubles O_1, O_2, O_3 et en chacun de ces points, une tangente fixe.

54. Notations. — Reprenons la transformation régulière T. Nous supposerons que le réseau $|C|$ possède ν points-base O_1, O_2, ..., O_ν respectivement multiples d'ordre s_1, s_2,

..., s_ν. Nous supposerons de même que $|C'|$ a ν' points-base O'_1, O'_2, ..., $O'_{\nu'}$, respectivement multiples d'ordres s'_1, s'_2, ..., $s'_{\nu'}$ pour les courbes C'.

Nous aurons les relations fondamentales

$$s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_\nu^2 = n^2 - 1 \quad (1)$$

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu = 3(n-1) \quad (2)$$

$$s_1'^2 + s_2'^2 + \ldots + s_{\nu'}'^2 = n^2 - 1 \quad (3)$$

$$s_1' + s_2' + \ldots + s_{\nu'}', = 3(n-1). \quad (4)$$

Le réseau $|C|$ possède ν' courbes fondamentales Ω_1, Ω_2, ..., $\Omega_{\nu'}$, d'ordres s'_1, s'_2, ..., $s'_{\nu'}$, respectivement associées aux points fondamentaux O'_1, O'_2, ..., $O'_{\nu'}$.

Le réseau $|C'|$ possède ν courbes fondamentales Ω_1', Ω_2', ..., Ω'_ν, d'ordres s_1, s_2, ..., s_ν, Ω_i' étant associée à O_i.

Nous supposerons que la courbe Ω_i a les multiplicités α_{i1} en O_1, α_{i2} en O_2, ..., $\alpha_{i\nu}$ en O_ν et que la courbe fondamentale Ω'_k a les multiplicités α'_{k1} en O'_1, α'_{k2} en O'_2, ..., $\alpha'_{k\nu'}$ en $O'_{\nu'}$.

55. Propriétés des courbes fondamentales. — I. Les points communs à deux courbes fondamentales sont des points fondamentaux. — En effet, supposons que les courbes fondamentales Ω_i', Ω_k' puissent avoir en commun un point P non fondamental. A ce point, considéré comme appartenant à la courbe Ω_i', correspond un point infiniment voisin de O_i et, considéré comme appartenant à Ω_k', un point infiniment voisin de O_k. A P correspondraient donc deux points distincts, alors que la transformation est birationnelle. P est donc nécessairement fondamental.

II. Une courbe fondamentale ne peut avoir un point multiple qui ne soit pas un point fondamental. — Supposons en effet que la courbe fondamentale Ω_i' puisse avoir un point P, non fondamental, multiple d'ordre $s > 1$. Aux points de Ω_i' correspondent les points infiniment voisins de O_i et en particulier, au point P correspondent s points infiniment voisins de O_i, ce qui est absurde, puisque la transformation est birationnelle.

III. La multiplicité du point O_i pour la courbe Ω_k est égale à celle de O_k' pour la courbe Ω_i'. — Aux points de Ω_i' correspondent les points infiniment voisins de O_i ; en particulier, aux points de Ω_i', infiniment voisins de O_k' correspondent α'_{ik} points infiniment voisins de O_i. Mais comme aux points infiniment voisins de O_k' correspondent les points de Ω_k, ces α'_{ik} points doivent coïncider avec les α_{ki} points de Ω_k infiniment voisins de O_i. On a donc

$$\alpha_{ki} = \alpha'_{ik}.$$

56. Théorème. — *Le nombre des points fondamentaux est le même dans les deux plans.*

La jacobienne C_j du réseau $|C|$ est formée des courbes Ω_1, Ω_2, ..., $\Omega_{\nu'}$. Le point O_i est multiple d'ordre $3s_i - 1$ pour C_j, donc on a

$$\alpha_{1i} + \alpha_{2i} + \ldots + \alpha_{\nu' i} = 3 s_i - 1.$$

Faisons $i = 1, 2, \ldots, \nu$ et additionnons membre à membre. On obtient

$$\sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu'} \alpha_{ki} = 3 \sum_{i=1}^{\nu} s_i - \nu = 3(n-1) - \nu.$$

En répétant le même raisonnement pour le réseau $|C'|$, on a

$$\sum_{i=1}^{\nu'} \sum_{k=1}^{\nu} \alpha'_{ki} = \sum_{i=1}^{\nu'} \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_{ik} = 3 \sum_{i=1}^{\nu'} s_i' - \nu' = 3(n-1) - \nu'.$$

Les premiers membres sont égaux, donc $\nu = \nu'$.

57. Propriétés des nombres α. — Les courbes C ayant des tangentes variables en O_i, la jacobienne C_j a des tangentes distinctes en ce point et les courbes fondamentales ont donc des tangentes distinctes. En exprimant que les courbes Ω_i, Ω_k ne se rencontrent pas en dehors des points fondamentaux, on a

$$\alpha_{i1}\,\alpha_{k1} + \alpha_{i2}\,\alpha_{k2} + \ldots + \alpha_{i\nu}\,\alpha_{k\nu} = s_i'\, s_k'. \tag{1}$$

De même, deux courbes Ω_i', Ω_k' ne se rencontrent qu'aux points fondamentaux, donc

$$\alpha_{1i}\,\alpha_{1k} + \alpha_{2i}\,\alpha_{2k} + \ldots + \alpha_{\nu i}\,\alpha_{\nu k} = s_i\, s_k. \tag{2}$$

La courbe Ω_i est rationnelle, donc

$$\alpha_{i1}(\alpha_{i1} - 1) + \alpha_{i2}(\alpha_{i2} - 1) + \ldots + \alpha_{i\nu}(\alpha_{i\nu} - 1)$$
$$= (s_i' - 1)(s_i' - 2).$$

On a d'autre part, en considérant la multiplicité de la jacobienne C_j' de $|C'|$ en O_1',

$$\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \ldots + \alpha_{i\nu} = 3s_i' - 1, \tag{3}$$

donc la relation précédente donne

$$\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + \ldots + \alpha_{i\nu}^2 = s_i'^2 + 1. \tag{4}$$

On a de même

$$\alpha_{1i} + \alpha_{2i} + \ldots + \alpha_{\nu i} = 3 s_i - 1, \tag{5}$$

$$\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2 + \ldots + \alpha_{\nu i}^2 = s_i^2 - 1. \tag{6}$$

Formons le déterminant

$$\Delta = | \alpha_{i1} \quad \alpha_{i2} \quad \ldots \quad \alpha_{i\nu} |$$

et élevons-le au carré en multipliant ligne par ligne. En tenant compte des relations (1) et (4), on a

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 + s_1'^2 & s_1' s_2' & \ldots & s_1' s_\nu' \\ s_2' s_1' & 1 + s_2'^2 & \ldots & s_2' s_\nu' \\ . & . & \ldots & . \\ s_\nu' s_1' & s_\nu' s_2' & \ldots & 1 + s_\nu'^2 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\Delta^2 = 1 + s_1'^2 + s_2'^2 + \ldots + s_\nu'^2 = n^2.$$

La valeur absolue du déterminant Δ est donc égale à n ; son signe dépend de l'ordre dans lequel on a classé les points fondamentaux.

58. Distribution des points fondamentaux de même multiplicité dans les deux plans. — Considérons, dans le plan σ, le groupe des points fondamentaux de multiplicité déterminée et le groupe des courbes fondamentales d'un ordre déterminé. Pour fixer les idées, supposons que le groupe de points soit formé de $O_1, O_2, \ldots, O_k$ et le groupe de courbes fondamentales de $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_h$. On suppose donc

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_k, \qquad s_1' = s_2' = \ldots = s_h'.$$

Supposons de plus $k > 1$ et formons le tableau

$$\begin{matrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \ldots & , \alpha_{1k}, \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \ldots & , \alpha_{2k}, \\ \alpha_{k1}, & \alpha_{h2}, & \ldots & , \alpha_{hk}, \end{matrix}$$

dont les lignes horizontales donnent les multiplicités des points $O_1, O_2, \ldots, O_k$ pour les courbes $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_h$ et les lignes verticales, les multiplicités des points $O_1', O_2', \ldots, O_h'$ pour les courbes $\Omega_1', \Omega_2', \ldots, \Omega_k'$ dans le plan σ'.

Dans la formation du réseau $|C|$, les points $O_1, O_2, \ldots, O_k$ jouent des rôles symétriques et de même, dans la formation de la jacobienne de $|C|$, les courbes $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_h$ jouent également des rôles symétriques. Il en résulte que les différentes lignes (ou colonnes) du tableau précédent doivent être formées des mêmes nombres et présenter les mêmes permutations de ces nombres, chacune de ces permutations le même nombre de fois. Le nombre de permutations se présentant dans les lignes horizontales du tableau doit par conséquent être un diviseur de h et de même, le nombre de permutations se présentant dans les colonnes doit être un diviseur de k.

Cette condition est certainement vérifiée si tous les nombres α du tableau sont égaux. Ecartons cette hypothèse. Supposons que dans les lignes du tableau, il y ait des groupes de nombres égaux formés de $k_1, k_2, \ldots, k_\alpha$ nombres et que, dans les colonnes il y ait de même des groupes de nombres égaux formés de $h_1, h_2, \ldots, h_\beta$ nombres. On doit avoir

$$\lambda \frac{k\,!}{k_1\,!\,k_2\,!\ldots k_\alpha\,!} = h, \quad \mu \frac{h_1\,!}{h_1\,!\,h_2\,!\ldots h_\beta\,!} = k.$$

Supposons pour fixer les idées $k \geqslant h$. La première relation peut s'écrire

$$\lambda \frac{k_1+1}{2}\,\frac{k_1+2}{3}\cdots\frac{k_1+k_2-1}{k_2}\,\frac{k_1+k_2}{1}\cdots\frac{k-1}{k_\alpha} = \frac{h}{k}.$$

Dans le premier membre, tous les facteurs sont supérieurs ou égaux à l'unité et on ne peut donc avoir $k > h$. On a donc $h = k$ et tous les facteurs sont égaux à l'unité. Cela entraîne

$$\lambda = 1, \quad k_1 = 1, \quad \alpha = 2, \quad k_2 = k - 1.$$

On trouve de même

$$\mu = 1, \quad h_1 = 1, \quad \beta = 2, \quad h_2 = k - 1.$$

Si tous les nombres α du tableau considéré sont égaux, on remplacera les h courbes fondamentales par un autre groupe de h' courbes fondamentales de même ordre. On trouvera $k = h'$, ou bien tous les nombres α du nouveau tableau seront égaux. Dans ce cas, on considérera un nouveau groupe de h'' courbes fondamentales de même ordre, et ainsi de suite. On parviendra certainement à un groupe de k courbes fondamentales, car autrement, comme $k > 1$, le déterminant Δ aurait au moins deux colonnes identiques et serait nul, alors qu'il doit être égal à n.

En continuant le raisonnement précédent par la considération des différents groupes de points fondamentaux de même multiplicité de σ, et en observant que les nombres des points fondamentaux et des courbes fondamentales sont égaux, on parvient au résultat suivant : *S'il y a, dans le plan* σ, r_1 *points fondamentaux simples,* r_2 *points fondamentaux doubles,* ..., r_{n-1} *points fondamentaux multiples d'ordre* $\mathrm{n}-1$ *et dans le plan* σ', r_1' *points fondamentaux simples,* r_2' *doubles,* ..., r'_{n-1} *multiples d'ordre* $\mathrm{n}-1$, *les nombres* $\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \ldots, \mathrm{r}_{n-1}$ *sont égaux, dans un certain ordre, aux nombres* $\mathrm{r}_1', \mathrm{r}_2', \ldots, \mathrm{r}'_{n-1}$.

59. Transformée d'une courbe algébrique. — Soit Γ une courbe algébrique d'ordre m passant r_1 fois par O_1, r_2 fois par $O_2, \ldots, r_\nu$ fois par O_ν. A cette courbe, la transformation fait correspondre dans σ' une courbe d'ordre mn comprenant r_1

fois la courbe Ω_1', r_2 fois Ω_2', ..., r_ν fois Ω_ν'. Si l'on défalque de la courbe obtenue ces courbes fondamentales, il reste une courbe Γ' d'ordre

$$m' = mn - r_1 s_1 - r_2 s_2 - \ldots - r_\nu s_\nu ,$$

que l'on considérera comme la transformée de Γ.

Observons qu'une transformation birationnelle étant le produit d'un nombre fini de transformations quadratiques et le genre d'une courbe étant conservé par les transformations quadratiques, les courbes Γ et Γ' ont même genre.

Si la courbe Γ appartient à un système linéaire $|\Gamma|$, la courbe Γ' appartient à un système linéaire $|\Gamma'|$ ayant même degré, même genre et même dimension que $|\Gamma|$.

CHAPITRE III

POINTS SINGULIERS DES SURFACES ALGÉBRIQUES

§ 1. *Transformations quadratiques de l'espace*

60. Définition. — Soient O un point et Γ une conique dont le plan σ ne passe pas par le point O. Les quadriques Q passant par O et par Γ forment un système linéaire triplement infini. Deux quadriques Q ont en commun, en dehors de Γ, une seconde conique γ passant par O et s'appuyant en deux points sur Γ. Une troisième quadrique Q n'appartenant pas au faisceau déterminé par les deux premières, coupe γ en un seul point en dehors du point O et de la conique Γ. Trois quadriques Q n'appartenant pas à un même faisceau ont donc encore un seul point commun en dehors de la base du système $|Q|$.

Soient 0, 0, 0, 1 les coordonnées du point O et

$$x_4 = 0\,, \qquad \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

les équations de la conique Γ. Les quadriques Q ont pour équation

$$x_4(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) + \lambda_4 \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0\,.$$

Etablissons une projectivité entre les quadriques Q et les plans d'un espace Σ'; nous pouvons toujours disposer du tétraèdre de référence de Σ' de manière que cette projectivité se traduise par

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 x_4 : x_2 x_4 : x_3 x_4 : \varphi(x_1, x_2, x_3)\,. \qquad (1)$$

De ces relations, on déduit

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1' x_4' : x_2' x_4' : x_3' x_4' : \varphi(x_1', x_2', x_3')\,, \qquad (2)$$

et si l'on désigne par Σ l'espace contenant $|Q|$, on voit qu'aux plans de Σ correspondent les quadriques Q'

$$x_4'(\lambda_1' x_1' + \lambda_2' x_2' + \lambda_3' x_3') + \lambda_4' \varphi(x_1', x_2', x_3') = 0\,,$$

de Σ'. Ces quadriques passent par le point $O'(0, 0, 0, 1)$ et par la conique Γ', d'équations

$$x_4' = 0\,, \qquad \varphi(x_1', x_2', x_3') = 0\,.$$

Les équations (1) ou (2) établissent une correspondance biunivoque entre les points x de Σ et les points x' de Σ' ; cette correspondance est appelée transformation ou correspondance quadratique.

61. Propriétés des points O, O'. — Les formules (1) et (2) cessent d'avoir un sens lorsque le point x coïncide avec O ou le point x' avec O'. Comme dans le cas du plan, nous conviendrons de dire que deux courbes se touchant en O (ou en O') ont en commun un point infiniment voisin de O (ou de O'), ces points fictifs constituant le domaine du premier ordre de O (ou de O'). Nous rechercherons quels sont les points que la correspondance fait correspondre aux points infiniment voisins de O et de O'.

Observons tout d'abord que les formules (1) et (2) établissent une projectivité entre les gerbes de sommets O et O'. Soient α un plan passant par O et α' le plan passant par O' qui lui correspond. Nous désignerons par A_1, A_2 les points d'intersection de α avec la conique Γ, par A_1', A_2' ceux de α' avec Γ'.

Aux droites de α, sections de ce plan pour les plans de Σ, correspondent, dans une projectivité, les coniques passant par O', A_1', A_2', sections de α' par les quadriques Q' homologues des plans considérés. Par conséquent, la transformation établit entre les plans α et α' une correspondance quadratique. Dans celle-ci, aux points infiniment voisins de O situés dans α, correspondent, projectivement, les points de la droite $A_1'A_2' = \alpha'\sigma'$. On en conclut que dans l'espace, aux points infiniment voisins de O correspondent, dans une projectivité, les points du plan σ'.

Remarquons que la projectivité déterminée par les équations (1) ou (2) entre les gerbes de sommets O, O', fait correspondre au cône $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ projetant Γ de O, le cône $\varphi(x_1', x_2', x_3') = 0$ projetant Γ' de O'.

De même, aux points infiniment voisins de O' correspondent projectivement les points du plan σ.

Aux points infiniment voisins de O *(ou de* O'*) correspondent, dans une projectivité, les points du plan* σ' *(ou* σ*).*

62. Propriétés des coniques Γ, Γ'. — Soit A un point de la conique Γ. A la droite OA, la projectivité entre les gerbes de sommets O, O' fait correspondre une droite O'A' s'appuyant en A' sur Γ'.

Considérons un plan α passant par OA et le plan α' qui lui correspond. Le plan α' passe par A' et coupe encore Γ' en un second point A_1'. Dans la correspondance quadratique induite entre les plans α, α' par la transformation (1), aux points infiniment voisins de A correspondent, projectivement, les points soit de la droite O'A', soit de la droite $O'A_1'$. Supposons que le second cas se présente. Alors quand α tourne autour de OA, la droite $O'A_1'$ décrit le cône projetant Γ' de O' ; aux points de Σ infiniment voisins de A correspondent les points de ce cône. Mais alors, comme la propriété a lieu pour tout point A de Γ, l'homologue de tout point du cône en question serait indéterminé, ce qui est absurde. Aux points infiniment voisins de A dans Σ correspondent donc les points de la droite $O'A'$. Inversement, aux points de Σ' infiniment voisins de A' correspondent les points de la droite OA.

Aux points infiniment voisins d'un point A *(ou* A'*) de la conique* Γ *(ou* Γ'*) correspondent les points de la droite passant par* O' *(ou par* O*) s'appuyant en* A' *(ou* A*) sur* Γ' *(ou* Γ*), cette droite correspondant à* OA *(ou* $O'A'$*) dans la projectivité déterminée par la transformation entre les gerbes de sommets* O, O'.

63. Remarque. — Il convient d'observer qu'à un plan

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$$

passant par O, la transformation (2) fait correspondre la quadrique Q'

$$x_4'(\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3') = 0\,,$$

formée du plan $x_4' = 0$ et d'un plan passant par O'.

De même, à un plan passant par O' correspond une quadrique Q formée du plan $x_4 = 0$ et d'un plan passant par O.

64. Transformée d'une surface. — Soit F une surface algébrique d'ordre n ayant la multiplicité s en O et pour laquelle la conique Γ est multiple d'ordre r. A la surface F correspond dans Σ' une surface d'ordre $2n$ comprenant un certain nombre de fois le plan σ' et le cône (Γ') projetant Γ' de O'. Nous appellerons transformée F' de F la surface obtenue en supprimant ces composantes.

A une droite r' de Σ' correspond la conique γ passant par O, s'appuyant en deux points sur Γ, commune aux quadriques Q homologues des plans passant par r'. L'ordre de F' sera égal au nombre de points de rencontre de F avec cette conique γ en dehors de O et de Γ, c'est-à-dire à

$$n' = 2n - s - 2r\,.$$

Une droite passant par O coupe F en $n - s$ points en dehors de O ; la droite correspondante, passant par O', doit encore rencontrer F' en $n - s$ points en dehors de O', donc ce point est multiple d'ordre $s' = n - 2r$ pour F'.

Soit a une droite s'appuyant sur Γ en un point A et soit A' le point de Γ' tel que $O'A'$ corresponde à OA. Au plan $\alpha = Oa$, correspond un plan α' passant par $O'A'$ et dans la transformation quadratique induite entre ces deux plans, à la droite a

correspond une conique formée de la droite $O'A'$ et d'une droite a' passant par A'. La droite a coupe F en $n-r$ points en dehors de A, donc la droite a' doit couper F' en $n-r$ points en dehors de A' et la conique Γ' est multiple d'ordre $r'=n-s-r$ pour F'.

Aux points de F infiniment voisins de O correspondent les points d'une courbe d'ordre s, section de F' par le plan σ' en dehors de Γ'.

La surface d'ordre $2n$ correspondant à F se compose de F', de s fois le plan σ' et de r fois le cône (Γ').

65. Transformée d'une courbe. — Soit C une courbe d'ordre n ayant en O la multiplicité s et s'appuyant en r points sur la conique Γ. La transformée de C est d'ordre $2n$ et comprend un certain nombre de droites provenant du passage de C par O et de ses points d'appui sur Γ. Nous appellerons transformée C' de C la partie de la courbe d'ordre $2n$ débarrassée de ces droites.

L'ordre de C' est égal en nombre de points de rencontre de c avec une quadrique Q en dehors de O et de Γ, c'est-à-dire à $n'=2n-s-r$.

Un plan passant par O coupe C en dehors de O en $n-s$ points, donc le plan homologue passant par O' doit couper C' en $n-s$ points en dehors de O'. Ce point est donc multiple d'ordre $s'=n-r$ pour C'.

Aux points infiniment voisins de O, appartenant à C, correspondent s points du plan σ' en dehors de Γ', donc la courbe C' s'appuie en $r'=2n-2r-s$ points sur la conique Γ'.

Aux r points d'appui de C sur Γ correspondent r droites du cône (Γ'). La courbe d'ordre $2n$ qui correspond à C est formée de C', de ces r droites et de s droites qui proviennent du passage de C par O. Pour nous rendre compte de la position de ces droites, plaçons-nous dans le cas où C possède s tangentes distinctes en O, tangentes n'appartenant pas au cône (Γ) projetant Γ de O. Soient t une de ces tangentes, τ le plan osculateur à la courbe C en O, passant par t. A t et τ correspondent une droite t' et un plan τ' passant par O' ; la droite t' coupe σ' au point P' homologue du point P de t, infiniment voisin de O. Entre les plans τ, τ', nous avons une transformation quadratique et aux points infiniment voisins de O dans τ correspondent les points de la droite $\sigma'\tau'$. Observons que la tangente à C' en P' appartient au plan τ'. Les s droites en question sont donc les intersections avec σ' des plans projetant de O' les tangentes à C' aux s points de rencontre de cette courbe avec σ' en dehors de Γ'.

66. Cas particuliers de la transformation quadratique. — On peut obtenir des cas particuliers de la transformation quadratique de deux manières, soit en supposant que la conique Γ est dégénérée, soit en supposant que le point O appartenant à la conique Γ, les quadriques Q satisfaisant alors à une condition de contact. Nous étudierons tout d'abord les transformations obtenues en faisant dégénérer la conique Γ.

Supposons en premier lieu que la conique Γ dégénère en deux droites distinctes et posons

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv x_2 x_3 .$$

Les équations de la transformation deviennent

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 x_4 : x_2 x_4 : x_3 x_4 : x_2 x_3 ,$$
$$x_1' : x_2 : x_3 : x_4 = x_1' x_4' : x_2' x_4' : x_3' x_4' : x_2' x_3' .$$

Aux points infiniment voisins d'un point A de la droite $x_2 = x_4 = 0$ correspondent les points d'une droite a' du plan $x_2' = 0$, passant par O′. Aux points infiniment voisins d'un point A de la droite $x_3 = x_4 = 0$ correspondent les points d'une droite du plan $x_3' = 0$, passant par O′.

Aux points infiniment voisins de O correspondent les points du plan σ' comme dans le cas général.

On obtient des propriétés analogues pour la transformation inverse.

Supposons maintenant que Γ dégénère en une droite comptée deux fois

$$x_4 = 0 , \qquad x_3^2 = 0 .$$

Les quadriques Q touchent le plan $x_4 = 0$ le long de la droite $x_3 = x_4 = 0$ et sont donc des cônes dont les sommets varient sur cette droite. Les équations de la transformation sont

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 x_4 : x_2 x_4 : x_3 x_4 : x_3^2 ,$$
$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1' x_4' : x_2' x_4' : x_3' x_4' : x_3'^2 .$$

A un plan α passant par O, correspond un plan α' passant par O′ et entre ces plans, la transformation induit une transformation quadratique de seconde espèce. Si α coupe la droite $x_3 = x_4 = 0$ en un point A et α' la droite $x_3' = x_4' = 0$ en un point A′, aux points infiniment voisins de A dans α correspondent les points infiniment voisins de A′ dans α'. Si A_1 est le point infiniment voisin de A situé dans α et dans $x_3 = 0$, aux points infiniment voisins de A_1 dans α correspondent les points de la droite O′A′.

Aux points infiniment voisins de O correspondent, comme dans le cas général, les points du plan σ'. En particulier, au point infiniment voisin de O sur la droite $x_1 = x_2 = 0$ correspond le point $x_1' = x_2' = x_4' = 0$.

Nous utiliserons plus loin cette transformation.

67. Autres cas particuliers de la transformation quadratique. — Nous supposerons maintenant que le point O appartient à la conique Γ. Supposons que celle-ci ait pour équations

$$x_4 = 0 , \qquad x_1 x_3 + x_2^2 = 0$$

et qu'au point O(0, 0, 1, 0), les quadriques Q passant par Γ doivent toucher le plan $x_1 = 0$. Les quadriques Q ont pour équation

$$x_4(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_4 x_4) + \lambda_3 (x_1 x_3 + x_2^2) = 0 .$$

Posons

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 x_4 : x_2 x_4 : x_1 x_3 + x_2^2 : x_4^2 , \qquad (1)$$

d'où

$$x_2 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1'^2 : x_1' x_2' : x_3' x_4' - x_2'^2 : x_1' x_4' . \qquad (2)$$

On obtient donc une transformation biunivoque.

Aux plans de Σ, correspondent les quadriques Q′ passant par la conique

$$x_1' = 0 , \quad x_3' x_4' - x_2'^2 = 0$$

et touchant le plan $x_4' = 0$ au point O′(0, 0, 1, 0).

Entre les gerbes de sommets O, O′, les équations (1) et (2) déterminent une homographie. Si α et α' sont des plans homologues dans celle-ci, la transformation détermine entre ces plans une transformation quadratique de seconde espèce. Des propriétés de celle-ci, on peut déduire facilement celles de la transformation (1).

On peut également considérer le cas où la conique Γ dégénère en deux droites, les quadriques Q ayant un plan tangent fixe en un point d'une de celles-ci.

Le second cas particulier que nous considérerons est obtenu en supposant que la conique Γ dégénère en deux droites, les quadriques Q ayant un contact du second ordre au point commun à ces droites.

Si les deux droites ont pour équations

$$x_2 = x_4 = 0 , \qquad x_3 = x_4 = 0 ,$$

les quadriques Q sont données par

$$x_4(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) + \lambda_4 (x_1 x_4 - x_2 x_3) = 0 .$$

Si l'on pose

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 x_4 : x_2 x_4 : x_3 x_4 : x_1 x_4 - x_2 x_3 , \qquad (3)$$

on a

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1' x_4' : x_2' x_4' : x_3' x_4' : x_1' x_4' + x_2' x_3' . \qquad (4)$$

On obtient donc encore une correspondance biunivoque.

Aux plans de Σ, correspondent les quadriques

$$x_4'(\lambda_1'x_1'+\lambda_2'x_2'+\lambda_3'x_3')+\lambda_4'(x_1'x_4'+x_2'x_3')=0\,,$$

forment un système $|Q'|$, analogue au système $|Q|$.

Entre les gerbes de sommets $O(1, 0, 0, 0)$ et $O'(1, 0, 0, 0)$, les transformations (3), (4) déterminent une homographie. Entre deux plans α, α' homologues dans celle-ci, la transformation induit une correspondance quadratique de troisième espèce. On en déduit les propriétés de la transformation.

§ 2. *Composition des points singuliers d'une surface algébrique*

68. Préliminaires. — Désignons par T la transformation quadratique obtenue en rapportant projectivement aux plans de l'espace les quadriques Q passant par un point O et par une conique Γ, irréductible ou non, dont le plan ne passe pas par O. Comme nous l'avons vu, aux points infiniment voisins de O, c'est-à-dire au domaine du premier ordre de O, correspondent projectivement les points d'un plan σ'.

Soient O_1 un point infiniment voisin de O, O_1' le point qui lui correspond dans σ'. Aux points du domaine du premier ordre de O_1', T^{-1} fait correspondre des points fictifs infiniment voisins de O_1. Lorsque O_1 décrit le domaine du premier ordre de O, les points infiniment voisins de O_1 décrivent le domaine du second ordre de O.

On peut transformer un point du domaine du second ordre de O, infiniment voisin de O_1 par exemple, en opérant deux transformations quadratiques analogues à T. Une première transformation T fait correspondre à O_1 un point O_1' de σ'. Une seconde transformation quadratique fait correspondre au domaine du premier ordre de O_1' un plan σ''. Au point du domaine du second ordre de O considéré, correspond un point proprement dit de σ''.

On définit de même, de proche en proche, les domaines du troisième, du quatrième ordre, ... de O.

Deux courbes ayant un point simple en O et un contact d'ordre n en ce point, ont en commun le point O et une suite de n points infiniment voisins successifs $O_1, O_2, \ldots, O_n$, le point O_i appartenant au domaine d'ordre i de O.

69. Point singulier d'une surface algébrique. — Soit F une surface algébrique d'ordre n ayant en O un point multiple d'ordre s. Comme nous l'avons vu, la transformation T fait correspondre à F une surface F' d'ordre $2n-s$, passant $n-s$ fois par la conique Γ' et coupant encore σ' suivant une courbe d'ordre s (nous reprenons les notations du n° 60). Soit γ' cette courbe.

Si la surface F' a en un point O_1' du plan σ', la multiplicité s_1, nous dirons que le point O_1 correspondant du domaine du premier ordre de O est multiple d'ordre s_1 pour F.

Le cône tangent en O à la surface F a comme homologue le cône projetant de O' la courbe γ'. La droite $O'O_1'$ est multiple d'ordre s_1 au moins pour ce cône et par suite la droite OO_1 (transformée de $O'O_1'$ par T^{-1}) est multiple d'ordre s_1 au moins pour le cône tangent à F en O. On a évidemment $s_1 \leqslant s$.

Il peut se faire que la courbe γ' contienne une partie γ_1' multiple d'ordre s_1 pour la surface F'. A cette courbe γ_1', T^{-1} fait correspondre une courbe fictive, infiniment petite, multiple d'ordre s_1 pour F. L'ordre de cette courbe fictive sera par définition celui de la courbe γ_1'. Si n_1 est cet ordre, le cône projetant γ' de O' comprendra comme partie le cône d'ordre n_1, projetant γ_1', compté s_1 fois au moins. Le cône tangent en O à F, transformé du précédent par T^{-1}, comprendra un cône d'ordre n_1, contenant γ_1, compté s_1 fois au moins.

Par des transformations quadratiques, on examinera ensuite quels sont les points du domaine du premier ordre des points de la courbe γ' qui sont multiples pour F'. Et ainsi de suite. On obtiendra ainsi la structure du point singulier O de la surface F.

70. Equations cartésiennes d'une transformation quadratique. — Prenons pour quadrique Q, dans la définition d'une transformation quadratique, les cylindres paraboliques passant par l'origine O et ayant pour plan diamétral le plan des xy ; ils ont pour équation

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda_4 z^2 = 0 .$$

Posons

$$x_1' : y' : 1 : z' = x : y : z : z^2 .$$

On en déduit

$$x = x'z' , \qquad y = y'z' , \qquad z = z' .$$

La transformation quadratique ainsi obtenue est le second cas particulier que nous avons étudié plus haut (n° 66). Elle fait correspondre au point infiniment voisin O sur l'axe Oz l'origine O' du système d'axes $O'x'y'z'$. On peut d'ailleurs le vérifier directement. A la droite

$$\frac{x'}{a} = \frac{y'}{b} = \frac{z'}{c} .$$

correspond la conique

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z^2}{c} ,$$

tangente à Oz au point O.

Aux points du domaine du premier ordre de O correspondent les points du plan $z' = 0$.

71. Points doubles d'une surface algébrique. — L'équation d'une surface algébrique F ayant un point double conique en O est

$$\varphi_2(x, y, z) + \varphi_3(x, y, z) + \ldots + \varphi_n(x, y, z) = 0 ,$$

où $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ sont des formes algébriques dont le degré est indiqué par l'indice.

En opérant la transformation précédente, nous obtenons l'équation de la surface F′ sous la forme

$$\varphi_2(x', y', 1) + z'\varphi_3(x', y', 1) + \ldots + z'^{n-2}\varphi_n(x', y', 1) = 0 .$$

Au domaine du point O correspond la conique

$$z' = 0 , \quad \varphi_2(x', y', 1) = 0 . \tag{1}$$

Quatre cas peuvent se présenter :

1° La conique (1) est irréductible et le point O est dit *point double conique* de F.

2° La conique (1) dégénère en deux droites distinctes ; le point O est appelé *point double biplanaire* de F.

3° La conique (1) dégénère en deux droites confondues en une droite simple pour la surface F′. Celle-ci touche le plan $z' = 0$ le long de cette droite. Le point O est appelé *point double uniplanaire* de F.

4° La conique (1) dégénère en deux droites confondues en une droite double de F′. Le point O est dit *tacnode* de F.

Dans ces différents cas, le cône tangent à F en O, est un cône de second ordre irréductible, ou dégénère en deux plans, ou dégénère en deux plans confondus. Dans le premier cas, le domaine du premier ordre de O sur la surface F est constitué par une conique simple, infiniment petite. Nous allons étudier les autres cas.

72. Points doubles biplanaires. — L'équation de la surface F, ayant un point biplanaire en O, peut s'écrire

$$xy + \varphi_3(x, y, z) + \ldots + \varphi_n(x, y, z) = 0 .$$

Sa transformée F′ a pour équation (nous écrivons pour plus de simplicité x, y, z au lieu de x', y', z', aucune confusion n'étant possible)

$$xy + z\varphi_3(x, y, 1) + z^2\varphi_4(x, y, 1) + \ldots + z^{n-2}\varphi_n(x, y, 1) = 0 .$$

En général, le point O′ est simple pour F′, le plan tangent étant $z=0$. *Le domaine d'un point double biplanaire ordinaire est constitué par deux droites simples infiniment petites, se coupant en un point simple.*

La condition nécessaire et suffisante pour que O′ soit double pour F′ est que

$$\varphi_3(0,\ 0,\ 1) \equiv 0\,.$$

Posons

$$\varphi_3(x,y,z) = z^2\psi_1(x,y) + z\psi_2(x,y) + \psi_3(x,y)\,.$$

Opérons sur F′ la transformation $x=x'z'$, $y=y'z'$, $z=z'$; la transformée F″ a pour équation

$$xy + \psi_1(x,y) + z\psi_2(x,y) + z^2\psi_3(x,y) + \varphi_4(xz, yz, 1) + \ldots = 0\,.$$

Aux points de F′, infiniment voisins du point double O′, correspondent les points de la conique

$$z=0\,,\quad xy + \psi_1(x,y) + \varphi_4(0,0,1) = 0\,. \tag{1}$$

Le point O′ est en général double conique pour F′ et on obtient un point double biplanaire auquel est infiniment voisin un point double conique.

Pour exprimer que la conique (1) dégénère en deux droites, nous devons écrire

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \psi_1(1,0) \\ 1 & 0 & \psi_1(0,1) \\ \psi_1(1,0) & \psi_1(0,1) & \varphi_4(0,0,1) \end{vmatrix} = 0\,,$$

c'est-à-dire

$$\varphi_4(0,0,1) = \psi_1(1,0)\psi_1(0,\ 1)\,.$$

Les deux droites formant la conique ont pour équations, dans le plan $z=0$,

$$x + \psi_1(0,1) = 0\,, \qquad y + \psi_1(1,0) = 0\,.$$

Ces droites sont toujours distinctes, donc un point double biplanaire ne peut posséder, dans son domaine du premier ordre, un point double uniplanaire.

Cela étant, on voit quel est le mécanisme de la construction des points doubles biplanaires ; ils sont de deux espèces :

1° Point double biplanaire auquel son infiniment voisins successifs $n-1$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire.

2° Point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs $n-1$ points doubles tous biplanaires sauf le dernier qui est conique.

73. Points doubles uniplanaires. — L'équation d'une surface F possédant un point double uniplanaire en O peut s'écrire

$$y^2 + \varphi_3(x,y,z) + \varphi_4(x,y,z) + \ldots = 0\,.$$

Sa transformée F′ a pour équation

$$y^2+z\varphi_3(x, y, 1)+z^2\varphi_4(x, y, 1)+\ldots=0 . \qquad (1)$$

Cette surface touche le plan $z=0$ le long de la droite $y=z=0$ et possède trois points doubles

$$y=0 , \qquad z=0 , \qquad \varphi_3(x, y, 1)=0$$

sur cette droite. Pour examiner de plus près la nature de ces points doubles, déplaçons le trièdre de référence de telle sorte que la courbe

$$y=0 , \quad \varphi_3(x, 0, z)+\varphi_4(x, 0, z)+\ldots=0 , \qquad (2)$$

intersection de F et du plan tangent en O, $y=0$, soit tangente à Oz en ce point. Cela revient à supposer que l'on a

$$\varphi_3(x, y, z)\equiv y\psi_2(x, y, z)+x\psi_2'(x, z) .$$

L'équation de F′ devient alors

$$y^2+yz\psi_2(x, y, 1)+xz\psi_2'(x, 1)+z^2\varphi_4(x, y, 1)+\ldots=0 .$$

Le point O′ est double conique pour la surface F′, le cône tangent en ce point à cette surface ayant pour équation

$$y^2+yz\psi_2(0, 0, 1)+xz\psi_2'(0, 1)+z^2\varphi_4(0, 0, 1)=0 .$$

Ce cône ne peut dégénérer que si l'on a $\psi_2'(0, 1)=0$, mais alors la courbe (2) a l'axe Oz comme tangente double.

Le domaine du premier ordre d'un point double uniplanaire ordinaire d'une surface algébrique est formé d'une droite simple infiniment petite sur laquelle se trouvent trois points doubles coniques.

Supposons maintenant que Oz soit tangente double à la courbe (2), c'est-à-dire que l'on ait

$$\varphi_3(x, y, z)\equiv y\psi_2(x, y, z)+x^2\psi_1(x, z) .$$

L'équation de F′ devient

$$y^2+yz\psi_2(x, y, 1)+x^2z\psi_1(x, 1)+z^2\varphi_4(x, y, 1)+\ldots=0 . \qquad (3)$$

Le point O′ est double biplanaire pour F′, les plans tangents

$$y^2+yz\psi_2(0, 0, 1)+z^2\varphi_4(0, 0, 1)=0$$

passent par la droite $y=z=0$.

Pour étudier le domaine de O′, intervertissons, dans (3), les coordonnées x, z ; on obtient

$$y^2+xy\psi_2(z, y, 1)+xz^2\psi_1(z, 1)+x^2\varphi_4(z, y, 1)$$
$$+x^3\varphi_5(z, y, 1)+\ldots=0 .$$

Effectuons la transformation $x = x'z'$; $y = y'z'$; $z = z'$; il vient

$$y^2 + xy\,\psi_2(z, yz, 1) + xz\psi_1(z, 1) + x^2\varphi_4(z, yz, 1) + \dots = 0\,. \quad (4)$$

Pour cette surface, le point O″ est double conique, le cône tangent étant

$$y^2 + xy\psi_2(0, 0, 1) + xz\psi_1(0, 1) + x^2\varphi_4(0, 0, 1) = 0\,.$$

Ce cône ne peut dégénérer que si l'on a $\psi_1(0, 1) = 0$, c'est-à-dire si l'axe Oz est tangente triple à la courbe (2).

Convenons d'appeler point uniplanaire de seconde espèce un point tel que la courbe (2) ait une tangente double en O, de troisième espèce un point tel que la courbe (2) ait une tangente triple en O.

Un point double uniplanaire de seconde espèce possède, dans son domaine du premier ordre, une droite simple infiniment petite, sur laquelle se trouvent un point double conique et un point double biplanaire auquel est infiniment voisin un point double conique situé sur la droite simple.

Supposons enfin que l'on ait un point uniplanaire de troisième espèce. On doit poser

$$\varphi_3(x, y, z) \equiv y\psi_2(x, y, z) + x^3\psi_0\,.$$

L'équation (4) devient

$$y^2 + xy\psi_2(z, yz, 1) + xz^2\psi_0 + x^2\varphi_4(z, yz, 1) + \dots = 0\,.$$

Le point O″ est double biplanaire. En effectuant de nouveau la transformation $x = x'z'$, $y = y'z'$, $z = z'$, nous obtenons

$$y^2 + xy\psi_2(x, yz^2, 1) + xz\psi_0 + x^2\varphi_4(z, yz^2, 1) + \dots = 0\,.$$

Le point O‴ est double conique, car ψ_0 ne peut être nul.

Un point double uniplanaire de troisième espèce possède, dans son domaine du premier ordre, une droite simple infiniment petite, sur laquelle se trouve un point double biplanaire auxquels sont infiniment voisins successifs deux points doubles dont le premier est biplanaire et le second conique.

74. Tacnodes. — Un tacnode est un point double uniplanaire auquel est infiniment voisine une droite double infiniment petite. Pour la surface F′, d'équation (1), la droite $y = z = 0$ doit être double. Quand on fait $y = 0$ dans cette équation, on doit donc pouvoir mettre z^2 en évidence, ce qui exige que $\varphi_3(0, 0, 1)$ soit nul. On obtiendra donc un tacnode en supposant

$$\varphi_3(x, y, z) \equiv y\psi_2(x, y, z)\,.$$

L'équation de F' prend alors la forme

$$y^2 + yz\psi_2(x, y, 1) + z^2\varphi_4(x, y, 1) + \ldots = 0 \; ; \qquad (5)$$

la droite $y = z = 0$ est bien double pour cette surface.

Les tangentes en O à la surface F, situées dans le plan $y = 0$, coupent la surface en quatre points confondus en O, car la section de F par ce plan,

$$\varphi_4(x, 0, z) + \varphi_5(x, 0, z) + \ldots = 0$$

a un point quadruple en O. Cette condition est nécessaire et suffisante pour que O soit un tacnode. Rappelons d'ailleurs que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point O soit un tacnode pour une courbe est que les deux tangentes soient confondues en une droite coupant la courbe en quatre points confondus en O.

L'équation quadratique des plans tangents en un point $(x', 0, 0)$ de la droite $y = z = 0$ à la surface F', d'équation (5), est

$$y^2 + yz\psi_2(x', 0, 1) + z^2\varphi_4(x', 0, 1) = 0 \, .$$

Ces plans sont confondus aux quatre points, dont les abscisses sont données par

$$\overline{\psi_2(x', 0, 1)}^2 - 4\,\varphi_4(x', 0, 1) = 0 \, .$$

Il y a donc quatre points-pince. Si l'équation précédente est une identité, tous les points de la droite double sont des points-pince. On obtient ainsi un cas particulier du tacnode.

On peut en obtenir un autre en supposant

$$\varphi_4(x, y, z) \equiv y\psi_3(x, y, z) \, .$$

La surface F' touche alors le plan $z = 0$ le long de la droite double $y = z = 0$.

75. Courbes multiples d'une surface. — Si une courbe algébrique C est multiple d'ordre s pour une surface algébrique F d'ordre n, le cône tangent à la surface en un point O de C se compose de s plans distincts ou non, passant par la tangente à la courbe.

Soit α un plan passant par O, mais non par la tangente à la courbe C en O. Opérons une transformation quadratique T faisant correspondre au domaine du premier ordre de O un plan σ'. Au plan α correspond un plan α' passant par le point fondamental O' du second espace. Aux points du domaine du premier ordre de O situés dans le plan α correspondront les points de la droite $\alpha'\sigma'$. L'étude de la singularité de la surface F au point O revient à l'étude de la section de la transformée F' de F par la droite $\alpha'\sigma'$. Il suffira donc d'utiliser les transformations quadratiques du plan.

Supposons que, quel que soit le plan α (non tangent à la courbe C) et le point O choisi sur C, la section de F par α possède toujours ν points O_1, O_2, ..., O_ν multiples d'ordre s_1, s_2, ..., s_ν, où

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu \leqslant s\,;$$

qu'au point O_i soient infiniment voisins, dans le domaine du second ordre de O, des points O_{i1}, O_{i2}, ... multiples d'ordres s_{i1}, s_{i2}, ..., où

$$s_{i1} + s_{i2} + \ldots \leqslant s_i\,,$$

et ainsi de suite. On conviendra de dire que les points O_1, O_2, ..., O_ν décrivent des courbes C_1, C_2, ..., C_ν infiniment voisines de C, multiples d'ordres s_1, s_2, ..., s_ν pour la surface F ; que les points O_{i1}, O_{i2}, ... décrivent des courbes C_{i1}, C_{i2}, ..., infiniment voisines de C_i, multiples d'ordres s_{i1}, s_{i2}, ... pour la surface F, et ainsi de suite. Les courbes fictives C_1, C_2, ..., C , C_{i1}, C_{i2}, ... seront considérées comme ayant le même ordre que la courbe C.

§ 3. *Points singuliers des courbes gauches algébriques*

76. Composition d'un point singulier. — Soit C une courbe gauche algébrique ayant en O un point multiple d'ordre s. Opérons une transformation quadratique faisant correspondre au domaine du premier ordre de O un plan σ' ; soit Γ' la conique fondamentale de la transformation dans σ'. Aux points infiniment voisins de O correspondent des points O_1', O_2', ..., O_ν' de σ', non situés sur Γ', multiples d'ordres s_1, s_2, ..., s_ν pour la transformée C' de C. On a

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu \leqslant s$$

et C possède ν points O_1, O_2, ..., O_ν multiples d'ordres s_1, s_2, ..., s_ν infiniment voisins de O, dans des directions différentes (c'est-à-dire situés tous dans le domaine en premier ordre de O). Supposons qu'au point O_i' soient infiniment voisins des points O'_{i1}, O'_{i2}, ... multiples d'ordres s_{i1}, s_{i2}, ... pour C'. La courbe C a des points O_{i1}, O_{i2}, ... infiniment voisins de O_i, multiples d'ordres s_{i1}, s_{i2}, ... Et ainsi de suite.

Si O' est le point fondamental de la transformation dans le second espace, à la droite $O'O_1'$ par exemple correspond la tangente OO_1 à la courbe C en O. Si t_1' est une tangente à C' en O_1', au plan $O't_1'$ correspond un plan τ_1 osculateur à la courbe C en O et précisément un plan passant par O, O_1 et par un point de C infiniment voisin de O_1.

77. Points doubles d'une courbe gauche. — Supposons que O soit double pour la courbe C ($s=2$). Trois cas peuvent se présenter pour la transformée C′ de C :

1° C′ coupe le plan σ' en dehors de la conique Γ' en deux points distincts, nécessairement simples. Le point O est un point double ordinaire pour C.

2° En dehors de Γ', la courbe C′ est tangente au plan σ' en un point. Le point O est un point de rebroussement ordinaire pour C.

3° La courbe C′ possède un point double O_1' dans le plan σ', en dehors de Γ'. Le point O est une tacnode de la courbe C.

On peut, dans ce dernier cas, poursuivre l'étude du point double de C′ au moyen de nouvelles transformations quadratiques. Comme dans le cas des courbes planes, on arrive aux combinaisons suivantes :

Un point double d'une courbe algébrique gauche C peut être :

a) Un point double auquel sont infiniment voisins successifs p points doubles dont le dernier est ordinaire (dans le domaine d'ordre $p+1$ du point double, la courbe possède deux points simples) ;

b) Un point double auquel sont infiniment voisins successifs p points doubles dont le dernier est un point de rebroussement ordinaire (dans le domaine d'ordre $p+1$ du point double, la courbe possède un seul point simple).

78. Intersection d'une courbe et d'une surface en un point singulier commun. — Soient F une surface algébrique ayant la multiplicité s en O et C une courbe algébrique ayant la multiplicité r en O. Le point O absorbe $I=sr+I'$ points d'intersection de F et de C.

Opérons la transformation quadratique habituelle et supposons que dans le plan σ' on ait, en dehors de la conique Γ', des points $O_1', O_2', \ldots, O_\nu'$, multiples d'ordres $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ pour la transformée C′ de C et multiples d'ordres $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ pour la transformée F′ de F. On a

$$I' = r_1 s_1 + r_2 s_2 + \ldots + r_\nu s_\nu + I'',$$

et ainsi de suite.

On en conclut que pour calculer le nombre des points d'intersection de F et de C absorbés en O, on opère comme si les points fictifs infiniment voisins de O, communs à F et à C, étaient des points effectifs.

CHAPITRE IV

LES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES DE L'ESPACE

§ 1. *Systèmes linéaires de surfaces*

79. Définition. — On appelle *système linéaire de surfaces algébriques* l'ensemble des surfaces représentées par l'équation

$$\lambda_0 f_0(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_r f_r = 0 , \qquad (1)$$

où f_0, f_1, ..., f_r sont des formes algébriques du même degré.

Si l'équation (1) ne peut être vérifiée identiquement par des valeurs non toutes nulles de λ_0, λ_1, ..., λ_r, le système linéaire est dit de dimension r. On le représente par la notation $|F|$, F étant la surface générale du système. Par r points de l'espace passe une et en général une seule surface F. Un système linéaire de dimension $r = 1$ ou 2 est appelé *faisceau* ou *réseau.*

Une surface algébrique F d'ordre n dépend de

$$N = \binom{n+3}{3} - 1$$

coefficients. Si l'on se donne $N - r$ relations rationnelles indépendantes entre ces coefficients, on obtient un ensemble de surfaces F formant un *système algébrique* $\{F\}$ de dimension r. En général, par r points de l'espace passent des surfaces F en nombre fini ν. Ce nombre est l'indice du système $\{F\}$.

La surface générale d'un système algébrique $\{F\}$ peut être réductible et posséder des parties multiples, fixes ou variables.

Théorème I. — *Un système algébrique de surfaces, de dimension un et d'indice un, privé de partie fixe et de parties multiples variables, est un faisceau.*

La démonstration est la même que pour les systèmes de courbes planes (I, n° 43) ; nous ne la reprendrons pas.

THÉORÈME II. — *Un système algébrique de surfaces d'indice un, privé de partie fixe et de parties multiples variables, est un système linéaire.*

La démonstration est la même que pour les systèmes de courbes planes (I, n° 44) et pour les systèmes de groupes de points sur une droite (I, n° 8).

80. Systèmes composés. — Un système linéaire de surfaces peut avoir une partie fixe ; son équation s'écrit alors sous la forme

$$\psi(x_1, x_2, x_3, x_4)\,[\lambda_0\varphi_0(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_r\varphi_r] = 0\,.$$

La surface $\psi = 0$ est la partie fixe du système. Si les formes $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ ne sont plus divisibles par une même forme, la surface

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_r\varphi_r = 0$$

est la partie variable du système.

Soit

$$\mu_0\psi_0(x_1, x_2, x_3, x_4) + \mu_1\psi_1 = 0 \tag{1}$$

l'équation d'un faisceau. Le système linéaire représenté par

$$\lambda_0\varphi_0\,(\psi_0, \psi_1) + \lambda_1\varphi_1\,(\psi_0, \psi_1) + \ldots + \lambda_r\,\varphi_r\,(\psi_0, \psi_1) = 0 \tag{2}$$

est dit composé au moyen du faisceau (1). Si les formes φ sont de degré n en ψ_0, ψ_1, chaque surface du système (2) est composée de n surfaces du faisceau (1). Les surfaces du système (2) passant par un point forment un système linéaire de dimension $r-1$ ayant comme composante fixe la surface du faisceau (1) passant par ce point.

Considérons maintenant le système de courbes

$$\frac{\psi_0\,(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\mu_0} = \frac{\psi_1}{\mu_1} = \frac{\psi_2}{\mu_2}\,. \tag{3}$$

Ce système est appelé *congruence de courbes*. Par un point de l'espace passe une seule courbe du système et la congruence est dite *linéaire*.

Le système linéaire de surfaces

$$\lambda_0\varphi_0\,(\psi_0, \psi_1, \psi_2) + \lambda_1\varphi_1\,(\psi_0, \psi_1, \psi_2) + \ldots + \lambda_r\varphi_r\,(\psi_0, \psi_1, \psi_2) = 0 \tag{4}$$

est dit composé au moyen de la congruence linéaire (3). Les surfaces du système (4) passant par un point contiennent la courbe de la congruence (3) passant par ce point. La courbe commune à deux surfaces du système (4), variable avec ces surfaces, se compose de courbes de la congruence (3). Le système linéaire (4) est dit *composé* au moyen de la congruence (3) ou *appartenir* à cette congruence.

Considérons enfin les équations

$$\frac{\psi_0(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\mu_0} = \frac{\psi_1}{\mu_1} = \frac{\psi_2}{\mu_2} = \frac{\psi_3}{\mu_3}, \tag{5}$$

qui représentent en général un groupe de points, variable avec les paramètres μ, tel qu'un point de l'espace appartienne en général à un seul groupe. L'ensemble de ces groupes constitue une *involution*.

Le système linéaire de surfaces

$$\lambda_0\varphi_0(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3) + \lambda_1\varphi_1(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3) + \cdots \\ + \lambda_r\varphi_r(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = 0 \quad (6)$$

est dit composé au moyen de l'involution (8). Les surfaces du système (6) passant par un point passent en conséquence par les points du groupe de l'involution (5) dont ce point fait partie. Trois surfaces du système (5), n'appartenant pas à un même faisceau ont en commun un certain nombre de groupes de l'involution (5). Le système linéaire (6) est dit *composé* au moyen de l'involution (5) ou *appartenir* à cette involution.

Ces exemples posés, nous dirons qu'un système linéaire de surfaces est *irréductible* lorsque la surface générale du système est irréductible. Dans le cas opposé, il sera appelé *réductible*.

Les systèmes (4) et (6) peuvent être irréductibles. Un système linéaire irréductible est dit *simple* lorsque les surfaces de ce système passant par un point ne passent pas en conséquence par d'autres points, en nombre fini ou infini. Dans le cas opposé, il est dit *composé*.

81. Théorème. — *Un système linéaire réductible de surfaces algébriques comprend une partie fixe, ou est composé au moyen d'un faisceau, ou présente à la fois ces deux caractères.*

Il suffit évidemment de démontrer que si un système linéaire $|F|$ de surfaces est réductible et dépourvu de partie fixe, il est composé au moyen d'un faisceau.

Supposons tout d'abord que le système $|F|$ soit un faisceau ; appelons Φ_1, Φ_2, ..., Φ_ν les surfaces qui composent la surface générale F. Lorsque celle-ci varie dans le faisceau $|F|$, ces surfaces engendrent des systèmes continus ∞^1 : H_1, H_2, ..., H_ν. Par un point quelconque de l'espace, ne peut passer qu'une surface de chacun de ces systèmes, sans quoi $|F|$ ne serait pas un faisceau. Les systèmes H_1, H_2, ..., H_ν sont donc des faisceaux. Si les faisceaux H_1, H_2 par exemple sont distincts, par un point passent une surface de H_1 et une surface de H_2, appartenant en général à deux surfaces F différentes, ce qui est impossible. Par conséquent les faisceaux H_1, H_2, ..., H_ν sont confondus en un même faisceau H et le théorème est démontré dans le cas où $|F|$ est un faisceau.

Supposons maintenant que $|F|$ ait la dimension r et que le théorème soit vrai pour les systèmes linéaires de dimension $r-1$. Considérons dans $|F|$ un système linéaire de dimension $r-1$, $|F_0|$, et un faisceau $|F_1|$ n'appartenant pas à ce système. $|F_0|$ et $|F_1|$ ont en commun une surface F. De plus, $|F_0|$ est composé au moyen d'un faisceau H_0 et $|F_1|$ au moyen d'un faisceau H_1. La surface F est formée de deux surfaces au moins de H_0 et ces surfaces doivent appartenir à H_1. Les faisceaux H_0 et H_1 coïncident donc en un seul faisceau H et le théorème est démontré.

82. Théorème. — *Un système linéaire irréductible et composé de surfaces appartient à une involution ou à une congruence linéaire.*

Supposons en premier lieu que les surfaces d'un système linéaire $|F|$ passant par un point P_1 passent en conséquence par $\nu-1$ autres points P_2, P_3, ..., P_ν. Il existe dans l'espace ∞^3 groupes de ν points ne présentant qu'une condition aux surfaces F qui doivent contenir un de ces groupes. De plus, un point de l'espace appartient généralement à un seul groupe. L'ensemble de ces groupes constitue une involution d'ordre ν, I_ν, à laquelle $|F|$ appartient. On remarquera que la dimension de $|F|$ doit être au moins égale à trois.

Supposons en second lieu que les surfaces du système $|F|$ passant par un point aient en commun une infinité de points, formant nécessairement une courbe algébrique C. Si $|F|$ est un réseau, ce cas se présente toujours et nous supposerons donc que la dimension r de $|F|$ est supérieure à deux.

Les surfaces F passant par un point P ont en commun une courbe C et forment un système linéaire de dimension $r-1$. Lorsque P varie sur la courbe C, ce système ne varie pas, par conséquent par un point de l'espace ne peut passer qu'une courbe C. Celles-ci sont donc en nombre ∞^2 et forment une congruence linéaire. $|F|$ appartient à cette congruence, chaque surface F étant le lieu de ∞^1 courbes C. Le théorème est démontré.

Remarque. — L'involution et la congruence linéaire de courbes dont il est question dans cette démonstration ne sont pas nécessairement représentables par des équations de la forme (5) ou (3) du n° 80.

83. Base et caractères d'un système linéaire. — Un point appartenant à toutes les surfaces d'un système linéaire $|F|$ est appelé *point-base* de ce système. En particulier, si le système $|F|$ possède une composante fixe, tous les points de cette composante sont des points-base. Ecartons ce cas. Les points-base d'un système linéaire $|F|$ dépourvu de composante fixe peuvent être isolés ou former des courbes appelées *courbes-base* du système. L'ensemble des points-base isolés et des courbes-base de $|F|$ constitue la *base* du système. D'une manière précise, on appelle base du système $|F|$ l'ensemble de ses points-base et de ses courbes-base, avec indication des singularités de ces éléments pour la surface F générale. Se donner la base du système $|F|$, c'est donc se donner non seulement la position des points-base et courbes-base, mais aussi les multiplicités de ces éléments et éventuellement des éléments infiniment voisins de ceux-ci pour les surfaces F.

Un système linéaire de surfaces dont la base est donnée, est dit *complet* par rapport à cette base s'il n'existe aucune surface de même ordre, satisfaisant aux mêmes conditions, n'appartenant pas au système.

Les caractères d'un système linéaire $|F|$ sont, outre la dimension r :

1° Le degré n, nombre de points communs à trois surfaces du système n'appartenant pas à un même faisceau, en dehors de la base ;

2° Le genre (1) de la courbe commune à deux surfaces du système, en dehors de la base ;

3° Les genres de la surface F générale, caractères sur lesquels nous ne pouvons insister pour le moment.

Observons que l'on peut *calculer* la dimension d'un système $|F|$ en comptant le nombre des conditions imposées à ses surfaces par la base, comme si ces conditions étaient indépendantes. On obtient ainsi une dimension ρ qui peut être inférieure à la dimension effective r. Le nombre ρ s'appelle *dimension virtuelle* du système $|F|$ et la différence $r-\rho\geqslant 0$ la *surabondance* du système. Si $\rho=r$, le système $|F|$ est *régulier*.

84. Théorème de Bertini. — *La surface générale d'un système linéaire privé de composante fixe ne peut posséder de point multiple en dehors de la base du système.*

Soit $|F|$ un système linéaire, privé de composante fixe, dont la surface générale possède un point multiple n'appartenant pas à la base et par conséquent variable avec la surface. Soient

$$f(x, y, z)\equiv f_0(x, y, z)+\lambda_1 f_1(x, y, z)+\dots+\lambda_r f_r(x, y, z)=0$$

l'équation de la surface générale du système et

$$x_0=\varphi_1(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r), \quad y=\varphi_2(\lambda), \quad z=\varphi_3(\lambda)$$

(1) On peut définir le genre d'une courbe algébrique gauche comme étant égal à celui de sa projection sur un plan à partir d'un point O quelconque. Le genre ne dépend pas de O, car deux courbes planes, projections d'une même courbe gauche à partir de deux centres de projection différents, sont liées par une correspondance birationnelle.

les coordonnées du point multiple. Par hypothèse, nous avons

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0} = 0 , \qquad \frac{\partial f}{\partial y_0} = 0 , \qquad \frac{\partial f}{\partial z_0} = 0$$

quels que soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$.

Dérivons totalement l'équation $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ par rapport à λ_1. On a

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial f}{\partial y_0} \frac{\partial y_0}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial f}{\partial z_0} \frac{\partial z_0}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = f_1(x_0, y_0, z_0) = 0 .$$

On a de même

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = f_2(x_0, y_0, z_0) = 0 , \ \ldots , \ \frac{\partial f}{\partial \lambda_r} = f_r(x_0, y_0, z_0) = 0$$

et par conséquent

$$f_0(x_0, y_0, z_0) = 0 .$$

Le point x_0, y_0, z_0 appartient bien à la base de $|F|$.

85. Remarque I. — La surface F peut posséder un point multiple variable avec la surface ; mais le lieu de ce point multiple est une courbe-base du système.

Par exemple, les cônes projetant une conique γ des points d'une droite r s'appuyant sur la conique, forment un faisceau dont la surface générale a un point double — le sommet du cône — variable sur la droite r.

Remarque II. Du théorème de Bertini, on conclut que :

1° Si les surfaces F ont une courbe multiple infiniment voisine d'une courbe-base, cette courbe fait partie de la base ;

2° Si les surfaces F ont un point multiple infiniment voisin d'un point, ce point est fixe ou variable sur une courbe infiniment petite infiniment voisine du point.

86. Courbes et surfaces fondamentales. — Une courbe γ est appelée *fondamentale* pour le système linéaire $|F|$, de dimension r, si elle n'est pas rencontrée en des points variables par les surfaces du système. La courbe γ s'appuie donc sur les courbes-base et passe par les points-base de $|F|$. Les surfaces F passant par un point de γ n'appartenant pas à la base de $|F|$, contiennent cette courbe et forment un système de dimension $r-1$.

Une courbe fondamentale γ peut être isolée ou appartenir à un ensemble algébrique ∞^1 engendrant une surface Φ sur laquelle elles forment un faisceau. Celle-ci sera appelée *surface fondamentale de première espèce.*

Le système formé par les quadriques passant par deux points A, B possède une courbe fondamentale isolée : la droite AB.

Le système formé par les surfaces cubiques passant par une quartique gauche rationnelle possède ∞^1 droites fondamentales : les trisécantes de la quartique, engendrent une surface fondamentale de première espèce : la quadrique circonscrite à la quartique.

On appelle *surface fondamentale de seconde espèce* une surface qui n'est pas rencontrée suivant une courbe variable par les surfaces F. Il en résulte que les surfaces F passant par un point d'une surface fondamentale de seconde espèce contiennent cette surface et forment un système de dimension $r-1$.

Les quadriques passant par une conique forment un système linéaire ayant le plan de cette cônique comme surface fondamentale de seconde espèce.

Observons qu'une surface F passant par un point d'une surface fondamentale de première espèce contient la courbe fondamentale passant par ce point. Il en résulte qu'une surface F rencontre une surface fondamentale de première espèce suivant un certain nombre de courbes fondamentales.

Toute courbe algébrique tracée sur une surface fondamentale de seconde espèce est fondamentale, c'est pour cette raison qu'en définissant les surfaces fondamentales de première espèce, nous avons supposé qu'une telle surface était engendrée par un *faisceau* de courbes fondamentales.

87. Système jacobien. — Soit $|F|$ un système linéaire irréductible de surfaces, de dimension $r \geqslant 3$. Soit $|F_0|$ un système linéaire de dimension trois tiré du système $|F|$; considérons la jacobienne F_j de ce système, c'est-à-dire le lieu des points tels que les surfaces F_0 passant par un de ces points y aient une tangente fixe (I, n° 141). Si les surfaces F sont d'ordre m, la jacobienne F_j est d'ordre $4m-4$; cette surface passe $4s-1$ fois par une courbe-base de multiplicité s et $4r-2$ fois par un point-base isolé de multiplicité r (I, n° 143).

Supposons que γ soit une courbe fondamentale de $|F|$ et par suite de $|F_0|$. Les surfaces F passant par un point de γ contiennent cette courbe et ont par conséquent même tangente en ce point. Il en résulte que γ appartient à la jacobienne F_j. Par suite, une surface fondamentale de première espèce Φ appartient à la jacobienne F_j.

Soit Ψ une surface fondamentale de seconde espèce de $|F|$ et par conséquent de $|F_0|$. Les surfaces F_0 passant par un point de Ψ contiennent cette surface et celle-ci, comptée deux fois, appartient à la jacobienne F_j (I, n° 144).

Les jacobiennes F_j des différents systèmes linéaires ∞^3 extraits de $|F|$ appartiennent à un système linéaire. La démonstration est entièrement semblable à celle qui concerne le système jacobien d'un système linéaire de courbes planes (n° 33). Ce système linéaire est appelé le jacobien $|F_j|$ du système $|F|$. Il contient comme composantes fixes les surfaces fondamentales de première et de seconde espèce de $|F|$, ces dernières comptées deux fois. Les surfaces F_j passent par les points-base et les courbes-base de $|F|$ et ont en outre comme courbes-base les courbes fondamentales isolées de $|F|$.

Il peut se faire qu'un point n'appartenant ni à la base de $|F|$, ni à un élément fondamental de ce système, soit double pour ∞^{r-3} surfaces F ; il appartient alors à toutes les jacobiennes F_j. On convient en général de ne pas considérer ce point comme un point-base de $|F_j|$.

88. Systèmes homaloïdaux. — On appelle *système homaloïdal* de surfaces un système linéaire irréductible $|F|$ de dimension trois et de degré un. Observons d'ailleurs qu'un système de degré un irréductible ne peut avoir une dimension supérieure à trois.

Désignons par C la courbe intersection de deux surfaces F en dehors de la base. Nous allons démontrer que les courbes C et les surfaces F sont rationnelles.

Considérons deux courbes C, soient C_1, C_2, telles que les faisceaux formés par les surfaces F passant par C_1, C_2 n'aient aucune surface en commun. Les surfaces F passant par C_2 coupent C_1 en un seul point variable ; les coordonnées de ce point sont donc des fonctions rationnelles du paramètre fixant la surface F dans le faisceau ayant pour base la courbe C_2. La courbe C_1 et de même toutes les courbes C sont donc rationnelles.

Soient maintenant F_0 une surface F générale et $|F_1|$ un réseau de surfaces F ne contenant pas F_0. Les courbes C, communes aux surfaces de $|F_1|$ prises deux à deux, forment une congruence linéaire et coupent F_0 en un seul point variable. Les coordonnées de ce point sont donc des fonctions rationnelles des paramètres fixant la courbe C dans la congruence et par suite des fonctions rationnelles des paramaètres fixant la surface F_1 dans le réseau $|F_1|$. Les surfaces F sont donc rationnelles.

Les surfaces F passant par un point P ne peuvent avoir une même tangente en ce point sans avoir une partie commune, courbe ou surface, par conséquent la jacobienne F_j du système homaloïdal $|F|$ se compose des surfaces fondamentales de ce système, les surfaces fondamentales de seconde espèce étant comptées deux fois.

§ 2. *Transformations birationnelles de l'espace*

89. Transformations rationnelles. — Considérons, dans un espace Σ, un système linéaire irréductible $|F|$, de degré m et de dimension trois. Etablissons une projectivité entre les surfaces de ce système et les plans d'un espace Σ'. Si

$$\lambda_1 f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$$

est l'équation du système $|F|$, on peut toujours choisir la figure de référence dans l'espace Σ' de manière que la projectivité soit représentée par

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) : f_2 : f_3 : f_4 . \tag{1}$$

A un point x n'appartenant pas à la base du système $|F|$, les équations (1) font correspondre un et un seul point x' de Σ', mais à un point x', elles font correspondre dans Σ les m points communs, en dehors de la base, aux surfaces de $|F|$ homologues des plans passant par le point x'. Ces groupes de m points de Σ forment une involution I_m d'ordre m et les équations (1) établissent une correspondance rationnelle $(m, 1)$ entre les points des espaces Σ, Σ'.

Il y a exception lorsque l'on choisit un point x appartenant à la base du système $|F|$. Le point x' correspondant est alors indéterminé et un passage à la limite est nécessaire.

Remarques. — La condition que le système $|F|$ soit irréductible est essentielle. Si le système $|F|$ comportait une partie fixe, celle-ci s'éliminerait d'elle-même dans les équations (1).

Si $|F|$ appartenait à une congruence linéaire de courbes Γ, aux points d'une courbe Γ correspondrait un seul point x' de Σ' et le lieu de ce point serait une surface Φ'.

Si $|F|$ était composé au moyen d'un faisceau de surfaces $|\Phi|$, aux points d'une surface Φ correspondrait un même point x' de Σ'. Le lieu de ce point serait une courbe Γ'.

90. Eléments fondamentaux. — Soit O un point-base du système $|F|$, multiple d'ordre s pour les surfaces F. Considérons une droite p passant par O et ne touchant pas en ce point toutes les surfaces F.

Les surfaces F passant par un point P de p forment un réseau et il leur correspond dans Σ' les plans d'une gerbe dont le sommet P' est l'homologue de P. Faisons tendre P vers O sur la droite p ; deux cas peuvent se présenter :

1° Les surfaces F ont au point O des cônes tangents variables. Dans ce cas, le réseau des surfaces F passant par P a pour limite le réseau des surfaces F tangentes en O à la droite p. A ce réseau correspond dans Σ' une gerbe de plans dont la somme O' est la limite du point P'. Le point O' est l'homologue du point infiniment voisin de O sur la droite p. Lorsque celle-ci décrit la gerbe de sommet O, le point O' décrit soit une courbe, soit une surface. Cette courbe ou cette surface est l'élément *fondamental* associé au point *fondamental* O ;

2° Les surfaces F ont un cône tangent fixe en O. La limite du réseau des surfaces F passant par P est alors le réseau des surfaces F qui rencontrent la droite p en $s+1$ points au moins confondus en O. Ces surfaces F ont en O une multiplicité au moins égale à $s+1$. Il leur correspond dans Σ' les plans passant par un point O' limite du point P'. Le point O' reste fixe lorsque la droite p décrit la gerbe de sommet O. Les points O, O' sont des points *fondamentaux* associés.

91. Transformations birationnelles. — Supposons que le système $|F|$ soit homaloïdal. On a $m=1$ et il existe une correspondance (1, 1) entre les espaces Σ, Σ'. Cette correspondance est appelée *correspondance birationnelle* ou *transformation birationnelle*.

Aux points d'un plan de Σ correspondent, dans Σ', les points d'une surface F'. Les ∞^3 surfaces F' ainsi obtenues forment un système linéaire de dimension trois, car par trois points de Σ' homologues de trois points de Σ non en ligne droite, passe une et une seule surface F'. Le système $|F'|$ est homaloïdal, car les trois plans de Σ homologues de trois surfaces F' n'appartenant pas à un même faisceau ne se rencontrent qu'en un point.

Appelons C la partie variable de la courbe commune à deux surfaces F et C' la partie variable de la courbe commune à deux surfaces F'. Aux points d'une droite de Σ correspondent les points d'une courbe C' et aux points d'une courbe C, les points d'une droite de Σ'.

Soient n l'ordre d'une surface F, n' l'ordre d'une courbe C. Une droite rencontre une surface F en n points, donc la courbe C' qui correspond à la droite rencontre en n points le plan de Σ' qui correspond à F ; la courbe C' est donc d'ordre n. De même, les surfaces F' sont d'ordre n'.

Dans le cas actuel, les équations (1) peuvent être résolues par rapport à x_1, x_2, x_3, x_4. On obtient

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1(x_1', x_2', x_3', x_4') : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

et les surfaces F' sont représentées par les équations

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 + \lambda_4\varphi_4 = 0 .$$

Les nombres n, n' sont les indices de la transformation et celle-ci est représentée par $T_{n,n'}$, ou par (n, n').

Les transformations quadratiques étudiées plus haut sont des transformations (2,2).

92. Courbes fondamentales. — Soient Γ une courbe-base du système $|F|$, ν son ordre et s sa multiplicité pour les surfaces F. Nous supposerons que les plans tangents à une surface F en un point ordinaire de Γ sont tous variables avec la surface. La courbe Γ est fondamentale pour la transformation T et, dans les conditions spécifiées, nous dirons que c'est une courbe fondamentale ordinaire.

Considérons un point ordinaire O de Γ. Soient t la tangente à Γ en O, p une droite passant par O et τ le plan tangent à Γ contenant p. Nous devons considérer les surfaces F touchant p en O ; ces surfaces touchent le plan τ en ce point. Il leur correspond dans Σ' les plans d'une gerbe de sommet O' et le point O' correspond aux points infiniment voisins de O situés dans le plan τ.

Lorsque le plan τ tourne autour de t, le point O' varie et décrit une courbe Γ', courbe fondamentale associée au point O. Observons qu'une surface F' ne rencontre pas en général la courbe Γ' en dehors de la base de $|F'|$, car autrement tous les plans de Σ passeraient par O.

Les coordonnées d'un point de la courbe Γ' s'expriment en fonctions rationnelles du paramètre fixant la position du plan τ dans le faisceau d'axe t, par conséquent, la courbe Γ' est rationnelle.

Lorsque le point O décrit la courbe Γ, deux cas peuvent se présenter :

1° La courbe Γ' varie et engendre une surface Φ', fondamentale de première espèce pour le système $|F'|$ et que l'on dira également fondamentale de première espèce pour la transformation T. La courbe Γ est dite *fondamentale de première espèce* ;

2° La courbe Γ' reste fixe. Γ est alors appelée *courbe fondamentale de seconde espèce.*

93. Courbes fondamentales ordinaires de première espèce. — Supposons que la courbe fondamentale Γ, d'ordre ν, multiple d'ordre s, à plans tangents variables pour les surfaces F, soit de première espèce. A chaque point O de Γ est associée une courbe rationnelle Γ' dont le lieu est une surface Φ'.

Sur la surface Φ', les courbes Γ' forment un faisceau, car autrement, à un point de Φ' correspondraient des points infiniment voisins de deux points distincts de Γ, ce qui est impossible puisque T est birationnelle.

Un plan coupant Γ en ν points, la surface F' qui lui correspond contient les ν courbes Γ' homologues de ces points. Si une surface F' contient $\nu+1$ courbes Γ', elle contient la surface Φ' comme partie et le plan qui lui correspond dans Σ contient la courbe Γ. Si celle-ci n'est pas plane, toutes les surfaces F' coupent donc Φ' suivant ν courbes Γ', en dehors de la base de $|F'|$.

Les surfaces F' passant par un point de Φ' contiennent la courbe Γ' passant par ce point. Il leur correspond dans Σ les plans passant par le point de Γ homologue de cette courbe Γ'.

Si ν' est l'ordre de la surface Φ', les courbes C s'appuient en ν' points variables sur la courbe Γ.

Une droite p s'appuyant en un point O sur Γ est rencontrée en $n-s$ points variables par les surfaces F ; il lui correspond donc dans Σ' une courbe C_1' d'ordre $n-s$. Aux plans passant par p correspondent les surfaces F' contenant la courbe C_1' et la courbe Γ' homologue du point O. Ces deux courbes ont en commun le point qui correspond au point infiniment voisin de O sur p. La courbe $C_1'+\Gamma'$ est une courbe C', donc les courbes Γ' sont d'ordre s. D'ailleurs, aux points de rencontre d'une courbe Γ' et d'un plan, correspondent les points de la surface F homologue du plan, infiniment voisin du point O de Γ homologue de la courbe Γ' et ces points se distribuent dans les s plans tangents à F en O.

94. Courbes fondamentales ordinaires de seconde espèce. — Supposons que la courbe Γ', associée au point O de la courbe fondamentale ordinaire Γ, reste fixe lorsque O décrit Γ.

Aux plans de Σ' passant par un point O' de Γ' correspondent, dans Σ, des surfaces F, formant un réseau, ayant en chaque point O de Γ un certain nombre λ de plans tangents fixes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\lambda$. Lorsque le point O' décrit la courbe Γ', ce groupe de λ plans tangents varie. En chaque point O de Γ, on a ainsi ∞^1 groupes de λ plans, formant une involution d'ordre λ et de dimension un, g_λ^1, dans le faisceau des plans tangents à Γ en ce point. Comme on l'a vu plus haut, la courbe Γ' est rationnelle.

Si ν' est d'ordre de Γ', aux ν' points de rencontre d'un plan avec Γ' correspondent, en chaque point O de Γ, ν groupes de plans tangents à la surface F homologue du plan considéré. On a donc $s=\lambda\nu'$.

Soit p' une droite passant par un point O' de Γ'. Aux plans passant par p' correspondent dans Σ des surfaces F se raccordant suivant λ nappes le long de Γ. Ces surfaces ont donc en commun λ courbes d'ordre ν, infiniment voisines de Γ et, en dehors de la base de $|F|$, une courbe C_1 d'ordre $n'-\lambda\nu$, transformée de la droite p'. Un plan de Σ coupant C_1 en $n'-\lambda\nu$ points, la surface F' homologue rencontre p' en $n'-\lambda\nu$ points en dehors de O'. La courbe Γ' est donc multiple d'ordre $s'=\lambda\nu$ pour les surfaces F' ; elle fait partie de la base de $|F'|$.

Les surfaces F rencontrent C_1 en un point variable, mais celles qui correspondent aux plans passant par O' ne peuvent plus rencontrer C_1. Cette courbe doit donc s'appuyer en un certain point O sur Γ et les surfaces homologues des plans passant par O' touchent C_1 en O. Dans la correspondance birationnelle entre la droite p' et la courbe C_1, les points O' et O sont homologues.

Aux surfaces F' touchant en O' le plan τ' tangent à Γ' et contenant p', correspondent les plans passant par O. Lorsque le plan τ' varie dans le faisceau ayant pour axe la tangente t' à Γ' en O', le point O décrit la courbe Γ et celle-ci reste fixe lorsque O' décrit Γ'. La courbe Γ' est donc également fondamentale de seconde espèce. Supposons qu'aux plans de Σ passant par un point O de Γ correspondent dans Σ' des surfaces F' ayant, en chaque point O' de Γ', λ' plans tangents fixes. En répétant le raisonnement fait plus haut, on établit que $s'=\lambda'\nu$, d'où, puisque $s'=\lambda\nu$, $\lambda'=\lambda$.

Une droite de Σ' ne rencontrant pas Γ', la courbe C correspondante ne peut rencontrer la courbe Γ en des points variables. De même, les courbes C' ne peuvent rencontrer la courbe Γ' en des points variables.

95. Points fondamentaux isolés. — Un point fondamental est dit isolé lorsqu'il n'appartient à aucune courbe fondamentale ou que, appartenant à une ou plusieurs courbes fondamentales, il présente pour les surfaces F une singularité différente de celle présentée par un point général de cette ou de ces courbes fondamentales.

Nous dirons qu'un point fondamental est ordinaire si les cônes tangents aux surfaces F en ce point, sont irréductibles et variables.

Soient O un point fondamental isolé ordinaire et p une droite passant par ce point. Aux surfaces F touchant p en O correspondent dans Σ' les plans passant par un point O', homologue du point infiniment voisin de O sur p. Lorsque la droite p décrit la gerbe de sommet O, le point O' décrit une surface Ω'. Les coordonnées de O' sont des fonctions rationnelles des paramètres fixant la droite p dans la gerbe de sommet O, donc la surface Ω' est rationnelle.

Soit s la multiplicité de O pour les surfaces F. Une droite p passant par O étant rencontrée en $n-s$ points variables par les surfaces F, il lui correspond dans Σ' une courbe C_1' d'ordre $n-s$, coupant Ω' en un seul point, le point homologue du point infiniment voisin de O sur p.

A un plan ne passant pas par O correspond une surface F' qui ne peut rencontrer la surface Ω' en dehors de la base de

$|F'|$, par conséquent Ω' est une surface fondamentale de seconde espèce pour ce système. Une surface F' passant par un point de Ω' en dehors de la base de $|F'|$ contient cette surface comme partie et il lui correspond un plan passant par O. Donc aux plans passant par O correspondent des surfaces F' ayant comme composante la surface Ω' et complétées par des surfaces F_1' formant un réseau. Deux surfaces F_1' ont en commun une courbe C_1'.

Soit σ un plan passant par O. Aux points de σ infiniment voisins de O correspondent sur Ω' les points d'une courbe γ' située sur la surface F_1' homologue de σ. Aux points de rencontre de γ' et d'un plan correspondent les points d'une surface F, infiniment voisins de O, situés dans σ. La courbe γ' est donc d'ordre s. Elle est d'autre part rationnelle et les courbes γ' forment sur Ω' un réseau homaloïdal, découpé par les surfaces F_1'.

L'ordre de la surface Ω' est égal au nombre de points d'une courbe C infiniment voisins de O. Si ce point n'appartient à aucune courbe fondamentale, l'ordre de Ω' est s^2, mais ce nombre est abaissé par la présence de courbes fondamentales passant éventuellement par O.

96. Courbes fondamentales quelconques. — Il n'est pas possible d'établir une théorie générale des courbes fondamentales quelconques ; nous nous bornerons à quelques indications en étudiant deux cas particuliers.

Supposons que Γ étant une courbe fondamentale d'ordre ν et de multiplicité s pour les surfaces F, celles-ci aient en chaque point de Γ, s plans tangents distincts mais fixes. Les surfaces F ont donc en commun s courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$, d'ordre ν, infiniment voisines de Γ.

Soient O un point de Γ et p une droite passant par O. Les surfaces F assujetties à couper p en $s+1$ points au moins réunis en O ont en ce point une multiplicité égale à $s+1$ au moins. Supposons qu'elle soit exactement égale à $s+1$. Deux cas peuvent se présenter :

1° Les surfaces F ayant la multiplicité $s+1$ en O conservent la multiplicité s aux autres points de Γ. Au réseau formé par ces surfaces correspond une gerbe de plan dont le sommet O' correspond aux points infiniment voisins de O. Lorsque O parcourt la courbe Γ, le point O' décrit une courbe fondamentale Γ' ;

2° Les surfaces F ayant la multiplicité $s+1$ en O ont en conséquence la multiplicité $s+1$ en tout point de Γ. Ces surfaces forment un réseau auquel correspond une gerbe de plans de sommet O'. Le point O' correspond aux points infiniment voisins de la courbe Γ.

Supposons que le système $|F|$ n'ait aucune courbe-base infiniment voisine de l'une des courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s$. Considérons une courbe γ s'appuyant sur Γ et Γ_1, c'est-à-dire touchant en un point O de Γ la nappe des surfaces F passant par Γ_1. Soit O_1 le point de Γ_1 infiniment voisin de O sur γ. Les surfaces F osculant γ en O forment un réseau, auquel correspond une gerbe de plans de sommet O_1'. Ce point correspond au point infiniment voisin de O_1 sur γ. Lorsque γ se déforme, en passant toujours par O, le point O_1' décrit une droite r_1'. Dans le premier cas, la droite r_1' coupe la courbe Γ' au point homologue de O, sur cette courbe. Dans le second cas, r_1' passe par O'.

Lorsque le point O décrit la courbe Γ, la droite r_1', dans le premier cas, engendre une surface réglée R_1' ayant Γ' comme directrice. Dans le second cas, la droite r_1' engendre un cône R_1' de sommet O', ou reste fixe.

On arrive à des conclusions analogues pour les courbes $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_s$. Dans le premier cas, on aura s surfaces réglées fondamentales $R_1', R_2', \ldots, R_s'$ ayant toutes Γ' comme directrice.

Dans le second cas, on aura un certain nombre de cônes de sommet O' et un certain nombre de droites. Ces dernières présenteront certaines analogies avec les courbes fondamentales de seconde espèce.

97. Points fondamentaux isolés quelconques. — Une première classification des points fondamentaux isolés peut être faite en se basant sur la nature du système des cônes tangents aux surfaces F au point O considéré. Quatre cas peuvent se présenter :

1° Les cônes forment un système linéaire de dimension trois, ayant éventuellement une partie fixe, la partie variable étant irréductible. Si la partie fixe manque, le point O est fondamental ordinaire ;

2° Les cônes forment un réseau, ayant éventuellement une composante fixe, la partie variable étant irréductible ;

3° En dehors d'une composante fixe éventuelle, les cônes sont formés au moyen de cônes d'un faisceau ;

4° Les surfaces F ont en O un cône fixe.

Nous dirons quelques mots du troisième cas par exemple, en supposant que la famille de cônes n'a pas de composante fixe. Pour préciser, nous supposerons que chaque surface F a, en O, un cône tangent formé de λ cônes ψ d'un faisceau $|\psi|$. Si s est l'ordre des cônes ψ, les surfaces F ont la multiplicité λs en O.

Les surfaces F tangentes en O à une droite p touchent le cône ψ passant par cette droite ; elles forment un réseau auquel correspond une gerbe de sommet O' dans Σ'. Lorsque le cône ψ varie dans $|\psi|$, le point O' décrit une courbe Γ' d'ordre λ, puisqu'une surface F a λ cônes ψ la touchant en O. La courbe Γ' est rationnelle, puisqu'en correspondance biunivoque avec le faisceau $|\psi|$.

Une surface F' ne peut rencontrer Γ' en dehors de la base de $|F'|$, car il lui correspond un plan ne passant pas en général par O. La courbe Γ' est donc fondamentale et cette courbe est isolée. Aux plans passant par O correspondent les surfaces F' contenant la courbe Γ'.

A une droite p passant par O correspond dans Σ' une courbe C_1' d'ordre $n-\lambda s$, s'appuyant sur Γ' au point homologue du cône ψ passant par p. Aux plans passant par p correspondent des surfaces F' contenant les courbes Γ' et C_1'. L'ensemble de ces courbes doit former une courbe C' d'ordre n ; on doit donc avoir $s=1$ et les cônes ψ sont les plans d'un faisceau.

Nous nous bornerons à ces brèves indications sur l'étude des points fondamentaux isolés non ordinaires.

§ 3. *Les transformations birationnelles régulières*

98. Préliminaires. — Nous dirons qu'une transformation birationnelle T est régulière lorsqu'elle ne possède, dans les deux espaces, que des courbes fondamentales et des points fondamentaux isolés ordinaires.

Nous continuerons à désigner par $|F|$ et $|F'|$ les systèmes homaloïdaux dans les espaces Σ, Σ' et nous supposerons que :

1° Dans Σ, T possède h points fondamentaux isolés $O_1, O_2, \ldots, O_h$, auxquels correspondent respectivement les surfaces fondamentales associées dans Σ' : $\Omega_1', \Omega_2', \ldots, \Omega_h'$; k courbes fondamentales de première espèce $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ auxquelles sont associées, dans Σ', les surfaces fondamentales $\Phi_1', \Phi_2', \ldots, \Phi_k'$;

2° Dans Σ', T possède h' points fondamentaux isolés $O'_1, O'_2, \ldots, O'_{h'}$, auxquels sont respectivement associées dans Σ les surfaces $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{h'}$, et k' courbes fondamentales de première espèce $\Gamma_1', \Gamma_2', \ldots, \Gamma'_{k'}$ auxquelles sont respectivement associées dans Σ les surfaces fondamentales $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{k'}$;

3° T possède, dans Σ, l courbes fondamentales de seconde espèce $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ auxquelles sont associées dans Σ' les courbes fondamentales de seconde espèce $\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_l'$.

L'ordre des surfaces F sera désigné par n, celui des surfaces F' par n'. Aux droites de Σ correspondent dans Σ' des courbes C' d'ordre n et aux droites de Σ' correspondent dans Σ, des courbes C d'ordre n'.

99. Tableaux associés à la transformation birationnelle. — Formons le tableau A :

$$\left.\begin{array}{ccccccccc}
n & r_1 & r_2 & \dots & r_h & s_1 & s_2 & \dots & s_k \\
p_1 & r_{11} & r_{21} & \dots & r_{h1} & s_{11} & s_{21} & \dots & s_{k1} \\
. & . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\
p_{h'} & r_{1h'} & r_{2h'} & \dots & r_{kh'} & s_{1h'} & s_{2h'} & \dots & s_{kh'} \\
q_1 & \rho_{11} & \rho_{21} & \dots & \rho_{h1} & \sigma_{11} & \sigma_{21} & \dots & \sigma_{k1} \\
. & . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\
q_{k'} & \rho_{1k'} & \rho_{2k'} & \dots & \rho_{hk'} & \sigma_{1k'} & \sigma_{2k'} & \dots & \sigma_{kk'}
\end{array}\right\} \quad (A)$$

dans lequel :

Dans la première ligne sont inscrits successivement l'ordre des surfaces F et les multiplicités de O_1, O_2, ..., O_h puis de Γ_1, Γ_2, ..., Γ_k pour ces surfaces.

Dans les h' lignes suivantes sont inscrits successivement l'ordre d'une des surfaces Ω_1, Ω_2, ..., $\Omega_{h'}$, les multiplicités des points O_1, O_2, ..., O_h puis des courbes Γ_1, Γ_2, ..., Γ_k pour cette surface.

Dans les k' dernières lignes sont inscrits successivement l'ordre de chacune des surfaces Φ_1, Φ_2, ..., $\Phi_{k'}$, les multiplicités de O_1, O_2, ..., O_h puis de Γ_1, Γ_2, ..., Γ_k pour cette surface.

Aux points infiniment voisins du point fondamental O_i, situés dans un plan, correspondent sur la surface Ω_i', les points d'une courbe que nous désignerons par ω_i'. De même, aux points infiniment voisins de O_i' situés dans un plan, correspondent sur Ω_i les points d'une courbe ω_i.

Aux points infiniment voisins d'un point de la courbe fondamentale Γ_i, correspondent sur la surface Φ_i' les points d'une courbe φ_i'. De même, aux points infiniment voisins d'un point de Γ_i', correspondent sur Φ_i les points d'une courbe φ_i.

Ces définitions posées, formons le tableau

$$\left.\begin{array}{ccccccccc}
n' & p_1' & p_2' & \dots & p_h' & q_1' & q_5' & \dots & q_k' \\
r_1' & r'_{11} & r'_{12} & \dots & r'_{1h} & \rho'_{11} & \rho'_{12} & \dots & \rho'_{1k} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
r'_{h'} & r'_{h'1} & r'_{h'2} & \dots & r'_{h'h} & \rho'_{h'1} & \rho'_{h'2} & \dots & \rho'_{h'k} \\
s_1' & s'_{11} & s'_{12} & \dots & s'_{1h} & \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \dots & \sigma'_{1k} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
s'_{k'} & s'_{k'1} & s'_{k'2} & \dots & s'_{k'h} & \sigma'_{k'1} & \sigma'_{k'2} & \dots & \sigma'_{k'k}
\end{array}\right\} \quad (B)$$

Dans ce tableau les lignes sont successivement relatives aux courbes C_1, ω_1, ω_2, ..., $\omega_{h'}$, φ_1, φ_2, ..., $\varphi_{k'}$, et donnent successivement l'ordre, les multiplicités en O_1, O_2, ..., O_h et le nombre des points d'appui variables sur les courbes Γ_1, Γ_2, ..., Γ_k.

On pourrait de même former des tableaux A′ et B′ en considérant les surfaces F′ et les courbes C′. Nous allons voir que

A' est identique à B et B' à A, sauf changement des lignes en colonnes.

100. Propriétés des éléments fondamentaux. — Un point commun à deux courbes ou surfaces fondamentales est fondamental, puisque la transformation est birationnelle.

Soient O_i, O_j' deux points fondamentaux, Ω_i' et Ω_j les surfaces fondamentales qui leur sont associées. La surface Ω_j est d'ordre p_j et O_i est multiple d'ordre r_i pour les surfaces F, d'ordre r_{ij} pour Ω_j. Désignons par x l'ordre de la surface Ω_i', par y et z les multiplicités de O_j' pour les surfaces F' et Ω_i'. Une droite de Σ' coupe Ω_i' en x points et par conséquent les courbes C passent x fois par le point O_i et on a $x = p_i'$. Pour la même raison, les courbes C' passent p_j fois en O_j'.

Les courbes ω_i', qui correspondent aux points infiniment voisins de O_i situés dans les plans passant par ce point, sont d'ordre r_i et forment sur Ω_i' un réseau homaloïdal. De même, les courbes ω_j situées sur Ω_j ont l'ordre égal à la multiplicité y de O_j' pour les surfaces F' ; on a donc $y = r_j'$.

La surface Ω_j passe r_{ij} fois par O_i, donc la courbe ω_i' passe r_{ij} fois par O_j'. Pour la même raison la courbe ω_j passe z fois par O_i et on a $z = r_{ji}'$.

Considérons maintenant les courbes fondamentales de première espèce Γ_i, Γ_j' et les surfaces fondamentales associées Φ_i', Φ_j. La courbe φ_i' qui correspond sur Φ_i' à un point de Γ_i est d'ordre s_i, égal à la multiplicité de Γ_i pour les surfaces F. La courbe φ_j qui correspond sur Φ_j à un point de Γ_j', est d'ordre s_j', donc la courbe Γ_j' est multiple d'ordre s_j' pour les surfaces F'.

Une droite rencontrant la surface Φ_j en q_j points, les courbes C' s'appuient en q_j points variables sur Γ_j'. Les courbes C s'appuyant en q_i' points variables sur Γ_i, la surface Φ_i' est d'ordre q_i'.

La courbe Γ_i est multiple d'ordre σ_{ij} pour la surface Φ_j, donc les courbes φ_i' s'appuient en σ_{ij} points variables sur la courbe Γ_j'. Les courbes φ_j s'appuyant en σ'_{ji} points variables sur la courbe Γ_i, donc la courbe Γ_j' est multiple d'ordre σ'_{ji} pour la surface Φ_i'.

Considérons enfin le point fondamental O_i et la courbe fondamentale de première espèce Γ_j'. Si ρ_{ij} est la multiplicité de O_i pour la surface Φ_j, les courbes ω_i' s'appuient en ρ_{ij} points variables sur la courbe Γ_j'. D'autre part, si les courbes φ_j ont la multiplicité s'_{ji} en O_i, la courbe Γ_j' est multiple d'ordre s'_{ji} pour la surface Ω_i'.

De même, si la courbe ω_j s'appuie en ρ'_{ji} points variables sur la courbe Γ_i, le point O_j' est multiple d'ordre ρ'_{ji} pour la surface Φ_i. Si la courbe Γ_i est multiple d'ordre s_{ij} pour la surface Ω_j, les courbes φ_i' ont la multiplicité s_{ij} en O_j'.

De ces résultats, on conclut que le tableau A' relatif aux surfaces F′ coïncide avec le tableau B, les lignes étant remplacées par les colonnes. De même, le tableau B′, relatif aux courbes C′ coïncide avec le tableau A, les lignes étant remplacées par les colonnes.

101. Théorème. — *Le nombre des éléments fondamentaux (points isolés et courbes) est le même dans les deux espaces.*

Comme le nombre des courbes fondamentales de seconde espèce est le même dans les deux espaces, il suffira de démontrer que l'on a

$$h+k=h'+k'.$$

Considérons la i^e ligne du tableau A et la j^e ligne du tableau B. Formons le produit des premiers termes de ces lignes et soustrayons-en la somme des produits des termes de même rang. Soit R_{ij} le résultat. Nous avons par exemple

$$R_{11}=nn'-r_1p_1'-r_2p_2'-\dots-r_hp_h'-s_1q_1'-s_2q_2'-\dots-s_kq'_k.$$

En exprimant qu'une courbe C ne rencontre une surface F qu'en un point en dehors des courbes fondamentales et des points fondamentaux, on a

$$R_{11}=1.$$

En exprimant que les courbes $\omega_1, \dots, \omega_{h'}, \varphi_1, \dots, \varphi_{k'}$, ne rencontrent pas une surface F en dehors des points fondamentaux, on a

$$R_{12}=0, \dots, \quad R_{1h'}=0, \dots, \quad R_{1h'+1}=0, \dots, \quad R_{1h'+k'+1}=0.$$

En exprimant qu'une courbe C ne rencontre pas les surfaces fondamentales $\Omega_1, \dots, \Omega_{h'}, \Phi_1, \dots, \Phi_{k'}$ en dehors des points fondamentaux, on a

$$R_{21}=0, \dots, \quad R_{h'1}=0, \quad R_{h'+11}=0, \dots, \quad R_{h'+k'+11}=0.$$

En exprimant maintenant qu'une courbe ω_j ou φ_j ne rencontre une surface fondamentale Ω_i ou Φ_i qu'en des points fondamentaux, on a

$$R_{ij}=0, \qquad (i\neq j).$$

Considérons maintenant le produit

$$R_{22}=p_1r_1'-r_{11}r_{11}'-\dots-r_{h1}r'_{1h}-s_{11}\rho_{11}'-\dots-s_{k1}\rho'_{1k}.$$

Une surface F passant par un point de Ω_1 contient cette surface comme partie et est complétée par une surface F_1, d'ordre $n-p_1$, passant r_1-r_{11} fois par O_1, r_2-r_{21} fois par $O_2, \dots, r_h-r_{h1}$ fois par O_h, s_1-s_{11} fois par $\Gamma_1, \dots, s_k-s_{k1}$ fois par Γ_k. Une courbe ω_1 (qui est tracée sur Ω_1) rencontre la surface F_1 en un point. On a donc

$$R_{12}-R_{22}=1.$$

et comme $R_{12}=0$, on a $R_{22}=-1$. En répétant le même raisonnement pour $\Omega_2, \ldots, \Omega_h$, on aura

$$R_{22}=-1\,, \quad R_{33}=-1\,, \quad \ldots, \quad R_{h'+1\,h'+1}=-1\,.$$

A une droite s'appuyant sur la courbe Γ_1', correspond une courbe C formée d'une courbe φ_1 et d'une courbe C_1 d'ordre $n'-s_1'$. Cette courbe C_1 rencontre en un point la surface Φ_1 en dehors des points-base de $|F|$ et on a

$$R_{h'+1\,1}-R_{h'+1\,h'+1}=1\,,$$

d'où $R_{h'+1\,h'+1}=-1$. On a finalement

$$R_{h'+1\,h'+1}=-1, \quad R_{h'+2\,h'+2}=-1, \quad R_{h'+k'+1\,h'+k'+1}=-1.$$

En opérant de même sur les tableaux A', P', c'est-à-dire sur les tableaux B, A où les lignes sont remplacées par les colonnes, et en appelant R'_{ij} le nombre analogue à R_{ij}, on obtient

$$R'_{11}=1\,, \qquad R'_{ii}=-1\,, \qquad (i=2, 3, \ldots, h+k+1)\,.$$

tous les autres nombres R'_{ij} étant nuls.

Cela étant, formons les sommes

$$R_{22}+R_{33}+\ldots+R_{h'+k'+1\,h'+k'+1}=-(h'+k')\,,$$
$$R_{22}'+R_{33}'+\ldots+R'_{h+k+1\,h+k+1}=-(h+k)\,.$$

Les nombres figurant dans les premiers membres de ces sommes étant les mêmes, ces sommes sont égales et on a

$$h+k=h'+k'\,.$$

102. Remarque. — Les tableaux A et B sont des tableaux carrés. Considérons les déterminants déduits de ces tableaux, multiplions les termes de la première colonne de chacun des déterminants par $\sqrt{-1}$, puis faisons le produit des deux déterminants ligne par ligne. D'après les valeurs trouvées pour R_{ij}, ce produit a pour valeur -1. Les deux déterminants considérés ont donc l'unité pour valeur absolue (le signe importe peu, il dépend en effet de l'ordre dans lequel on a rangé les éléments fondamentaux).

CHAPITRE V

EXEMPLES DE TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES ET APPLICATIONS

§ 1. *La transformation* (2,3)

103. Définition. — Soient a une droite et A_1, A_2, A_3 trois points dont le plan α ne passe pas par a. Les quadriques F passant par a et par A_1, A_2, A_3 forment un système linéaire $|F|$ à trois dimensions. Deux quadriques F ont en commun une cubique gauche C passant par A_1, A_2, A_3 et ayant a comme bisécante. Une troisième quadrique ne passant pas par C coupe cette courbe en un seul point en dehors de la base de $|F|$. Par conséquent, ce système est homaloïdal.

Une droite passant par A_1 et s'appuyant sur a est fondamentale pour le système $|F|$; elle engendre un plan fondamental $\alpha_1 = A_1 a$. De même, les plans $\alpha_2 = A_2 a$ et $\alpha_3 = A_3 a$ sont fondamentaux pour $|F|$.

Une conique du plan $\alpha = A_1 A_2 A_3$, passant par A_1, A_2, A_3 et par le point de rencontre de α et a, est fondamentale pour $|F|$. Le plan α est donc fondamental.

La jacobienne du système $|F|$ est du quatrième ordre ; elle se compose des plans α, α_1, α_2, α_3.

Désignons par Σ l'espace contenant $|F|$. En rapportant projectivement les surfaces F aux plans d'un second espace Σ', nous obtenons une transformation birationnelle T entre Σ et Σ'.

104. Système homaloïdal du second espace. — Les surfaces F' qui correspondent dans Σ' aux plans de Σ sont du troisième ordre et l'intersection de deux de ces surfaces, variable avec les surfaces, est une conique C'.

Les quadriques F passant par une droite p du faisceau (A_1, α_1) forment un réseau et il leur correspond dans Σ' les plans passant par un point A_1'. Le lieu de A_1' lorsque p varie dans le faisceau (A_1, α_1), est une droite a_1', car une quadrique F contient une seule droite du faisceau (A_1, α_1). De plus, comme aux points infiniment voisins d'un point A_1' de a_1', correspondent les points d'une droite p, la droite a_1' est simple pour les surfaces F.

Les faisceaux (A_2, α_2), (A_3, α_3) conduisent de même à deux droites a_2', a_3', fondamentales, simples pour les surfaces F'. Comme les faisceaux (A_1, α_1), (A_2, α_2) et (A_3, α_3) n'ont deux à deux aucune droite commune, les droites a_1', a_2', a_3' sont deux à deux gauches.

Les quadriques F passant par une conique γ du plan α contenant les points A_1, A_2, A_3 et $a\alpha$, forment un réseau ; il leur correspond les plans passant par un point A' de Σ'. Le lieu de ce point, lorsque γ varie, est une droite a', car une quadrique F contient une seule conique γ. D'autre part, aux points infiniment voisins d'un point A' de a', correspondent les points d'une conique γ, donc a' est double pour les surfaces F'.

Parmi les coniques γ, se trouve une conique formée de la droite A_2A_3 et de la droite passant par A_1 et le point $a\alpha$. Cette dernière droite appartient donc au faisceau (A_1, α_1). Les quadriques F passant par cette conique dégénérée forment un réseau auquel correspond une gerbe de plans dont le sommet appartient à la fois aux droites a' et a_1'. Ces droites se rencontrent donc. De même, a_2' et a_3' rencontrent a'.

Les surfaces cubiques F' passent donc deux fois par la droite a' et une fois par les droites a_1', a_2', a_3' ; on vérifie aisément qu'elles forment un système homaloïdal $|F'|$.

Deux surfaces F' ont en commun une conique C' s'appuyant en un point sur chacune des quatre droites a', a_1', a_2', a_3'.

105. Eléments fondamentaux. — A un plan passant par a_1' correspond une quadrique F contenant toutes les droites du faisceau (A_1, α_1) ; cette quadrique dégénère donc en deux plans : le plan α_1 et un plan passant par la droite A_2A_3. Il existe une projectivité entre les faisceaux de plans d'axes a_1' et A_2A_3.

De même, à un plan passant par a_2' correspond une quadrique fermée du plan α_2 et d'un plan passant par A_3A_1. A un plan passant par a_3' correspond une quadrique formée du plan α_3 et d'un plan passant par A_1A_2. Il existe des projectivités entre les faisceaux de plans d'axes a_2', A_3A_1 et entre les faisceaux de plans d'axes a_3', A_1A_2.

A un plan passant par la droite a' correspond une quadrique F qui doit contenir toutes les coniques γ ; elle est donc formée du plan α et d'un plan passant par a. Il existe une projectivité entre les faisceaux de plans d'axes a', a.

Les quadriques F tangentes en A_1 à une droite r forment un réseau et il lui correspond dans Σ' une gerbe de plans de sommet R'. Lorsque la droite r décrit la gerbe de sommet A_1, le point R' décrit un plan fondamental α_1', puisque A_1 est simple pour les cubiques gauches C, transformées des droites de Σ'.

Lorsque la droite r décrit un plan ρ, le point R' décrit une droite r'. Parmi les positions de r se trouve une droite du faisceau (A_1, α_1), donc la droite r' s'appuie sur la droite a_1'. De même, il existe une conique γ tangente à ρ en A_1 et la droite r' s'appuie sur a'. On en conclut qu'aux points infiniment voisins de A_1 correspondent les points du plan $\alpha_1' = a'a_1'$.

De même, aux points infiniment voisins de A_2' ou de A_3' correspondent les points des plans $\alpha_2' = a'a_2'$ ou $\alpha_3' = a'a_3'$.

Considérons maintenant un point R de la droite a et un plan ρ passant par cette droite. Les quadriques F touchant ρ en R forment un réseau et il leur correspond les plans d'une gerbe de sommet R'. Lorsque ρ tourne autour de a, le point R' décrit une droite r', puisque R est simple pour les quadriques F. Parmi les positions du plan ρ, se trouvent α_1, α_2, α_3. Les quadriques F touchant α_1 en R contiennent la droite A_1R et par conséquent r' s'appuie sur a_1'. Pour la même raison, r' s'appuie sur a_2', a_3'. Le lieu de la droite r' est donc la quadrique Q' de directrices a_1', a_2', a_3'. Aux points infiniment voisins d'un point de a correspondent donc les points d'une droite de Q' s'appuyant sur a_1', a_2', a_3'.

Reprenons le point R et le plan ρ ; faisons cette fois varier R et laissons ρ fixe. Les quadriques F touchant ρ le long de a forment un faisceau ; elles sont précisément obtenues en projetant des points de a la conique γ touchant ρ en son point d'appui sur a. A ces cônes correspondent dans Σ' les plans passant par une droite s' s'appuyant sur a', puisque parmi ces cônes, se trouve celui qui est formé des plans α, ρ. Il en résulte qu'aux points infiniment voisins de a situés dans un plan, correspondent les points d'une génératrice rectiligne de la quadrique Q' de même mode que a_1', a_2', a_3'.

Les plans α_1', α_2', α_3' ont des surfaces fondamentales de seconde espèce, donc la jacobienne de $|F'|$, qui est du huitième ordre, se compose des plans α_1', α_2', α_3' comptés chacun deux fois et de la quadrique Q'.

106. Application à l'étude des droites multiples. — La transformation T peut être utile dans l'étude du voisinage d'une droite multiple d'une surface.

Soit Φ une surface d'ordre n ayant la droite a multiple d'ordre ν. A la surface Φ, T fait correspondre dans Σ' une surface Φ' d'ordre $3n-2\nu$, passant $2n-\nu$ fois par a' et $n-\nu$ fois par chacune des droites a_1', a_2', a_3'. La surface Φ' coupe Q' en dehors de ces droites, suivant une courbe φ' d'ordre n, qui représente les points de Φ infiniment voisins de la droite a. Par un point de a, passent ν plans tangents à Φ en ce point, donc la courbe φ' coupe la génératrice g, de même mode que

a', de Q' en ν points. D'autre part, un plan passant par a touche Φ en $n-\nu$ points de cette droite, donc φ' coupe en $n-\nu$ points les génératrices rectilignes g' de Q', de même mode que a_1', a_2', a_3'.

Si une génératrice g de Q' se détache de la courbe φ', le point correspondant sur a est de multiplicité supérieure à ν pour la surface Φ. Soit en effet R ce point. A une droite p passant par R correspond une conique C' formée de la droite g et d'une droite p' s'appuyant sur g. Cette génératrice appartenant à Φ', la droite p', qui s'appuie sur a', ne rencontre plus Φ' qu'en $n-\nu-1$ points non fondamentaux. donc p ne rencontre plus Φ, en dehors de R, qu'en $n-\nu-1$ points et R est multiple d'ordre $\nu+1$ pour la surface Φ.

Si une génératrice g' se détache de φ', la surface Φ a un plan tangent fixe le long de a.

Supposons $\nu=2$. La droite a est double pour Φ et les génératrices g sont des bisécantes de la courbe φ'. En projetant la courbe φ' d'un point de la quadrique Q' sur un plan, on voit facilement qu'il y a $2(n-2)$ génératrices g tangentes à φ' et par conséquent, il y a $2(n-2)$ points-pince de la surface Φ sur a.

Si tous les points de la droite a sont des points-pince pour Φ, la surface Φ' touche la quadrique Q' le long d'une conique φ_1' complétée, pour former la courbe φ, par $n-4$ génératrices g. La conique φ_1' correspond à une droite infiniment voisine de a et sur cette droite a la surface Φ possède $n-4$ points triples.

Si en particulier les plans tangents aux différents points de a à la surface Φ sont confondus, la courbe φ' dégénère en une droite g' le long de laquelle Φ' touche Q' et en $n-2$ génératrices g. Φ possède donc $n-2$ points triples sur a.

Supposons maintenant que tout point de Φ, infiniment voisin d'un point de a, soit double pour cette surface, c'est-à-dire que tout point de a soit un tacnode pour Φ. La droite a sera appelée droite tacnodale de Φ. En général, la surface Φ' passe doublement par une conique φ_1' de Q' et la courbe φ' est complétée par $n-4$ génératrices g. La surface Φ possède $n-4$ points triples sur a. En particulier, si le plan tangent à Φ le long de a est fixe, la courbe φ' dégénère en une droite g', double pour Φ' et en $n-2$ génératrices g, qui correspondent à $n-2$ points triples de Φ situés sur a.

107. Cas particulier de la transformation. — Un cas particulier de la transformation T s'obtient en supposant que le point A_3 appartient à a, les quadriques F touchant en A_3 un plan α_3 passent par a, mais non par A_1, A_2. Les cubiques gauches C touchent en A_3 le plan α_3.

En répétant les raisonnements faits dans le cas général, on trouve encore qu'aux droites des faisceaux (A_1, α_1), (A_2, α_2), (A_3, α_3) correspondent respectivement les points de trois droites a_1', a_2', a_3', simples pour les surfaces cubiques F'. Aux coniques γ du plan $\alpha = A_1A_2A_3$, passant par A_1, A_2, A_3 et touchant α_3 en A_3, correspondent les points d'une droite a', double pour les surfaces F'.

Les coniques γ dégénérées sont la conique formée de la droite A_1A_2 et de la droite $\alpha\alpha_3$, et la conique formée des droites A_1A_3, A_2A_3. A la première correspond un point commun aux droites a' et a_3' ; à la seconde un point commun A' aux droites a', a_1', a_2'.

La quadrique Q' dégénère en deux plans, le plan $\alpha_3' = A'a_3'$ et le plan $\alpha' = a_1'a_2'$. Observons que les quadriques F tangentes au plan α_3 en un point de a distinct de A_3 sont des cônes et forment un réseau. Il leur correspond les plans d'une gerbe de sommet A_3'. Ce point appartient à la droite a_3', car les cônes considérés rencontrent le plan α_3 suivant la droite a comptée deux fois.

Considérons un point R de a, distinct de A_3 et un plan ρ passant par a. Les quadriques F tangentes à ρ en R forment un réseau et il leur correspond dans Σ' les plans d'une gerbe de sommet R'. Lorsque le plan ρ varie, le point R' décrit une droite r'. Le plan ρ coïncide successivement avec α_1, α_2, α_3 ; par suite la droite r' s'appuie sur a_1', a_2' (en des points variables avec R) et passe par A_3'. Ce point est donc l'intersection du plan α' et de a_3'.

On établit, comme dans le cas général, qu'aux points infiniment voisins de A_1, A_2, A_3 correspondent respectivement les points des plans

$$\alpha_1' = a'a_1', \qquad \alpha_2' = a'a_2', \qquad \alpha_3' = a'a_3'.$$

§ 2. *La transformation* (2,4)

108. Définition. — Considérons, dans un espace Σ, les quadriques F passant par quatre points A, A_1, A_2, A_3, non situés dans un même plan, et tangentes en A à un plan α ne passant par aucun des points A_1, A_2, A_3. Elles forment un système linéaire $|F|$ de dimension trois. Deux quadriques F ont en commun une quartique C passant par A, A_1, A_2, A_3 et ayant en A un point double, les tangentes en ce point étant situées dans α. Une troisième quadrique F, ne passant pas par C, coupe cette courbe en un seul point en dehors des points-base de $|F|$, par conséquent $|F|$ est un système homaloïdal.

Rapportons projectivement les surfaces F aux plans d'un espace Σ'. Nous définissons ainsi, entre les espaces Σ et Σ', une correspondance birationnelle T ; aux plans de Σ correspondent dans Σ' des surfaces F' du quatrième ordre. Aux droites de Σ correspondent des coniques C'.

109. Système homaloïdal du second espace. — Les quadriques F découpent, sur le plan $\alpha_1 = AA_2A_3$, des coniques γ_1 passant par A, A_2, A_3, touchant en A la droite $\alpha\alpha_1$ et formant un faisceau. Ces coniques sont fondamentales pour $|F|$. Aux ∞^2 quadriques passant par une conique γ_1 correspondent les plans d'une gerbe de sommet R' de Σ'. Lorsque la conique γ_1 varie, le point R' engendre une courbe fondamentale qui est une droite a_1', car une quadrique F contient une seule conique γ_1. La droite a_1' est double pour les surfaces F', car aux points infiniment voisins d'un point de a_1' correspondent les points d'une conique γ_1.

De même, les faisceaux de coniques découpés par les quadriques F sur les plans $\alpha_2 = AA_3A_1$, $\alpha_3 = AA_1A_2$ donnent naissance à deux droites fondamentales a_2', a_3', doubles pour les surfaces F'.

Les quadriques F touchant en A une droite non située dans le plan α sont des cônes F_0 de sommet A ; elles forment un réseau auquel correspond dans Σ' une gerbe de plans de sommet A'. Les cônes considérés coupent α_1 suivant les droites AA_2, AA_3 formant une conique γ_1, donc A' appartient à la droite a_1'. De même, A' appartient à a_2', a_3' et les trois droites a_1', a_2', a_3' sont les arêtes d'un trièdre de sommet A'.

Les cônes F_0 passent par les droites AA_1, AA_2, AA_3 et forment donc, dans la gerbe de sommet A, un réseau homaloïdal en ce sens que deux cônes ont en commun une seule droite variable r. A un cône F_0 correspond un plan passant par A' et par conséquent, il existe une correspondance birationnelle quadratique, induite par T, entre les gerbes de sommets A, A'. Soit r' la droite qui correspond à r, dans Σ'. La droite r rencontre un plan de Σ ne passant pas à A en un point, donc r' rencontre une surface F' en un seul point en dehors de A'. Le point A' est donc triple pour les surfaces F' et celles-ci sont des surfaces de Steiner.

Soit maintenant r une droite passant par A et située dans α. Les quadriques F contenant r forment un réseau et il leur correspond les plans d'une gerbe de sommet R'. Lorsque la droite r décrit le faisceau (A, α), le point R' décrit une courbe fondamentale Γ', simple pour les surfaces F'. Cette courbe est une conique, car une quadrique F contient deux droites du faisceau (A, α).

Parmi les coniques γ_1 du plan α_1 se trouve une conique dégénérée en la droite A_2A_3 et la droite $\alpha\alpha_1$, par suite Γ' s'appuie sur a_1'. De même, elle s'appuie sur a_2', a_3'.

Deux surfaces F' ont encore en commun, en dehors de la base de F$'$, une conique C$'$ s'appuyant sur les droites a_1', a_2', a_3' et sur la conique Γ'.

110. Eléments fondamentaux. — Les quadriques F tangentes en A_1 à une droite r forment un réseau et il leur correspond les plans d'une gerbe de sommet R$'$. Lorsque r décrit la gerbe de sommet A_1, le point R_1 décrit un plan α_1'. Si la droite r appartient au plan α_2, les quadriques F touchant r en A_1 coupent α_2 suivant une conique γ_2, à laquelle correspond un point de a_2'. Il en résulte que α_1' contient a_2', et de même, a_3'.

On établit de la même manière qu'aux points infiniment voisins de A_2, A_3, correspondent respectivement les points des plans $\alpha_2' = a_3'a_1'$, $\alpha_3' = a_1'a_2'$.

Soit r' une droite passant par A$'$ et non située dans un des plans α_1', α_2', α_3'. Les surfaces F$'$ ont en A$'$ un point triple et le cône tangent à ces surfaces en A$'$ est fixe et formé des plans α_1', α_2', α_3'. Les surfaces F$'$ touchant r' en A$'$ sont donc des cônes ; ceux-ci comprennent comme partie fixe le cône Γ_0', projetant la conique Γ' de A$'$; ils sont complétés par les cônes du second degré de sommet A$'$, passant par a_1', a_2', a_3'. Aux points infiniment voisins de A non situés dans le plan α, correspondent les points infiniment voisins de A$'$.

Les points du domaine du premier ordre de A, situés dans le plan α, appartiennent à toutes les surfaces F et sont fondamentaux. Considérons un plan ρ, distinct de α, passant par A et une conique φ située dans ρ et touchant en A la droite $\alpha\rho$. Les quadriques F ayant avec φ un contact du second ordre en A forment un réseau et il leur correspond les plans d'une gerbe de sommet R$'$. Lorsque la conique φ varie, le point R$'$ décrit une droite r'. Observons qu'il suffit de faire varier la conique φ dans un faisceau ayant pour base, outre A, deux points O_1, O_2. Dans le faisceau $|\varphi|$, se trouve la conique formée des droites AO_1 et AO_2. Les quadriques F ayant trois points d'intersection confondus avec cette conique en A sont les cônes F_{0i} ; par suite, la droite r' passe par A$'$. Dans le faisceau $|\varphi|$, se trouve la conique formée des droites $\alpha\rho$ et O_1O_2 ; les surfaces F osculant cette conique en A contiennent la droite $\alpha\rho$ et par suite la droite r' s'appuie sur la conique Γ'. Il en résulte que quand le plan ρ varie dans la gerbe de sommet A, la droite r' décrit le cône Γ_0'. Aux points du domaine du second ordre de A infiniment voisins des points du domaine du premier ordre situés dans le plan α, correspondent les points du cône Γ_0'.

Dans la correspondance quadratique existant entre les gerbes de sommets A, A$'$, au plan α correspond le cône Γ_0'.

111. Equations de la transformation. — Prenons les points A, A_1, A_2, A_3 comme sommets du tétraèdre de référence et soit

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

l'équation du plan α. Les équations de la transformation T s'écrivent

$$\frac{x_1'}{x_2x_3} = \frac{x_2'}{x_3x_1} = \frac{x_3'}{x_1x_2} = \frac{x_4'}{x_4(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)} .$$

De ces équations, on déduit

$$\frac{x_1}{x_2'x_3'\varphi} = \frac{x_2}{x_3'x_1'\varphi} = \frac{x_3}{x_1'x_2'\varphi} = \frac{x_4}{x_1'x_2'x_3'x_4'} ,$$

où l'on a posé

$$\varphi \equiv a_1x_2'x_3' + a_2x_3'x_1' + a_3x_1'x_2'.$$

Le cône Γ_0' a pour équation $\varphi = 0$.

La jacobienne du système $|F|$ est du quatrième ordre et formée des plans α, α_1, α_2, α_3.

La jacobienne du système $|F'|$ est du douzième ordre et s'écrit

$$x_1'^2 x_2'^2 x_3'^2 \varphi^3 = 0 .$$

Elle est formée des plans α_1', α_2', α_3' comptés chacun deux fois et du cône Γ_0' compté trois fois.

§ 3. *La transformation* (3,3)

112. Définition. — Soient Ω_1, Ω_2, Ω_3 trois réciprocités entre deux espaces Σ, Σ'. Nous supposerons que ces réciprocités n'appartiennent pas à un même faisceau, c'est-à-dire que les plans qui correspondent dans Σ' à un même point de Σ ne se coupent pas en général suivant une même droite.

A un point P de Σ, Ω_1, Ω_2 et Ω_3 font correspondre trois plans σ_1', σ_2', σ_3' de Σ' se coupant en un point P'. Au point P' correspondent dans Σ trois plans σ_1, σ_2, σ_3 passant par le point P. On définit ainsi une transformation birationnelle T entre les points P de Σ et P' de Σ'.

113. Systèmes homaloïdaux. — Lorsque le point P décrit un plan ρ, les plans σ_1', σ_2', σ_3' qui lui correspondent décrivent trois gerbes deux à deux projectives et le point P' engendre donc une surface cubique F'. Lorsque le point P décrit une droite r, les plans σ_1', σ_2', σ_3' engendrent trois faisceaux deux à deux projectifs et le point P décrit une cubique gauche C'.

De même, aux plans de Σ' correspondent dans Σ des surfaces cubiques F et aux droites de Σ', correspondent les cubiques gauches C.

Considérons le système homaloïdal $|F|$ de Σ. Puisque deux surfaces F doivent avoir en commun une cubique gauche C, variable avec les surfaces, la base de $|F|$ est une courbe Γ du sixième ordre, que nous supposerons irréductible.

Dans l'espace Σ', le système homaloïdal $|F'|$ a également pour base une courbe du sixième ordre Γ'. Nous verrons qu'elle est également irréductible.

114. Etude des courbes fondamentales. — Soit R′ un point fondamental de Σ', c'est-à-dire un point de Γ'. Son homologue dans Σ doit être indéterminé, par conséquent les plans σ_1, σ_2, σ_3, que Ω_1, Ω_2, Ω_3 font correspondre à R′ doivent passer par une même droite r. La droite r est fondamentale et ne peut rencontrer les surfaces F en dehors de la base de $|F|$, c'est donc une trisécante de la courbe Γ. Celle-ci étant irréductible par hypothèse, il en est de même de la surface Φ, engendrée par ses trisécantes et par conséquent de la courbe Γ', qui représente les droites de cette surface.

On établit de même qu'à un point R de la courbe Γ correspond une droite r' de Σ', trisécante de la courbe Γ'. Le lieu de cette trisécante est une surface Φ'.

Aux points de la droite r', Ω_1, Ω_2, Ω_3 font correspondre des plans σ_1, σ_2, σ_3 passant par R et engendrant des faisceaux projectifs à la ponctuelle r'. Lorsque le point de cette droite est un de ses points d'appui sur Γ', les trois plans σ_1, σ_2, σ_3 passent par une même droite, et inversement. On en conclut que par R, passent trois trisécantes de Γ.

En projetant la courbe Γ d'un de ses points sur un plan, on obtient une courbe du cinquième ordre possédant trois points doubles, donc de genre trois. La courbe Γ et de même la courbe Γ' sont de genre trois.

Un plan ρ' de Σ' coupe Γ' en six points, donc la surface F qui lui correspond contient six trisécantes de Γ. La courbe Γ est triple pour la surface Φ, lieu des trisécantes et par conséquent cette surface est du huitième ordre. De même, la surface Φ', lieu des trisécantes de Γ', est du huitième ordre et passe trois fois par Γ'.

La courbe Γ ne peut posséder une quadrisécante, car une telle droite appartiendrait à toutes les surfaces F. La jacobienne de $|F|$ est la surface Φ.

Une droite de Σ' coupe Φ' en huit points, donc les cubiques gauche C s'appuient en huit points sur la courbe Γ. De même, les cubiques gauches C′ s'appuient en huit points sur la courbe Γ'. D'ailleurs, les systèmes $|F|$, $|F'|$ étant homaloïdaux, une cubique C ne peut rencontrer une surface F qu'en un point et une cubique C′ ne peut rencontrer une surface F′ qu'en un point.

A une sécante de Γ correspond une cubique C' formée d'une trisécante de Γ' et d'une conique s'appuyant en cinq points sur Γ'. A une bisécante de Γ, correspond une cubique C' formée de deux trisécantes de Γ' et d'une bisécante de cette courbe s'appuyant sur les deux premières droites. A une trisécante de Γ correspond une courbe C' formée de trois trisécantes de Γ' passant par un même point de cette courbe.

115. Equations de la transformation. — Soient

$$a_x a'_{x'} = 0\,, \qquad b_x b'_{x'} = 0\,, \qquad c_x c'_{x'} = 0$$

les équations des réciprocités Ω_1, Ω_2, Ω_3. Les équations de la transformation sont

$$\rho x_1' = \begin{vmatrix} a_x a_2' & a_x a_3' & a_x a_4' \\ b_x b_2' & b_x b_3' & b_x b_4' \\ c_x c_2' & c_x c_3' & c_x c_4' \end{vmatrix}, \quad \rho x_2' = \begin{vmatrix} a_x a_3' & a_x a_4' & a_x a_1' \\ b_x b_3' & b_x b_4' & b_x b_1' \\ c_x c_3' & c_x c_4' & c_x c_1' \end{vmatrix},$$

$$\rho x_3' = \begin{vmatrix} a_x a_4' & a_x a_1' & a_x a_2' \\ b_x b_4' & b_x b_1' & b_x b_2' \\ c_x c_4' & c_x c_1' & c_x c_2' \end{vmatrix}, \quad \rho x_4' = \begin{vmatrix} a_x a_1' & a_x a_2' & a_x a_3' \\ b_x b_1' & b_x b_2' & b_x b_3' \\ c_x c_1' & c_x c_2' & c_x c_3' \end{vmatrix}.$$

Les équations de la courbe Γ sont

$$\left\| \begin{matrix} a_x a_1' & a_x a_2' & a_x a_3' & a_x a_4' \\ b_x b_1' & b_x b_2' & b_x b_3' & b_x b_4' \\ c_x c_1' & c_x c_2' & c_x c_3' & c_x c_4' \end{matrix} \right\| = 0.$$

On obtient d'une manière analogue les équations de la transformation inverse et celles de la courbe Γ'.

116. Cas particuliers. — Si les espaces Σ et Σ' sont superposés et si les réciprocités Ω_1, Ω_2, Ω_3 sont involutives (polarités ou systèmes-nuls), la transformation T est involutive.

On peut d'autre part obtenir des cas particuliers de la transformation T en abandonnant l'hypothèse de l'irréductibilité de la courbe Γ et en particularisant les réciprocités.

Soient par exemple trois droites deux à deux gauches a_1, a_2, a_3 de Σ et trois droites deux à deux gauches a_1', a_2', a_3' de Σ'. Supposons que les couples de faisceaux de plans d'axes a_1 et a_1', a_2 et a_2', a_3 et a_3' soient projectifs. Deux points P, P' seront homologues lorsque les plans Pa_1, Pa_2, Pa_3 correspondront aux plans $P'a_1'$, $P'a_2'$, $P'a_3'$ dans ces projectivités. La courbe Γ se compose des droites a_1, a_2, a_3 et d'une cubique gauche Γ_0 ayant ces droites comme bissécantes. La courbes Γ' est analogue.

Un autre cas particulier est obtenu lorsque la courbe Γ est formée de quatre droites deux à deux gauches a_1, a_2, a_3, a_4 et de leurs quadrisécantes b_1, b_2. La courbe Γ' est analogue et les droites b_1, b_2 sont fondamentales de seconde espèce.

Nous étudierons le cas où la courbe Γ est formée des six arêtes d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Les sommets de ce tétraèdre sont doubles pour les surfaces F et deux surfaces F ont en commun une cubique gauche C passant par les sommets du tétraèdre.

Les surfaces F passant par un point du plan $\alpha_1 = A_2A_3A_4$ comprennent ce plan comme partie et sont complétées par ∞^2 cônes du second ordre de sommet A_1, passant par les droites A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 et formant un réseau. Il leur correspond dans Σ' les plans passant par un point A_1'. La transformation induit une transformation quadratique entre les gerbes de sommets A_1, A_1'.

De même, aux plans $\alpha_2 = A_3A_4A_1$, $\alpha_3 = A_4A_1A_2$, $\alpha_4 = A_1A_2A_3$ correspondent dans Σ' des points A_2', A_3', A_4'. Les quatre points A_1', A_2', A_3', A_4' ne peuvent se trouver dans un même plan, car à celui-ci correspondrait une surface cubique F composée de quatre plans, ce qui est absurde.

Les surfaces F touchant en A_1 une droite r forment un réseau auquel correspond une gerbe de plans de sommet R'. Lorsque r décrit la gerbe de sommet A_1, le point R' décrit un plan α_1'. Lorsque la droite r appartient au plan α_2, les surfaces F touchant r en A_1 comprennent le plan α_2 comme partie. On en conclut que le plan α_1' passe par A_2'. Pour la même raison, il passe par A_3', A_4'. C'est donc le plan

$$\alpha_1' = A_2'A_3'A_4' .$$

On voit de même qu'aux points A_2, A_3, A_4 sont respectivement associés les plans

$$\alpha_2' = A_3'A_4'A_1' , \quad \alpha_3' = A_4'A_1'A_2' , \quad \alpha_4' = A_1'A_2'A_3' .$$

Soient maintenant R un point de la droite A_1A_2 et ρ un plan passant par cette droite. La section d'une surface F par le plan ρ se compose de la droite A_1A_2 et d'une conique passant par A_1, A_2. Si la surface F touche le plan ρ au point R, cette conique dégénère en deux droites dont l'une est A_1A_2. Il en résulte que la surface F touche le plan ρ le long de la droite A_1A_2. Cela étant, les surfaces F touchant ρ le long de A_1A_2 forment un réseau auquel correspond une gerbe de plans de sommet R'. Ce point correspond aux points infiniment voisins de la droite A_1A_2 dans le plan ρ. Lorsque ce plan varie dans le faisceau d'axe A_1A_2, le point R' décrit une droite r', car la droite A_1A_2 est simple pour les surfaces F. Lorsque le plan coïncide avec le plan $\alpha_3 = A_1A_2A_4$, le point R' coïncide avec A_3' et lorsque ρ coïncide avec $\alpha_4 = A_1A_2A_3$, le point R' coïncide avec A_4'. La droite r' est donc la droite $A_3'A_4'$. Les droites A_1A_2 et $A_3'A_4'$ sont des droites fondamentales de seconde espèce associées et les surfaces F' passent par $A_3'A_4'$.

On arrive à des conclusions analogues pour les autres arêtes des tétraèdres.

Les surfaces F′ sont circonscrites en tétraèdre $A_1'A_2'A_3'A_4'$ et passent donc doublement par les sommets de celui-ci.

Nous avons vu plus haut qu'il y avait une correspondance quadratique entre les gerbes de sommets A_1, A_1'. On en conclut qu'aux points infiniment voisins de A_1 situés dans un plan, correspondent dans α_1' les points d'une conique passant par A_2', A_3', A_4', section par ce plan du cône quadratique de sommet A_1', homologue au plan considéré dans la transformation quadratique.

Il est facile de voir que les équations de la transformation peuvent s'écrire sous la forme

$$x_1x_1' = x_2x_2' = x_3x_3' = x_4x_4' .$$

§ 4. *Transformation birationnelle ayant une courbe fondamentale donnée*

117. Définition. — Soit Γ une courbe algébrique gauche d'ordre n, dépourvue de points multiples effectifs, et soit

$$f_n(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad x_4 = \frac{\varphi_m(x_1, x_2, x_3)}{\varphi_{m-1}(x_1, x_2, x_3)}$$

une représentation monoïdale de cette courbe, f_n, φ_m, φ_{m-1} étant des polynomes homogènes dont le degré est indiqué par l'indice.

Le cône $f_n = 0$ et le monoïde $x_4\,\varphi_{m-1} - \varphi_m = 0$ ont en commun, outre la courbe C, $n(m-1)$ droites passant par le sommet O_4 du cône $f_n = 0$.

On peut supposer sans restriction $m \geqslant n$ (I, n^{os} 126-130).

La courbe C peut également être représentée par les équations

$$f_n = 0, \quad x_4 = \frac{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)\,\varphi_m + f_n\,\psi_{m-n+1}}{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)\,\varphi_{m-1} + f_n\,\psi_{m-n}},$$

où ψ_{m-n+1}, ψ_{m-n} sont des polynomes en x_1, x_2, x_3 de degré indiqué par l'indice.

Posons

$$\begin{aligned}
\rho x_1' &= x_1\,(x_4\,\varphi_{m-1} - \varphi_m),\\
\rho x_2' &= x_2\,(x_4\,\varphi_{m-1} - \varphi_m),\\
\rho x_3' &= x_3\,(x_4\,\varphi_{m-1} - \varphi_m),\\
\rho x_4' &= f_n\,(x_4\,\psi_{m-n} - \psi_{m-n+1}) .
\end{aligned}$$

De ces équations, on déduit

$$\begin{aligned}
\rho' x_1 &= x_1' \, (x_4' \, \varphi'_{m-1} - f_n' \, \psi'_{m-n}) \,, \\
\rho' x_2 &= x_2' \, (x_4' \, \varphi'_{m-1} - f_n' \, \psi'_{m-n}) , \\
\rho' x_3 &= x_3' \, (x_4' \, \varphi'_{m-1} - f_n' \, \psi'_{m-n}) , \\
\rho' x_4 &= x_4' \, \varphi_m' - f_n' \, \psi'_{m-n+1} ,
\end{aligned}$$

où φ'_{m-1}, f'_n, ψ'_{m-n}, φ'_m, ψ'_{m-n+1} représentent les polynomes φ_{m-1}, f_n, ψ_{m-n}, φ_m, ψ_{m-n+1} où l'on a remplacé les x par les x'.

Les équations (1) ou (2) représentent une transformation birationnelle entre un espace Σ, lieu des points x et un espace Σ', lieu des points x'. La courbe donnée Γ est fondamentale pour cette transformation [1].

118. Les systèmes homaloïdaux. — Aux plans de Σ' correspondent dans Σ les surfaces

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)(x_4 \varphi_{m-1} - \varphi_m) + \lambda_4 f_n \, (x_4 \psi_{m-n} - \psi_{m-n+1}) = 0,$$

formant un système homaloïdal $|F|$. La base de ce système se compose de :

1° La courbe Γ, d'ordre n ;

2° La courbe Γ_1, d'ordre $m\,(m-n+1)$, d'équations

$$x_4 \, \varphi_{m-1} - \varphi_m = 0 \,, \qquad x_4 \, \psi_{m-n} - \psi_{m-n+1} = 0 \,,$$

ayant en O_4 la multiplicité $(m-1)\,(m-n)$;

3° Les $n(m-1)$ droites r_1, r_2, ... qui, avec Γ, forment l'intersection du cône $f_n = 0$ et du monoïde $x_4 \varphi_{m-1} - \varphi_m = 0$.

Les surfaces F sont les monoïdes d'ordre $m+1$ et de sommet O_4..

La jacobienne du système F a pour équation

$$f_n \, (x_4 \varphi_{m-1} - \varphi_m)^2 (\varphi_{m-1} \, \psi_{m-n+1} - \varphi_m \psi_{m-n}) = 0 \,.$$

Le système homaloïdal $|F'|$ de Σ' a pour équation

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3')&(x_4' \varphi'_{m-1} - f_n' \psi'_{m-n}) \\
&+ \lambda_4 \, (x_4' \varphi_m' - f_n' \psi'_{m-n+1}) = 0 \,.
\end{aligned}$$

Ces surfaces sont également des monoïdes d'ordre $m+1$, de sommet O_4'.

La base du système $|F'|$ se compose des courbes communes aux surfaces

$$x_4' \varphi'_{m-1} - f_n' \, \psi'_{m-n} = 0, \quad x_4' \, \varphi_m' - f_n' \, \psi'_{m-n+1} = 0 \,.$$

[1] Cette transformation a été étudiée par M. G. Dufrane, *Sur une transformation birationnelle ayant une courbe fondamentale donnée* (*Bull. de l'Acad. R. de Belgique*, 1937, pp. 143-148).

Elle se compose donc de :

1° La courbe plane Γ_1', d'ordre n, d'équations

$$f_n' = 0, \qquad x_4' = 0 ;$$

2° Les $n(m-1)$ droites r_1', r_2', ... communes aux cônes

$$f'_n = 0, \qquad \varphi'_{m-1} = 0, \qquad \varphi'_m = 0 ;$$

3° Une courbe Γ' d'ordre $m(m-n+1)$, ayant la multiplicité $m(m-n)+n$ en O_4.

La jacobienne de $|F'|$ a pour équation

$$f_n'(x_4'\varphi'_{m-1} - f_n'\psi'_{m-n})^2(\varphi'_{m-1}\psi'_{m-n+1} - \varphi_m'\psi'_{m-n}) = 0.$$

119. Etude des éléments fondamentaux dans Σ. — Considérons une droite r

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3}$$

passant par O_4. L'équation du cône tangent aux surfaces F en ce point étant

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)\varphi_{m-1} + \lambda_4 f_n \psi_{m-n} = 0,$$

les surfaces F touchant la droite r en O_4 sont données par

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3)\varphi_{m-1}(a_1, a_2, a_3) \\ + \lambda_4 f_n(a_1, a_2, a_3)\psi_{m-n}(a_1, a_2, a_3) = 0.$$

A ces surfaces correspondent dans Σ' les plans passant par le point

$$a_1\varphi_{m-1}(a_1, a_2, a_3), a_2\varphi_{m-1}, a_3\varphi_{m-1}, f_n(a_1, a_2, a_3)\psi_{m-n}(a_1, a_2, a_3).$$

Ce point correspond dans Σ' au point infiniment voisin de O_4 sur r. Lorsque r varie, ce point décrit la surface

$$x'_4\varphi'_{m-1} - f'_n\psi'_{m-n} = 0,$$

surface fondamentale (de seconde espèce) associée au point O_4 et qui intervient deux fois dans la jacobienne de $|F'|$.

Soit maintenant y un point de la courbe Γ. La tangente en ce point à cette courbe a pour équations

$$\alpha \equiv x_1\frac{\partial f_n}{\partial y_1} + x_2\frac{\partial f_n}{\partial y_2} + x_3\frac{\partial f_n}{\partial y_3} = 0,$$

$$\beta \equiv x_1\left(y_4\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial y_1} - \frac{\partial\varphi_m}{\partial y_1}\right) + x_2\left(y_4\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial y_2} - \frac{\partial\varphi_m}{\partial y_2}\right) \\ + x_3\left(y_4\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial y_3} - \frac{\partial\varphi_m}{\partial y_3}\right) \\ + x_4\varphi_{m-1}(y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Considérons le plan $\mu\alpha + \beta = 0$ tangent à Γ au point y. Les surfaces F touchant ce plan au point y sont données par

$$\mu(\lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3) - \lambda_4 [y_4 \psi_{m-n}(y_1, y_2, y_3) \\ - \psi_{m-n+1}(y_1, y_2, y_3)] = 0 .$$

Il leur correspond dans Σ' les plans passant par le point

$$\mu y_1, \quad \mu y_2, \quad \mu y_3, \quad y_4 \psi_{m-n} - \psi_{m-n+1} .$$

Quand μ varie, ce point décrit la droite

$$x_1' : x_2' : x_3' = y_1 : y_2 : y_3 .$$

Aux points infiniment voisins du point y correspondent donc les points d'une droite. Le lieu de cette droite, lorsque le point y décrit la courbe Γ, est le cône

$$f_n' = 0 ,$$

surface fondamentale associée à la courbe Γ.

On établit, par un raisonnement analogue, qu'aux points infiniment voisins d'un point de la courbe Γ_1 correspondent les points d'une droite passant par O_4' et dont le lieu, lorsque le point décrit Γ_1, est le cône

$$\varphi'_m \psi'_{m-n} - \varphi'_{m-1} \psi'_{m-n+1} = 0 ,$$

surface fondamentale associée à la courbe Γ_1.

Il nous reste à examiner les droites r_1, r_2, ... communes aux cônes $f_n = 0$, $\varphi_m = 0$, $\varphi_{m-1} = 0$. Soient

$$x_1 : x_2 : x_3 = a_1 : a_2 : a_3$$

les équations de la droite r_1. Le plan tangent à une surface F en un point a_1, a_2, a_3, y_4 de cette droite a pour équation

$$y_4 \beta - \gamma + \mu\alpha = 0 ,$$

où $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ sont les équations des plans tangents en ce point aux cônes $f_n = 0$, $\varphi_{m-1} = 0$, $\varphi_m = 0$ et où

$$\mu = \frac{y_4 \psi_{m-n}(a_1, a_2, a_3) - \psi_{m-n+1}(a_1, a_2, a_3)}{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3} \lambda_4 .$$

Quand μ reste fixe, les surfaces F tangentes au plan considéré forment un réseau et il leur correspond dans Σ' les plans de la gerbe de sommet

$$\mu a_1, \quad \mu a_2, \quad \mu a_3, \quad y_4 \psi_{m-n} - \psi_{m-n+1} .$$

Le lieu de ce point, quand μ varie, est la droite

$$x_1' : x_2' : x_3' = a_1 : a_2 : a_3 ,$$

qui appartient aux cônes $f'_n = 0$, $\varphi'_{m-1} = 0$, $\varphi'_m = 0$ et qu'on peut supposer être la droite r_1'. Lorsque le point a_1, a_2, a_3, y_4 varie sur la droite r_1, c'est-à-dire lorsque y_4 varie, la droite r_1' reste fixe. Les droites r_1, r_1' sont donc des droites fondamentales de seconde espèce associées. Il en est de même des couples de droites r_2, r_2' ; r_3, r_3' ; ...

120. Eléments fondamentaux dans Σ'. — Aux points infiniment voisins de O_4' correspondent dans Σ les points de la surface

$$x_4\varphi_{m-1}-\varphi_m=0\ ,$$

qui est donc fondamentale de seconde espèce et est une composante double de la jacobienne de $|F|$.

Aux points infiniment voisins d'un point de la courbe Γ_1' correspondent les points d'une droite passant par O_4 et le lieu de cette droite, lorsque le point décrit Γ_1', est le cône $f_n=0$.

Aux points infiniment voisins d'un point de la courbe Γ' correspondent les points d'une droite passant par O_4. Le lieu de cette droite quand le point décrit Γ' est le cône

$$\varphi_{m-1}\psi_{m-n+1}-\varphi_m\psi_{m-n}=0\ .$$

Ces propriétés s'établissent sans difficulté.

121. Remarque. — La transformation effectuée ici fait correspondre des monoïdes aux plans et pour cette raison elle est appelée *monoïdale*.

On observera que la transformation induit, entre les gerbes de sommets O_4, O_4', une homographie dans laquelle, aux cônes $f_n=0$, $\varphi_{m-1}=0$, $\varphi_m=0$, correspondent les cônes $f'_n=0$, $\varphi'_{m-1}=0$, $\varphi'_m=0$.

122. Application à l'étude des courbes multiples d'une surface algébrique. — Soit Φ une surface algébrique d'ordre p ayant la courbe Γ multiple d'ordre s. A cette surface correspond, dans Σ', une surface Φ' d'ordre $(m+1)p-ns$. Aux points infiniment voisins de O'_4 situés dans un plan correspondent les points d'une section plane du monoïde $x_4\varphi_{m-1}-\varphi_m=0$, par conséquent, le point O_4' est multiple d'ordre $pm-ns$ pour Φ'. De plus, cette surface passe $p-s$ fois par la courbe Γ_1' et p fois par Γ'.

Une génératrice g' du cône $f_n'=0$ coupe Φ' en dehors de O_4' et de Γ_1', en s points P_1', P_2', ..., P_s'. La droite g' correspond au domaine d'un point P de la courbe Γ. Les points P_1', P_2', ..., P_s' correspondent donc aux points infiniment voisins de P situés sur la surface Φ. Le lieu des points P_1', P_2', ..., P_s', lorsque P décrit Γ, est la courbe K', intersection de $f_n'=0$ et de Φ' en dehors de Γ_1'. La courbe K' est donc d'ordre $n(pm-ns+s)$ et passe $n(pm-ns)$ fois par O_4'.

Supposons qu'il existe un point de Γ qui soit multiple d'ordre $s+1$ au moins pour Φ. La génératrice g' de $f_n'=0$ correspondante rencontre K' en $s+1$ points au moins en dehors de O_4' et fait partie de cette courbe. Inversement, si une génératrice du cône $f_n'=0$ se détache de K', il lui correspond sur Γ un point multiple d'ordre $s+1$ au moins pour la surface Φ.

Si la surface Φ possède une courbe infiniment voisine de Γ, multiple d'ordre $s_1 \leqslant s$, la courbe K' comprend une partie multiple d'ordre s_1 pour la surface Φ' et le reste de la courbe K' est rencontré en $s-s_1$ points, en dehors de O_4', par les génératrices du cône $f_n'=0$.

La transformation considérée permet l'étude de la singularité de la surface Φ le long de la courbe Γ.

§ 5. *Représentation plane d'une surface rationnelle*

123. Remarque préliminaire. — Considérons une transformation birationnelle T entre Σ et Σ' ; soient $|F|$ et $|F'|$ les systèmes homaloïdaux de cette transformation dans les deux espaces. A une surface F correspond un plan σ' et aux sections planes de cette surface F correspondent les courbes découpées sur σ' par les surfaces F'. On a donc, dans σ', un système linéaire triplement infini de courbes qui correspondent aux sections planes d'une surface représentable point par point sur ce plan.

Cette remarque conduit au problème suivant : Etant donné dans un plan σ un système linéaire triplement infini de courbes algébriques, construire, si la chose est possible, une surface rationnelle F, représentable point par point sur σ de telle sorte qu'à ses sections planes correspondent les courbes du système donné.

C'est de ce problème dont nous allons nous occuper et nous le résoudrons au moins dans le cas le plus simple. Remarquons que nous connaissons la solution du problème par les quadriques et les surfaces cubiques (I, chap. V et VI).

124. Position du problème. — Soit F une surface rationnelle, c'est-à-dire représentable point par point sur un plan σ. Aux sections planes C de F correspondent dans σ des courbes planes Γ formant un système linéaire $|\Gamma|$, triplement infini. Les courbes Γ sont irréductibles et le degré du système $|\Gamma|$ est égal à l'ordre de F. Aux sections de F par les plans d'un faisceau correspondent les courbes Γ d'un faisceau et par conséquent il y a une projectivité entre les plans de l'espace et les courbes Γ.

Inversement, partons d'un système $|\Gamma|$, irréductible, triplement infini, donné dans le plan σ. Rapportons projectivement les courbes Γ aux plans de l'espace. Aux ∞^2 courbes Γ passant par un point P' du plan σ correspondent les plans d'une gerbe de sommet P. Lorsque P' décrit le plan σ, le point P décrit une surface F. Si le système $|\Gamma|$ appartient à une involution I_ν d'ordre ν, c'est-à-dire si les courbes Γ passant par un point passent en conséquence par $\nu - 1$ autres points, il existe une correspondance $(1, \nu)$ entre la surface F et le plan σ. Pour notre objet, nous devrons donc supposer que le système $|\Gamma|$ est simple et alors, l'ordre de F est égal au degré de $|\Gamma|$.

125. Théorème. — *Si deux systèmes linéaires simples, de courbes planes triplement infinis, se correspondent dans une transformation birationnelle, les surfaces qu'ils représentent se correspondent dans une homographie.*

Soient $|\Gamma|$ et $|\Gamma'|$ deux systèmes linéaires simples, ∞^3, se correspondant dans une transformation birationnelle T. Soient F, F' les surfaces que l'on obtient en rapportant projectivement $|\Gamma|$, $|\Gamma'|$ respectivement aux plans de l'espace Σ.

Un plan α de Σ coupe F suivant une courbe à laquelle correspond une courbe Γ. A celle-ci, T fait correspondre une courbe Γ' et à Γ' correspond la section de F' par un plan α'. Si α décrit un faisceau, il en est de même des courbes Γ, Γ' et du plan α' ; il existe donc une homographie H faisant correspondre aux plans α les plans α'.

Soit P un point de F. Aux plans passant par P correspondent les courbes Γ passant par un point P_1. A ces courbes Γ correspondent les courbes Γ' passant par le point P_1' que T fait correspondre à P_1. A ces courbes Γ' correspondent dans Σ les plans α' passant par un point P' de F'. Les points P, P' sont homologues dans l'homographie H et le théorème est démontré.

Conséquence. — Pour étudier la surface F, nous pouvons partir d'un système linéaire $|\Gamma|$ n'ayant que des points multiples à tangentes variables, car par des transformations quadratiques, on peut toujours transformer un système donné en un système présentant cette particularité.

126. Courbe double de la surface. — Supposons que le système $|\Gamma|$ soit de degré n et de genre π, qu'il possède ν points $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$ respectivement multiples d'ordres $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$, que ses courbes soient d'ordre m et qu'il soit dépourvu de courbes fondamentales. On a

$$n = m^2 - \Sigma s^2 ,$$

$$\pi = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{2}\Sigma s(s-1) ,$$

les sommations étant étendues aux ν points multiples.

Par hypothèse, $|\Gamma|$ étant simple, les courbes Γ passant par un point de leur plan σ ne passent pas par un autre point. Mais il peut se présenter des exceptions, c'est-à-dire qu'il peut exister ∞^1 points P_1 tels que les courbes Γ passant par un point P_1 passent en conséquence par un point P_2. Il peut donc exister ∞^1 couples de points P_1, P_2 ne présentant qu'une condition aux courbes Γ qui doivent les contenir. Nous désignerons par Δ le lieu de ces points.

Les courbes Γ passant par un couple P_1, P_2 forment un réseau et il leur correspond les plans passant par un point P de F. Une droite passant par P ne rencontre plus F qu'en $n-2$ points, donc P est double pour F. Lorsque P_1, P_2 parcourent Δ, le point P décrit une courbe D, double pour F.

La première polaire d'un point A par rapport à F passe par D et coupe encore la surface suivant une courbe C_j. Le plan tangent à F en un point de C_j passe par A et coupe F suivant une courbe ayant un point double au point de contact. Aux sections de F par les plans passant par A correspondent les courbes Γ d'un réseau et à C_j correspond la jacobienne Γ_j de ce réseau. La première polaire de A étant d'ordre $n-1$, il correspond à la courbe qu'elle découpe sur F une courbe du système formé par les courbes Γ comptées $n-1$ fois. Cette courbe est donc d'ordre $(n-1)m$ et passe $(n-1)s_i$ fois par O_i. La jacobienne Γ_j est d'ordre $3(m-1)$ et passe $3s_i-1$ fois par O_i. Par conséquent la courbe Δ est d'ordre $m(n-4)+3$ et passe $s_i(n-4)+1$ fois par le point O_i.

Une courbe Γ coupe Δ, en dehors des points-base, en

$$(n-1)(n-2)-2\pi$$

points se partageant en

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\pi$$

couples P_1, P_2. Par conséquent *la courbe double* D *de la surface* F *est d'ordre*

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\pi.$$

127. Points-pince de la courbe double. — En un point P de la courbe D, la surface F possède deux plans tangents α_1, α_2, en général distincts, passant par la tangente à la courbe D en P. Soient P_1, P_2 les points de Δ qui correspondent à P. Aux sections de F par les plans α_1, α_2 correspondent respectivement dans σ les courbes Γ_1 ayant un point double en P_1 et Γ_2, ayant un point double en P_2. Si P est un point-pince, c'est-à-dire si les plans α_1, α_2 sont confondus, les points P_1, P_2 doivent être confondus en un même point P_0 et les courbes Γ passant par P_0 doivent former un réseau de degré $n-2$; il en résulte qu'elles doivent avoir mêmes tangentes en P_0. Il y a ∞^1 courbes Γ touchant en P_0 une droite distincte de la tangente fixe ; elles ont un point double en P_0 et forment un faisceau $|\Gamma_0|$.

Inversement, s'il existe un point P_0 double pour les courbes Γ_0 d'un faisceau, les courbes Γ passant par P_0 y ont une tangente fixe ; il leur correspond dans Σ des plans passant par un point P double pour F, appartenant à la courbe D et qui est un point-pince.

Le nombres des points-pince de la surface F sur la courbe D est donc égal au nombre de points de σ qui sont doubles pour ∞^1 courbes de $|\Gamma|$. Ces points appartiennent aux jacobiennes de tous les réseaux tirés de $|\Gamma|$.

Considérons deux réseaux $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ tirés de $|\Gamma|$ et soient Γ_{1j}, Γ_{2j} leurs jacobiennes, $|\Gamma_{12}|$ le faisceau qu'ils ont en commun. Les courbes Γ_{1j}, Γ_{2j} se coupent en

$$9(m-1)^2-\Sigma(3s-1)^2=3n+6(2\pi-2)+9-\nu$$

points qui sont soit des points doubles pour ∞^1 courbes Γ, soit des points doubles pour une courbe du faisceau $|\Gamma_{12}|$. Nous allons rechercher le nombre des courbes du faisceau $|\Gamma_{12}|$ qui ont un point double. Dans ce but, nous utiliserons la propriété que la droite polaire d'un point double est indéterminée.

Supposons en premier lieu que le faisceau $|\Gamma_{12}|$ n'ait que des points-base simples. Soient R_1, R_2, R_3 trois points de σ non en ligne droite. Les polaires ρ_1, ρ_2, ρ_3 de ces trois points par rapport à une courbe Γ_{12} sont des courbes d'ordre $m-1$ qui, lorsque Γ_{12} décrit le faisceau $|\Gamma_{12}|$, décrivent des faisceaux $|\rho_1|$, $|\rho_2|$, $|\rho_3|$ deux à deux projectifs. Les points communs à deux courbes ρ_1, ρ_2 homologues engendrent une courbe ρ_{12} d'ordre $2(m-1)$ et les points communs à deux courbes ρ_1, ρ_3 homologues une courbe ρ_{13} d'ordre $2(m-1)$. Ces deux courbes ont en commun $4(m-1)^2$ points dont $(m-1)^2$ sont les points-base du faisceau $|\Gamma_{12}|$. Soit A un des $3(m-1)^2$ points restants. Les polaires de R_1, R_2, R_3 par rapport à une certaine courbe Γ_{12} passent par A et la droite polaire de A par rapport à cette courbe coïncide avec la droite R_1R_2 et avec la droite R_1R_3 ; cette droite polaire est donc indéterminée et le point A est double pour cette courbe Γ_{12}. Le faisceau $|\Gamma_{12}|$ possède donc $3(m-1)^2$ courbes ayant un point double.

Supposons maintenant que le faisceau $|\Gamma_{12}|$ ait un point-base O multiple d'ordre s. Reprenons le raisonnement précédent, mais en supposant que le point R_1 coïncide avec le point O. Observons que la courbe ρ_1 a un point multiple d'ordre s en O et les courbes ρ_2, ρ_3 un point multiple d'ordre $s-1$. Les groupes de tangentes en O aux courbes Γ_{12} forment une involution ayant $2(s-1)$ droites doubles. Si t est une de ces droites, la courbe ρ_1 et la courbe ρ_2 relatives à la courbe Γ_{12}

touchant t en O, sont tangentes à cette droite ; il en résulte que la courbe ρ_{12} touche t en O et par conséquent les $2(s-1)$ droites envisagées. De plus, les polaires ρ_1 de O et ρ_2 de R_2 par rapport à la courbe Γ_{12} touchant en O la droite OR_2 sont tangentes à cette droite ; celle-ci est donc tangente à ρ_{12} en O. On arrive à des conclusions analogues pour la courbe ρ_{13}. Le point O étant multiple d'ordre $2s-1$ pour ρ_{12}, ρ_{13} et ces deux courbes ayant en ce point $2s-2$ tangentes communes, le point O absorbe $(2s-1)^2+2(s-1)$ points d'intersection de ρ_{12}, ρ_{13}. D'autre part, O absorbe s^2 points-base du faisceau $|\rho_1|$, donc le point O équivaut à

$$(2s-1)^2+2(s-1)-s^2=(s-1)(3s+1)$$

points doubles de courbes Γ_{12}. On en conclut que le faisceau $|\Gamma_{12}|$ appartenant au système $|\Gamma|$, possède

$$3(m-1)^2-\Sigma(s-1)(3s+1)=n+2(2\pi-2)+\nu+3$$

courbes ayant un point double en dehors des points-base de $|\Gamma|$ (1). Il en résulte que *le nombre des points-pince de* F *sur* D *est*

$$p=2n+4(2\pi-2)+6-2\nu .$$

128. Points triples de la surface. — Il peut exister des groupes de trois points P_1, P_2, P_3, en nombre fini, tels que les courbes Γ passant par l'un de ces points passent en conséquence par les autres. Ces trois points sont doubles pour la courbe Δ et le point P′ qui leur correspond sur F est triple à la fois pour la surface et pour la courbe D.

La seconde polaire d'un point A par rapport à F passe par les points triples de cette surface et coupe encore D aux points où le plan tangent à la surface passe par A. Le nombre de ces plans est égal à la classe de la développable lieu des plans tangents à F aux points de D. Ce nombre est par suite égal à celui des points d'intersection de Δ et d'une jacobienne Γ_j, en dehors des points-base de $|\Gamma_j|$.

Les points-base de $|\Gamma_j|$ sont, outre les points-base de $|\Gamma|$, les p points qui correspondent aux points-pince. Le nombre cherché est égal à

$$q=2n^2-7n-15+(n-11)(2\pi-2)+3\nu .$$

En prenant l'intersection de D avec la seconde polaire du point A et en appelant τ le nombre des points triples pour D et pour F, on a

$$3\tau+q=\frac{1}{2}(n-2)[(n-1)(n-2)-2\pi].$$

(1) Cette formule rectifie celle qui a été établie dans I, n° 74.

Le nombre des points triples est par suite égal à

$$\tau = \frac{1}{6}(n-1)(n^2-8n+18)-(n-8)\pi-\nu.$$

129. Exemple : la surface de Steiner. — Prenons comme système $|\Gamma|$ un système linéaire ∞^3 de coniques sans point-base. On a donc $m=2$, $n=4$ et $\pi=0$. La surface F est du quatrième ordre, la courbe double D est du troisième ordre et il existe un point triple à la fois pour la surface et pour la courbe. Il en résulte que celle-ci est formée des trois crêtes d'un trièdre dont le sommet est le point triple. La surface F est la surface de Steiner.

La courbe Δ est d'ordre trois et dégénère en trois droites a_1, a_2, a_3, formant un triangle de sommet $A_1=a_2a_3$, $A_2=a_3a_1$, $A_3=a_1a_2$. Au terne de points $A_1A_2A_3$ correspond le point triple de la surface. Les coniques Γ passant par A_1 passent en conséquence par A_2, A_3 et forment un réseau. Le système $|\Gamma|$ peut être défini par ce réseau et par une conique Γ_0 ne passant par aucun sommet du triangle.

Au moyen de cette représentation plane, on obtient sans peine une propriété de la surface de Steiner. Observons qu'aux droites du plan correspondent sur F des coniques γ s'appuyant sur les trois droites doubles. Soient M un point de F, M' son homologue dans σ. Le plan tangent à F en M coupe la surface suivant une courbe ayant un point double en M. A cette courbe correspond dans σ une conique ayant un point double en M', c'est-à-dire l'ensemble de deux droites passant par M'. Par conséquent, le plan tangent à F en un point coupe la surface suivant deux coniques passant par le point de contact.

130. Courbe fondamentale. — Dans ce qui précède, nous avons supposé que $|\Gamma|$ était dépourvu de courbe fondamentale. Supposons maintenant que $|\Gamma|$ possède une courbe fondamentale G d'ordre ρ, passant r_1 fois par O_1, r_2 fois par O_2, ..., r_ν fois par O_ν. On a donc

$$n\rho-\Sigma rs=0\,.$$

Les courbes Γ passant par un point de G comprennent cette courbe comme partie et sont complétées par des courbes Γ_1 d'ordre $m-\rho$, formant un réseau. A ces courbes correspondent dans Σ les plans d'une gerbe de sommet A, appartenant à la surface. Le réseau $|\Gamma_1|$ est de degré

$$\begin{aligned} n' &= (m-\rho)^2-\Sigma(s-r)^2 \\ &= m^2+\rho^2-\Sigma(s^2+r^2)=n+\rho^2-\Sigma r^2 \end{aligned}$$

et par conséquent une droite passant par A ne rencontre plus la surface F qu'en n' points en dehors de A, donc ce point est multiple d'ordre $n - n'$ pour la surface.

Considérons les courbes Γ_1 passant par un point P de G ; il leur correspond les plans d'un faisceau dont l'axe p passe par A et ne rencontre plus F qu'en $n' - 1$ points en dehors de A. La droite p est donc tangente à la surface F en A et aux points de G correspondent les points infiniment voisins de A sur la surface F. Il en résulte que les courbes Γ_1 rencontrent G en $n - n'$ points en dehors des points-base de $|\Gamma|$. On a effectivement

$$(m - \rho)\rho - \Sigma(s - r)r = \Sigma r^2 - \rho^2 = n - n' .$$

La courbe G est une composante du système jacobien $|\Gamma_j|$ de $|\Gamma|$ et par conséquent, la présence d'une courbe fondamentale n'a aucune influence sur l'ordre de la courbe double D..

La courbe G rencontre la courbe Δ en

$$[m(n - 4) + 3]\rho - \Sigma[(n - 4)s + 1]r = 3\rho - \Sigma r$$

points et par suite la courbe D passe $3\rho - \Sigma r$ fois par le point A.

DEUXIÈME PARTIE

INTRODUCTION À LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE HYPERSPATIALE

CHAPITRE VI

L'ESPACE PROJECTIF ET LES PROJECTIVITÉS

§ 1. *L'espace projectif*

131. Définitions. — L'ensemble de $r+1$ nombres x_0, $x_1, \dots, x_r$ réels ou complexes, finis, non tous nuls, est appelé *point* et les $r+1$ nombres donnés sont les coordonnées projectives de ce point.

Deux points, dont les coordonnées projectives de même rang sont proportionnelles, sont considérés comme identiques.

L'ensemble des points x est appelé *espace projectif* ou *espace linéaire* S_r à r dimensions.

Soient $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r$, $r+1$ nombres, réels ou complexes, finis, non tous nuls. L'ensemble des points de S_r dont les coordonnées satisfont à l'équation

$$\xi_x = \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \dots + \xi_r x_r = 0 \tag{1}$$

est appelé *hyperplan* ξ de S_r. L'hyperplan ξ est complètement déterminé si l'on se donne $r+1$ nombres proportionnels à $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r$. Ces $r+1$ nombres sont appelés les coordonnées de l'hyperplan. Deux hyperplans dont les coordonnées de même rang sont proportionnelles, sont identiques.

Les hyperplans dont les coordonnées vérifient l'équation (1), où les x sont des nombres donnés, sont en nombre ∞^{r-1} ; ils forment ce que l'on appelle une *gerbe* G_{r-1} de sommet x.

132. Principe de dualité. — Il est bien clair que nous eussions pu commencer par définir les hyperplans et en déduire la définition des points par l'équation (1). D'une manière précise, définissons un hyperplan comme l'ensemble des $r+1$ nombres réels ou complexes, finis, non tous nuls $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r$ donnés à un facteur de proportionnalité près. L'ensemble de ces hyperplans constitue ce que nous appellerons l'espace projectif tangentiel Σ_r à r dimensions. L'équation (1) permet alors d'introduire les points x définis par $r+1$ nombres réels ou complexes, finis, non tous nuls, $x_0, x_1, \dots, x_r$, donnés à un facteur de proportionnalité près.

Nous pouvons intervertir les notations et appeler point ce que nous avons appelé hyperplan, et hyperplan ce que nous avons appelé point. De cette remarque, découle le *principe de dualité* dans l'espace projectif :

D'une proposition établie, nous pouvons en déduire une seconde en intervertissant les mots point et hyperplan.

133. Espaces linéaires appartenant à S_r. — Considérons p hyperplans $(p < r)$, ξ, η, ..., ζ, d'équations

$$\xi_x = 0\,, \quad \eta_x = 0\,, \quad \ldots, \quad \zeta_x = 0\,. \tag{2}$$

Nous supposerons que ces équations sont linéairement indépendantes et nous dirons alors que les hyperplans ξ, η, ..., ζ sont indépendants.

De même, considérons q points x, y, ..., z et supposons qu'il ne soit pas possible de trouver q nombres λ_1, λ_2, ..., λ_q non tous nuls tels que l'on ait

$$\lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i + \ldots + \lambda_q z_i = 0$$

pour $i = 0, 1, \ldots, r$. Nous dirons alors que les points x, y, ..., z sont indépendants.

Cela étant, il est possible de trouver, d'une infinité de manières, $q = r - p + 1$ points x, y, ..., z indépendants, appartenant aux hyperplans ξ, η, ..., ζ. Tout point

$$m_1 x + m_2 y + \ldots + m_q z \tag{3}$$

dont les coordonnées sont

$$m_1 x_i + m_2 y_i + \ldots + m_q z_i\,, \qquad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

appartient aux hyperplans (2). Réciproquement, tout point appartenant à ces hyperplans a des coordonnées de la forme précédente, les q nombres m_1, m_2, ..., m_q étant réels ou complexes, finis, non tous nuls. L'ensemble des points de S_r communs aux p hyperplans ξ, η, ..., ζ, constitue donc un espace linéaire S_{r-p} à $r - p$ dimensions.

Tout hyperplan passant par cet espace S_{r-p} a des coordonnées de la forme

$$\mu_1 \xi_i + \mu_2 \eta_i + \ldots + \mu_p \zeta_i\,, \qquad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

et peut être représenté par

$$\mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \ldots + \mu_p \zeta\,,$$

les μ étant des nombres réels ou complexes, finis, non tous nuls. L'ensemble de ces ∞^{p-1} hyperplans constitue une gerbe G_{p-1}, de support S_{r-p}.

134. Remarque. — Les p quantités μ_1, μ_2, ..., μ_p sont les coordonnées projectives des hyperplans de la gerbe G_{p-1} de support S_{r-p}. Cette gerbe peut être considérée comme un espace linéaire à $p-1$ dimensions dont l'élément est un hyperplan μ. La loi de dualité appliquée à cet espace conduit à considérer l'espace linéaire à $p-1$ dimensions dont l'élément générateur est l'espace S_{r-p+1} passant par S_{r-p}. En d'autres termes, l'ensemble des espaces S_{r-p+1} passant par un espace S_{r-p} est un espace projectif à $p-1$ dimensions.

135. Théorème. — *Si deux espaces linéaires S_p, S_q ont en commun un espace S_s (et non un espace de dimension supérieure) et appartiennent à un espace S_r (et non à un espace de dimension inférieure), on a*

$$p+q=r+s.$$

En effet, dans l'espace S_s, on peut prendre $s+1$ points indépendants x^0, x^1, ..., x^s. Dans S_p, on peut prendre $p+1$ points indépendants dont $s+1$ sont les points choisis dans S_s. Soient x^0, x^1, ..., x^s, x^{s+1}, ..., x^p ces points. De même, dans S_q, on peut prendre $q+1$ points indépendants x^0, x^1, ..., x^s, x^{p+1}, ..., x^{p+q-s}. Les $p+q-s+1$ points

$$x^0, x^1, \ldots, \quad x^s, x^{s+1}, \ldots, \quad x^p, x^{p+1}, \ldots, \quad x^{p+q-s}$$

sont indépendants et déterminent complètement S_r, d'où le théorème.

136. Interprétation des coordonnées projectives. — Les $r+1$ points dont toutes les coordonnées sauf une sont nulles, sont indépendants. Soient

$$O_i(x_0=\ldots=x_{i-1}=0,\ x_i\neq 0,\ x_{i+1}=\ldots=x_r=0)$$

ces points. Les $r+1$ hyperplans

$$\omega_i(\xi_0=\ldots=\xi_{i-1}=0,\ \xi_i\neq 0,\ \xi_{i+1}=\ldots=\xi_r=0)$$

sont également indépendants. L'hyperplan ω_i contient les points O_0, O_1, ..., O_{i-1}, O_{i+1}, ..., O_r et le point O_i appartient aux hyperplans ω_0, ω_1, ..., ω_{i-1}, ω_{i+1}, ..., ω_r. Les $r+1$ points O_i et les $r+1$ hyperplans ω_i sont les sommets et les faces d'un $(r+1)$-èdre.

Introduisons encore le point O, dont toutes les coordonnées sont égales et l'hyperplan ω, dont toutes les coordonnées sont aussi égales ; le point O est appelé point unitaire et l'hyperplan ω, hyperplan unitaire. Le point unitaire n'appartient à aucun des hyperplans ω_i et l'hyperplan unitaire ω ne passe par aucun des points O_i.

Les hyperplans passant par les sommets du $(r+1)$-èdre distincts de O_i, O_k ont pour équation

$$\mu_i x_i+\mu_k x_k=0.$$

Ceux de ces hyperplans qui passent par les points O_i, O_k, O et par un point y sont donnés respectivement par

$$\mu_i = 0\,,\quad \mu_k = 1\,;\quad \mu_i = 1\,,\quad \mu_k = 0\,;\quad \mu_i = 1\,,\quad \mu_k = -1\,;$$
$$\mu_i = y_k\,,\quad \mu_k = -y_i\,.$$

Le rapport anharmonique de ces hyperplans est

$$\omega_i\,\omega_k\,(O_i\,O_k\,Oy) = \left(0,\,\infty\,,\,-1,\,-\frac{y_k}{y_i}\right) = \frac{y_i}{y_k}\,. \tag{1}$$

De même, le rapport anharmonique des points de rencontre avec la droite O_iO_k des hyperplans ω_i, ω_k, ω et d'un hyperplan quelconque η est

$$O_i\,O_k\,(\omega_i\,\omega_k\,\omega\eta) = \frac{\eta_i}{\eta_k}\,. \tag{2}$$

L'hyperplan unitaire a pour équation

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_r = 0$$

et le point unitaire O a pour équation tangentielle

$$\xi_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_r = 0\,.$$

Les points de rencontre de O_iO_k avec l'hyperplan unitaire et avec l'hyperplan $x_i - x_k = 0$, passant par O et par l'intersection de ω_i, ω_k, partagent harmoniquement le couple O_i, O_k.

Cela étant, l'ensemble du $(r+1)$-èdre $O_0\,O_1\ldots O_r$, du point unitaire O et de l'hyperplan unitaire ω est appelé *figure de référence*. Si l'on se donne le $(r+1)$-èdre et l'un des éléments O ou ω, la figure de référence est déterminée. Les formules (1) et (2) permettent alors de déterminer les coordonnées projectives des points et des hyperplans de S_r. Il est facile de vérifier que les formules (1), par exemple, pour

$$i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ r\,,$$

sont compatibles [1].

137. Transformation des coordonnées. — Considérons un $(r+1)$-èdre de sommets O_0', O_1', …, O_r' et de faces ω_0', ω_1', …, ω_r'. Soit

$$a_{ix} = a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ir}x_r = 0 \tag{1}$$

l'équation de ω_i'. Les hyperplans ω_0', ω_1', …, ω_r' n'ayant aucun point commun, on doit avoir

$$\Delta = |\,a_{ik}\,| \neq 0\,.$$

[1] Voir, pour le cas $r = 3$, nos *Leçons de Géométrie analytique à trois dimensions* (Liège, Sciences et Lettres, 1945).

Soit O' un point n'appartenant à aucun des hyperplans ω_0', ω_1', ..., ω_r'. On peut s'arranger de manière que les coordonnées du point O' satisfassent aux équations

$$a_{0x} = a_{1x} = \ldots = a_{rx} ,$$

en multipliant éventuellement les deux membres des équations (1) par des facteurs convenablement choisis.

Les coordonnées d'un point y par rapport au $(r+1)$-èdre O_0', O_1', ..., O_r', le point unitaire étant O', sont données par

$$\frac{y_i'}{y_k'} = \omega_i' \, \omega_k' \, (O_i' \, O_k' \, O' y) = \frac{a_{iy}}{a_{ky}} .$$

Il en résulte que les formules de transformation de coordonnées sont

$$\rho x_i' = a_{i0} x_0 + a_{i1} x_1 + \ldots + a_{ir} x_r ,$$

ρ étant un facteur de proportionnalité.

Si A_{ik} est le mineur algébrique de a_{ik} dans Δ, on a

$$\rho' \xi_i' = A_{i0} \xi_0 + A_{i1} \xi_1 + \ldots + A_{ir} \xi_r .$$

138. Les espaces S_k de S_r. — Un espace S_k de S_r est complètement déterminé soit par $k+1$ points indépendants qui lui appartiennent, soit par $r-k$ hyperplans indépendants qui le contiennent. Il en résulte que passer par un point pour un espace à k dimensions équivaut à $r-k$ conditions. D'autre part, les espaces S_k passant par $h+1$ points indépendants $(h < k)$ ne passent pas en conséquence par un point n'appartenant pas à l'espace S_h déterminé par ces $h+1$ points. Par conséquent, les espaces S_k de S_r sont en nombre $\infty^{(r-k)(k+1)}$.

Il en est de même des espaces S_{r-k-1}.

Considérons un espace S_h fixe, où h est quelconque, inférieur à r. Proposons-nous de rechercher le nombre de conditions imposées à un espace S_k devant rencontrer S_h suivant un espace S_p.

Un espace S_k rencontrant l'espace S_h suivant un espace S_p appartient à un espace S_q, où $q = h + k - p$, contenant S_h. Les espaces S_q passant par S_h dépendent de

$$(r-q)(q+1) - (r-q)(h+1) = (r-q)(q-h)$$

paramètres. D'autre part, les espaces S_k situés dans un espace S_q dépendent de $(q-k)(k+1)$ paramètres. Donc, les espaces S_k rencontrant S_h suivant un espace S_p dépendent de

$$\begin{aligned}(r-q)(q-h) &+ (q-k)(k+1) \\ &= (r-k)(k-p) + (h-p)(p+1)\end{aligned}$$

paramètres.

Le nombre de conditions imposées aux espaces S_k qui doivent rencontrer l'espace S_h suivant un espace S_p est donc égal à

$$(p+1)(r-h-k+p) .$$

En particulier, les droites de S_r dépendent de $2(r-1)$ paramètres. Le nombre de conditions imposées aux droites de l'espace S_r qui doivent rencontrer l'espace S_h (suivant un point ou S_0) est égal à $r-h-1$.

139. Interprétation des équations. — Soit

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_r)$$

un polynome entier, rationnel et homogène de degré m. L'ensemble des points de S_r satisfaisant à l'équation

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_r)=0$$

est appelé *hypersurface algébrique d'ordre* m.

De même, si $\Phi(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r)$ est un polynome entier, rationnel et homogène de degré n, l'ensemble des hyperplans satisfaisant à l'équation

$$\Phi(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r)=0$$

est appelé *hypersurface-enveloppe algébrique de classe* n.

Ces définitions sont indépendantes du choix de la figure de référence.

Une hypersurface d'ordre un est un plan ; une hypersurface d'ordre deux est appelée hyperquadrique. Une hypersurface-enveloppe de classe un est une gerbe d'hyperplans ; c'est l'équation tangentielle du point sommet de cette gerbe.

§ 2. *Homographies*

140. Définitions. — On appelle *homographie* de l'espace S_r une correspondance entre les points x, x' de cet espace représentée par les équations

$$\rho x_i' = a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ir}x_r , \qquad (1)$$
$$(i=0, 1, \ldots, r)$$

où les coefficients a_{ik} sont réels ou complexes, finis, non tous nuls.

Aux points d'un espace linéaire, une homographie fait correspondre les points d'un espace linéaire.

Le déterminant

$$\Delta = |a_{ik}|$$

est appelé déterminant de l'homographie (1).

Si $\Delta = 0$, l'homographie est dite *singulière*. D'une manière précise, si Δ est de caractéristique $r - h + 1$, c'est-à-dire si tous les déterminants d'ordre $r - h + 2$ tirés de Δ sont nuls, l'un au moins des déterminants d'ordre $r - h + 1$ n'étant pas nul, l'homographie est appelée *homographie singulière d'espèce* h.

141. Homographies singulières. — Si l'homographie (1) est singulière d'espèce h, il n'y a que $r - h + 1$ des équations

$$a_{0x} = 0, \quad a_{1x} = 0, \quad \ldots, \quad a_{rx} = 0$$

qui soient linéairement indépendantes. Supposons que ce soient les $r - h + 1$ premières ; on a

$$a_{r-h+i,x} = \lambda_{i0}\, a_{0,x} + \lambda_{i1}\, a_{1,x} + \ldots + \lambda_{ir-h}\, a_{r-h,x}\,,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, h)\,.$$

Le point x' que les équations (1) font correspondre à un point x de l'espace S_{h-1} représenté par les équations

$$a_{0,x} = 0, \quad a_{1,x} = 0, \quad \ldots, \quad a_{r-h,x} = 0 \qquad (2)$$

est indéterminé. L'espace S_{h-1} est appelé *espace singulier* de l'homographie.

A un point x n'appartenant pas à l'espace singulier S_{h-1} correspond un point x' appartenant à l'espace linéaire S_{r-h} d'équations

$$\left.\begin{array}{r} x'_{r-h+1} = \lambda_{10}\, x_0' + \lambda_{11}\, x_1' + \ldots + \lambda_{1r-h}\, x'_{r-h}, \\ x'_{r-h+2} = \lambda_{20}\, x_0' + \lambda_{21}\, x_1' + \ldots + \lambda_{2r-h}\, x'_{r-h}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r' = \lambda_{h0}\, x_0' + \lambda_{h1}\, x_1' + \ldots + \lambda_{hr-h}\, x'_{r-h}. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Le même point x' de l'espace S_{r-h} correspond à tous les points x satisfaisant aux équations

$$\frac{a_{0,x}}{x_0'} = \frac{a_{1,x}}{x_1'} = \ldots = \frac{a_{r-h,x}}{x'_{r-h}}\,.$$

Ces équations représentent un espace S_h passant par l'espace singulier S_{h-1}.

Une homographie singulière d'espèce h *est donc une homographie entre les espaces linéaires à* h *dimensions passant par un espace fixe à* h — 1 *dimensions, et les points d'un espace linéaire à* r — h *dimensions.*

Un cas particulier s'obtient en faisant correspondre à un espace S_h son point d'intersection avec l'espace S_{r-h} ; l'homographie est alors une perspectivité.

142. Homographies non singulières. — Supposons que Δ ne soit pas nul et les espaces (x), (x') rapportés à la même figure de référence. En désignant par A_{ik} le mineur algébrique de a_{ik} dans le déterminant Δ, on a

$$\rho x'_i = a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + \dots + a_{ir}x_r\,, \tag{1}$$
$$\rho x_k = A_{0k}x'_0 + A_{1k}x'_1 + \dots + A_{rk}x'_r\,, \tag{2}$$
$$(i,\ k = 0,\ 1,\ \dots,\ r)\,.$$

Aux points d'un hyperplan ξ correspondent les points d'un hyperplan ξ' et on a

$$\rho\xi'_k = A_{k0}\xi_0 + A_{k1}\xi_1 + \dots + A_{kr}\xi_r, \tag{3}$$
$$\rho\xi_i = a_{0i}\xi'_0 + a_{1i}\xi'_1 + \dots + a_{ri}\xi'_r \tag{4}$$
$$(i,\ k = 0,\ 1,\ \dots,\ r)\,.$$

Un espace est appelé *uni* pour l'homographie s'il est son propre homologue. Les points unis de l'homographie (1) satisfont aux équations

$$a_{i0}\,x_0 + a_{i1}\,x_1 + \dots + (a_{ii} - \rho)\,x_i + \dots + a_{ir}\,x_r = 0\,, \tag{5}$$

lorsque ces équations sont compatibles. Pour qu'il en soit ainsi, ρ doit satisfaire à l'équation

$$\Delta(p) \equiv \begin{vmatrix} a_{00} - \rho & a_{01} & \dots & a_{0r} \\ a_{10} & a_{11} - \rho & \dots & a_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r0} & a_{r1} & \dots & a_{rr} - \rho \end{vmatrix} = 0\,, \tag{6}$$

appelée *équation caractéristique* de l'homographie.

Les hyperplans unis de l'homographie sont donnés par les équations

$$a_{0i}\,\xi_0 + a_{1i}\,\xi_1 + \dots + (a_{ii} - \rho)\,\xi_i + \dots + a_{ri}\,\xi_r = 0\,, \tag{7}$$

lorsque ces équations sont compatibles, c'est-à-dire lorsque ρ satisfait à l'équation (6).

Soit ρ_1 une racine de l'équation (6), multiple d'ordre h. Supposons que le déterminant $\Delta(\rho_1)$ soit de caractéristique $r-k+1$. Pour $\rho=\rho_1$, il y a $r-k+1$ des équations (5) qui sont linéairement indépendantes ; elles représentent un espace S_{k-1} dont tous les points sont unis. Cet espace est appelé *axe ponctuel* de l'homographie.

Pour $\rho=\rho_1$, les équations (7) définissent une gerbe G_{k-1} d'hyperplans unis, ayant pour support un espace S_{r-k}, appelé *axe tangentiel* de l'homographie, *conjugué* à l'axe ponctuel S_{k-1}.

L'axe S_{k-1} et la gerbe G_{k-1} sont dits *conjugués*.

143. Classification des homographies. — Soient ρ_1, ρ_2, ..., ρ_n les racines de l'équation caractéristique $\Delta(\rho)=0$, $r-k_i+1$ la caractéristique de $\Delta(\rho_i)$.

Pour $\rho=\rho_i$, les déterminants d'ordre $r-k_i+2$ tirés de $\Delta(\rho_i)$ sont nuls, donc ρ_i est racine d'ordre k_i au moins de l'équation (6). On a par conséquent

$$k_1+k_2+\ldots+k_n \leqslant r+1 .$$

Lorsque l'égalité a lieu, l'homographie est dite *générale* ; elle est dite *spéciale* dans le cas opposé.

Supposons que l'homographie soit spéciale et soit S_q l'espace de dimension minimum contenant les axes ponctuels

$$S_{k_1-1}\,,\quad S_{k_2-1}\,,\,\ldots\,,\,S_{k_n-1}$$

de l'homographie. Cet espace est uni pour l'homographie et celle-ci détermine dans cet espace une homographie ayant les mêmes axes ponctuels que l'homographie primitive. On a donc

$$k_1+k_2+\ldots+k_n \leqslant q+1 .$$

D'autre part, les axes ponctuels de l'homographie n'appartenant pas à un espace ayant moins de q dimensions, on a

$$k_1+k_2+\ldots+k_n \geqslant q+1 .$$

Par conséquent, on a

$$k_1+k_2+\ldots+k_n = q+1 .$$

On en conclut que les *axes ponctuels d'une homographie n'ont aucun point commun deux à deux.*

144. Théorème. — *Les points unis d'une homographie n'appartenant pas à un axe ponctuel déterminé, appartiennent au support de la gerbe conjuguée.*

Considérons l'homographie

$$\rho y_k = a_{k,x} - \rho_i x_k \tag{8}$$

entre les espaces (x), (y). Son déterminant $\Delta(\rho_i)$ est de caractéristique $r-k_i+1$; elle est donc singulière d'espèce k_i. L'espace singulier de l'homographie (8) coïncide avec l'axe ponctuel S_{k_i-1} de l'homographie (1) et le point y appartient à l'espace S_{r-k_i}, axe tangentiel conjugué de S_{k_i-1}.

Considérons un espace S_{k_i} passant par S_{k_i-1} ; l'homographie (8) lui fait correspondre un point y de S_{r-k_i} et l'homographie (1), un espace S'_{k_i} passant par S_{k_i-1}.

L'équation (8) peut s'écrire

$$\rho y_k = x'_k - \rho_i x_k ,$$

donc un point x de S_{k_i}, son homologue x' de S'_{k_i} et le point y

sont en ligne droite. Lorsque le point x décrit S_{k_i}, le point x' décrit S'_{k_i} et le point y reste fixe, donc les espaces S_{k_i}, S'_{k_i} sont perspectifs, le centre de perspectivité étant y.

Cela étant, soit M un point uni de l'homographie (1) n'appartenant pas à S_{k_i-1}. Prenons, pour S_{k_i} l'espace déterminé par S_{k_i-1} et M. Alors, S'_{k_i} coïncide avec S_{k_i}. Dans cet espace, les points x, x' sont d'une part alignés sur M, car la droite Mx coupe S_{k_i-1} en son point uni et est donc unie pour l'homographie (1) ; d'autre part, ils sont alignés sur y, donc y coïncide avec M. Ce point M appartient donc à l'axe tangentiel S_{r-k_i} conjugué de S_{k_i-1} et le théorème est démontré.

145. Homographies générales. — Supposons que l'homographie (1) soit générale. Dans ce cas, les racines $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ de l'équation caractéristique sont multiples d'ordre k_1, k_2, ..., k_n. L'axe ponctuel S_{k_i-1} a pour conjuguée une gerbe G_{k_i-1} dont le support S_{r-k_i} contient les autres axes ponctuels de l'homographie. Par conséquent, un axe ponctuel et l'axe tangentiel conjugué ne peuvent se rencontrer.

Observons que :

1° Le produit de deux homographies est une homographie ;

2° Les équations de transformation de coordonnées sont analogues à celles d'une homographie non singulière.

Il en résulte que si l'on change de figure de référence, les équations d'une homographie ne changeront pas de forme ; seuls les coefficients seront changés. Cela étant, choisissons une nouvelle figure de référence de manière que l'espace

$$O_0 O_1 \ldots O_{k_1-1} \quad \text{coïncide avec} \quad S_{k_1-1},$$

l'espace

$$O_{k_1} O_{k_1+1} \ldots O_{k_1+k_2-1} \quad \text{avec} \quad S_{k_2-1}, \ldots,$$

l'espace

$$O_{k_1+k_2+\ldots+k_n} \ldots O_r \quad \text{avec} \quad S_{k_n-1}.$$

Les équations de l'homographie s'écriront dans ces conditions

$$\rho x_0' = \rho_1 x_0, \quad \rho x_1' = \rho_1 x_1, \ldots, \quad \rho x'_{k_1-1} = \rho_1 x_{k_1-1}'$$
$$\rho x'_{k_1} = \rho_2 x_{k_1}, \ldots, \quad \rho x'_{k_1+k_2-1} = \rho_2 x_{k_1+k_2-1}'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\rho x'_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}} = \rho_n x_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}}, \ldots, \rho x_r' = \rho_n x_r.$$

Lorsque $n=2$, $k_1=1$, $k_2=r-1$, l'homographie est appelée *homologie* de centre O_0 et d'hyperplan ω_0.

146. Homologie spéciale. — L'homologie spéciale est une homologie dont l'équation caractéristique possède une seule racine ρ_1 multiple d'ordre $r+1$, telle que $\Delta(\rho_1)$ soit de caractéristique un.

Dans cette hypothèse, pour $\rho=\rho_1$, les équations (5) se réduisent à une seule que l'on peut supposer, par un choix convenable de la figure de référence, être $x_0=0$. On a donc

$$a_{11}=a_{22}=\ldots=a_{rr}=\rho_1\,, \quad a_{ik}=0 \text{ pour } i>0\,, \quad k\neq i\,.$$

En exprimant que ρ_1 est racine d'ordre $r+1$ de $\Delta(\rho)=0$, on trouve $a_{00}=\rho_1$.

Pour $\rho=\rho_1$, les équations (7) se réduisent à une seule,

$$a_{10}\,\xi_1+a_{20}\,\xi_2+\ldots+a_{r0}\,\xi_r=0\,,$$

qui représente un point appartenant à l'hyperplan $x_0=0$. On peut supposer que ce point coïncide avec O_1, ce qui entraîne

$$a_{10}\neq 0\,, \quad a_{20}=a_{30}=\ldots=a_{r0}=0\,.$$

L'homologie spéciale considérée peut donc être représentée, par un choix convenable de la figure de référence, par les équations

$$\rho x_0'=\rho_1 x_0+a x_1\,, \quad \rho x_1'=\rho_1 x_1,\ \ldots,\ \rho x_r'=\rho_1 x_r\,.$$

147. Homographies cycliques. — Soit Ω une homographie. Le produit de Ω par elle-même est une homographie représentée par Ω^2. On définit de proche en proche les homographies Ω^3, ..., Ω^p.

L'homographie Ω est dite *cyclique de période p* si *p* est le plus petit entier positif tel que Ω^p coïncide avec l'identité. On représente l'identité, qui est une homographie particulière, par le symbole 1 et on écrit

$$\Omega^p=1\,.$$

Commençons par considérer le cas $r=1$ et supposons que Ω puisse être une homologie spéciale, c'est-à-dire, actuellement, une homographie parabolique. Les équations de Ω peuvent s'écrire

$$x_0' : x_1'=\rho_1 x_0+a x_1 : \rho_1 x_1\,, \qquad (a\neq 0)\,.$$

Les équations de Ω^p s'écrivent

$$x_0' : x_1'=\rho_1 x_0+p a x_1 : \rho_1 x_1$$

et ne peuvent jamais se réduire à l'identité. Une homographie parabolique ne peut donc jamais être cyclique.

Par contre, si Ω n'est pas parabolique, ses équations peuvent s'écrire

$$x_0' : x_1'=\rho_1 x_0 : \rho_2 x_1$$

et celles de Ω^p,

$$x_0' : x_1' = \rho_1^p x_0 : \rho_2^p x_1 .$$

Pour que cette homographie soit cyclique de période p, il suffit que ρ_1, ρ_2 soient des racines d'ordre p, distinctes, de l'unité.

Retournons au cas général, où r est quelconque, et soit Ω une homographie cyclique de période p. Supposons en premier lieu que Ω puisse être une homographie spéciale. Alors, il existe au moins un axe ponctuel S_{k-1} ayant au moins un point commun P avec l'axe tangentiel conjugué S_{r-k}. Soit ρ_1 la racine de l'équation caractéristique à laquelle correspondent S_k et S_{r-k}.

Reprenons l'homographie singulière

$$\rho y_k = a_{k,x} - \rho_1 x_k = x_k' - \rho_1 x_k .$$

Lorsque le point x décrit un espace S_k passant par S_{k-1}, x' décrit un espace S_k' passant par S_{k-1} et le point y reste fixe. D'autre part, quand S_k varie en passant toujours par S_{k-1}, le point y décrit l'espace S_{r-k} ; pour une certaine position de S_k, y coïncide donc avec P. Considérons cette position de S_k et soient x un point de cet espace, x' le point homologue. La droite xx' passe par P et est donc unie pour Ω ; par conséquent, l'espace S_k et son homologue S_k' passent par P et coïncident. Dans cet espace, Ω détermine une homologie de centre P et d'hyperplan S_{k-1}. Cette homologie est spéciale, puisque P appartient à S_{k-1}. Sur une droite passant par P, Ω détermine une homographie parabolique, ce qui est absurde, puisque Ω est cyclique. Donc Ω ne peut être une homographie spéciale.

Une homographie cyclique est générale.

Les racines $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ de $\Delta(\rho) = 0$ sont des racines d'ordre p, distinctes de l'unité. Si ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité, on a

$$\rho_1 = \varepsilon^{\alpha_1}, \quad \rho_2 = \varepsilon^{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \rho_n = \varepsilon^{\alpha_n}.$$

On peut d'ailleurs prendre $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$.

148. Homographies spéciales. — Supposons que Ω, d'équations (1), soit une homographie spéciale. Il existe au moins une racine ρ_1 de l'équation caractéristique $\Delta(\rho) = 0$ telle que $\Delta(\rho_1)$ soit caractéristique $r - k + 1$ et dont la multiplicité soit $h > k$.

Changeons de figure de référence de manière à faire coïncider l'axe tangentiel S_{r-k} avec l'espace $O_0 O_1 \ldots O_{r-k}$. Les équations (1) de Ω deviennent

$$\begin{aligned} &\rho x_0' = a_{0,x}, \quad \rho x_1' = a_{1,x}, \ldots, \quad \rho x'_{r-k} = a_{r-k,x}, \\ &\rho x'_{r-k+1} = \rho_1 x_{r-k+1}, \ldots, \quad \rho x_r' = \rho_1 x_r . \end{aligned} \qquad (9)$$

Dans l'espace S_{r-k}, les équations (9) représentent une homographie Ω'. Si $\Delta'(\rho)=0$ est l'équation caractéristique de cette homographie, on a

$$\Delta(\rho)=(\rho-\rho_1)^k\Delta'(\rho) .$$

L'équation $\Delta'(\rho)=0$ admet la racine ρ_1 avec la multiplicité $h-k$. Supposons que $\Delta'(\rho_1)$ ait la caractéristique

$$r-k-k'+1 .$$

Alors, Ω' possède un axe ponctuel $S_{k'-1}$ formant l'intersection des espaces S_{r-k} et S_{k-1}. Dans S_{r-k}, Ω' possède un axe tangentiel $S_{r-k-k'}$. Disposons de la figure de référence de manière que cet axe tangentiel coïncide avec l'espace $O_0 O_1 \dots O_{r-k-k'}$. Dans ces conditions, les équations de Ω s'écrivent

$$\begin{aligned}
\rho x_0' &= a_{00}\, x_0 + a_{01}\, x_1 + \dots + a_{0r}\, x_r ,\\
\rho x_1' &= a_{10}\, x_0 + a_{11}\, x_1 + \dots + a_{1r}\, x_r ,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\rho x'_{r-k-k'} &= a_{r-k-k'\,0}\, x_0 + \dots + a_{r-k-k'\,r}\, x_r ,\\
\rho x'_{r-k-k'+1} &= \rho_1\, x_{r-k-k'+1} + a_{r-k-k'+1\,r-k+1}\, x_{r-k+1} + \dots\\
&\qquad + a_{r-k-k'+1\,r}\, x_r ,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\rho x'_{r-k} &= \rho_1\, x_{r-k} + a_{r-k\,r-k+1}\, x_{r-k+1} + \dots + a_{r-k\,r}\, x_r ,\\
\rho x'_{r-k+1} &= \rho_1\, x_{r-k+1} , \dots , \quad \rho x_2' = \rho_1\, x_r .
\end{aligned}$$

Si $h-k$ est supérieur à k', on continuera la réduction par le même procédé, et ainsi de suite.

Nous nous bornerons à ces indications sur la réduction des homographies spéciales. L'étude de ces homographies est due à C. Segre et à P. Predella ; on en trouvera un exposé dans la géométrie hyperspatiale de Bertini (¹).

149. Groupe des homographies. — Nous avons déjà remarqué que le produit de deux homographies est une homographie. D'autre part, l'inverse d'une homographie non spéciale est une homographie (n° 142). Il en résulte que

L'ensemble des homographies non spéciales de S_r *constitue un groupe.*

Le nombre des paramètres intervenant dans les équations d'une homographie est

$$(r+1)^2-1=r(r+2) .$$

Le groupe des homographies non spéciales est transitif.

(¹) Bertini, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi* (2ᵉ éd., Messine, 1923). Une autre méthode pour l'étude des homographies, due à Enriques, est exposée dans Enriques-Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, t. II (Bologne, Zanichelli, 1918).

§ 3. *Réciprocités*

150. Définitions. — On appelle *réciprocité* ou *corrélation* de S_r une correspondance entre les points x et les hyperplans ξ' de cet espace représentée par les équations

$$\rho\xi_i' = a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ir}x_r\,, \qquad (1)$$
$$(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ r)\,,$$

les coefficients a_{ik} étant réels ou complexes, finis, non tous nuls.

Le déterminant

$$\Delta = | a_{ik} |$$

est le déterminant de la réciprocité. Si ce déterminant Δ a la caractéristique $r - h + 1$, la réciprocité est dite *singulière d'espèce h*.

151. Réciprocités singulières. — Supposons que la réciprocité (1) soit singulière d'espèce h. Il y a alors $r - h + 1$ des seconds membres des équations (1) qui sont linéairement indépendants. Supposons que ce soient les $r - h + 1$ premiers et écrivons

$$a_{r-h+1,x} = \lambda_{r-h+1\ 0}\, a_{0,x} + \ldots + \lambda_{r-h+1\ r-h}\, a_{r-h,x}\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{r,x} = \lambda_{r,0}\, a_{0,x} + \ldots + \lambda_{r\ r-h}\, a_{r-h,x}\,.$$

Les équations

$$a_{0,x} = 0\,,\quad a_{1,x} = 0\,,\quad \ldots,\quad a_{r-h,x} = 0$$

représentent un espace S_{h-1} appelé *espace singulier* de la réciprocité. L'hyperplan que la réciprocité fait correspondre à un point de cet espace est indéterminé.

A un point x n'appartenant pas à l'espace singulier S_{h-1}, la réciprocité fait correspondre un hyperplan dont les coordonnées satisfont aux équations

$$\xi'_{r-h+1} = \lambda_{r-h+1\ 0}\, \xi_0' + \ldots + \lambda_{r-h+1\ r-h}\, \xi'_{r-h}\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\xi_r' = \lambda_{r0}\, \xi_0' + \ldots + \lambda_{r\ r-h}\, \xi'_{r-h}\,.$$

Ces hyperplans forment donc une gerbe G_{r-h}. Un hyperplan de cette gerbe correspond à tous les points x appartenant à l'espace S_h d'équations

$$\frac{a_{0,x}}{\xi_0'} = \frac{a_{1,x}}{\xi_1'} = \ldots = \frac{a_{r-h,x}}{\xi'_{r-h}}\,.$$

Cet espace S_h passe par l'espace singulier S_{h-1}.

La réciprocité est donc obtenue en établissant une homographie entre l'ensemble des espaces S_h passant par S_{h-1} et l'ensemble des hyperplans de la gerbe G_{r-h}.

152. Réciprocités non singulières. — Soit Θ une réciprocité non singulière représentée par les équations (1). Entre les points x et les hyperplans ξ', Θ détermine une correspondance biunivoque. Aux points x d'un hyperplan ξ, Θ fait correspondre les hyperplans ξ' passant par un point x'.

Si l'on désigne par A_{ik} le mineur algébrique de a_{ik} dans Δ, on a

$$\rho\xi_i' = a_{i0}\, x_0 + a_{i1}\, x_1 + \ldots + a_{ir}\, x_r\,, \tag{1}$$

$$\rho\xi_i = a_{0i}\, x_0' + a_{1i}\, x_1' + \ldots + a_{ri}\, x_r'\,, \tag{2}$$

$$\rho x_i' = A_{i0}\, \xi_0 + A_{i1}\, \xi_1 + \ldots + A_{ir}\, \xi_r\,, \tag{3}$$

$$\rho x_i = A_{0i}\, \xi_0' + A_{1i}\, \xi_1' + \ldots + A_{ri}\, \xi_r'\,. \tag{4}$$

On en déduit les équations

$$\Sigma\, a_{ik}\, x_i'\, x_k = 0\,, \tag{5}$$

$$\Sigma A_{ik}\, \xi_i'\, \xi_k = 0\,, \tag{6}$$

dont chacune représente la réciprocité et la définit complètement.

Le lieu d'un point x appartenant à son hyperplan homologue est

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0\,;$$

c'est une hyperquadrique F appelée *première hyperquadrique d'incidence.*

Le lieu d'un hyperplan ξ contenant son point homologue est

$$\Sigma A_{ik} \xi_i \xi_k = 0\,;$$

c'est une hyperquadrique-enveloppe Φ appelée *seconde hyperquadrique d'incidence.*

153. Homographie associée à une réciprocité. — A la réciprocité non singulière Θ, associons l'homographie $\Omega = \Theta^2$ dont les équations sont

$$\rho\,(a_{0i}\, x_0' + a_{1i}\, x_1' + \ldots + a_{ri}\, x_r') = a_{i0}\, x_0 + a_{i1}\, x_1 + \ldots + a_{ir}\, x_r$$
$$(i = 0,\, 1,\, \ldots,\, r)\,.$$

Les points unis de Ω satisfont aux équations

$$(a_{i0} - \rho a_{0i})\, x_0 + (a_{i1} - \rho a_{1i})\, x_1 + \ldots + (a_{ir} - \rho a_{ri})\, x_r = 0, \tag{7}$$

ρ étant racine de l'équation

$$\Delta(\rho) = |\, a_{ik} - \rho a_{ki}\, | = 0\,. \tag{8}$$

A un point uni de Ω, Θ fait correspondre un hyperplan uni de Ω.

L'équation (8) est réciproque et on peut associer les axes ponctuels de Ω correspondant aux racines ρ et ρ^{-1}, $(\rho \neq \pm 1)$ de cette équation.

Multiplions les deux membres de l'équation (7) par x_i et ajoutons membre à membre les équations obtenues en faisant $i=0, 1, \ldots, r$; nous obtenons

$$(1-\rho)\, \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0\,. \tag{9}$$

Si ρ est racine de l'équation (8), les points x satisfaisant aux équations (7) et (9) sont unis. Si $\rho \neq 1$, ces points appartiennent à la première hyperquadrique d'incidence. De même, les hyperplans unis correspondant à des racines ρ de l'équation (8) distinctes de l'unité, appartiennent à la seconde hyperquadrique d'incidence.

Supposons que $\Delta(-1)$ ait la caractéristique $r-h+1$. En posant $\rho=-1$ dans les équations (7), celles-ci se ramènent à $r-h+1$ équations linéairement indépendantes ; on peut supposer que ce sont les $r-h+1$ premières et supposer en outre que l'on a choisi la figure de référence de manière qu'elles se réduisent à

$$x_0 = 0\,,\quad x_1 = 0\,,\quad \ldots,\quad x_{r-h} = 0\,.$$

Ces équations représentent un espace S_{h-1} et sous ces conditions, on a

$$a_{i\, r-h+j} + a_{r-h+j\, i} = 0\,,\quad (i = 0, 1\,, \ldots r\,;\quad j = 1,\, 2\,, \ldots, h)\,.$$

L'équation de la première hyperquadrique d'incidence F devient

$$\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k = 0\,,\quad (i,\, k = 0, 1\,, \ldots, r-h)\,. \tag{10}$$

Dans cette équation, manquent les variables $x_{r-h+1}, \ldots, x_r$ et dans l'espace S_{r-h} d'équations

$$x_{r-h+1} = 0,\ \ldots,\ x_r = 0\,,$$

l'équation (10) représente une hyperquadrique F′. L'hyperquadrique F est le lieu des espaces S_h passant par S_{h-1} et par les différents points de F′. C'est un cône du second ordre de sommet S_{h-1}.

Nous renvoyons, pour une étude plus approfondie des réciprocités de S_r à l'ouvrage de Bertini déjà cité.

154. Réciprocités involutives. — Une réciprocité Θ est dite *involutive* lorsque son homographie associée $\Omega = \Theta^2$ est l'identité. Dans ces conditions, les équations

$$\Sigma\, a_{ik}\, x_i'\, x_k = 0\,,\quad \Sigma\, a_{ki}\, x_k\, x_i' = 0$$

doivent être conséquence l'une de l'autre. On doit donc avoir

$$a_{ik} = \rho a_{ki} ,$$

d'où $\rho^2 = 1$.

Lorsque l'on a $\rho = +1$, Θ est appelée *polarité,* lorsque $\rho = -1$, *système-nul.*

155. Polarités. — Supposons que Θ soit une polarité non singulière. On a

$$a_{ik} = a_{ki} .$$

A un point x correspond un hyperplan ξ et aux points de ξ correspondent les hyperplans passant par x. Le point x est le *pôle* de ξ et ξ est l'*hyperplan polaire* de x.

Un $(r+1)$-èdre dont chaque sommet est le pôle de la face opposée est appelé *autopolaire* par rapport à Θ.

Prenons, comme figure de référence, un $(r+1)$-èdre autopolaire par rapport à Θ. L'équation de cette polarité se réduit à

$$a_{00}\, x_0\, x_0' + a_{11}\, x_1\, x_1' + \ldots + a_{rr}\, x_r\, x_r' = 0$$

et les deux hyperquadriques d'incidence se réduisent à une seule

$$a_{00}\, x_0^2 + a_{11}\, x_1^2 + \ldots + a_{rr}\, x_r^2 = 0 .$$

Les propriétés de Θ s'obtiennent par généralisation immédiate des cas $r = 1, 2, 3$.

Supposons maintenant que Θ soit une polarité singulière d'espèce h. Des seconds membres des équations (1), $r-h+1$ sont indépendants et on peut supposer que ce sont les $r-h+1$ premiers. On peut de plus supposer, par un choix convenable de la figure de référence, qu'ils se réduisent à $a_{00}x_0,\ a_{11}x_1,\ \ldots,\ a_{r-h,\,r-h}x_{r-h}$. La condition $a_{ik} = a_{ki}$ donne

$$a_{r-h+i\ k} = a_{k\ r-h+i} = 0 \ , \quad (i > 0,\ k = 0,\ 1\ ,\ \ldots\ ,\ r-h) .$$

L'équation de Θ s'écrit

$$a_{00}\, x_0\, x_0' + a_{11}\, x_1\, x_1' + \ldots + a_{r-h\ r-h}\, x_{r-h}\, x'_{r-h} = 0 .$$

C'est l'équation d'une polarité non singulière dans l'espace S_{r-h} d'équations

$$x_{r-h+1} = 0,\ \ldots,\ x_r = 0 .$$

La question revient à la polarité dans la gerbe G_{r-h} ayant pour support l'espace singulier S_{h-1} de Θ, par rapport au cône

$$a_{00}\, x_0^2 + a_{11}\, x_1^2 + \ldots + a_{r-h\ r-h}\, x^2_{r-h} = 0 .$$

ayant pour sommet S_{h-1}.

156. Systèmes-nuls. — Supposons que Θ soit un système-nul. On a

$$a_{ik}+a_{ki}=0, \qquad a_{ii}=0\,,$$

et le déterminant Δ est symétrique gauche. Par suite, Θ ne peut être non singulière que si r est impair.

Dans tous les cas, à un point x correspond un hyperplan ξ' tel que

$$\xi_0' x_0 + \xi_1' x_1 + \ldots + \xi_r' x_r = 0\,,$$

donc passant par x. Le point x est appelé pôle de l'hyperplan ξ' et cet hyperplan, *hyperplan polaire* du point x. Aux points de ξ' correspondent les hyperplans passant par x.

Supposons que Θ soit non singulier et posons $r=2n+1$. Disposons de la figure de référence de manière que les points O_0, O_1, ... aient respectivement pour hyperplans polaires ω_{2n+1}, ω_{2n}, ... Les équations de Θ s'écrivent

$$\begin{aligned}&\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n : \xi_{n+1} : \ldots : \xi_{2n} : \xi_{2n+1}\\ &= a_0\, x_{2n+1} : a_1\, x_{2n} : \ldots : a_n\, x_{n+1} : -a_n\, x_n : \ldots : -a_1\, x_1 : -a_0 x_0\end{aligned}$$

Supposons maintenant que Θ soit singulier d'espèce h et soient

$$x_0=0\,,\quad x_1=0\,,\quad \ldots,\quad x_{r-h}=0$$

les équations de l'espace singulier S_{h-1}.

Le système-nul est représenté par

$$\begin{aligned}\rho\xi_0 &= a_{01}\, x_1 + \ldots + a_{0\,r-h}\, x_{r-h}\,,\\ \rho\xi_1 &= -\,a_{01}\, x_0 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1\,r-h}\, x_{r-h}\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \rho\xi_{r-h} &= -\,a_{0\,r-h}\, x_0 - \ldots - a_{r-h\,r-h-1}\, x_{r-h-1}\,.\end{aligned}$$

C'est donc un système-nul de l'espace S_{r-h} d'équations

$$x_{r-h+1}=0\,,\quad \ldots,\quad x_r=0$$

et pour que Θ soit exactement singulier d'espèce h, $r-h$ doit être impair.

Θ est un système-nul dans la gerbe G_{r-h} de sommet S_{h-1}.

157. Groupe projectif. — Les homographies et les réciprocités de S_r sont appelées projectivités de cet espace.

Le produit de deux homographies est une homographie ;

Le produit de deux réciprocités est une homographie ;

Le produit d'une homographie par une réciprocité, ou d'une réciprocité par une homographie, est une réciprocité.

L'inverse d'une homographie non singulière est une homographie ;

L'inverse d'une réciprocité non singulière est une réciprocité ;

En d'autres termes :

Le produit de deux projectivités est une projectivité ;

L'inverse d'une projectivité non singulière est une projectivité.

Par conséquent : *L'ensemble des projectivités non singulières constitue un groupe* appelé *groupe des projectivités.*

La géométrie projective de S_r *est l'étude des propriétés des figures invariantes par rapport au groupe des projectivités.*

Nous avons introduit plus haut le principe de dualité. On peut remarquer que ce principe résulte aussi de l'application d'une réciprocité à une propriété de la géométrie projective.

CHAPITRE VII

VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES

§ 1. *Hypersurfaces algébriques*

158. Définitions. — Nous avons appelé *hypersurface algébrique* l'ensemble des points de S_r dont les coordonnées satisfont à une équation

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_r) = 0\,, \tag{1}$$

dont le premier membre est un polynome entier, rationnel et homogène (c'est-à-dire, comme nous le dirons dans la suite, une *forme algébrique* ou plus simplement une forme). Le degré du polynome F est appelé *ordre* de l'hypersurface ; nous avons fait observer que l'ordre d'une hypersurface est indépendant du choix de la figure de référence. Plus généralement, si l'on transforme une hypersurface d'ordre n par une homographie, on obtient une hypersurface d'ordre n.

Le terme général de la forme F s'écrit

$$a_{i_0 i_1 \ldots i_r} x_{i_0} x_{i_1} \ldots x_{i_r}\,,$$

$i_0, i_1, \ldots, i_r$ étant une des combinaisons avec répétition des $r+1$ nombres $0, 1, \ldots, r$ pris n à n. Le nombre des coefficients de F est donc égal à

$$\binom{r+1+n-1}{n} = \binom{r+n}{n} = \binom{n+r}{r} = N+1\,.$$

Il faut donc N conditions pour déterminer une hypersurface d'ordre n.

L'hypersurface (1) est dite *irréductible* si la forme F n'est pas le produit de plusieurs formes. Dans le cas contraire, elle est dite *réductible* ; elle est alors la réunion d'un nombre fini d'hypersurfaces irréductibles.

Nous désignerons en général une hypersurface d'ordre n par la notation V^n_{r-1}.

Une hypersurface-enveloppe

$$\Phi(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r) = 0$$

est la transformée, par une réciprocité ou par dualité, d'une hypersurface. Les définitions précédentes se transportent donc aux hypersurfaces-enveloppe. Il faut N conditions pour déterminer une hypersurface-enveloppe de *classe n.*

159. Intersection d'une droite et d'une hypersurface algébrique. — Tout point de la droite yz peut être représenté par $\lambda y + \mu z$. Posons

$$D_z = z_0 \frac{\partial}{\partial y_0} + z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + z_r \frac{\partial}{\partial y_r} .$$

Les points d'intersection de la droite yz et de l'hypersurface (1) sont donnés par l'équation

$$\lambda^n F(y) + \frac{1}{1\,!} \lambda^{n-1} \mu D_z F(y) + \frac{1}{2\,!} \lambda^{n-2} \mu^2 D_z^2 F(y) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{k\,!} \lambda^{n-k} \mu^k D_x^k F(y) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n\,!} \mu^n D_z^n F(y) = 0 . \quad (2)$$

Cette équation est de degré n en $\lambda : \mu$; par conséquent, *une droite rencontre une hypersurface* V^n_{r-1} *en* n *points* (distincts ou confondus) ou lorsque l'équation précédente est vérifiée identiquement, appartient tout entière à l'hypersurface.

On en conclut que si une hypersurface algébrique est rencontrée en n points par les droites de S_r, elle est d'ordre n.

160. Points ordinaires et points multiples. — Supposons que le point y appartienne à l'hypersurface V^n_{r-1} d'équation (1). On a $F(y) = 0$ et l'équation (2) admet la racine $\mu = 0$. Supposons, d'une manière précise que, quel que soit le point z, l'équation (2) admette la racine $\mu = 0$ avec la multiplicité $s \geqslant 1$ (la multiplicité de cette racine pouvant d'ailleurs être supérieure à s pour certaines positions du point z). Les droites passant par y ne rencontrent plus V^n_{r-1} qu'en $n - s$ points en dehors du point y et ce dernier est appelé *point multiple d'ordre s* pour l'hypersurface.

Pour $s = 1$, le point y est dit *point simple* ou *ordinaire.*

161. Hyperplan tangent en un point ordinaire. — Supposons que y soit un point ordinaire pour V^n_{r-1}. On appelle tangente à cette hypersurface au point y une droite rencontrant cette hypersurface en deux points au moins confondus en y.

Le lieu des tangentes en point y à V^n_{r-1} est l'hyperplan

$$x_0 \frac{\partial F}{\partial y_0} + x_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + \ldots + x_r \frac{\partial F}{\partial y_r} = 0 . \quad (3)$$

Cet hyperplan est appelé *hyperplan tangent* à V^n_{r-1} au point y.

Parmi les tangentes au point y à l'hypersurface V^n_{s-1}, il en existe qui rencontrent l'hypersurface en trois points confondus en y ; le lieu de ces droites est représenté par l'équation

$$D_x^2\, F(y) = x_0^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} + x_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} + \dots + 2\, x_{r-1} x_r \frac{\partial^2 F}{\partial y_{r-1} \partial y_r} = 0\,. \tag{4}$$

Cette équation représente un cône de second ordre de sommet y, coupé par l'hyperplan tangent (3) suivant un cône à $r-2$ dimensions.

Pour certaines positions particulières du point y, il peut arriver que le cône (4) dégénère et comprenne comme partie l'hyperplan (3) ; toutes les tangentes à V^n_{r-1} au point y rencontrent alors cette hypersurface en trois points confondus en y.

Il existe en général des tangentes coupant V^n_{r-1} en 4, 5, ..., r points confondus en y. Elles sont caractérisées par le fait que pour un point z appartenant à l'une de ces tangentes, l'équation (2) admet la racine $\mu = 0$ avec la multiplicité 4, 5, ..., r.

Ces différents points peuvent se vérifier de la manière suivante : changeons de figure de référence de manière que le point y coïncide avec le point O_0. L'équation de V^n_{r-1} s'écrit alors

$$x_0^{n-1}\, \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_r) + x_0^{n-2}\, \varphi_2 + \dots + \varphi_n = 0\,,$$

où φ_i est une forme de degré i en $x_1, x_2, \dots, x_r$.

L'hyperplan tangent à V^n_{r-1} en O_0 a pour équation

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0\,.$$

Le lieu des tangentes coupant V^n_{r-1} en trois points confondus en O_0 est

$$\varphi_1 = 0\,, \qquad \varphi_2 = 0\,;$$

celui des tangentes coupant l'hypersurface en quatre points confondus en O_0 est donné par

$$\varphi_1 = 0\,, \qquad \varphi_2 = 0\,, \qquad \varphi_3 = 0\,,$$

et ainsi de suite.

162. Points multiples. — Supposons que le point y soit multiple d'ordre $s-1$ pour V^n_{r-1}. Quel que soit le point Z, on doit avoir

$$D_z F(y) = 0\,, \quad D_z^2 F(y) = 0\,, \quad \dots, \quad D_z^{s-1} F(y) = 0\,,$$

c'est-à-dire que toutes les dérivées partielles de $F(y)$ jusqu'à l'ordre $s-1$ doivent être nulles au point y. Il suffit pour cela que les dérivées partielles d'ordre $s-1$ soient nulles en ce point. De plus, pour que le point y soit exactement multiple d'ordre s, il faut que l'une au moins des dérivées partielles d'ordre s ne soit pas nulle au point considéré.

Pour qu'un point soit multiple d'ordre s *pour une hypersurface* $F=0$, *il faut et il suffit que toutes les dérivées partielles d'ordre* $s-1$ *de* F *soient nulles en ce point, une au moins des dérivées partielles d'ordre* s *n'étant pas nulle au même point.*

Le nombre des dérivées partielles d'ordre $s-1$ de F étant égal à

$$\binom{r+s-1}{n},$$

on obtient ainsi le nombre de conditions pour qu'un point soit multiple d'ordre s pour une hypersurface algébrique. Remarquons que ces conditions s'expriment par des équations linéaires par rapport aux coefficients de la forme F.

On appelle tangente à V^n_{r-1} en un point y multiple d'ordre s, une droite coupant l'hypersurface en $s+1$ points au moins confondus en y. Le lieu des tangentes à l'hypersurface au point y a pour équation

$$D_x^s\, F(y_0, y_1, \ldots, y_r)=0\ ;$$

c'est un cône d'ordre s et de sommet y appelé *cône tangent.*

Effectuons un changement de figure de référence de manière que le point y coïncide avec O_0. L'équation de V^n_{r-1} s'écrit

$$x_0^{n-s}\,\varphi_s(x_1, x_2, \ldots, x_r)+x_0^{n-s-1}\,\varphi_{s+1}+\ldots+\varphi_n=0\,.$$

Le cône tangent à V^n_{r-1} au point O_0 a pour équation

$$\varphi_s(x_1, x_2, \ldots, x_r)=0\,.$$

163. Intersection d'une hypersurface et d'un espace linéaire. — Soient $y^{(0)}$, $y^{(1)}$, ..., $y^{(p)}$ $p+1$ points linéairement indépendants de S_r ; ils déterminent un espace S_p lieu du point

$$m_0\, y^{(0)}+m_1\, y^{(1)}+\ldots+m_p y^{(p)}.$$

Les points de V^n_{r-1} appartenant à S_p sont donnés par

$$F\,(m_0\, y_0^{(0)}+\ldots m_0 y_0^{(p)}\,,\ \ldots\,,\ m_0\, y_r^{(0)}+\ldots+m_p y_r^{(p)})=0\,. \quad (5)$$

Dans l'espace S_p, où les coordonnées projectives sont m_0, m_1, ..., m_p, cette équation représente une hypersurface V^n_{p-1} ou est satisfaite identiquement. Dans ce dernier cas, S_p appartient tout entier à l'hypersurface V^n_{r-1}. Lorsque cette particularité ne se présente pas, l'intersection d'une hypersurface d'ordre n pour un espace S_p est une hypersurface d'ordre n de cet espace. Il convient de remarquer que cette intersection peut être réductible même si l'hypersurface considérée est irréductible.

Si l'espace S_p coïncide avec l'espace $O_0 O_1 \dots O_p$, l'équation de l'intersection est

$$F(x_0, x_1, \dots, x_p, 0, 0, \dots, 0) = 0 .$$

164. Hypersurfaces ayant un espace linéaire multiple. — Un espace linéaire est dit multiple d'ordre s pour l'hypersurface V^n_{r-1} lorsque tous les points de cet espace sont multiples d'ordre s pour l'hypersurface.

Pour que l'espace S_p, déterminé par les points $y^{(0)}$, $y^{(1)}$, ..., $y^{(p)}$ soit multiple d'ordre s pour V_{r-1}, il faut et il suffit que tous les points de S_p soient multiples d'ordre s pour l'hypersurface (5) de S_p, c'est-à-dire que les dérivées d'ordre $s-1$ du premier membre de cette équation par rapport à m_0, m_1, ..., m_p, soient nulles quels que soient m_0, m_1, ..., m_p.

Recherchons en particulier l'équation d'une hypersurface V^n_{r-1} ayant l'espace $O_0 O_1 \dots O_p$ multiple d'ordre s. Il suffit, d'après ce qui précède, que les variables x_0, x_1, ..., x_p figurent dans cette équation avec le degré $n-s$ au plus. L'équation peut donc s'écrire sous la forme

$$\psi_{n-s}(x_0, x_1, \dots, x_p) + \psi_{n-s-1} + \dots + \psi_0 = 0 ,$$

où ψ_i est une forme de degré i en x_0, x_1, ..., x_p, dont les coefficients sont des formes de degré $n-i$ en x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_r.

165. Hypersurfaces spécialisées ou cônes. — Une hypersurface d'ordre n possédant un espace S_p multiple d'ordre n est appelée *hypersurface* $p+1$ *fois spécialisée* ou cône de sommet S_p.

Une hypersurface $p+1$ fois spécialisée dont le sommet est l'espace $O_0 O_1 \dots O_p$ a pour équation

$$\varphi_n(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_r) = 0 ,$$

où φ_n est une forme de degré n. Dans l'espace S_{r-p-1}, d'équations

$$x_0 = 0 , \quad x_1 = 0 , \quad \dots, \quad x_p = 0 ,$$

cette équation représente une hypersurface V^n_{r-p-2}. L'hypersurface spécialisée V^n_{r-1} est le lieu des espaces S_{p+1} passant par S_p et pour les différents points de V^n_{r-p-2}.

En particulier, une hypersurface $r-1$ fois spécialisée de S_r est l'ensemble de n hyperplans passant par le sommet.

166. Monoïdes. — Une hypersurface V^n_{r-1} ayant un espace S_p multiple d'ordre $n-1$ est appelée *monoïde* de sommet S_p.

Un monoïde d'ordre n et de sommet $O_0 O_1 \ldots O_p$ a pour équation

$$x_0\psi_0(x_{p+1}, \ldots, x_r) + x_1\psi_1 + \ldots + x_p\psi_p + \psi = 0 ,$$

où $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_p$ sont des formes de degré $n-1$ et ψ une forme de degré n en $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_r$.

En particulier, l'équation

$$x_p\psi_p(x_{p+1}, \ldots, x_r) + \psi = 0 ,$$

représente une hypersurface p fois spécialisée de sommet $O_0 O_1 \ldots O_{p-1}$ et un monoïde de sommet $O_0 O_1 \ldots O_p$.

167. Polarité. — Reprenons l'équation (2) donnant les intersections de V^n_{r-1} et de la droite yz. Cette équation peut aussi s'écrire

$$\mu^n F(z) + \frac{1}{1!}\mu^{n-1}\lambda D_y F(z) + \ldots + \frac{1}{i!}\mu^{n-i}\lambda^i D_y{}^i F(z) + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!} D_y{}^n F(z) = 0 . \qquad (2')$$

L'hypersurface

$$D_y{}^i F(x) = 0$$

d'ordre $n-i$, est appelée polaire d'ordre i du point y par rapport à V^n_{r-1}.

En comparant les équations (2) et (2′), on voit que l'équation de cette polaire peut également s'écrire

$$D_x{}^{n-i} F(y) = 0 .$$

Les équations

$$D_y{}^i F(x) = 0, \quad D_x{}^{n-i} F(y) = 0$$

sont donc équivalentes et par conséquent si un point z appartient à la polaire d'ordre i de y par rapport à V^n_{r-1}, le point y appartient à la polaire d'ordre $n-i$ de z par rapport à la même hypersurface.

168. Relations entre les hypersurfaces et les hypersurfaces-enveloppes. — L'hyperplan tangent ξ en un point y à l'hypersurface

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_r) = 0 \qquad (1)$$

a pour équation

$$x_0 \frac{\partial F}{\partial y_0} + x_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + \ldots + x_r \frac{\partial F}{\partial y_r} = 0$$

et ses coordonnées sont donc

$$\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_r = \frac{\partial F}{\partial y_0} : \frac{\partial F}{\partial y_1} : \ldots : \frac{\partial F}{\partial y_r} . \tag{2}$$

En éliminant les y entre les équations $F(y)=0$ et (2), on trouve *en général* une seule équation

$$\Phi(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r) = 0 . \tag{3}$$

L'ensemble des hyperplans tangents à une hypersurface est donc en général une hypersurface-enveloppe.

Partons inversement de l'équation (3). Appelons point de contact de l'hyperplan η appartenant à l'hypersurface-enveloppe (3) avec cette hypersurface-enveloppe, le point représenté par l'équation tangentielle

$$\xi_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_0} + \xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1} + \ldots + \xi_r \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_r} = 0 .$$

Les coordonnées de ce point sont donc données par

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_r = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_0} : \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1} : \ldots : \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_r} . \tag{4}$$

En éliminant les η entre les équations $\Phi(\eta)=0$ et (4), on obtient *en général* une équation

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_r) = 0 ,$$

représentant une hypersurface lieu des points de contact.

§ 2. *Variétés algébriques de dimension inférieure à* r — 1

169. Définitions. — Soient $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ des formes en $y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}$, de même degré, sans facteur commun et φ une forme de degré quelconque.

On appelle *variété algébrique à* k *dimensions* et on représente par V_k l'ensemble des points x satisfaisant aux équations

$$\rho x_i = \varphi_i(y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}) , \tag{1}$$

$$\varphi(y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}) = 0 . \tag{2}$$

Dans l'espace S_{k+1} dont les points ont pour coordonnées $y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}$, l'équation (2) représente une hypersurface Ω_k. A un point y de Ω_k, les équations (1) font correspondre un et un seul point x de V_k, mais chaque point de V_k peut provenir de $\nu \geqslant 1$ points y de Ω_k.

Si l'hypersurface Ω_k est irréductible, la variété V_k sera dite *irréductible*. Cette définition appelle une observation : supposons que Ω_k soit réductible, mais qu'à tout point x de V_k correspondent ν' points d'une partie irréductible Ω_k' de Ω_k. Il est clair que dans ces conditions, on peut remplacer l'équation (2) par celle de Ω_k' et que la variété V_k est irréductible.

170. Remarque. — L'ensemble des points communs à un certain nombre d'hypersurfaces algébriques n'ayant aucune partie commune, se compose d'un nombre fini de variétés algébriques à $r-2$, $r-3$, ... 1 ou 0 dimensions (une variété à 0 dimensions étant un groupe de points). On trouvera une démonstration de cette propriété dans les *Leçons d'analyse* de M. Severi (1), auxquelles nous renvoyons le lecteur.

171. Les variétés algébriques comme intersections d'hypersurfaces algébriques. — Reprenons la variété V_k représentée par les équations (1) et (2).

En éliminant $\rho, y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}$ entre $k+2$ des équations (1) et l'équation (2), on obtient l'équation d'une hypersurface algébrique contenant la variété V_k. Le choix de $k+2$ des équations (1) peut se faire de $\binom{r+1}{k+2}$ manières, par conséquent V_k est l'intersection d'autant d'hypersurfaces algébriques.

Considérons un espace S_{r-k-1} quelconque. Par un choix convenable de la figure de référence, on peut toujours supposer que cet espace est donné par

$$x_0=0\,,\quad x_1=0\,,\quad \ldots,\quad x_k=0\,.$$

Aux points de V_k situés dans cet espace correspondent des points y de Ω_k satisfaisant aux équations

$$\varphi_0(y_0, y_1, \ldots, y_{k+1})=0\,,\quad \varphi_1=0\,,\quad \ldots,\quad \varphi_k=0\,,\quad \varphi=0\,,$$

c'est-à-dire à $k+2$ équations. En général, ces équations n'ont aucune solution commune et par conséquent un espace S_{r-k-1} ne rencontre pas en général une variété V_k.

Cela étant, nous allons rechercher le nombre maximum d'hypersurfaces algébriques n'ayant en commun que la variété V_k.

Soit V_k une variété irréductible. Projetons cette variété d'un espace S_{r-k-2}, c'est-à-dire cherchons le lieu d'un espace S_{r-k-1} passant par S_{r-k-2} et par un point variable de V_k. Nous obtenons une hypersurface algébrique V_{r-1}. Projetons V_k d'un second espace S'_{r-k-2} et soit V'_{r-1} l'hypersurface obtenue.

L'intersection des hypersurfaces V_{r-1}, V'_{r-1} est une variété à $r-2$ dimensions éventuellement réductible. Prenons un point sur chacune des parties irréductibles de cette variété ; en

(1) F. Severi, *Lezioni di Analisi*, vol. Ier (Bologne, Zanichelli, 1933), pp. 399 et suiv.

dehors de V_k et choisissons, ce qui est toujours possible, un espace S''_{r-k-2} tel que les espaces S_{r-k-1} qui le joignent aux différents points choisis se rencontrent par V_k. Projetons V_k de cet espace S''_{r-k-2} et soit V''_{r-1} l'hypersurface obtenue. Les hypersurfaces V_{r-1}, V'_{r-1}, V''_{r-1} ont en commun une variété à $r-3$ dimensions. Recommençons la construction précédente en choisissant un quatrième espace S'''_{r-k-2}, et ainsi de suite.

Dans le cas le plus défavorable, on parviendra à $r+1$ hypersurfaces, projections de V_k à partir de $r+1$ espaces S_{r-k-2}, convenablement choisis, n'ayant que V_k en commun.

Une variété algébrique irréductible est l'intersection complète de r + 1 *hypersurfaces algébriques au plus.*

172. Représentation de Cayley-Halphen. — Considérons une variété algébrique V_k. Un espace S_{r-k-1} ne rencontrant pas en général V_k, nous pouvons choisir un espace S_{r-k-2}, ne rencontrant pas V_k, tel qu'un espace S_{r-k-1} passant par S_{r-k-2} et par un point de V_k, ne rencontre plus cette variété en un second point.

Disposons de la figure de référence de manière que l'espace S_{r-k-2} coïncide avec l'espace $O_{k+2}O_{k+3}\dots O_r$. Soit

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}) = 0 \tag{1}$$

l'équation du cône projetant V_k de S_{r-k-2}. Dans l'espace $O_0O_1\dots O_{k+1}$, l'équation (2) représente une hypersurface $\overline{V}_k$.

L'espace S_{r-k-1} déterminé par S_{r-k-2} et un point $\overline{x}$ de $\overline{V}_k$, rencontre en général V_k en un seul point x. Les coordonnées $x_{k+2}, x_{k+3}, \dots, x_r$ de ce point sont donc des fonctions rationnelles des coordonnées de x et on a

$$x_{k+1+i} = \frac{\varphi_{k+1+i}(x_0, x_1, \dots, x_{k+1})}{\varphi(x_0, x_1, \dots, x_{k+1})}, \tag{2}$$
$$(i = 1, 2, \dots, r-k-1).$$

$\varphi_{k+2}, \varphi_{k+3}, \dots, \varphi_r$ étant des formes d'un même degré m et φ une forme de degré $m-1$, sans facteur commun avec les précédentes.

Les équations (1) et (2) constituent la représentation de Cayley-Halphen de la variété V_k.

L'équation (1) représente, dans S_r, une hypersurface $r-k-1$ fois spécialisée, c'est-à-dire un cône de sommet S_{r-k-2}.

Une équation (2), c'est-à-dire

$$x_{k+1+i}\,\varphi(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}) - \varphi_{k+1+i}(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}) = 0$$

représente une hypersurface $r-k$ fois spécialisée qui est en même temps un monoïde de sommet $O_{k+2}O_{k+3}\dots O_r$.

Les hypersurfaces (1) et (2) ont en commun, outre V_k, une certaine variété qui sera déterminée plus loin.

Remarquons que les équations (1) et (2) peuvent s'écrire

$$\rho x_i = y_i \varphi(y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}), \quad (i = 0, 1, \ldots, k+1),$$

$$\rho x_{k+1+i} = \varphi_{k+1+i}(y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}), \quad (i = 1, 2, \ldots, r-k-1),$$

$$f(y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}) = 0 .$$

Sous cette forme, on retrouve les équations de définition d'une variété algébrique à k dimensions.

Actuellement, les variétés $\overline{V}_k$ et V_k sont liées par une correspondance biunivoque et si $\overline{V}_k$ est irréductible, il en est de même de V_k.

173. Ordre d'une variété algébrique. — Reprenons la variété V_k représentée par les équations (1) et (2) (n° 172). Considérons un espace S_{r-k} passant par l'espace S_{r-k-2} : $O_{k+2} O_{k+3} \ldots O_r$. Cet espace coupe $O_0 O_1 \ldots O_{k+1}$ suivant une droite s qui, en général, n'appartient pas à $\overline{V}_k$. Si n est le degré de la forme f, la droite s coupe $\overline{V}_k$ en n points et par conséquent S_{r-k} coupe V_k en n points.

Un espace S_{r-k} *rencontre en général une variété algébrique* V_k *en un nombre fini de points.* Ce nombre est appelé *ordre* de la variété et celle-ci est représentée par le symbole V_k^n.

La figure de référence n'occupant aucune position particulière par rapport à V_k^n, on voit que l'hypersurface $r-k-1$ fois spécialisée projetant V_k^n d'un espace S_{r-k-2} quelconque, est en général d'ordre n. Si cet ordre est inférieur à n, c'est qu'un espace S_{r-k-1} passant par l'espaces S_{r-k-2} considéré et par un point quelconque de V_k^n, coupe encore cette variété en d'autres points ; l'ordre de l'hypersurface obtenue est alors un diviseur de n.

Il convient d'observer que certains espaces S_{r-k}, occupant des positions particulières, peuvent contenir une infinité de points de V_k^n.

174. Points simples et points multiples d'une variété. — Les espaces S_{r-k} passant par un point P d'une variété V_k^n, coupent celle-ci en n points dont l'un au moins coïncide avec P. Si ces espaces ne rencontrent plus V_k^n qu'en $n-\nu$ points en dehors de P (ce nombre pouvant être réduit pour des positions particulières des espaces S_{r-k}), le point P est dit *multiple d'ordre* ν pour V_k^n.

En particulier, si $\nu = 1$, le point P est un point simple ou ordinaire de V_k^n.

175. Intersection d'une variété algébrique et d'un espace linéaire. — Considérons un espace S_{r-k+l} et une variété V_k^n. Celle-ci est l'intersection de $r+1$ hypersurfaces algébriques au plus. D'autre part, S_{r-k+l} est l'intersection de $k-l$ hyperplans, qui sont aussi des hypersurfaces algébriques. Donc la section de V_k^n par S_{r-k-l} est l'intersection de $r+1+k-l$ hypersurfaces algébriques au plus et est donc une variété algébrique, éventuellement réductible en un nombre fini de variétés.

En général, la section considérée est une variété V_l, mais pour certaines positions particulières de S_{r-k+l}, ce peut être une variété de dimension supérieure à l. Si la section est une variété V_l, celle-ci est une variété V_l^n d'ordre n, car un espace S_{r-k} de S_{r-k+l} la rencontre en général en n points.

176. Relation entre r, k et n. — Soit V_k^n une variété irréductible de S_r, n'appartenant pas à un espace linéaire de dimension inférieure à r.

On peut trouver, sur V_k^n, $r+1$ points indépendants, car si on n'en pouvait trouver que $q+1$ $(q<r)$, V_k^n appartiendrait à un espace S_q.

Coupons V_k^n par un hyperplan S_{r-1} ; on obtient une variété V^n_{k-1} qui ne peut appartenir à un espace de dimension inférieure à $r-1$, car alors V_k appartiendrait à un espace à moins de r dimensions.

De même, la section de V_k^n par un espace S_{r-k+l} est en général une variété V_l^n qui ne peut appartenir à un espace à moins de $r-k+l$ dimensions.

Les n points communs à V_k^n et à un espace S_{r-k} général doivent déterminer complètement cet espace ; on a donc $n \geqslant r-k+1$, c'est-à-dire

$$r \leqslant n+k-1 .$$

Considérons par exemple une variété du second ordre V_k^2. On a $r \leqslant k+1$ et d'autre part, $r>k$, donc $r=k+1$. La variété V_k^2 est donc une hyperquadratique de S_{k+1}.

Supposons maintenant $k=1$; on a $r \leqslant n$. Une courbe V_1^n appartient donc à un espace ayant au plus n dimensions.

177. Variétés rationnelles. — Considérons les équations

$$\rho x_i = f_i(y_0, y_1, \ldots, y_k) , \qquad (i=0, 1, \ldots, r) ,$$

où les f_i sont des formes du même degré, sans facteur commun.

En y adjoignant l'équation $y_{k+1}=0$ et en retournant à la définition des variétés, on voit que les équations précédentes représentent une variété algébrique V_k. Cette variété V_k particulière est appelée *variété rationnelle*.

§ 3. *Intersection des variétés algébriques*

178. Préliminaires. — Dans le plan, deux courbes algébriques V_1^m, V_1^n, sans partie commune, se coupent en mn points. Par conséquent, dans S_r, deux hypersurfaces V^m_{r-1}, V^n_{r-1}, sans partie commune, se coupent suivant une variété V^{mn}_{r-2}.

Dans l'espace S_3, une surface V_2^m et une courbe V_1^n, n'ayant pas une partie commune, se coupent en mn points. Par conséquent, dans S_r, une hypersurface V^m_{r-1} et une variété V^n_{r-2}, n'ayant pas une variété à $r-2$ dimensions en commun, se coupent suivant une variété V^{mn}_{r-3}.

Nous allons considérer deux variétés V_h^m, V_k^n de S_r, telles que $h+k>r$, n'ayant pas en commun une variété à plus de $h+k-r$ dimensions, et montrer qu'elles ont en commun une variété V^{mn}_{h+k-r}. Mais auparavant, nous étudierons la représentation de Cayley-Halphen d'une variété.

179. Etude de la représentation de Cayley-Halphen. — Considérons la variété algébrique irréductible V_k^n dont les équations de Cayley-Halphen sont

$$x_{k+1+i} = \frac{f_{k+1+i}(x_0, x_1, \dots, x_{k+1})}{f(x_0, x_1, \dots, x_{k+1})}, \qquad (1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, r-k-1),$$

$$F(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}) = 0, \qquad (2)$$

où F est de degré n, f de degré $p-1$, f_{k+1+i} de degré p, ces dernières formes et la forme f n'ayant aucun facteur commun.

L'espace S_{r-k-2} : $O_{k+2}\,O_{k+3} \dots O_r$ n'a aucun point commun avec V_k^n.

Désignons par Ω_{k-1} la variété algébrique d'équations

$$x_{k+2} = 0, \quad x_{k+3} = 0, \quad \dots, \quad x_r = 0, \quad F = 0, \quad f = 0.$$

Ecrivons les équations (1) et (2) sous la forme

$$\rho x_i = y_i f(y_0, y_1, \dots, y_{k+1}), \quad (i = 0, 1, \dots, k+1)$$

$$\rho x_{k+1+i} = f_{k+1+i}(y_0, y_1, \dots, y_{k+1}), \quad (i = 1, 2, \dots, r-k-1),$$

$$F(y_0, y_1, \dots, y_{k+1}) = 0.$$

Prenons pour y un point de la variété Ω_{k-1}. Si, pour ce point y, toutes les formes f_{k+1+i} ne sont pas nulles, la variété V_k possède un point au moins appartenant à l'espace S_{r-k-2}, contrairement à l'hypothèse. Par conséquent, dans l'espace S_{k+1} : $O_0\,O_1 \dots O_{k+1}$, les hypersurfaces

$$f_{k+1+i}(y_0, y_1, \dots, y_{k+1}) = 0$$

contiennent toutes la variété Ω_{k-1}. Les points de l'espace à $r-k-1$ dimensions déterminé par un point y de Ω_{k-1} et par $O_{k+2}\dots O_r$ satisfont aux équations (1) et (2). Par sonséquent, ces équations représentent l'ensemble de V_k^n et de la variété lieu de ces espaces S_{r-k-1}. Cette dernière variété a $r-2$ dimensions, puisqu'elle est formée de ∞^{k-1} S_{r-k-1} ; nous la représenterons par W_{r-2}.

180. Intersection de deux variétés algébriques. — Soient V_k^n, V_h^m deux variétés algébriques dont les équations de Cayley-Halphen sont respectivement

$$\left.\begin{array}{c} f(x_0, x_1, \dots, x_{k+1})\, x_{k+1+i} = f_{k+1+i}(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}), \\ (i=1, 2, \dots, r-k-1), \\ F(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}) = 0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{c} \varphi(x_0, x_1, \dots, x_{h+1})\, x_{h+1+i} = \varphi_{k+1+i}(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}), \\ (i=1, 2, \dots, r-h-1), \\ \Phi(x_0, x_1, \dots, x_{h+1}) = 0. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Nous supposerons $h+k>r$ et que, de plus, les variétés V_k^n, V_h^m n'ont pas en commun une variété de dimension supérieure à $h+k-r$. Pour fixer les idées, nous supposerons $h \geqslant k$. Enfin, nous supposerons que le point O_0 a été choisi en dehors des hypersurfaces $F=0$, $\Phi=0$, dans une position tout à fait générale par rapport à ces hypersurfaces.

Les hypersurfaces (1) ont en commun V_k^n et une variété W_{r-2} ; les hypersurfaces (2), la variété V_h^m et une variété W'_{r-2}.

Considérons un espace $S_{3r-h-k-2}$, dont les coordonnées ponctuelles sont

$$x_0, x_1, \dots, x_r, \quad y_{k+2}, \dots, y_r, \quad z_{h+2}, \dots, z_r.$$

Les équations

$$\left.\begin{array}{c} y_{k+1+i}\, f(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}) = f_{k+1+i}(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}), \\ (i=1, 2, \dots, r-k-1), \\ F(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}) = 0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

représentent une variété V^n_{2r-h-2} et une variété $W_{3r-h-k-4}$. La section de (3) par les hyperplans

$$y_{k+1+i} = x_{k+1+i}, \qquad (i=1, 2, \dots, r-k-1),$$
$$z_{h+1+j} = 0, \qquad (j=1,2, \dots, r-h-1)$$

est précisément l'ensemble des variétés V_k^n et W_{r-2}.

De même, les équations

$$\left.\begin{array}{c} z_{h+1+j}\, \varphi(x_0, x_1, \dots, x_{h+1}) = \varphi_{h+1+j}(x_0, x_1, \dots, x_{h+1}), \\ (j=1, 2, \dots, r-h-1), \\ \Phi(x_0, x_1, \dots, x_{h+1}) = 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

représente l'ensemble de deux variétés V^m_{2r-k-2} et $W'_{3r-h-k-4}$. Les sections de ces variétés par les hyperplans

$$z_{h+1+i} = x_{h+1+i}\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-h-1)\,,$$
$$y_{k+1+j} = 0\,, \qquad (j = 1, 2, \ldots, r-k-1)$$

sont les variétés V_h^m et W'_{r-2}.

Considérons la variété représentée par les équations simultanées (3) et (4).

Nous avons supposé que le point O_0 occupait une position tout à fait générale par rapport aux hypersurfaces $F=0$, $\Phi=0$; par conséquent, une droite passant par O_0 et par un point de la variété commune à ces deux hypersurfaces, ne rencontre plus en général une seconde fois cette variété. Il en résulte que cette variété peut être représentée par les équations

$$\left.\begin{aligned} x_0\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{h+1}) &= \psi_0(x_1, x_2, \ldots, x_{h+1})\,,\\ \Psi(x_0, x_1, \ldots, x_{h+1}) &= 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Observons que F étant de degré n, Φ de degré m, Ψ est de degré mn et la variété (5) est d'ordre mn.

En portant la valeur de x_0 dans les équations (3) et (5), on aura

$$x_0\psi'(x_1, x_2, \ldots, x_{h+1}) = \psi_0'(x_1, x_2, \ldots, x_{h+1})\,,$$
$$y_{k+1+i}\,\psi'(x_1, x_2, \ldots, x_{h+1}) = \psi'_{k+1+i}(x_1, x_2, \ldots, x_{h+1})\,,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r-k-1),$$
$$z_{h+1+j}\,\psi'(x_1, x_2, \ldots, x_{h+1}) = \psi'_{h+1+j}(x_1, x_2, \ldots, x_{h+1})\,,$$
$$(j = 1,\ 2, \ldots, r-h-1)\,,$$
$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_{h+1}) = 0\,,$$

les formes ψ', ψ_0', ψ'_{k+1+j}, ψ'_{h+1+j} n'ayant aucun facteur commun.

Les équations précédentes représentent l'ensemble d'une variété V^{mn}_{r-2} et d'une variété $W''_{3r-h-k-4}$.

Les points de V^{mn}_{r-2} correspondent aux points de l'hypersurface $\Psi = 0$ de l'espace $S_{r-1} : O_1 O_2 \ldots O_r$; ces derniers points sont en nombre ∞^{r-2}.

Les points de la variété $W_{3r-h-k-4}$ satisfaisant à l'équation $\Phi = 0$ sont obtenus en prenant les valeurs de $x_0, x_1, \ldots, x_r$ satisfaisant aux équations

$$F = 0\,, \qquad \Phi = 0\,, \qquad f = 0\,;$$

il y a ∞^{r-3} de ces systèmes de valeurs, par conséquent les points de la variété envisagée ne coïncident certainement pas tous avec les points de V^{mn}_{r-2}.

De même, les points de la variété $W'_{3r-h-k-4}$ satisfaisant à $F = 0$ ne coïncident pas tous avec les points de V^{mn}_{r-2}.

L'espace S_r, d'équations

$$y_{k+1+i} = x_{k+1+i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-k-1),$$
$$z_{h+1+j} = x_{h+1+j}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, r-h-1),$$

coupe $V^{mn}{}_{r-2}$ suivant une variété $V^{mn}{}_{h+k-r}$, car l'espace

$$x_0 = x_1 = \ldots = x_{h+1} = 0$$

ne rencontre pas la variété $F = 0$, $\Phi = 0$ considérée dans l'espace $O_0 O_1 \ldots O_{h+1}$. La variété $V^{mn}{}_{h+k-r}$ est l'intersection des variétés $V_k{}^n$, $V_h{}^m$, par conséquent :

Deux variétés algébriques $V_k{}^n$, $V_h{}^m$ *de* S_r, *telles que* $h+k \geqslant r$, *n'ayant pas en commun une variété de dimension supérieure à* $h+k-r$, *se coupent suivant une variété* $V^{mn}{}_{h+k-r}$.

En particulier, si $h+k=r$, les deux variétés $V^n{}_k$, $V^m{}_{r-k}$ se coupent en mn points.

La démonstration qui vient d'être exposée est due à Halphen [1], elle a été précisée par Noether [2].

Un problème plus général consiste dans l'étude de l'intersection de deux variétés algébriques appartenant à une variété algébrique donnée ; ce problème a été résolu par M. F. Severi [3], au mémoire duquel nous renvoyons le lecteur.

[1] *Recherches de géométrie à* n *dimensions* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1873, t. II, p. 34; *Œuvres complètes*, t. Ier).

[2] *Zur Eliminationstheorie* (*Mathematische Annalen*, 1877, t. XI, p. 571).

[3] *Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità proiettive* (*Memorie dell' Accademia di Torino*, 1902).

CHAPITRE VIII

LES COURBES RATIONNELLES HYPERSPATIALES

§ 1. *Propriétés des courbes rationnelles*

181. Préliminaires. — Une courbe rationnelle C ou variété rationnelle V_1 est l'ensemble des points donnés par

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_r = \varphi_0(u) : \varphi_1(u) : \ldots : \varphi_r(u) , \tag{1}$$

où $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ sont des fonctions rationnelles et entières de u, sans facteur commun.

En posant $u = y_0 : y_1$, on en déduit

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_r = \psi_0(y_0, y_1) : \ldots : \psi_1(y_0, y_1) : \ldots : \psi_r(y_0, y_1), \tag{2}$$

où $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_r$ sont des formes sans facteur commun, de même degré, égal au degré maximum des fonctions φ.

Interprétons y_0, y_1 comme les coordonnées projectives des points d'une ponctuelle s. A un point y de s correspond un point de C, mais chaque point de C peut provenir d'un certain nombre ν de points de s. On sait que, d'après le théorème de Luroth, (I, n° 10), on peut, dans les équations (2), substituer à y_0, y_1 de nouvelles variables y_0', y_1', données par

$$y_0' : y_1' = \chi_0(y_0, y_1) : \chi_1(y_0, y_1) ,$$

où χ_0, χ_1, sont des formes de même degré ν, sans facteur commun, telles que chaque point de C provienne d'un seul système de valeurs de y_0', y_1'. En d'autres termes, si y_0', y_1' sont les coordonnées projectives d'un point y' d'une ponctuelle s', il y a une correspondance biunivoque entre s' et C.

Nous pourrons donc supposer dans la suite, sans restriction, qu'il y a une correspondance biunivoque entre la ponctuelle s et la courbe C.

182. Courbe rationnelle normale. — Soit C la courbe rationnelle donnée par les équations (2), n le degré des formes ψ.

Les points de rencontre de C avec l'hyperplan ξ sont donnés par

$$\xi_0\psi_0(y_0, y_1) + \xi_1 \psi_1 (y_0, y_1) + \dots + \xi_r\psi_r (y_0, y_1) = 0 .$$

Ces points sont donc au nombre de n et C est une courbe d'ordre n. On a $r \leqslant n$.

Si $r = n$, la courbe C est appelée *courbe rationnelle normale*.

Une courbe rationnelle normale ne peut avoir de points multiples, car si un point P de C était multiple d'ordre $\nu > 1$ pour cette courbe, par ce point et par $r-1 = n-1$ points de la courbe passerait un hyperplan rencontrant la courbe en $n - 1 + \nu \geqslant n + 1$ points, ce qui est absurde.

183. Théorème. — *Une courbe rationnelle est normale ou est la projection d'une courbe normale.*

Ecrivons les équations d'une courbe rationnelle C d'ordre n sous la forme

$$\rho x_i = a_{i0}\, u^n + a_{i1}\, u^{n-1} + \dots + a_{in} , \qquad (1)$$
$$(i = 0, 1, \dots, r) .$$

Supposons $n > r$. L'un au moins des coefficients a_{i0} n'est pas nul et les $r+1$ formes des seconds membres des équations (1) sont linéairement indépendantes, sans quoi il y aurait une ou plusieurs relations à coefficients constants entre les coordonnées des points de C et cette courbe appartiendrait à un espace linéaire de dimension inférieure à r.

Cela étant, on peut trouver $n - r$ polynomes de degré n,

$$a_{i0}u^n + a_{i1}\, u^{n-1} + \dots + a_{in} ,$$
$$(i = r+1,\ r+2,\ \dots,\ n)$$

linéairement indépendantes et linéairement indépendants des seconds membres des équations (1). Considérons, dans l'espace S_n, la courbe C′ d'équations

$$\rho x_i = a_{i0}\, u^n + a_{i1}\, u^{n-1} + \dots + a_{in} ,$$
$$(i = 0, 1, \dots, n) .$$

Cette courbe C′ est normale. En la projetant de l'espace $O_{r+1} \dots O_n$ sur l'espace $O_0 O_1 \dots O_r$, on retrouve la courbe C.

184. Equations réduites d'une courbe normale. — Soit, dans S_n, C une courbe rationnelle normale définie par les équations

$$\rho x_i = a_{i0}\, u^n + a_{i1}\, u^{n-1} + \dots + a_{in} , \qquad (1)$$
$$(i = 0, 1, \dots, n) .$$

Les seconds membres des équations (1) sont linéairement indépendants et on a donc

$$|a_{ik}| \neq 0 .$$

Effectuons la transformation de coordonnées (ou l'homographie)

$$\rho x_i = a_{i0}\, x_0' + a_{i1}\, x_1' + \dots + a_{in}\, x'_n , \qquad (2)$$
$$(i = 0, 1, \dots, n) .$$

Les équations de la courbe C deviennent

$$x_0' : x_1' : \dots : x_n' = u^n : u^{n-1} : \dots : 1 . \qquad (3)$$

Les équations d'une courbe normale peuvent donc toujours se ramener à la forme réduite (3) par une homographie (2).

On en déduit que *deux courbes rationnelles normales du même ordre sont projectivement identiques*, c'est-à-dire que l'on peut passer de l'une à l'autre par une homographie.

185. Projections d'une courbe rationnelle. — Considérons la courbe rationnelle d'ordre n,

$$\rho x_i = a_{i0}\, u^n + a_{i1}\, u^{n-1} + \dots + a_{in} , \qquad (1)$$
$$(i = 0, 1, \dots, r)$$

et supposons qu'elle ne passe pas par le point O_r. Il en résulte que les équations

$$a_{i0}\, u^n + a_{i1}\, u^{n-1} + \dots + a_{in} = 0 ,$$
$$(i = 0, 1, \dots, r-1)$$

n'ont aucune solution commune et que l'un au moins des nombres a_{00}, a_{10}, ..., a_{r-10} n'est pas nul.

La projection de la courbe (1) sur l'hyperplan $x_r = 0$ du point O_r a pour équations

$$x_r = 0 , \quad \rho x_i = a_{i0}\, u^n + a_{i1}\, u^{n-1} + \dots + a_{in} ,$$
$$(i = 0, 1, \dots, r-1) .$$

C'est donc une courbe d'ordre n.

La projection d'une courbe rationnelle d'ordre n *sur un hyperplan, à partir d'un point n'appartenant pas à la courbe, est une courbe rationnelle d'ordre* n.

Supposons maintenant que le point O_r soit multiple d'ordre ν pour la courbe (1). On peut supposer que ce point correspond à la valeur $u=0$ du paramètre et écrire les équations (1) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \rho x_i &= u^\nu(a_{i0}u^{n-\nu}+a_{i1}u^{n-\nu-1}+\dots+a_{in-\nu}), \quad (i=0, 1, \dots, r-1) \\ \rho x_r &= a_{r0}u^n + a_{r1}u^{n-1}+\dots+a_{rn}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

l'un au moins des coefficients a_{00}, a_{10}, ..., a_{r0} n'étant pas nul.

La projection de cette courbe, sur l'hyperplan $x_r=0$, a pour équations

$$x_r=0, \quad \rho x_i = a_{i0}u^{n-\nu}+\dots+a_{in-\nu},$$
$$(i=0, 1, \dots, r-1).$$

C'est donc une courbe d'ordre $n-\nu$.

La projection d'une courbe rationnelle d'ordre n *sur un hyperplan à partir d'un point multiple d'ordre* ν *de la courbe, est une courbe rationnelle d'ordre* $n-\nu$.

On observera que la courbe (2) appartient à un espace S_r tel que

$$r \leqslant n-\nu+1.$$

186. Espaces sécants d'une courbe rationnelle normale. — Soit C une courbe normale d'ordre n, de S_n, d'équations

$$x_0 : x_1 : \dots : x_n = u^n : u^{n-1} : \dots : 1. \tag{1}$$

Un espace S_k ne peut rencontrer C en plus de $k+1$ points, car autrement, par cet S_k et par $n-k-1$ points de la courbe n'appartenant pas à cet espace, on pourrait mener un hyperplan coupant la courbe en plus de n points.

Un espace S_k passant par $k+1$ points de la courbe est déterminé par ces $k+1$ points ; il est appelé espace S_k, $(k+1)$-sécant de la courbe C.

Soient u_0, u_1, ..., u_k les paramètres de $k+1$ points de C. L'espace S_k déterminé par ces points a pour équations

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ u_0^n & u_0^{n-1} & \dots & 1 \\ u_1^n & u_1^{n-1} & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_k^n & u_k^{n-1} & \dots & 1 \end{matrix} \right\| = 0. \tag{2}$$

Considérons le déterminant tiré de cette matrice et dont la première colonne commence par x_i. Après division par u_0^{n-k-i}, u_1^{n-k-i}, ..., u_k^{n-k-i}, il s'écrit

$$\begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} & \dots & x_{k+i+1} \\ u_0^{k+1} & u_0^k & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_k^{k+1} & u_k^k & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Dans cette équation, remplaçons x_i, x_{i+1}, ..., x_{k+i+1} respectivement par u^{k+1}, u^k, ..., 1. Nous obtenons une équation ayant pour racines u_0, u_1, ..., u_k et qui peut par conséquent s'écrire

$$x_i - \sigma_1 x_{i+1} + \sigma_2 x_{i+2} - \dots + (-1)^{k+1} \sigma_{k+1} x_{k+i+1} = 0 ,$$

σ_1, σ_2, ..., σ_{k+1} désignant les fonctions symétriques des racines,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= u_0 + u_1 + \dots + u_{k+1} , \\ \sigma_2 &= u_0 u_1 + u_0 u_2 + \dots + u_{k-1} u_k , \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sigma_{k+1} &= u_0 u_1 \dots u_{k+1} . \end{aligned}$$

Les équations (2) d'un espace S_k, $(k+1)$-sécant, s'écrivent donc

$$\left.\begin{aligned} x_0 - \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 - \dots + (-1)^{k+1} \sigma_{k+1} x_{k+1} &= 0, \\ x_1 - \sigma_1 x_2 + \sigma_2 x_3 - \dots + (-1)^{k+1} \sigma_{k+1} x_{k+2} &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-k-1} - \sigma_1 x_{n-k} + \dots + (-1)^{k+1} \sigma_{k+1} x_n &= 0 . \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

187. Espaces tangents et osculateurs à une courbe rationnelle normale. — La limite d'un espace S_k, $(k+1)$-sécant de C, lorsque k des points d'appui tendent simultanément vers le dernier, supposé fixe, est appelé espace S_k, k-osculateur à la courbe C en ce dernier point (appelé point de contact).

Les équations de l'espace S_k, k-osculateur à la courbe C au point de paramètre u_0, sont

$$x_0 - (k+1) u_0 x_1 + \binom{k+1}{2} u_0^2 x_2 - \dots + (-1)^{k+1} u_0^{k+1} x_{k+1} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{n-k-1} - (k+1) u_0 x_{n-k} + \dots + (-1)^{k+1} u_0^{k+1} x_n = 0 .$$

Pour $k=1$, les équations (5) représentent la tangente à C au point u_0 ; pour $k=2$, le plan osculateur, ... ; pour $k=n-1$, l'hyperplan $(n-1)$-osculateur ou plus simplement l'hyperplan osculateur.

Les espaces linéaires passant par la tangente au point u_0 sont dits tangents à la courbe C en ce point. Plus généralement, les espaces linéaires passant par un S_k, k-osculateur au point u_0, sont dits k-osculateurs en ce point à la courbe C.

188. Réciprocité involutive associée à une courbe rationnelle normale. — L'équation de l'hyperplan osculateur à la courbe C au point u_0 est

$$x_0 - \binom{n}{1} u_0 x_1 + \binom{n}{2} u_0^2 x_2 - \dots + (-1)^i \binom{n}{i} u_0^i x_i + \dots$$
$$+ (-1)^n \binom{n}{n} u_0^n x_n = 0 . \qquad (1)$$

Cette équation étant de degré n en u_0, *pour un point de l'espace* S_n *passant* n *hyperplans osculateurs à la courbe* C.

Si nous désignons par y le point de C de paramètre u_0, l'équation (1) s'écrit

$$x_0 y_n - \binom{n}{1} x_1 y_{n-1} + \binom{n}{2} x_2 y_{n-2} - \dots$$
$$+ (-1)^i \binom{n}{i} x_i y_{n-i} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} x_n y_0 = 0 . \quad (2)$$

L'équation (2) est symétrique en x, y et représente soit l'hyperplan osculateur à la courbe au point y de celle-ci, soit l'hyperplan passant par les points de contact des n hyperplans osculateurs à la courbe C menés par un point y n'appartenant pas à la courbe.

Considérons l'équation (2) indépendamment de la courbe C. Elle représente une réciprocité involutive Θ. Les coefficients de $x_i y_{n-i}$, $x_{n-i} y_i$ sont respectivement

$$(-1)^i \binom{n}{i}, \qquad (-1)^{n-i} \binom{n}{n-i} = (-1)^{n-i} \binom{n}{i} .$$

Le rapport de ces coefficients est $(-1)^n$, par conséquent si n est pair, Θ est une polarité, si n est impair, c'est un système-nul.

Les points d'une courbe rationnelle normale d'ordre n *et les hyperplans osculateurs à cette courbe en ces points se correspondent dans une réciprocité qui est une polarité si* n *est pair, un système-nul si* n *est impair.*

Si n est impair, l'hyperplan déterminé par les points de contact des n hyperplans osculateurs à la courbe passant par un point y n'appartenant pas à celle-ci, passe par le point y. C'est la généralisation du théorème de Chasles sur les cubiques gauches.

189. Hyperquadriques contenant une courbe rationnelle normale. — Des équations réduites d'une courbe rationnelle C, d'ordre n, de S_n, on déduit qu'elle peut être représentée par les équations

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \end{matrix} \right\| = 0 .$$

On en conclut que la courbe C est l'intersection complète de $\binom{n}{2}$ hyperquadriques dont les équations s'obtiennent en égalant à zéro les déterminants tirés de la matrice précédente. Ces hyperquadriques sont linéairement indépendantes.

Les hyperquadriques S_n dépendent de $\frac{1}{2}n(n+3)$ paramètres ; celles qui passent par $2n+1$ points de C contiennent cette courbe et forment un système linéaire de dimension $\frac{1}{2}n(n-1)-1$. Ce système linéaire est donc complètement déterminé par les hyperquadriques obtenues en partant des équations (1).

190. Générations de la courbe rationnelle normale. — Dans S_n, les équations

$$\left\| \begin{matrix} a_{1x} & a_{2x} & \dots & a_{nx} \\ b_{1x} & b_{2x} & \dots & b_{nx} \end{matrix} \right\| = 0 . \tag{1}$$

proviennent de l'élimination de u entre les équations.

$$a_{1x} - nb_{1x} = 0 , \quad a_{2x} - ub_{2x} = 0 , \dots , a_{nx} - ub_{nx} = 0 . \tag{2}$$

Nous supposons ces équations linéairement indépendantes. En les résolvant par rapport aux x, on obtient les équations paramétriques d'une courbe rationnelle normale C. Les équations (1) représentent donc une courbe normale et toute courbe rationnelle normale peut être représentée (d'une infinité de manières) par des équations du type (1).

Les équations (2) montrent que *toute courbe rationnelle normale d'ordre* n *est le lieu des points communs aux hyperplans homologues de* n *faisceaux deux à deux projectifs.*

Considérons les équations

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 a_{1x} + \lambda_2 a_{2x} + \dots + \lambda_n a_{nx} = 0 \\ \lambda_1 b_{1x} + \lambda_2 b_{2x} + \dots + \lambda_n b_{nx} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

La première de ces équations représente une gerbe G_{n-1} de sommet A et la seconde, une gerbe G_{n-1} de sommet B. Les hyperplans de ces deux gerbes sont liés par une homographie H.

Les points A et B appartiennent à la courbe C d'équations (1) et en utilisant les équations (2), on voit que les équations (3) représentent un espace S_{n-2} : $(n-1)$-sécant de la courbe.

Les équations (1) expriment la condition pour que deux droites passant par A et B, homologues dans l'homographie H, se rencontrent.

Une courbe rationnelle normale d'ordre n *est le lieu des points communs aux droites homologues de deux gerbes homographiques d'hyperplans.*

S'il existe un espace linéaire S_ν $(\nu < n)$ passant par A, B, uni pour l'homographie H, la courbe C dégénère et comprend comme partie la courbe rationnelle normale d'ordre ν, engendrée dans S_ν par l'homographie déterminée par H dans cet espace entre les gerbes de sommets A, B.

Pour que la courbe C soit irréductible, il faut donc que les gerbes de sommet A, B n'aient aucun élément commun uni.

191. Courbes rationnelles quelconques. — Soit C une courbe rationnelle d'ordre n de S_r $(r < n)$; elle est la projection d'une courbe rationnelle normale C′ d'ordre n de S_n, à partir d'un espace S_{n-r-1} ne rencontrant pas C′.

Considérons un espace S_k, $(k+1)$-sécant de C′, rencontrant S_{n-r-1} suivant un espace S_ν. Ces espaces S_k, S_{n-r-1} appartiennent à un espace $S_{n+k-r-\nu-1}$, qui rencontre S_r suivant un espace $S_{k-\nu-1}$ s'appuyant sur C en $k+1$ points.

Si $\nu = k-1$, l'espace $S_{k-\nu-1}$ se réduit à un point P, multiple d'ordre $k+1$ pour la courbe C.

Supposons que la courbe C′ ait pour équations

$$x_0 : x_1 : \dots x_n = u^n : u^{n-1} : \dots : 1$$

et soient $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n-r)}$, $n-r$ points déterminant S_{n-r-1}. Un espace S_k, $(k+1)$-sécant de C′, a pour équations

$$\lambda_0 x_i + \lambda_1 x_{i+1} + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+i+1} = 0\,,$$
$$(i = 0, 1, \dots, n-k-1)\,.$$

Posons, dans ces équations,

$$x = m_1 y^{(1)} + m_2 y^{(2)} + \dots + m_{n-r} y^{(n-r)}\,.$$

Nous obtenons les équations, dans S_{n-r-1}, en coordonnées m, de l'espace S_ν commun à S_{n-r-1} et à S_k. Pour que cette intersection soit un S_{k-1}, ces équations doivent se réduire à $n-r-k+2$ équations linéairement indépendantes. Cela donne $r(k-2)$ relations entres les λ. Pour que, quel que soit l'espace S_{n-r-1} choisi, le problème admette toujours des solutions, on doit avoir $r(k-2) \leqslant k-1$. Cela exige $r=2$, $k=3$. On en conclut que :

Une courbe plane rationnelle d'ordre n > 2 *possède toujours des points multiples.*

Une courbe rationnelle gauche est en général dépourvue de points multiples.

Si $\nu = k-2$, l'espace $S_{k-\nu-1}$ est une droite s'appuyant en $k+1$ points sur la courbe C. Le raisonnement précédent montre que :

Une courbe rationnelle gauche de S_3, *privée de points multiples et d'ordre* n > 4, *possède toujours des quadrisécantes.*

§ 2. *Application aux courbes rationnelles des premiers ordres*

192. Courbes rationnelles normales du quatrième ordre. — La courbe rationnelle normale du quatrième ordre appartient à S_4 et ses équations peuvent prendre la forme

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = u^4 : u^3 : u^2 : u : 1 . \qquad (1)$$

Les bisécantes de C sont données par

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0 , \qquad \lambda_0 x_1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 = 0 ,$$
$$\lambda_0 x_2 + \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 = 0 .$$

Le lieu de ces droites est l'hypersurface cubique

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (2)$$

La tangente à C au point de paramètre u_0 a pour équations

$$x_0 - 2\,u_0 x_1 + u_0^2 x_2 = 0 , \qquad x_1 - 2\,u_0 x_2 + u_0^2 x_3 = 0 ,$$
$$x_2 - 2\,u_0 x_3 + u_0^2 x_4 = 0 .$$

Le lieu de cette droite appartient à l'hypersurface (2). Elle est l'intersection des hypersurfaces

$$(x_1 x_2 - x_0 x_3)^2 - 4\,(x_1 x_3 - x_2^2)(x_0 x_3 - x_1^2) = 0 ,$$
$$(x_2 x_3 - x_1 x_4)^2 - 4\,(x_2 x_4 - x_3^2)(x_1 x_4 - x_2^2) = 0 ,$$
$$(x_3 x_4 - x_0 x_2)^2 - 4\,(x_0 x_3 - x_4^2)(x_0 x_2 - x_3^2) = 0 ,$$

C'est une surface du sixième ordre, car les hyperplans d'un faisceau découpent sur C les groupes d'une série g_4^1 dont le groupe jacobien est formé de six points. Il y a donc six tangentes à C rencontrant le plan, axe du faisceau.

Les plans osculateurs à la courbe C au point de paramètre u_0 ont pour équations

$$x_0 - 3\,u_0 x_1 + 3\,u_0^2 x_2 - u_0^3 x_3 = 0 ,$$
$$x_1 - 3\,u_0 x_2 + 3\,u_0^2 x_3 - u_0^3 x_4 = 0 ,$$

Le lieu de ces plans est une hypersurface du sixième ordre d'équation

$$\begin{gathered} 81\,(x_1^2 - x_0 x_2)(x_2^2 - x_1 x_3)(x_3^2 - x_1 x_2) \\ - 27\,(x_1^2 - x_0 x_2)(x_1 x_4 - x_2 x_3)^2 - 27\,(x_3^2 - x_2 x_4)(x_1 x_2 - x_0 x_3)^2 \\ - 18\,(x_1^2 - x_0 x_2)(x_3^2 - x_0 x_4)(x_0 x_4 - x_1 x_3) \\ + 9\,(x_0 x_4 - x_1 x_3)(x_1 x_2 - x_0 x_3)(x_1 x_4 - x_2 x_3) + (x_0 x_4 - x_2 x_3)^3 \\ = 0 . \end{gathered}$$

193. Courbes rationnelles du quatrième ordre de S_3. — Projetons la courbe C d'un point A ne lui appartenant pas sur un hyperplan S_3 ; nous obtenons une courbe C′ du quatrième ordre.

La courbe C′ possédera un point double s'il existe une bisécante de C passant par A, c'est-à-dire si le point A appartient à l'hypersurface (2), et dans ce cas seulement. Nous supposerons que A n'appartient pas à l'hypersurface (2).

Par le point A passent ∞^1 plans trisécants de C, par conséquent la courbe C′ possède ∞^1 trisécantes.

Par neuf points de C′ passe une quadrique Q qui contient la courbe et par suite ses trisécantes ; il ne peut donc exister qu'une quadrique passant par C′.

Les surfaces cubiques de S_3 sont en nombre ∞^{19} et coupent C′ en des groupes de 12 points. Les ∞^6 surfaces cubiques passant par 13 points de C′ contiennent cette courbe. Parmi ces surfaces, il y en a ∞^3 formées de la quadrique Q et d'un plan.

Une surface cubique irréductible F passant par C′ coupe Q suivant une courbe du sixième ordre formée de C′ et d'une courbe γ du second ordre. Par un point P de γ n'appartenant pas à C′ passe une trisécante t de cette courbe. Cette droite t rencontre F en quatre points et appartient à cette surface. Il en résulte que la courbe γ se compose de deux trisécantes de la courbe C′. Inversement, une surface cubique passant par deux génératrices du même mode d'une quadrique coupe encore celle-ci suivant une courbe du quatrième ordre ayant comme trisécantes les deux génératrices et par suite toutes les génératrices du même mode. Cette courbe du quatrième ordre est donc rationnelle et du même type que C′.

Par le point A passent quatre hyperplans osculateurs à C. Ces hyperplans coupent S_3 suivant quatre plans α_0, α_1, α_2, α_3 rencontrant chacun la courbe C′ en quatre points confondus. Soient respectivement A_0, A_1, A_2, A_3 les points de contact de ces plans.

Trois hyperplans osculateurs à la courbe C ne pouvant passer ni par un même plan ni par une même droite, les plans α_0, α_1, α_2, α_3 forment un tétraèdre proprement dit. Si l'on prend ce tétraèdre comme figure de référence, on peut choisir le point unitaire de telle sorte que les équations de la courbe C′ s'écrivent

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = (u - u_0)^4 : (u - u_1)^4 : (u - u_2)^4 : (u - u_3)^4 .$$

Les points A_0, A_1, A_2, A_3 ont respectivement pour paramètres u_0, u_1, u_2, u_3.

En général, il n'existe aucun plan osculateur à la courbe C passant par A. S'il en existe un, la courbe C′ possède un point d'inflexion au point correspondant.

Si le point A est l'intersection de deux plans osculateurs à la courbe C, celle-ci possède deux points d'inflexion. Prenons par exemple pour A le point O_2, intersection du plan osculateur $x_0 = x_1 = 0$ au point O_4 à C et du plan $x_3 = x_4 = 0$, osculateur au point O_0. La projection C′ de C sur l'hyperplan $x_2 = 0$ a pour équation

$$x_0 : x_1 : x_3 : x_4 = u^4 : u^3 : u : 1 .$$

Les points d'inflexion de cette courbe sont les points O_0, O_4, les tangentes d'inflexion étant respectivement $x_3 = x_4 = 0$, $x_0 = x_1 = 0$.

194. Courbe rationnelle du cinquième ordre. — Considérons, dans S_5, la courbe rationnelle normale C d'équations

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = u^5 : u^4 : u^3 : u^2 : u : 1 .$$

En projetant cette courbe d'une droite yz sur un espace S_3, on obtient une courbe gauche C′ du cinquième ordre.

Les bisécantes C forment une variété à trois dimensions qui, en général, ne rencontre pas la droite yz, donc C′ est en général dépourvue de points doubles. Il n'existe en général aucun plan trisécant de C contenant la droite yz, par conséquent la courbe C′ est en général dépourvue de point triple.

Il existe une infinité de plans trisécants de C s'appuyant en un point sur la droite yz ; ces plans, projetés de yz, donnent des trisécantes de la courbe C′.

Un S_3 tétrasécant de C a pour équations

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0 ,$$
$$\lambda_0 x_1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 x_4 + \lambda_4 x_5 = 0 .$$

Si l'on exprime que cet espace contient la droite yz, on obtient quatre équations linéaires en λ en général indépendantes et qui admettent une seule solution. Il existe donc en général un seul S_3 tétrasécant de C contenant la droite yz ; il donne une quadrisécante de C′.

Considérons deux espaces S_3 tétrasécants ; ils ont en commun une droite qui, en général, ne rencontre pas C. Projetons C de cette droite sur un espace S_3 ne la rencontrant pas ; nous obtenons une courbe C_0' du cinquième ordre possédant deux quadrisécantes. Il existe une quadrique Q passant par ces deux droites et par trois points de C_0' ; elle rencontre C_0' en 11 points et par conséquent contient cette courbe. Sur la quadrique Q, les génératrices de même ordre que les deux droites considérées sont des quadrisécantes de C_0', qui possède ainsi ∞^1 quadrisécantes.

La courbe C_0' est un cas limite de C′. Soit en effet ξ un espace S_3 tétrasécant de C. Si l'on projette C d'une droite quelconque de ξ sur un espace S_3, on obtient une courbe C′. Faisons varier cette droite d'une manière continue dans ξ en la faisant tendre vers l'intersection de cet espace avec un autre S_3 tétrasécant ; la courbe C' tend d'une manière continue vers une courbe C_0'.

Un S_3 tétrasécant de C contenant quatre plans trisécants de cette courbe, une quadrisécante d'une courbe C' ou C_0' équivaut à quatre trisécantes. Comme la surface des quadrisécantes de C_0' est une quadrique, la surface des trisécantes de C' est du huitième ordre (et passe quatre fois par l'unique quadrisécante de la courbe). Nous allons vérifier directement ce résultat.

Un plan trisécant de C a pour équations

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0\,, \quad \lambda_0 x_1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 x_4 = 0\,,$$
$$\lambda_0 x_2 + \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 + \lambda_3 x_5 = 0\,.$$

Considérons un espace linéaire σ à trois dimensions dont les coordonnées ponctuelles sont λ_0, λ_1, λ_2, λ_3. Il y a une correspondance biunivoque entre les points L de σ et les plans trisécants α de C.

Lorsque le point L décrit une droite

$$a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 = 0, \quad b_0\lambda_0 + b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 = 0,$$

le plan α homologue décrit la variété d'équations

$$\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{Vmatrix} = 0\,.$$

C'est une variété V_3^3 d'ordre trois, à trois dimensions.

La condition pour qu'un plan α s'appuie en un point sur la droite yz s'exprime par les conditions

$$\begin{Vmatrix} \lambda_0 y_0+\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2+\lambda_3 y_3 & \lambda_0 y_1+\lambda_1 y_2+\lambda_2 y_3+\lambda_3 y_4 & \lambda_0 y_2+\lambda_1 y_3+\lambda_2 y_4+\lambda_3 y_5 \\ \lambda_0 z_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_3 z_3 & \lambda_0 z_1+\lambda_1 z_2+\lambda_2 z_3+\lambda_3 z_4 & \lambda_0 z_2+\lambda_1 z_3+\lambda_2 z_4+\lambda_3 z_5 \end{Vmatrix} = 0\,,$$

qui, dans l'espace σ, représentent une cubique gauche. Ces plans engendrent donc une variété à trois dimensions V_3^9, d'ordre neuf. Cette variété passe simplement par la droite yz. En projetant cette variété de cette droite sur l'espace S_3 de C', on obtient donc bien une surface du huitième ordre. La courbe C' est triple pour cette surface, car en projetant C' d'un de ses points sur un plan, on obtient une quartique rationnelle, ayant donc trois points doubles.

195. Courbe rationnelle du sixième ordre. — Considérons la courbe rationnelle C du sixième ordre, normale, de S_6. Elle a pour équations

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_6 = u^6 : u^5 : \ldots : 1 .$$

La projection de cette courbe, à partir d'un plan α qui ne la rencontre pas, sur un espace S_3, est une sextique rationnelle C'.

La courbe C' est en général dépourvue de points multiples, car en général il n'y a pas de bisécante de C rencontrant α en un point, ni de plan trisécant coupant α suivant une droite, ni d'espace S_3 tétrasécant de C contenant α.

Une tétrasécante de C' provient d'un espace S_3 tétrasécant de C coupant α suivant une droite. Nous allons rechercher le nombre de ces tétrasécantes.

Un espace S_3 tétrasécant de C a pour équations

$$\begin{aligned} \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0 , \\ \lambda_0 x_1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 x_4 + \lambda_4 x_5 = 0 , \\ \lambda_0 x_2 + \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 + \lambda_3 x_5 + \lambda_4 x_6 = 0 . \end{aligned} \tag{1}$$

Supposons que le plan α soit déterminé par trois points $y^{(0)}$, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$. En posant

$$x = \mu_0 y^{(0)} + \mu_1 y^{(1)} + \mu_2 y^{(2)}$$

dans les équations (1), nous obtenons, en coordonnées μ_0, μ_1, μ_3, les équations de trois droites qui, pour notre objet, doivent coïncider.

En posant

$$\varphi_{ik} = \lambda_0 y_i^{(k)} + \ldots + \lambda_4 y_{i+4}^{(k)} , \quad (i , k = 0 , 1 , 2) ,$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} & \varphi_{02} \\ \varphi_{10} & \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{20} & \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix} \tag{2}$$

doit donc être de caractéristique un.

Interprétons les λ comme coordonnées des points d'un espace S_4. En égalant à zéro les déterminants tirés des deux premières lignes de (2), on obtient les équations d'une surface V_2^3. L'hyperquadrique

$$\varphi_{10}\varphi_{21} - \varphi_{11}\varphi_{20} = 0$$

coupe V_2^3 suivant une courbe V_1^6. Cette hyperquadrique contient le plan $\varphi_{10} = 0$, $\varphi_{11} = 0$ qui coupe V_2^3 suivant la droite $\varphi_{10} = 0$, $\varphi_{11} = 0$, $\varphi_{12} = 0$, donc la courbe V_1^6 se compose de cette droite et d'une courbe V_1^5. Observons que la droite en question n'appartient pas à l'hyperquadrique

$$\varphi_{00}\varphi_{21} - \varphi_{01}\varphi_{20} = 0 ;$$

elle ne donne donc pas de solution annulant tous les mineurs de (2).

Le plan $\varphi_{11}=0$, $\varphi_{12}=0$ coupe V_1^5 suivant deux points

$$\varphi_{10}=0, \quad \varphi_{11}=0, \quad \varphi_{12}=0, \qquad \varphi_{00}\varphi_{21}-\varphi_{01}\varphi_{20}=0, \tag{3}$$

et le plan $\varphi_{11}=\varphi_{21}=0$ coupe de même V_1^5 suivant deux points

$$\varphi_{01}=0, \quad \varphi_{11}=0, \quad \varphi_{21}=0, \quad \varphi_{00}\varphi_{12}-\varphi_{02}\varphi_{10}=0. \tag{4}$$

L'hyperquadrique

$$\varphi_{11}\varphi_{22}-\varphi_{12}\varphi_{21}=0$$

coupe V_4^5 en dix points parmi lesquels se trouvent les points (3) et (4) qui n'annulent pas tous les mineurs du déterminant (2). Il reste donc six points annulant tous ces mineurs.

La sextique gauche rationnelle de S_3 *possède six tétrasécantes.*

Pour que la courbe C' possède une pentasécante, il faut qu'il existe un espace S_4 pentasécant de C contenant le plan α, ce qui n'a pas lieu en général. Si l'on choisit le plan α dans un espace S_4 pentasécant, la courbe C' possède une pentasécante (comptant pour cinq tétrasécantes) et une tétrasécante.

Deux espaces S_4 pentasécants se coupent suivant un plan. Si l'on projette la courbe C de ce plan sur un espace S_3, on obtient une courbe C' possédant deux pentasécantes. Il est facile de voir que C' appartient alors à une quadrique Q dont les génératrices d'un mode sont des pentasécantes de la courbe.

§ 3. *Les involutions unicursales*

196. Homographies et involutions. — Considérons une relation

$$F(x_0^{(1)}, \ x_1^{(1)}; \ x_0^{(2)}, \ x_1^{(2)}; \ldots; x_0^{(n)}, \ x_1^{(n)})=0, \tag{1}$$

linéaire et homogène séparément par rapport à chacun des couples de variables $x_0^{(1)}$, $x_1^{(1)}$; $x_0^{(2)}$, $x_1^{(2)}$; ... ; $x_0^{(n)}$, $x_1^{(n)}$. Interprétons $x_0^{(i)}$, $x_1^{(i)}$ comme coordonnées homogènes des points $x^{(i)}$ d'une ponctuelle s_i, les n ponctuelles s_1, s_2, ..., s_n étant distinctes ou non. Si nous prenons un point sur $n-1$ de ces ponctuelles, l'équation (1) détermine un point en général unique sur la ponctuelle restante. Cette relation entre les n ponctuelles est appelée *homographie d'ordre* n *et de rang* n — 1 ; on la représente par H_n^{n-1}.

Plus généralement, considérons p relations

$$F_1=0, \quad F_2=0, \quad \ldots, \quad F_p=0, \tag{2}$$

analogues à la relation (1). Si l'on choisit un point sur $n-p$ des ponctuelles $s_1, s_2, \ldots, s_n$, les équations (2) déterminent en général un point sur chacune des p ponctuelles restantes. Cette relation entre les n ponctuelles est appelée *homographie d'ordre* n *et de rang* n — p ; on la représente par H_n^{n-p}.

Supposons les n ponctuelles superposées et soit s le rapport commun. Revenons à la relation (1) et supposons qu'elle soit symétrique par rapport à ses n séries de variables. Si nous prenons sur s, $n-1$ points appartenant à $n-1$ quelconques des ponctuelles $s_1, s_2, \ldots, s_n$, l'équation (1) leur fera correspondre un point qui reste fixe lorsque l'on change les ponctuelles choisies. On aura donc sur s, ∞^{n-1} groupes de n points tels qu'un groupe est en général déterminé par $n-1$ de ses points. On obtient ainsi ce que l'on appelle une *involution d'ordre* n *et de rang* n — 1 ; on la représente par I_n^{n-1}. On donne aussi le nom d'involution I_n^{n-1} non seulement à la correspondance représentée par l'équation (1) supposée symétrique, mais encore à l'ensemble des ∞^{n-1} groupes de n points.

Posons, dans l'équation (1), $u_i = x_0^{(i)} : x_1^{(i)}$ et représentons par P_k la somme des produits k à k des variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$. L'équation de l'involution s'écrit

$$a_0 P_n + a_1 P_{n-1} + \ldots + a_n P_0 = 0 . \tag{3}$$

Observons que l'ensemble des groupes de n points de s formés d'un point fixe et de $n-1$ points quelconques constitue une involution I_n^{n-1}. Cette involution particulière est une involution dégénérée ; elle a pour équation

$$(u_1 - \alpha)(u_2 - \alpha) \ldots (u_n - \alpha) \equiv P_n - \alpha P_{n-1} + \ldots + (-1)^n \alpha^n P_0 = 0 \tag{4}$$

L'ensemble des groupes de n points communs à p involutions I_n^{n-1} données sur une ponctuelle s est appelée *involution d'ordre* n *et de rang* n — p ; on la représente par I_n^{n-p}. Elle est constituée par ∞^{n-p} groupes de n points tels que $n-p$ points de s appartiennent en général à un seul groupe de l'involution.

Le concept d'involution ne diffère pas de celui de série linéaire de groupes de points sur une ponctuelle (I, chap. Ier).

197. Représentation d'une involution d'ordre n et de rang $n-1$. — A l'involution I_n^{n-1} représentée par l'équation (3), faisons correspondre le point A de coordonnées $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de S_n. Nous l'appellerons *le point principal* de l'involution.

Les coordonnées du point principal d'une involution dégénérée (4) satisfont aux équations

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \ldots = \frac{a_{n-1}}{a_n} .$$

Le lieu de ce point, lorsque l'involution dégénérée varie, c'est-à-dire lorsque α varie, est la courbe rationnelle normale de S_n d'équations

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_n = 1 : -u : \ldots (-1)^n u^n.$$

Considérons un hyperplan ξ passant par le point principal de l'involution (3). Si nous désignons par $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les paramètres des n points d'intersection de ξ avec C, nous aurons

$$\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n = P_n : P_{n-1} : \ldots : P_0 .$$

En exprimant que l'hyperplan ξ passe par A, on a

$$a_0 P_n + a_1 P_{n-1} + \ldots + a_n P_0 = 0 ,$$

c'est-à-dire précisément l'équation (3). Donc *les hyperplans passant par le point principal d'une involution découpent, sur la courbe rationnelle* C, *les groupes de cette involution.*

198. Représentations d'une involution d'ordre n et de rang $n-p$. — Une involution I_n^{n-p} est l'ensemble des groupes communs à p involutions I_n^{n-1}. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_p$ les points principaux de ces involutions ; ils déterminent un espace S_{p-1} appelé *espace principal de* I_n^{n-p}. *Les hyperplans passant par l'espace principal* S_{p-1} *d'une involution* I_n^{n-p}, *découpent sur la courbe rationnelle normale* C *les groupes de cette involution.*

En général, les groupes d'une involution I_n^{n-p} n'ont pas de points fixes en commun et l'espace principal S_{p-1} ne rencontre pas la courbe C. Projetons la courbe C de l'espace S_{p-1} sur un espace S_{n-p} ne rencontrant pas S_{p-1}, à la courbe C correspond dans S_{n-p} une courbe C' d'ordre n, rationnelle.

Les hyperplans d'un espace S_{n-p} *découpent, sur une courbe rationnelle d'ordre* n *de cet espace, les groupes d'une involution* I_n^{n-p}.

199. Représentation analytique d'une involution. — Considérons une involution I_n^{n-p} ; son espace principal S_{p-1} dans S_n est l'intersection de $n-p+1$ hyperplans $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n-p)}$. Tout hyperplan passant par S_{p-1} a une équation de la forme

$$\lambda_0 \xi_x^{(0)} + \lambda_1 \xi_x^{(1)} + \ldots + \lambda_{n-p} \xi_x^{(n-p)} = 0 .$$

Représentons par $\varphi_i(u) = 0$ l'équation de degré n donnant les paramètres des points d'intersection de la courbe C avec l'hyperplan $\xi^{(i)}$. L'équation précédente donne

$$\lambda_0 \varphi_0 (u) + \lambda_1 \varphi_1 (u) + \ldots + \lambda_{n-p} \varphi_{n-p} (u) = 0 .$$

Cette équation représente, lorsque $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-p}$ varient, tous les groupes de l'involution I_n^{n-p}, que u soit interprété comme paramètre d'un point de la courbe C ou comme abscisse d'un point d'une ponctuelle s.

Considérons en particulier une involution I_n^{n-1}. Par le point principal A passent n hyperplans osculateurs à la courbe C ; soient α_1, α_2, ..., α_n les paramètres des points de contact. L'involution peut être représentée par l'équation

$$\lambda_1 (u - \alpha_1)^n + \lambda_2 (u - \alpha_2)^n + \ldots + \lambda_n (u - \alpha_n)^n = 0 .$$

Observons que α_1, α_2, ..., α_n sont les paramètres des points qui, comptés n fois, forment des groupes de l'involution. Si n est impair, ces n points forment aussi un groupe de l'involution.

200. Groupes neutres. — Un groupe de q points est appelé *groupe neutre* d'une involution I_n^{n-p} s'il impose moins de q conditions aux groupes de l'involution qui doivent contenir les q points qui le composent.

Représentons I_n^{n-p} sur la courbe normale C de S_n. Un groupe de q points de C détermine un espace S_{q-1}. Pour que ce groupe soit neutre, il faut et il suffit évidemment que cet espace S_{q-1} s'appuie sur l'espace principal S_{p-1} de l'involution.

Si nous représentons I_n^{n-p} sur une courbe rationnelle C' de S_{n-p}, un groupe neutre de q points déterminera un espace de dimension inférieure à $q-1$.

La recherche des groupes neutres coïncide donc avec celle des espaces plurisécants des courbes rationnelles.

Ainsi, une involution I_6^3 possède en général six groupes neutres de quatre points, correspondant aux six quadrisécantes de la courbe rationnelle du sixième ordre de S_3.

201. Remarques. — Considérons, sur une ponctuelle, s, les groupes de n points représentés par

$$\lambda_0 \varphi_0 (u) + \lambda_1 \varphi_1 (u) + \ldots + \lambda_r \varphi_r (u) = 0 , \qquad (1)$$

où $\varphi_0(u)$, $\varphi_1(u)$, ..., $\varphi_r(u)$ sont des polynomes de degré n en u, linéairement indépendants. Considérons d'autre part la courbe rationnelle C de S_r, d'équation

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_r = \varphi_0(u) : \varphi_1(u) : \ldots : \varphi_r(u) .$$

A un point de la droite s correspond un point de la courbe C et réciproquement. A un groupe de n points de l'involution I_n^r représentée par (1) correspondent les n points de C situés dans un hyperplan. On peut donc dire qu'à un groupe de I_n^r correspond un hyperplan de S_r et réciproquement. Aux groupes d'une involution I_n^{r-p} contenue dans I_n^r correspondent dans S_r les hyperplans passant par un espace S_{p-1}. Il existe une projectivité entre les groupes de I_n^r et les hyperplans de S_r.

Partons maintenant de l'involution I_n^r donnée par l'équation (1) et rapportons projectivement les groupes de cette involution aux hyperplans d'un espace S_r, c'est-à-dire établissons une projectivité entre les groupes de cette involution et les hyperplans de cet espace. Aux groupes d'une involution I_n^{r-1} appartenant à I_n^r, correspondent les hyperplans passant par un point. En particulier, aux groupes de I_n^r contenant un point fixe α, correspondent les hyperplans passant par un point A. Lorsque α varie, A décrit une courbe rationnelle C. Cette courbe est d'ordre n, car un hyperplan la rencontre en n points. Par conséquent :

En rapportant projectivement les groupes d'une involution I_n^r *donnée sur une ponctuelle* s *aux hyperplans d'un espace linéaire* S_r, *aux points de* s *correspondent les points d'une courbe rationnelle* C *d'ordre* n. *Les sections hyperplanes de* C *correspondent aux groupes de* I_n^r.

On suppose implicitement que les groupes de I_n^r passant par un point de s ne passent pas en conséquence par d'autres points de s.

On retrouve, par ce procédé, la représentation étudiée plus haut [1].

Opérons sur s l'homographie

$$u = \frac{av + b}{cv + d}, \quad (ad - bc \neq 0),$$

et soit

$$\lambda_0 \psi_0 (v) + \lambda_1 \psi_1 (v) + \ldots + \lambda_r \psi_r (v) = 0 \tag{2}$$

la transformée de l'équation (1). L'équation (2) représente une nouvelle involution I_n^r. Si on représente cette seconde involution sur une courbe C' d'ordre n d'un espace S_r', il est clair que les courbes C, C' seront projectivement identiques (c'est-à-dire que l'on peut passer de l'une à l'autre par une homographie). Les involutions (1) et (2) sont dites projectivement identiques.

202. Applications aux courbes rationnelles du quatrième ordre. — Une involution I_4^3 est complètement déterminée, sur une ponctuelle s, par ses quatre points quadruples et son équation peut s'écrire

$$\lambda_0 (u - \alpha_0)^4 + \lambda_1 (u - \alpha_1)^4 + \lambda_2 (u - \alpha_2)^4 + \lambda_3 (u - \alpha_3)^4 = 0 .$$

[1] Cette représentation a été étudiée simultanément, mais d'une manière indépendante, par M. G. Castelnuovo et F. Deruyts. Voir : G. Castelnuovo, *Studio dell' involuzione generale sulle curve razionali* (*Atti Istituto Veneto*, 1886, s. 6, t. IV); — F. Deruyts, *Mémoire sur la théorie de l'involution et de l'homographie unicursale* (*Mémoires Soc. Sc. de Liège*, 1890).

Voir aussi les notices que nous avons consacrées à C. Le Paige et à F. Deruyts dans l'*Annuaire de l'Académie de Belgique*, 1938 et 1939.

Pour que deux involutions I_4^3 soient projectivement identiques, il faut donc et il suffit que les deux quaternes de leurs points quadruples soient projectifs, c'est-à-dire qu'ils aient même rapport anharmonique.

En rapportant projectivement les groupes d'une involution I_4^3 aux plans d'un espace S_3, il correspond à s une courbe rationnelle du quatrième ordre C et aux points quadruples de I_4^3, les points de contact des quatre plans 4-osculateurs à C. Ces points et ces plans sont appelés *stationnaires*.

Pour que deux courbes rationnelles du quatrième ordre de S_3 *soient projectivement identiques, il faut et il suffit que les rapports anharmoniques de leurs quaternes de points stationnaires soient égaux.*

Ce rapport anharmonique est *l'invariant projectif* de la courbe rationnelle du quatrième ordre de S_3.

CHAPITRE IX

LES SURFACES RATIONNELLES HYPERSPATIALES

§ 1. *Propriétés des surfaces rationnelles*

203. Préliminaires. — Une surface rationnelle F est l'ensemble des points dont les coordonnées sont données par les équations

$$\rho x_i = \varphi_i(u_0, u_1, u_2)\ , \qquad (i = 0, 1, \ldots, r)\ ,$$

$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ étant des formes de même degré m, sans facteur commun.

Interprétons u_0, u_1, u_2 comme coordonnées d'un point u d'un plan σ. A tout point u de σ correspond un point x de F en général bien déterminé, mais chaque point x de F peut provenir d'un certain nombre de points, ν, du plan σ. M. G. Castelnuovo a démontré que si $\nu > 1$, on peut substituer aux variables u de nouvelles variables v_0, v_1, v_2 telles qu'un point x de F provienne en général d'un seul système de valeurs des v (1). C'est l'analogue du théorème de Lüroth sur les courbes rationnelles (I, n° 10). Cependant, la démonstration du théorème de M. Castelnuovo est basée sur des concepts différents de celle du théorème de Lüroth et ne peut être exposée actuellement. La question sera reprise lors de l'étude de la géométrie sur une surface algébrique.

Dans ce chapitre, nous supposerons en général $\nu = 1$.

204. Relation avec les systèmes linéaires de courbes planes. — Un hyperplan ξ coupe F suivant une courbe C dont les points correspondent aux points u satisfaisant à l'équation

$$\xi_0 \varphi_0 (u_0, u_1, u_2) + \xi_1 \varphi_1 + \ldots + \xi_r \varphi_r = 0. \tag{1}$$

Dans le plan σ, cette équation représente une courbe Γ qui, lorsque ξ varie, engendre un système linéaire $|\Gamma|$.

Si nous supposons que la surface F n'appartient pas à un

(1) Castelnuovo, *Sulla razionalità delle involuzioni piane* (*Mathematische Annalen*, 1894, t. X, LIV).

espace ayant moins de r dimensions, les formes $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ sont linéairement indépendantes et le système $|\Gamma|$ a la dimension r.

Le système linéaire est irréductible. En effet, il ne peut avoir une partie fixe par hypothèse, donc s'il était réductible, il serait composé au moyen d'un faisceau $|\gamma|$. Mais alors, aux points u d'une courbe γ correspondrait un même point x et la surface F se réduirait à une courbe, ce qui est absurde.

Si le système $|\Gamma|$ appartenait à une involution I_ν d'ordre ν, aux points d'un groupe de cette involution correspondrait un même point x. Nous aurions donc une correspondance $(1, \nu)$ entre la surface F et le plan σ. Comme nous l'avons fait observer, nous supposerons $\nu = 1$, c'est-à-dire le système $|\Gamma|$ simple.

A un hyperplan ξ de S_r correspond une courbe Γ et inversement. De plus, aux hyperplans d'une gerbe G_p correspond un système linéaire de dimension p compris dans $|\Gamma|$. Il existe donc une projectivité entre les hyperplans de S_r et les courbes du système $|\Gamma|$.

Inversement, partons du système, $|\Gamma|$, simple et irréductible. Etablissons une projectivité entre les courbes de $|\Gamma|$ et les hyperplans d'un espace S_r. Aux courbes Γ passant par un point u correspondent les hyperplans passant par un point x. Lorsque le point u décrit le plan σ, le point x décrit une surface F représentée biunivoquement sur le plan σ.

Analytiquement, cela revient à considérer le lieu d'un point x tel que

$$\rho x_i = a_{i0}\varphi_0 + a_{i1}\varphi_1 + \ldots + a_{ir}\varphi_r, \quad (i = 0, 1, \ldots, r),$$
$$|a_{ik}| \neq 0 .$$

La surface représentée par ces équations est rationnelle ; elle peut être ramenée par une homographie à la surface F représentée par les équations

$$\rho x_i = \varphi_i(u_0, u_1, u_2), \quad (i = 0, 1, \ldots, r) .$$

205. Ordre d'une surface rationnelle. — L'ordre de la surface F est égal au nombre de ses points de rencontre avec un espace ρ à $r-2$ dimensions. Aux hyperplans passant par cet espace correspondent dans σ des courbes Γ formant un faisceau. Aux points communs à F et à ρ, correspondent les points communs aux courbes Γ de ce faisceau, en dehors des points-base, car les points considérés sur F sont variables avec ρ.

L'ordre de F *est donc égal au degré du système* $|\Gamma|$.

Si le système $|\Gamma|$ possède τ points-base $O_1, O_2, \ldots, O_\tau$ respectivement multiples d'ordres $s_1, s_2, \ldots, s_\tau$, l'ordre de F est donc

$$n = m^2 - \Sigma s^2 ,$$

m étant l'ordre des courbes Γ.

206. Projections d'une surface rationnelle. — Considérons, dans S_r, un espace S_{r-k-1} ($k \geqslant 3$) et supposons que les espaces S_{r-k} passent par S_{r-k-1} et par un point de la surface F ne rencontrant plus en général cette surface en un second point. La projection de la surface F à partir de S_{r-k-1} sur un espace S_k est une surface F′, lieu des points de rencontre S_k avec les espaces S_{r-k} passant par S_{r-k-1} et par les différents points de la surface F. Les sections hyperplanes de F′ dans S_k sont les projections, à partir de S_{r-k-1}, des sections de F par les hyperplans de S_r contenant S_{r-k-1}. Il en résulte que les courbes Γ' qui correspondent dans σ aux sections hyperplanes de F′ appartiennent au système $|\Gamma|$.

Deux cas peuvent se présenter :

1° Le système $|\Gamma'|$ n'a pas de composante fixe. Si n' est l'ordre de F′, le système $|\Gamma'|$ est de degré n' et les courbes Γ' sont les courbes Γ qui passent par $n-n'$ points du plan. L'espace S_{r-k-1} coupe F en $n-n'$ points, qui correspondent aux points-base de $|\Gamma'|$ distincts de ceux de $|\Gamma|$;

2° Le système $|\Gamma'|$ a une composante fixe $\psi(u_0, u_1, u_2)=0$. Son équation s'écrit

$$\psi(\mu_0\psi_0+\mu_1\psi_1+\ldots+\mu_k\psi_k)=0\,,$$

où $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_k$ sont des formes de même degré, linéairement indépendantes, sans facteur commun. Les équations de la surface F′ sont

$$\rho x_i=\psi_i(u_0, u_1, u_2)\,, \qquad (i=0, 1, \ldots, k)\,.$$

Si la courbe $\psi=0$ n'est pas fondamentale pour le système $|\Gamma|$, il lui correspond sur F une courbe appartenant à l'espace S_{r-k-1}.

Si la courbe $\psi=0$ est fondamentale pour $|\Gamma|$, il lui correspond sur F un point en général multiple pour la surface et ce point appartient à l'espace S_{r-k-1}.

207. Surfaces rationnelles normales. — Une surface rationnelle F de S_r est dite *normale* si elle n'est pas la projection d'une surface du même ordre, appartenant à un espace de dimension supérieure à r.

Soit $|\Gamma|$ le système linéaire simple de σ qui représente les sections hyperplanes de F. Pour abréger, nous dirons que $|\Gamma|$ est associé à F et que F représente $|\Gamma|$. Le système $|\Gamma|$ associé à une surface normale est nécessairement un système complet.

208. Théorème. — *Les surfaces représentant deux systèmes linéaires birationnellement identiques, sont projectivement identiques.*

Soit dans des plans σ, σ', deux systèmes linéaires $|\Gamma|$, $|\Gamma'|$ de dimension r, birationnellement identiques. Soient F, F′ les surfaces qui les représentent dans S_r, S_r'. Nous supposerons que $|\Gamma|$ et par conséquent $|\Gamma'|$ sont simples.

Observons, que dans la transformation birationnelle entre σ, σ' qui fait correspondre $|\Gamma'|$ à $|\Gamma|$, à un système linéaire partiel compris dans $|\Gamma|$ correspond dans σ' un système linéaire de même dimension compris dans $|\Gamma'|$. En d'autres termes, il existe une projectivité entre les éléments des systèmes $|\Gamma|$, $|\Gamma'|$.

A un hyperplan ξ de S_r correspond une courbe Γ ; à celle-ci correspond une courbe Γ' et à cette dernière un hyperplan ξ' de S_r'. Si l'hyperplan de S_r décrit une gerbe G_k, l'hyperplan correspondant de S_r' décrit une gerbe G_k'. Il y a donc une projectivité entre les hyperplans de S_r et de S_r', c'est-à-dire une homographie H entre ces espaces.

Soit P un point de F. Aux hyperplans de S_r passant par P correspondent dans σ les courbes Γ passant par un point P_1. A ces courbes correspondent les courbes Γ' de σ' passant par le point P_1' homologue de P_1 dans la transformation liant σ, σ'. Aux courbes Γ' passant par P_1' correspondent les hyperplans de S_r' passant par un point P' de F'. Or, les points P, P' sont homologues dans H, donc le théorème est démontré.

Remarque. — La démonstration s'étend immédiatement au cas où $|\Gamma|$ appartient à une involution I_ν ; alors $|\Gamma'|$ appartient à une involution I_ν' et il suffit de remplacer, dans le raisonnement précédent, les points P_1, P_1' par des groupes homologues des involutions I_ν, I_ν'.

209. Propriétés de la surface représentant un système linéaire simple. — Soient, dans le plan σ, $|\Gamma|$ un système linéaire simple, de degré n et de dimension r, F la surface de S_r qui le représente. Nous pouvons remplacer $|\Gamma|$ par son homologue dans une transformation birationnelle du plan et par conséquent supposer que $|\Gamma|$ ne possède que des points-base ordinaires, à tangentes variables.

Supposons que $|\Gamma|$ possède τ points-base $O_1, O_2, \ldots, O_\tau$ multiples d'ordre $s_1, s_2, \ldots, s_\tau$, à tangentes variables.

Soit p une droite de σ passant par O_1. Aux ∞^{r-1} courbes Γ touchant p en O_1 correspondent dans S_r les hyperplans passant par un point P de F. Lorsque la droite p tourne autour de O_1, le point P décrit une courbe rationnelle D_1, qui représente le domaine du premier ordre du point O_1. Comme une courbe Γ contient s_1 points infiniment voisins de O_1, la courbe D_1 est d'ordre s_1.

De même, aux domaines des points $O_2, O_3, \ldots, O_\tau$ correspondent sur F des courbes rationnelles $D_2, D_3, \ldots, D_\tau$, respectivement d'ordres $s_2, s_3, \ldots, s_\tau$.

Les courbes $D_1, D_2, \ldots, D_\tau$ ne se rencontrent pas deux à deux.

Nous voyons donc qu'*aux points infiniment voisins d'un* *point-base multiple d'ordre* s, *à tangentes variables, de* $|\Gamma|$, *correspondent les points d'une courbe rationnelle d'ordre* s *de* F.

Supposons maintenant que $|\Gamma|$ possède une courbe fondamentale K, d'ordre k, passant respectivement s_1', s_2', ..., s_τ' fois par O_1, O_2, ..., O_τ. Si m est l'ordre des courbes Γ, on a

$$mk = s_1 s_1' + s_2 s_2' + \dots + s_\tau s_\tau'.$$

Les courbes Γ passant par un point de K, distinct des points-base, comprennent cette courbe comme partie et sont complétées par des courbes Γ_1, d'ordre $m-k$, passant $s_1 - s_1'$ fois par O_1, $s_2 - s_2'$ fois par O_2, ..., $s_\tau - s_\tau'$ fois par O_τ, formant un système linéaire $|\Gamma_1|$ de dimension $r-1$. A ce système correspond dans S_r une gerbe d'hyperplans de sommet A.

Les courbes Γ_1 rencontrent la courbe K, en dehors des points-base, en

$$\alpha = k(m-k) - \Sigma s'(s-s') = \Sigma s'^2 - k^2$$

points. Nous supposerons ce nombre positif. Il pourrait être nul dans le cas où K serait encore courbe fondamentale de $|\Gamma_1|$.

Les degrés n de $|\Gamma|$ et n_1 de $|\Gamma_1|$ sont donnés par

$$n = m^2 - \Sigma s^2 ,$$

$$n_1 = (m-k)^2 - \Sigma(s-s')^2 = n - \alpha .$$

Il en résulte que le point A est multiple d'ordre α pour F, puisque les sections de F par deux hyperplans passant par A ne se rencontrent plus qu'en $n-\alpha$ points en dehors de A.

Les courbes Γ_1 passant par un point P de K, forment un système de degré $n_1 - 1$; il leur correspond dans S_r des plans passant par une droite tangente en A à la surface F.

A une courbe fondamentale de $|\Gamma|$ *correspond un point multiple de la surface* F *et aux points de cette courbe correspondent les points de* F *infiniment voisins de ce point multiple.*

Soient π le genre des courbes Γ, π_1 celui des courbes Γ_1. On a

$$\pi = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{2}\Sigma s(s-1) ,$$

$$\pi_1 = \frac{1}{2}(m-k-1)(m-k-2) - \frac{1}{2}\Sigma(s-s')(s-s'-1)$$
$$= \pi - \pi_0 - \alpha + 1 ,$$

où

$$\pi_0 = \frac{1}{2}(k-1)(k-2) - \frac{1}{2}\Sigma s'(s'-1)$$

est le genre de la courbe fondamentale K.

Les sections hyperplanes C de F sont de genre π et les sections C_1 de F par les hyperplans passant par A sont de genre π_1. On en conclut que les courbes C_1 ont le genre inférieur à celui des courbes C (car $\pi_0 \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 2$).

Observons encore que les courbes D_1, D_2 ..., D_τ passent respectivement s_1', s_2', ..., s_τ' fois par le point A.

210. Points multiples impropres. — Il peut exister un point exceptionnel P_1 tel que les courbes Γ passant par P_1 passent en conséquence par $\nu - 1$ autres points P_2, P_3, ..., P_ν. A ces courbes Γ, qui forment un système de degré $n - \nu$, correspondent dans S_r les hyperplans passant par un point P. Les sections de F par deux hyperplans passant par P ne se rencontrent plus qu'en $n - \nu$ points en dehors de P, donc ce point est multiple d'ordre ν pour la surface F.

Observons que les courbes Γ passant par P_1, P_2, ..., P_ν ont le même genre π que la courbe Γ générale. Les sections de F par les hyperplans passant par P ont donc le même genre que la section hyperplane générale. Le passage d'une courbe C par P n'abaisse donc pas le genre de cette courbe. Pour cette raison, le point P est appelé *point multiple impropre.*

Si $r = 3$, il y a en général une infinité de couples de points n'imposant qu'une condition aux courbes Γ qui doivent les contenir ($\nu = 2$); cela donne la courbe double de F. Il y a en général un nombre fini de ternes de points n'imposant qu'une condition aux courbes Γ ($\nu = 3$); cela donne des points triples impropres de F (cf. chap. V, § 5).

Si $r = 4$, il y a en général un nombre fini de couples de points n'imposant qu'une condition aux courbes Γ ($\nu = 2$). Une surface rationnelle de S_4 possède en général un nombre fini de points doubles impropres.

211. Courbes tracées sur la surface. — La représentation point par point de la surface F sur le plan σ permet une étude aisée des courbes tracées sur la surface F.

Considérons une courbe H d'ordre h, tracée sur F, rencontrant les courbes D_1, D_2, ..., D_τ respectivement en h_1, h_2, ..., h_τ points et passant h_0 fois par le point A. A cette courbe H correspond dans le plan σ une courbe H′ passant respectivement h_1, h_2, ..., h_τ fois par les points O_1, O_2, ..., O_τ et rencontrant la courbe fondamentale K en h_0 points en dehors des points-base. L'ordre h' de la courbe H′ est donné par

$$mh' - (s_1 k_1 + s_2 h_2 + \dots + s_\tau h_\tau) = h.$$

Inversement, à une courbe du plan σ correspond une courbe de la surface F dont on peut étudier les caractères.

La représentation plane de la surface cubique (I, chap. VI) donne des exemples du parti que l'on peut tirer de ces questions.

212. Exemples. — Supposons que les courbes Γ soient les cubiques planes passant par trois points O_1, O_2, O_3. La surface F est alors d'ordre six et appartient à un espace S_6. Aux domaines des points O_1, O_2, O_3 correspondent trois droites D_1, D_2, D_3.

Supposons en premier lieu que les trois points O_1, O_2, O_3 ne soient pas en ligne droite. Les droites D_1, D_2, D_3 ne se rencontrent pas deux à deux.

A la droite O_2O_3 correspond sur F une droite D_1' s'appuyant sur D_2, D_3, mais ne rencontrant pas D_1. De même, aux droites O_3O_1, O_1O_2 correspondent des droites D_2' s'appuyant sur D_3, D_1 et D_3', s'appuyant sur D_1, D_2.

Aux droites du plan σ correspondent des cubiques γ_3. Comme une droite du plan σ appartient à ∞^2 cubiques Γ, complétées par les coniques circonscrites au triangle $O_1O_2O_3$, il passe ∞^2 hyperplans S_5 par une courbe γ_3 ; celle-ci appartient donc à un espace S_3 qu'elle détermine complètement et est par suite une cubique gauche. Les cubiques gauches γ_3 s'appuient en un point sur les droites D_1', D_2', D_3'.

De même, aux coniques de σ passant par O_1, O_2, O_3 correspondent sur F des cubiques gauches γ_3' s'appuyant sur les droites D_1, D_2, D_3. Une cubique γ_3 et une cubique γ_3' se rencontrent en deux points.

A la section de F par une hyperquadrique correspond dans σ une courbe du sixième ordre ayant des points doubles en O_1, O_2, O_3. Ces courbes dépendent de 18 paramètres. D'autre part, les hyperquadriques de S_6 dépendent de 27 paramètres ; il y a donc ∞^8 hyperquadriques contenant la surface F.

Supposons maintenant que les trois points-base O_1, O_2, O_3 de $|\Gamma|$ soient en ligne droite ; celle-ci est une droite fondamentale K de $|\Gamma|$. Aux points de la droite K correspondent les points de F infiniment voisins d'un point double de cette surface. Les trois droites D_1, D_2, D_3 passent par A.

A une droite de σ correspond encore sur F une cubique gauche γ_3, car cette droite, jointe à la droite K et aux ∞^2 droites du plan, donne des courbes Γ. Les cubiques gauches γ_3 passent par le point double A.

On démontre encore que la surface F appartient à ∞^8 hyperquadriques.

Nous allons maintenant donner un exemple d'une surface rationnelle de S_4 possédant un point-double impropre (1).

Considérons un système linéaire $|\Gamma|$, de dimension 4, formé de cubiques planes passant par quatre points A_1, A_2,

(1) Cet exemple est emprunté à M. Severi, *Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni e a' suoi punti tripli apparenti* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* 1901, b. XV).

A_3, A_4. Ce système représente une surface F, d'ordre cinq, de S_4 ; cette surface n'est pas normale.

Appelons γ les coniques passant par les points A_1, A_2, A_3, A_4. Une conique du faisceau $|\gamma|$ appartient à ∞^1 courbes Γ, complétées par ∞^1 droites formant un faisceau de sommet O. Le lieu de O, lorsque γ varie, est une droite r, car une droite du plan σ fait en général partie d'une seule cubique Γ, complétée par une conique γ, donc contient un seul point O. Observons que seule la droite r fait exception ; elle appartient à ∞^1 cubiques Γ, complétées par les ∞^1 coniques γ.

Il existe, dans le système $|\Gamma|$, un réseau de courbes irréductibles, ne contenant donc aucune courbe dégénérée en une conique γ et la droite r. Les courbes de ce réseau découpent, sur r, une involution d'ordre trois et de seconde espèce, I_3^2, possédant un seul couple neutre (ce qui équivaut au fait qu'une cubique gauche ne possède qu'une bisécante passant par un point). Soient P_1, P_2 les points formant ce couple neutre. Il existe donc ∞^1 cubiques Γ du réseau envisagé passant par les points P_1, P_2. Les cubiques Γ formées de la droite r et des ∞^1 coniques γ passant également par P_1, P_2 et les deux faisceaux envisagés n'ayant aucune courbe commune, appartiennent à un système linéaire triplement infini de courbes de $|\Gamma|$. Il en résulte qu'au couple P_1P_2, qui impose une seule condition aux courbes Γ, correspond sur F un point double impropre.

§ 2. *Les surfaces réglées rationnelles*

213. Préliminaires. — Soit F une surface réglée non conique, d'ordre n, de S_r. En posant $k=2$ dans la relation $r \leqslant n+k-1$, on trouve $r \leqslant n+1$. Nous prendrons la valeur maximum pour r et supposerons donc que l'ordre de F est $n=r-1$.

La section de F par un hyperplan ξ est une courbe d'ordre $r-1$. Prenons sur cette courbe $r-2$ points ; ils déterminent un espace S_{r-3} et tout espace S_{r-2} passant par S_{r-3} coupe encore la courbe en un point. Par conséquent, la courbe est rationnelle et normale dans ξ.

Une surface réglée non conique d'ordre r — 1 *de* S_r *est rencontrée par les hyperplans suivant des courbes rationnelles normales.*

214. Représentation plane de la surface. — Prenons sur F $n-2$ points A_1, A_2, ..., A_{n-2} dont deux ne sont pas situés sur une même génératrice rectiligne de la surface. Ces points déterminent un espace S_{n-3} ne contenant aucune génératrice de F. Soit σ un plan ne rencontrant pas S_{n-3}.

Un point P de F détermine un espace S_{r-2} passant par S_{r-3} et coupant σ en un point P'. Inversement, un point P' de σ détermine un espace S_{r-2} passant par S_{r-3} et coupant F, en dehors de cet espace, en un point P. La surface F est donc représentable point par point sur le plan σ ; elle est par conséquent rationnelle et puisqu'elle a l'ordre maximum, normale.

Aux points P d'une section de F par un hyperplan passant par S_{r-3} correspondent les points P' d'une droite de σ. Aux points d'une section de F par un hyperplan ne passant pas par S_{r-3} correspondent dans σ les points d'une courbe Γ d'ordre $r-1$. Les courbes Γ forment un système linéaire $|\Gamma|$ de degré $r-1$ et de dimension r.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{r-2}$ les génératrices de F passant respectivement par les points $A_1, A_2, \ldots, A_{r-2}$. L'espace S_{r-2} déterminé par S_{r-3} et par a_i coupe le plan σ en un point A_i' appartenant à toutes les courbes Γ. Le système $|\Gamma|$ possède donc $r-2$ points-base simples $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{r-2}$.

Soient a une génératrice de F ne rencontrant pas S_{r-3}, ξ l'hyperplan déterminé par a et S_{r-3}, a' la section de σ par ξ. La droite a' correspond à a. L'hyperplan ξ coupe F suivant la droite a et une courbe C_1 d'ordre $r-2$, qui ne peut appartenir à S_{r-3}. La courbe C_1 étant rencontrée en un point par les génératrices de F, est rationnelle et par suite normale dans un espace S_{r-2} contenant S_{r-3}. L'espace S_{r-2} coupe σ en un point A' et la section C de F par un hyperplan quelconque en $r-2$ points, donc le point A' est multiple d'ordre $r-2$ pour les courbes Γ. D'ailleurs, les hyperplans passant par S_{r-2} coupent encore F suivant les génératrices rectilignes a de cette surface et à ces génératrices, correspondent les droites a' passant par A'.

La surface réglée, d'ordre $r-1$ *dans* S_r, *est rationnelle et normale. Elle est représentée dans un plan par un système linéaire* $|\Gamma|$ *de courbes d'ordre* $r-1$ *ayant un point-base multiple d'ordre* $r-2$ *et* $r-2$ *points-base simples.*

On vérifie que $|\Gamma|$ est bien de degré $r-1$ et de dimension r.

Aux points infiniment voisins de A' correspondent les points de la courbe C_1 ; aux points infiniment voisins de A_i' correspondent les points de la droite a_i et à la droite fondamentale $A'A_i'$ correspond le point A_i.

215. Théorème. — *Une surface réglée d'ordre* $r-1$ *de* S_r *possédant un point multiple, est un cône.*

Soit V_2^{r-1} une surface d'ordre $r-1$ de S_r, possédant un point O multiple d'ordre $\nu > 1$. Un hyperplan ξ passant par O coupe V_2^{r-1} suivant une courbe d'ordre $r-1$ ayant en O la multiplicité ν. Si cette courbe était irréductible, par O et par

$r-2$ autres de ses points passerait un espace S_{r-2} coupant la courbe en $r-2+\nu>r-1$ points ; cet espace contiendrait entièrement la courbe, ce qui est absurde. La courbe est donc réductible. Les sections de V_2^{r-1} par les hyperplans passant par O sont donc réductibles.

Si un hyperplan passant par O contenait deux courbes γ_1, γ_2 d'ordres supérieurs à l'unité, les génératrices rectilignes de la surface rencontreraient l'une ou l'autre des courbes γ_1, γ_2 et la surface V_2^{r-1} serait réductible. Dans tout hyperplan passant par O se trouve donc au moins une droite de V_2^{r-1}. Comme cette surface contient ∞^1 droites, celles-ci passent nécessairement toutes par O et la surface est un cône de sommet O.

216. Directrices d'une surface réglée non conique. — Soit F une surface réglée normale, non conique, d'ordre $r-1$, de S_r. Un hyperplan ξ coupe F suivant une courbe rationnelle normale C, d'ordre $r-1$, en général irréductible, mais cette courbe peut être réductible pour certaines positions particulières de ξ.

Supposons que ξ coupe F suivant une courbe C_1, d'ordre $n<r-1$. Le restant de l'intersection de F et de ξ se compose de génératrices de la surface F, car autrement celle-ci serait réductible. La courbe C_1 est d'autre part rationnelle, car elle est rencontrée en un point par les génératrices de la surface.

Soit k la dimension de l'espace minimum S_k contenant C_1 $(k \leqslant n)$. Par S_k et par $r-k-1$ points de F dont deux n'appartiennent jamais à une même génératrice, passe un hyperplan coupant F suivant C_1 et les $r-k-1$ génératrices passant par les points choisis. On doit donc avoir

$$n+r-k-1 \leqslant r-1$$

d'où $k \geqslant n$ et par conséquent $k=n$. La courbe C_1 est donc normale.

D'autre part, une courbe d'ordre $n<r-1$ appartient à un espace ayant au plus $n<r-1$ dimensions et par conséquent à un hyperplan.

Une courbe d'ordre inférieur à r — 1, *tracée sur* F, *est une courbe rationnelle normale, coupée en un point par les génératrices rectilignes de la surface.*

Les courbes d'ordre inférieur à $r-1$, tracées sur f, sont appelées *directrices* de cette surface.

Supposons que F possède deux directrices C_1, C_2, respectivement d'ordres m, n tels que $m+n<r-2$. Par les espaces S_m contenant C_1 et S_n, contenant C_2 on peut certainement mener un espace S_{m+n+1} contenant toutes les génératrices rectilignes de F. Il en résulte que cette surface appartiendrait à un espace de dimension inférieure à r, ce qui est impossible.

Si la surface F *possède deux directrices d'ordres* m, n, *on a* $m + n \geqslant r - 1$.

Supposons $r = 2p$. Par p génératrices de F passe un hyperplan ξ rencontrant encore F suivant une courbe formée éventuellement de génératrices et d'une courbe C_1 d'ordre n, tel que $n \leqslant r - p - 1$. La courbe C_1 est une directrice, unique en vertu du théorème précédent.

Dans le cas $r = 2p + 1$, le même raisonnement conduit à une directrice d'ordre $n \leqslant r - p - 1$, unique si $n < r - p - 1$.

Une surface F *possède une directrice unique d'ordre au plus égal à* $\frac{1}{2}(r - 2)$ *si* r *est pair, une directrice d'ordre* n *au plus égal à* $\frac{1}{2}(r - 1)$ *si* r *est impair. Dans ce dernier cas, la directrice est unique si son ordre est inférieur à* $\frac{1}{2}(r - 1)$.

217. Nouvelle représentation plane de la surface. — Nous avons obtenu une première représentation plane de la surface F en la projetant sur un plan à partir d'un espace S_{r-3} la rencontrant en $r - 2$ points. Nous avons obtenu ainsi une représentation par un système linéaire de courbes d'ordre $r - 1$, ayant un point-base multiple d'ordre $r - 2$ et $r - 2$ points-base simples. Si $r > 4$, on peut remplacer ce système par un autre dont les courbes ont l'ordre inférieur à $r - 1$; il suffit d'appliquer une transformation quadratique ayant pour points fondamentaux le point-base multiple et deux points-base simples. Nous allons obtenir directement une représentation plane de F par des courbes d'ordre inférieur à $r - 1$.

Considérons p génératrices $a_1, a_2, \ldots, a_p$ et $r - 2p - 2$ points $A_1, A_2, \ldots, A_{r-2p-2}$ de F, extérieurs aux génératrices choisies et dont deux ne se trouvent pas sur une même génératrice. Les génératrices a et les points A déterminent un espace S_{r-3}. Un hyperplan passant par S_{r-3} coupe F suivant une courbe formée des p génératrices $a_1, a_2, \ldots, a_p$ et d'une courbe d'ordre $r - p - 1$ passant par les points $A_1, A_2, \ldots, A_{r-2p-2}$, rencontrant en un point chacune des p génératrices $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Un second hyperplan passant par S_{r-3} coupe donc cette courbe en un seul point variable, donc les espaces S_{r-2} passant par S_{r-3} coupent F en un seul point en dehors de S_{r-3}. Il en résulte qu'en projetant F de S_{r-3} sur un plan σ ne rencontrant pas cet espace, on obtiendra une représentation de F sur ce plan.

A la section de F pour un hyperplan ne passant pas par S_{r-3}, correspond dans σ une courbe Γ d'ordre $r - p - 1$, car cette section rencontre chacune des génératrices $a_1, a_2, \ldots, a_p$ en un point.

Soient a'_1 $a'_2, \ldots, a'_{r-2p-2}$ les génératrices de F, certainement toutes distinctes, passant par les points A_1, A_2, ..., A_{r-2p-2}. L'espace S_{r-2} passant par S_{r-3} et par une de ces génératrices coupe σ en un point appartenant à toutes les courbes Γ. Le système $|\Gamma|$ a donc $r-2p-2$ points-base simples A'_1, A'_2, ..., A'_{r-2p-2}.

L'hyperplan passant par S_{r-3} et par une génératrice a quelconque de F coupe σ suivant une droite a', homologue de a et F suivant une courbe C_1 d'ordre $r-p-2$, en dehors de a_1, a_2, ..., a_p, a. La courbe C_1 appartient à un espace S_{r-p-2} qui a en commun avec S_{r-3} les $r-2p-2$ points A_1, A_2, ..., A_{r-2p-2} et un point sur chacune des génératrices a_1, a_2,..., a_p. Les espaces S_{r-3}, S_{r-p-2} ont donc en commun un espace S_{r-p-3} et appartiennent à un espace S_{r-2}. Celui-ci rencontre σ en un point A', multiple d'ordre $r-p-2$ pour les courbes Γ. Ce point A' est un point-base du système linéaire $|\Gamma|$. Aux génératrices a de F correspondent dans σ les droites passant par A' et aux points infiniment voisins de A' correspondent les points de la courbe C_1.

A un point A_i correspond la droite $A'A_i'$ et aux points de la droite a_i' correspondent les points infiniment voisins de A_i' $(i=1, 2, \ldots, r-2p-2)$.

Une directrice d'ordre m de F est représentée sur σ par une courbe d'ordre $m-p$ ayant la multiplicité $m-p-1$ en A' et passant simplement par les points A'_1, A'_2, ..., A'_{r-2p-2}. L'existence d'une directrice d'ordre inférieur à $r-p-1$ implique donc une relation entre les points-base de $|\Gamma|$.

La surface réglée d'ordre $r-1$ *de* S_r *est représentée sur un plan par le système linéaire de courbes d'ordre* $r-p-1$ *ayant un point-base multiple d'ordre* $r-p-2$ *et* $r-2p-2$ *points-base simples.*

Inversement, un système linéaire tel que $|\Gamma|$ représente une surface réglée d'ordre $r-1$ de S_r.

218. Théorème. — *Une surface réglée rationnelle de* S_ρ $(\rho < r)$, *d'ordre* $r-1$, *est la projection d'une surface réglée d'ordre* $r-1$ *de* S_r.

Soit F' une surface réglée rationnelle d'ordre $r-1$ de S_ρ; ses sections hyperplanes sont des courbes rationnelles.

Plongeons l'espace S_ρ dans un espace S_r et considérons deux hyperplans ξ_1, ξ_2 de S_r coupant S_ρ suivant deux hyperplans distincts ξ_1', ξ_2' de cet espace. Soient C_1', C_2' les sections de F' par ξ_1', ξ_2' ; nous supposerons ces courbes irréductibles ; elles ont en commun $r-1$ points A'_1, A'_2, ..., A'_{r-1}. Choisissons dans S_r un espace $S_{r-\rho-1}$ ne rencontrant pas S_ρ et appartenant aux hyperplans ξ_1, ξ_2.

La courbe C_1' est la projection, à partir de $S_{r-\rho-1}$, d'une courbe rationnelle normale, d'ordre $r-1$ de ξ_1. De même, C_2' est la projection d'une courbe rationnelle normale C_2, d'ordre

$r-1$, de ξ_2. On peut disposer de C_1, C_2 de manière que ces deux courbes aient en commun $r-1$ points $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$, dont les projections, à partir de $S_{r-\rho-1}$, sont respectivement les points $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{r-1}$.

Soient g' une génératrice de F', P_1', P_2' ses points d'appui sur C_1', C_2' ; P_1, P_2 les points de C_1, C_2 dont P_1', P_2' sont les projections, g la droite P_1P_2. La droite g engendre une surface réglée F dont F' est la projection à partir de $S_{r-\rho-1}$.

La surface F est d'ordre $r-1$. Projetons en effet les points P_1, P_2 d'un espace S_{r-2} ; nous obtenons, entre les hyperplans passant par cet espace, une correspondance $(r-1, r-1)$ possédant $2(r-1)$ éléments unis. Mais $r-1$ de ceux-ci proviennent des points $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$, les autres des génératrices de F s'appuyant sur S_{r-2}. La surface F est donc bien d'ordre $r-1$ et le théorème est démontré.

219. Application aux surfaces réglées du troisième ordre. — Une surface réglée rationnelle normale du troisième ordre F, non conique, appartient à un espace S_4. Elle possède une directrice d'ordre minimum un, unique, que nous désignerons par d. En la projetant d'une de ses génératrices sur un plan σ on obtient la représentation plane de F par les coniques Γ passant par un point A' (qui correspond à d).

Une surface réglée rationnelle du troisième ordre F' de S_3 est la projection de F, à partir d'un point P n'appartenant pas à F. La projection d' de d sur S_3 est une directrice d' de F', en général simple pour cette surface.

La section de F par un hyperplan passant par P est une cubique gauche C possédant une bisécante issue de P. Soient A_1, A_2 les points d'appui de cette bisécante sur C et a_1, a_2 les génératrices de F passant par ces points. Le point A', où la droite A_1A_2 coupe S_3, est double pour F'. Par ce point passent les deux génératrices a_1', a_2' de F' qui correspondent aux droites a_1, a_2. Lorsque l'hyperplan considéré varie dans la gerbe de sommet P, le point A' varie et décrit nécessairement une droite s', car autrement F' serait réductible. Le lieu des points A_1, A_2 est une conique γ en général irréductible, située dans le plan $s'P$. En général, cette conique ne rencontre pas d et les droites s', d' de P' ne se rencontrent pas. La surface F' est le lieu des droites joignant les points de s', d' homologues dans une correspondance $(1, 2)$.

Soit a_0 une génératrice de F. Supposons que le point P se trouve dans le plan a_0d. La conique γ dégénère en deux droites, les droites a_0 et d ; elle ne peut évidemment dégénérer que dans ce cas. Les droites s' et d' sont confondues et la surface F' possède une droite double qui est à la fois directrice et génératrice.

On retrouve ainsi les deux espèces de surfaces cubiques réglées (I, chap. VI, § 5).

§ 3. *La surface de Veronese*

220. Définition et équations de la surface. — Considérons dans un plan σ le système de coniques

$$\lambda_{00}x_0^2 + \lambda_{11}x_1^2 + \lambda_{22}x_2^2 + 2\lambda_{12}x_1x_2 + 2\lambda_{20}x_2x_0 + 2\lambda_{01}x_0x_1 = 0.$$

Rapportons projectivement ces coniques aux hyperplans d'un espace S_5 en posant

$$\frac{X_{00}}{x_0^2} = \frac{X_{11}}{x_1^2} = \frac{X_{22}}{x_2^2} = \frac{X_{12}}{x_1x_2} = \frac{X_{20}}{x_2x_0} = \frac{X_{01}}{x_0x_1},$$

X_{00}, X_{11}, ..., X_{01} étant les coordonnées d'un point de cet espace. Aux points de σ correspondent les points d'une surface F, appelée surface de Veronese, dont les équations sont

$$X_{12}^2 = X_{11}X_{22}, \quad X_{20}^2 = X_{22}X_{00}, \quad X_{01}^2 = X_{00}X_{11},$$

$$X_{20}X_{01} = X_{00}X_{12}, \quad X_{01}X_{12} = X_{11}X_{20}, \quad X_{12}X_{20} = X_{22}X_{01},$$

ou encore les équations que l'on obtient en exprimant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_{00} & X_{01} & X_{20} \\ X_{01} & X_{11} & X_{12} \\ X_{20} & X_{12} & X_{22} \end{vmatrix}$$

est de caractéristique un.

A une droite.

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$$

de σ correspond sur F une conique située dans le plan

$$a_0X_{00} + a_1X_{01} + a_2X_{20} = 0, \quad a_0X_{01} + a_1X_{11} + a_2X_{12} = 0,$$
$$a_0X_{20} + a_1X_{12} + a_2X_{22} = 0.$$

221. Coniques conjuguées. — Considérons, dans σ, une conique-lieu et une conique-enveloppe, respectivement d'équations

$$\Sigma a_{ik}\, x_i\, x_k = 0, \quad \Sigma \alpha_{ik}\, \xi_i\, \xi_k = 0, \quad (i, k = 0, 1, 2),$$

où $a_{ik} = a_{ki}$, $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$.

On dit que ces deux coniques sont conjuguées lorsque l'on a

$$\Sigma a_{ik}\, \alpha_{ik} = 0.$$

Etant données cinq coniques-lieux (ou enveloppes) linéairement indépendantes, il existe une et une seule conique-enveloppe (ou lieu) conjuguée à ces cinq coniques.

222. Relation entre les points de S_5 et les coniques-enveloppes. — Considérons un point X de S_5. Par ce point passent cinq hyperplans indépendants, auxquels correspondent, dans σ, cinq coniques-lieux linéairement indépendantes. Il existe une seule conique-enveloppe conjuguée à ces coniques-lieux et par conséquent au point X correspond une conique-enveloppe.

Inversement, il existe ∞^4 coniques-lieux conjuguées à une conique-enveloppe ; il leur correspond dans S_5, ∞^4 hyperplans formant une gerbe. Le sommet de cette gerbe correspond à la conique-enveloppe.

Considérons la conique-enveloppe

$$\Sigma \alpha_{ik} \xi_i \xi_k = 0, \quad (i, k = 0, 1, 2) . \tag{1}$$

Les coefficients des coniques-lieux conjuguées sont donnés par

$$\Sigma a_{ik} \alpha_{ik} = 0$$

et les hyperplans correspondants dans S_5 par

$$\Sigma a_{ik} X_{ik} = 0 .$$

Par conséquent, le point de S_5 correspondant à la conique (1) a pour coordonnées α_{00}, α_{11}, α_{22}, α_{12}, α_{20}, α_{01}. La correspondance entre les points de S_5 et les coniques-enveloppes de σ est une projectivité.

La condition pour qu'un point de S_5 appartienne à un hyperplan est que la conique-enveloppe homologue du point et la conique-lieu homologue de l'hyperplan, soient conjuguées.

223. Coniques-enveloppes homologues des points de F. — Considérons un point Y de F et son homologue y dans le plan σ. Aux hyperplans passant par Y correspondent les coniques-lieux passant par y. L'équation de ces coniques s'écrit

$$\begin{aligned}\lambda_{00}(y_0 y_1 x_0^2 - y_0^2 x_0 x_1) + \lambda_{11}(y_0 y_1 x_1^2 - y_1^2 x_0 x_1)&\\ + \lambda_{22}(y_0 y_1 x_2^2 - y_2^2 x_0 x_1)&\\ + 2\lambda_{12}(y_0 y_1 x_1 x_2 - y_1 y_2 x_0 x_1)&\\ + 2\lambda_{20}(y_0 y_1 x_2 x_0 - y_2 y_0 x_0 x_1) &= 0,\end{aligned}$$

La conique-enveloppe conjuguée à ces coniques a pour équation

$$(y_0\xi_0 + y_1\xi_1 + y_2\xi_2)^2 = 0 .$$

Aux points de F correspondent donc dans σ les coniques-enveloppes dégénérées en deux faisceaux de rayons superposés. Il est aisé de voir que la réciproque est vraie.

224. La variété M_4^3. — A la conique-enveloppe (1) correspond le point A de coordonnées α_{ik}. Si cette conique dégénère en deux faisceaux de rayons, on a $|\alpha_{ik}|=0$. Le lieu des points de S_5 représentant les coniques-enveloppes dégénérées de σ est donc l'hypersurface M_4^3 d'équation

$$\begin{vmatrix} X_{00} & X_{01} & X_{20} \\ X_{01} & X_{11} & X_{12} \\ X_{20} & X_{12} & X_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Le faisceau tangentiel de coniques

$$\Sigma\alpha_{ik}\,\xi_i\,\xi_k + \lambda\Sigma\beta_{ik}\,\xi_i\,\xi_k = 0 \tag{2}$$

contient trois courbes dégénérées en deux faisceaux de rayons ; elles correspondent aux trois points de rencontre de M_4^3 avec la droite lieu des points de S_5 homologues du système (2).

Si le faisceau tangentiel (2) contient une conique dégénérée en deux faisceaux de rayons superposés, il ne contient plus qu'une autre conique dégénérée. La droite homologue du faisceau tangentiel (2) passe par un point de F et ne rencontre plus M_4^3 qu'en un point, donc *la surface* F *est double pour l'hypersurface* M_4^3.

On en conclut que les cordes de F appartiennent à M_4^3. *La variété* M_4^3 *est le lieu des cordes de* F.

225. Plans tangents à la surface F. — Une tangente à la surface F en un de ses points Y est une corde dont les deux points d'appui sont confondus en Y.

Les points d'une corde YZ de F sont représentés dans σ par les coniques du faisceau tangentiel

$$(y_0\,\xi_0 + y_1\,\xi_1 + y_2\,\xi_2)^2 + \lambda\,(z_0\,\xi_0 + z_1\,\xi_1 + z_2\,\xi_2)^2 = 0\,.$$

Les coniques-enveloppes représentées par cette équation sont formées de deux faisceaux de rayons dont les sommets sont des couples de points de la droite yz ; ces couples forment, sur cette droite, l'involution dont les points unis sont les points y, z. Une tangente à F au point Y sera représentée par un faisceau tangentiel de coniques-enveloppes ne contenant qu'une courbe dégénérée en deux faisceaux de rayons superposés, les autres courbes étant dégénérées. L'involution des sommets des faisceaux de rayons doit être dégénérée en l'ensemble des couples de points d'une droite contenant un point fixe. Un tel faisceau tangentiel est de la forme

$$\begin{aligned}(y_0\xi_0 + y_1\xi_1 + y_2\xi_2)[(y_0\xi_0 + y_1\xi_1 + y_2\xi_2)\\ + \lambda\,(z_0'\,\xi_0 + z_1'\xi_1 + z_2'\xi_2)] = 0)\end{aligned}$$

Le lieu des tangentes à F au point Y est représenté dans σ par le système de coniques-enveloppes

$$(y_0\,\xi_0 + y_1\,\xi_1 + y_2\,\xi_2)(x_0\,\xi_0 + x_1\,\xi_1 + x_2\,\xi_2) = 0\,.$$

C'est donc un plan : le plan tangent à F en Y.

Un plan tangent à F *en un point* Y *est le lieu des points homologues des coniques-enveloppes de* σ *dégénérées en deux faisceaux de rayons dont l'un a pour sommet le point* y *de* σ *homologue du point* Y.

Le lieu des plans tangents à F *est l'hypersurface* M_4^3.

226. Plans des coniques de la surface F. — La surface F contient ∞^2 coniques correspondant aux droites du plan σ et se rencontrant donc deux à deux en un point. Elles forment, sur F, un réseau homaloïdal.

Soit C une conique de F, γ son plan. Celui-ci étant le lieu de ∞^2 cordes de F, appartient à la variété M_4^3. Aux points de γ correspondent donc ∞^2 coniques-enveloppes dégénérées en des couples de faisceaux de rayons formant un système linéaire en ce sens que deux droites de σ ne peuvent appartenir qu'à une seule conique du système.

Les systèmes de coniques-enveloppes dégénérées, linéaires et doublement infinis sont de deux sortes :

1° Ensemble des coniques dégénérées en des couples de faisceaux de rayon dont les sommets sont sur une droite ;

2° Ensemble des coniques dégénérées en deux faisceaux de rayons dont l'un est fixe.

Nous avons vu qu'aux systèmes du second type correspondent les plans tangents à F. Aux systèmes du premier type correspondent donc les plans des coniques de F.

On voit immédiatement que :

Le lieu des plans des ∞^2 *coniques de* F *est l'hypersurface* M_4^3.

Par un point de M_4^3 *passent deux plans tangents à* F *et le plan d'une conique de* F. *Les points de contact des plans tangents sont sur la conique située dans ce dernier plan et le déterminent.*

227. Sections hyperplanes de F. — La section de F par un hyperplan est en général une courbe rationnelle normale du quatrième ordre, représentant une conique-lieu du plan σ.

Considérons la section de F par un hyperplan contenant le plan tangent à F en un point Y. Elle est représentée par une conique-lieu conjuguée aux coniques-enveloppes

$$(y_0\xi_0 + y_1\xi_1 + y_2\xi_2)(x_0\xi_0 + x_1\xi_1 + x_2\xi_2) = 0.$$

Si la conique-lieu a pour équation $\Sigma a_{ik}x_ix_k = 0$, on doit donc avoir

$$\Sigma a_{ik}(y_ix_k + y_kx_i) = 0,$$

pour toutes les valeurs de x_0, x_1, x_2, c'est-à-dire

$$a_{00} y_0 + a_{01} y_1 + a_{02} y_2 = 0,$$
$$a_{10} y_0 + a_{11} y_1 + a_{12} y_2 = 0,$$
$$a_{20} y_0 + a_{21} y_1 + a_{22} y_2 = 0.$$

On a donc $|a_{ik}| = 0$ et la conique est dégénérée en deux droites passant par le point y. On en conclut que *l'intersection de* F *et d'un hyperplan contenant un plan tangent à la surface se compose de deux coniques passant par le point de contact du plan tangent.*

A une conique-lieu du plan σ dégénérée en deux droites distinctes correspond un hyperplan coupant F suivant deux coniques distinctes. A une conique de σ dégénérée en deux droites confondues correspond un hyperplan tangent à la surface F en chaque point d'une conique.

228. Polarité par rapport à l'hypersurface M_4^3. — La première polaire d'un point Y par rapport à la variété M_4^3 a pour équation

$$\begin{aligned} Y_{00}(X_{11}X_{22} - X_{12}^2) &+ Y_{11}(X_{22}X_{00} - X_{20}^2) \\ &+ Y_{22}(X_{00}X_{11} - X_{01}^2) \\ &+ 2\,Y_{12}(X_{20}X_{01} - X_{00}X_{12}) \\ &+ 2\,Y_{20}(X_{01}X_{12} - X_{11}X_{20}) \\ &+ 2\,Y_{01}(X_{12}X_{20} - X_{22}X_{01}) = 0. \end{aligned}$$

C'est donc une hyperquadrique passant par la surface F. Toute hyperquadrique passant par la surface F ayant une équation de la forme précédente, chacune de ces hyperquadriques est la première polaire d'un point par rapport à M_4^3.

La seconde polaire du point Y par rapport à M_4^3 est l'hyperplan

$$\begin{aligned} X_{00}(Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2) &+ X_{11}(Y_{22}Y_{00} - Y_{20}^2) \\ + X_{22}(Y_{00}Y_{11} - Y_{01}^2) &+ 2\,X_{12}(Y_{20}Y_{01} - Y_{00}Y_{12}) \\ + 2\,X_{20}(Y_{01}Y_{12} - Y_{11}Y_{20}) &+ 2\,Y_{01}(Y_{12}Y_{20} - Y_{22}Y_{01}) = 0. \end{aligned}$$

Cet hyperplan a pour homologue, dans le plan σ, la conique

$$\begin{vmatrix} 0 & x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0 & Y_{00} & Y_{01} & Y_{20} \\ x_1 & Y_{01} & Y_{11} & Y_{12} \\ x_2 & Y_{20} & Y_{12} & Y_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation tangentielle de cette conique étant

$$\Sigma Y_{ik}\, \xi_i\, \xi_k = 0,$$

un point et son hyperplan polaire par rapport à l'hypersurface M_4^3 représentent une conique-enveloppe et une conique-lieu ayant même support.

229. Surface de Steiner. — La surface de Steiner est la projection de la surface de Veronese sur un espace S_3 à partir d'une droite S_1 rencontrant la variété M_4^3 en trois points distincts. Cette droite ne rencontre donc pas F et la surface de Steiner F' est du quatrième ordre.

Soient A_1, A_2, A_3 les points de rencontre de S_1 avec M_4^3. Par chacun de ces points passe un plan contenant une conique de F. Soient α_1, α_2, α_3 ces plans, γ_1, γ_2, γ_3 les coniques de F qu'ils contiennent respectivement. Ces coniques se rencontrent deux à deux en un point ; soient A_1', A_2', A_3' les points de rencontre de γ_2 et γ_3, de γ_3 et γ_1, de γ_1 et γ_2. Soit enfin α le plan déterminé par la droite S_1 et le point A_1'. Nous allons démontrer que le plan α contient également les points A_2', A_3' et que les six points A_1, A_2, A_3, A_1', A_2', A_3' sont les sommets d'un quadrilatère complet.

Les points de la droite S_1 sont représentés dans le plan σ par les coniques-enveloppes d'un faisceau tangentiel, c'est-à-dire par les coniques inscrites dans un quadrilatère complet. Les points A_1, A_2, A_3 sont représentés par les coniques dégénérées en deux faisceaux de rayons, sommets opposés du quadrilatère. Les coniques γ_1, γ_2, γ_3 sont représentées par les diagonales du quadrilatère complet. Les points A_1', A_2', A_3' sont représentés par les coniques-enveloppes dégénérées en deux faisceaux de rayons superposés ayant comme sommets les sommets du triangle diagonal. Il s'agit de démontrer que ces trois coniques dégénérées et le faisceau tangentiel appartiennent à un même système linéaire tangentiel, doublement infini.

Résolvons la question corrélative. Soient γ les coniques passant par quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 ; soient $Q_1 = P_1P_2, P_3P_4$; $Q_2 = P_1P_3, P_2P_4$ et $Q_3 = P_1P_4, P_2P_3$ les points diagonaux de ce quadrangle. Les droites Q_1Q_2, Q_1Q_3, comptées chacune deux fois déterminent un faisceau de coniques dégénérées qui contient la conique du faisceau $|\gamma|$ formé de droites P_1P_2, P_3P_4. Donc les coniques γ et les droites Q_1Q_2, Q_1Q_3 comptées deux fois appartiennent à un même réseau Σ. Les droites Q_1Q_2, Q_2Q_3, comptées chacune deux fois, déterminent un faisceau de coniques dégénérées ayant en commun, avec le réseau Σ, la conique formée de la droite Q_1Q_2 comptée deux fois et la conique formée des droites P_1P_3 et P_2P_4. Ce faisceau appartient donc au réseau Σ.

Il en résulte que le plan α contient les points A_2' et A_3'. Cela étant, la droite $A_2'A_3'$ appartient à α et est une corde de γ_1 ; elle est donc l'intersection des plans α et α_1 et passe par A_1. De même, $A_3'A_1'$ passe par A_2 et $A_1'A_2'$ par A_3.

L'espace à trois dimensions déterminé par α_1 et la droite S_1 coupe l'espace S_3 sur lequel on projette F suivant une droite a_1, double pour la projection F', puisque chaque point de a_1 correspond à deux points de la conique γ_1. De même, les coniques γ_2, γ_3 donnent deux droites a_2, a_3 doubles pour F'.

Le plan α coupe S_3 en un point A qui est triple pour F', puisqu'il correspond à A_1', A_2', A_3'. Le point A appartient d'ailleurs aux droites a_1, a_2, a_3. Celles-ci forment les arêtes d'un trièdre, sans quoi la surface F' serait dégénérée.

Soient R_1, R_2 deux points de γ_1 alignés sur A_1 et R le point de rencontre avec S_3 du plan mené par les droites S_1, R_1R_2. Les plans tangents à F en R_1, R_2 sont projetés sur S_3 suivant les plans tangents à F' au point R de la droite a_1. Si R_1, R_2 coïncident, c'est-à-dire si la droite considérée est une des deux tangentes à γ_1 menées par A_1, le point R est un point-pince de F'. Chacune des droites a_1, a_2, a_3 contient donc deux points-pince de la surface F'.

La surface de Steiner, du quatrième ordre, passe doublement par les arêtes d'un trièdre dont le sommet est un point triple de la surface. Sur chacune des droites doubles se trouvent deux points-pince.

230. Représentation plane et équation de la surface de Steiner. — Aux points de la droite S_1 correspondent dans σ les coniques tangentes à quatre droites. Les sections planes de F' étant les projections des sections de F par les hyperplans passant par S_1, les coniques de σ qui correspondent à ces sections sont conjuguées aux coniques du faisceau tangentiel dont il vient d'être question.

Prenons comme triangle de référence dans σ le triangle diagonal du quadrilatère complet base du faisceau tangentiel en question. L'équation de celui-ci peut s'écrire, en prenant l'une des droites du quadrilatère comme droite unitaire,

$$\lambda_1 (\xi_0^2 - \xi_1^2) + \lambda_2 (\xi_0^2 - \xi_2^2) = 0.$$

Les coniques conjuguées ont pour équation

$$\mu (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) + \mu_0 x_1 x_2 + \mu_1 x_2 x_0 + \mu_2 x_0 x_1 = 0. \quad (1)$$

Rapportons projectivement ces coniques aux plans de S_3 en posant

$$\frac{X_0}{x_1 x_2} = \frac{X_1}{x_2 x_0} = \frac{X_2}{x_0 x_1} = \frac{X_3}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}.$$

L'équation de F' s'écrit

$$X_0 X_1 X_2 X_3 = X_1^2 X_2^2 + X_2^2 X_0^2 + X_0^2 X_1^2.$$

La surface de Steiner admet comme représentation plane le système linéaire ∞^3 déterminé par une conique et les coniques circonscrites à un triangle conjugué à la première conique.

Les droites doubles $X_1 = X_2 = 0$, $X_2 = X_0 = 0$, $X_0 = X_1 = 0$ correspondent respectivement aux côtés $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ du triangle de référence ; les coniques (1) passant par un point d'un côté du triangle passent en conséquence par le conjugué de ce point dans l'involution ayant pour points doubles des points (1, 1) et (1, —1). Le point triple $X_0 = X_1 = X_2 = 0$ correspond aux sommets du triangle de référence. Les points-pince correspondent aux points

$$(0,1,1),\ (0,1,-1),\ (1,0,1),\ \ldots,\ (1,-1,0),$$

c'est-à-dire aux points doubles des involutions dont il a été question plus haut.

231. Propriété des plans tangents à la surface de Steiner. — La surface F' contient ∞^2 coniques correspondant aux droites du plan σ. Trois de ces coniques sont formées des droites doubles a_1, a_2, a_3 comptées chacune deux fois. Les coniques de F' s'appuient sur les trois droites doubles et se rencontrent deux à deux en un point.

Une section plane de la surface correspond à une conique du système (1). Soient Y un point de F', y le point qui lui correspond dans σ. Le plan tangent η à F' en Y coupe la surface suivant une courbe qui a un point double en Y ; la conique qui lui correspond dans σ a un point double en y et dégénère en deux droites passant par y, donc *un plan tangent à la surface de Steiner coupe celle-ci suivant deux coniques passant par le point de contact.*

Les points-pince sont représentés dans le plan σ par des points qui se distribuent par trois sur quatre droites. La conique qui correspond à une de ces droites sur F possède une propriété remarquable. Soient γ cette conique, Y un de ses points. Le plan tangent en Y à F' coïncide avec le plan de γ et coupe F' suivant une seconde conique γ' qui rencontre a_1, a_2, a_3 aux mêmes points que γ. Mais en ces points, les plans tangents à F' sont confondus, donc γ et γ' ayant même tangente en trois points sont confondues. Il en résulte que le plan de γ touche F' en chaque point de γ.

Il existe quatre plans touchant la surface de Steiner suivant une conique.

232. La surface de Steiner comme enveloppe de quadriques. — L'équation de la surface de Steiner peut s'écrire

$$(X_1X_2 + X_2X_0 + X_0X_1)^2 - 2\,X_0X_1X_2\,(X_0 + X_1 + X_2) = X_0X_1X_2X_3\,.$$

La surface de Steiner est donc l'enveloppe de chacun des systèmes de quadriques

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^2 X_1 X_2 + 2\lambda (X_1 X_2 + X_2 X_0 + X_0 X_1) \\ \qquad + X_0 (2 X_0 + 2 X_1 + 2 X_2 + X_3) = 0 , \\ \lambda^2 X_2 X_0 + 2\lambda (X_1 X_2 + X_2 X_0 + X_0 X_1) \\ \qquad + X_1 (2 X_0 + 2 X_1 + 2 X_2 + X_3) = 0 , \\ \lambda^2 X_0 X_1 + 2\lambda (X_1 X_2 + X_2 X_0 + X_0 X_1) \\ \qquad + X_2 (2 X_0 + 2 X_1 + 2 X_2 + X_3) = 0 . \end{array}\right\} \quad (1)$$

Une quadrique de l'un de ces systèmes touche la surface F' le long d'une courbe du quatrième ordre. Examinons le premier système.

En combinant l'équation de la surface et celle de la quadrique, on voit que la courbe de contact peut être représentée par les équations

$$\lambda (X_1 X_2 + X_2 X_0 + X_0 X_1) + X_0 (2 X_0 + 2 X_1 + 2 X_2 + X_3) = 0 ,$$
$$\lambda X_1 X_2 + X_1 X_2 + X_2 X_0 + X_0 X_1 = 0.$$

La seconde représente un cône passant par les droites doubles a_0, a_1, a_2, de la surface ; la première est une quadrique passant par les droites a_0, a_1. Le restant de l'intersection de ces deux quadriques est une conique située dans le plan

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 2)(X_1 + X_2) + (\lambda + 1)(2 X_0 + X_3) = 0,$$

le long de laquelle la quadrique (1) touche la surface F'.

233. Surface de Steiner ayant deux droites doubles infiniment voisines. — Supposons maintenant que la droite S_1 touche l'hypersurface M_4^3. Aux points de S_1 correspondent les coniques-enveloppes (d'un faisceau tangentiel) ayant trois tangentes fixes, le point de contact avec l'une d'elles étant fixe. Un tel faisceau tangentiel peut être représenté par

$$\lambda_1 (\xi_1^2 - \xi_2^2) + \lambda_2 \xi_0 \xi_1 = 0.$$

Les coniques conjuguées sont données par

$$\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_0 x_2 + \lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_3 (x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

En posant

$$\frac{X_0}{x_0^2} = \frac{X_1}{x_0 x_2} = \frac{X_2}{x_1 x_2} = \frac{X_3}{x_1^2 + x_2^2} ,$$

on obtient, pour équation de la surface F_1', projection de F à partir de S_1,

$$X_0 X_1^2 X_3 = X_1^4 + X_0^2 X_2^2 .$$

Le point (0, 0, 0, 1) est triple et les droites $X_0=X_1=0$, $X_1=X_2=0$ sont doubles pour F_1'.

Les plans tangents à la surface F_1' en un point de la droite double $X_0=X_1=0$ coïncident tous deux avec le plan $X_1=0$.

En un point $(Y_0, 0, 0, Y_3)$ de la droite $X_1=X_2=0$, les plans tangents sont donnés par

$$Y_0(Y_3X_1^2-Y_0X_2^2)=0 .$$

Ils sont confondus au point (1, 0, 0, 0), seul point-pince de la surface située sur cette droite.

La surface F_1' est l'enveloppe des quadriques

$$\lambda^2X_1^2+2\lambda X_0X_2+X_0X_3-X_1^2=0 ,$$

qui sont des cônes de sommet $(0, 0, 1, -2\lambda)$, touchant le plan $X_0=0$ le long de la droite $X_0=X_1=0$. Par conséquent, F_1' possède une droite double infiniment voisine de la droite $X_0=X_1=0$ située dans le plan $X_0=0$. Les cônes touchant la surface F_1' le long de coniques situées dans les plans

$$(\lambda^2+1)X_2+\lambda X_3=0 .$$

234. Surface de Steiner ayant trois droites doubles infiniment voisines. — Supposons que la droite S_1 oscule la variété M_4^3. Le faisceau tangentiel de coniques qui correspond dans le plan σ à la droite S_1 ne contient plus qu'une courbe dégénérée (en deux faisceaux distincts de droites). Son équation peut s'écrire

$$\lambda_1\xi_1\xi_2+\lambda_2(\xi_2^2+\xi_0\xi_1)=0 .$$

Les coniques conjuguées sont

$$\lambda_0x_0^2+\lambda_1(x_2^2-x_0x_1)+\lambda_2x_0x_2+\lambda_3x_1^2=0 .$$

En posant

$$\frac{X_0}{x_0^2}=\frac{X_1}{x_2^2-x_0x_1}=\frac{X_2}{x_0x_1}=\frac{X_3}{x_1^2} ,$$

on obtient, pour équation de la projection F_2' de F à partir de S_1,

$$X_0^3X_3=(X_2^2-X_0X_1)^2 .$$

Le point (0, 0, 0, 1) est triple uniplanaire et la droite $X_0=X_2=0$ est double pour la surface F_2'. Les plans tangents aux points de cette droite sont confondus avec $X_0=0$.

La surface F_2' est l'enveloppe du système de quadriques

$$\lambda^2X_0^2+2\lambda(X_2^2-X_0X_1)+X_0X_3=0 ;$$

ces quadriques sont des cônes de sommets $(0, 1, 0, 2\lambda)$, qui touchent le plan $X_0=0$ le long de la droite $X_0=X_2=0$. On en conclut que la surface F_2' possède, dans le plan $X_0=0$, une droite double infiniment voisine de la droite double $X_0=X_2=0$.

D'après son équation, la surface F_2' appartient à un faisceau déterminé par deux surfaces. L'une comprend le plan $X_0=0$ compté trois fois ; l'autre est un cône de second ordre, touchant le plan $X_0=0$ le long de la droite $X_0=X_2=0$, compté deux fois. Il en résulte que la droite $X_0=X_2=0$ compte pour douze unités dans l'intersection des deux surfaces, ou encore dans l'intersection de la seconde surface et de F_2'. On en conclut que F_2' possède deux droites doubles infiniment voisines successives de la droite $X_0=X_2=0$, la première située dans le plan $X_0=0$.

CHAPITRE X

LES VARIÉTÉS DE SEGRE

§ 1. *Variétés de Segre en général*

235. Préliminaires. — Considérons deux ponctuelles s_1, s_2 et soient y_1, y_2 les coordonnées d'un point de s_1, z_1, z_2 celles d'un point de s_2. A un couple de points y, z des ponctuelles s_1, s_2 faisons correspondre dans l'espace S_3 le point X de coordonnées

$$\frac{X_{11}}{y_1 z_1} = \frac{X_{12}}{y_1 z_2} = \frac{X_{21}}{y_2 z_1} = \frac{X_{22}}{y_2 z_2} .$$

Le lieu de ce point X est la quadrique Q d'équation

$$X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} = 0 .$$

La quadrique Q représente donc les couples de points de ponctuelles s_1, s_2.

Aux couples de points de s_1, s_2 contenant un point fixe de s_1, correspondent les points d'une génératrice rectiligne

$$\frac{X_{11}}{y_1} = \frac{X_{21}}{y_2} , \qquad \frac{X_{12}}{y_1} = \frac{X_{22}}{y_2} ,$$

de Q. De même, aux couples de points de s_1, s_2 contenant un point fixe de s_2 correspondent sur Q les points d'une génératrice rectiligne

$$\frac{X_{11}}{z_1} = \frac{X_{12}}{z_2} , \qquad \frac{X_{21}}{z_1} = \frac{X_{22}}{z_2}$$

de Q. On obtient ainsi les génératrices rectilignes des deux modes de Q.

Les sections planes de Q correspondent projectivement aux homographies entre les ponctuelles s_1, s_2.

En posant $x_1 = y_1 = z_1$, on obtient la représentation de la quadrique Q sur un plan dont les coordonnées ponctuelles sont x_1, y_2, z_2. Aux sections planes

$$\lambda_{11}X_{11} + \lambda_{12}X_{12} + \lambda_{21}X_{22} + \lambda_{22}X_{22} = 0$$

correspondent les coniques

$$\lambda_{11}x_1^2 + x_1(\lambda_{12}z_2 + \lambda_{21}y_2) + \lambda_{22}y_2z_2 = 0 ,$$

passant par les points (0, 1, 0), (0, 0, 1).

C. Segre [1] a généralisé les concepts précédents en considérant la variété représentant les groupes de k points pris dans k espaces linéaires. Cette variété a reçu le nom de *variété de Segre.*

236. Définition d'une variété de Segre. — Considérons k espaces linéaires $S_{r_1}, S_{r_2}, \dots, S_{r_k}$ respectivement de dimensions $r_1, r_2, \dots, r_k$. Désignons par $x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_{r_i}^{(i)}$ les coordonnées projectives homogènes des points de l'espace S_{r_i} et posons

$$\rho X_{i_1 i_2 \dots i_k} = x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_k}^{(k)}, \tag{1}$$

$$(i_1 = 0, 1, \dots, r_1;\quad i_2 = 0, 1, \dots, r_2; \dots ;\quad i_k = 0, 1, \dots, r_k) .$$

Les quantités X sont au nombre de

$$(r_1+1)(r_2+1)\dots(r_k+1) = R+1 .$$

Interprétons ces quantités comme coordonnées d'un point X d'un espace linéaire S_R. A un groupe de k points $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(k)}$ les espaces $S_{r_1}, S_{r_2}, \dots, S_{r_k}$ correspond, par les équations (1), un point X de S_r. Le lieu de ce point est une variété V_r à

$$r = r_1 + r_2 + \dots + r_k$$

dimensions représentant les groupes de k points des k espaces donnés. Cette variété est la variété de Segre d'indices r_1, r_2, ..., r_k.

237. Sections hyperplanes de V_r. — Un hyperplan de S_R a pour équation

$$\Sigma\xi_{i_1 i_2 \dots i_k} \quad X_{i_1 i_2 \dots i_k} = 0 .$$

Par les équations (1), il lui correspond une *liaison ponctuelle*

$$\Sigma\xi_{i_1 i_2 \dots i_k} \quad x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_k}^{(k)} = 0 \tag{2}$$

entre les espaces $S_{r_1}, S_{r_2}, \dots, S_{r_k}$. Il existe une projectivité entre les hyperplans de S_R et les liaisons ponctuelles (2).

Parmi les liaisons ponctuelles (2) se trouvent les liaisons ponctuelles dégénérées d'équation

$$(\Sigma\xi_{i_1}^{(1)} x_{i_1}^{(1)})(\Sigma\xi_{i_2}^{(2)} x_{i_2}^{(2)}) \dots (\Sigma\xi_{i_k}^{(k)} x_{i_k}^{(k)}) = 0 . \tag{3}$$

[1] *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1891, t. V).

Chacun des facteurs du premier membre de cette équation, égalé à zéro, représente un hyperplan d'un des espaces S_{r_1}, S_{r_2}, ..., S_{r_k}. Soient respectivement $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, ..., $\xi^{(k)}$ ces hyperplans.

Un point de $\xi^{(i)}$ et $k-1$ points arbitrairement choisis un dans chacun des $i-1$ premiers espaces et un dans chacun des $k-i$ derniers, satisfont à l'équation (3).

238. Ordre de la variété de Segre. — L'ordre de la variété de Segre V_r est égal au nombre de ses points situés dans un espace S_{R-r}, c'est-à-dire dans l'espace commun à r hyperplans de S_R. Ce nombre ne change pas si les hyperplans en question correspondent à des liaisons ponctuelles dégénérées telles que (3).

Cela revient à considérer r systèmes de k hyperplans, chacun de ces systèmes ayant un hyperplan dans chacun des k espaces S_{r_1}, S_{r_2}, ..., S_{r_k}. L'ordre de V_r est égal au nombre de groupes de k points situés le premier sur r_1 des hyperplans donnés dans S_{r_1}, le second dans r_2 des hyperplans donnés dans S_{r_2}, ..., le dernier dans r_k des hyperplans donnés dans S_{r_k}, deux points d'un même groupe n'appartenant pas à des hyperplans d'un même système.

Il en résulte que l'ordre de V_r est

$$n = \binom{r_1 + r_2 + \dots r_k}{r_1}\binom{r_2 + r_3 + \dots + r_k}{r_2} \dots \binom{r_{k-1} + r_k}{r_{k-1}}\binom{r_k}{r_k},$$

c'est-à-dire

$$n = \frac{r!}{r_1!\, r_2! \dots r_k!}.$$

239. Variétés tracées sur une variété de Segre.

Considérons dans S_{r_1} un espace S_{ρ_1}, dans S_{r_2} un espace S_{ρ_2}, ..., dans S_{r_k} un espace S_{ρ_k}. Représentons par

$$(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k)$$

la variété de Segre représentant les groupes de k points des espaces S_{ρ_1}, S_{ρ_2}, ..., S_{ρ_k}. Cette variété est tracée sur la variété V_r.

Considérons en particulier la variété $(0, 0, \dots, 0, r_{p+1}, \dots, r_k)$, de dimension $r_{p+1} + \dots + r_k$. Elle correspond à un groupe de p points choisis dans les p premiers espaces. Lorsque ces points varient, la variété $(0, 0, \dots, 0, r_{p+1}, \dots, r_k)$ varie dans un système de dimension $r_1 + r_2 + \dots + r_p$. Par un point de V_r ne passe qu'une seule de ces variétés et deux de ces variétés ne peuvent avoir un point commun.

De même, la variété

$$(r_1, r_2, \ldots, r_p, 0, \ldots, 0),$$

à $r_1 + r_2 + \ldots + r_p$ dimensions, varie dans un système de dimension $r_{p-1} + \ldots + r_k$. Deux variétés $(0, \ldots, 0, r_{p+1}, \ldots, r_p)$ et $(r_1, r_2, \ldots, r_p, 0, \ldots, 0)$ n'ont qu'un point commun.

La variété $(0, \ldots, 0, r_i, 0, \ldots, 0)$ est un espace linéaire à r_i dimensions tracé sur V_r et variable dans un système de dimension $r - r_i$. Par un point de V_r passe un seul de ces espaces. Deux espaces de ce système ne se rencontrent pas.

On a, sur V_r, ∞^{r-r_1} espaces linéaires à r_1 dimensions, ∞^{r-r_2} espaces linéaires à r_2 dimensions, ..., ∞^{r-r_k} espaces linéaires à k dimensions, k espaces pris un dans chacun de ces systèmes, ont un seul point commun.

240. Représentation d'une variété de Segre sur un espace linéaire. — On peut disposer des facteurs de proportionnalité des coordonnées projectives des espaces $S_{r_1}, S_{r_2}, \ldots, S_{r_k}$ pour poser

$$x_0 = x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = \ldots = x_0^{(k)}.$$

Interprétons alors

$$x_0, x_1^{(1)}, \ldots, x_{r_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_{r_k}^{(k)}$$

comme coordonnées projectives des points d'un espace S_r. Nous obtenons ainsi une correspondance birationnelle entre les points de la variété V_r et ceux de S_r.

Aux sections hyperplanes de V_r correspondent dans S_r des hypersurfaces d'ordre k, dont l'équation peut s'écrire

$$x_0^k\varphi_0 + x_0^{k-1}\varphi_1 + \ldots + x_0^{k-i}\varphi_i + \ldots \varphi_k = 0, \tag{1}$$

où φ_i désigne un polynome à coefficients variables, dont les termes sont des produits de i coordonnées provenant de points de i espaces différents. L'hyperplan $x_0 = 0$ est rencontré par les hypersurfaces (1) suivant k espaces linéaires à $r - r_1 - 1$, $r - r_2 - 1$, ..., $r - r_k - 1$ dimensions. Un point commun à deux de ces espaces est double, un point commun à trois de ces espaces est triple, ... pour les hypersurfaces (1).

Nous allons examiner plus en détail le cas particulier $k = 3$, $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. La variété de Segre V_3^6, de S_7, représentant les points de trois ponctuelles, est d'ordre six. Elle a pour équations

$$X_{000}X_{111} = X_{011}X_{100} = X_{101}X_{010} = X_{110}X_{001},$$

$$X_{000}X_{011} = X_{001}X_{010}, \quad X_{000}X_{101} = X_{100}X_{001}, \quad X_{000}X_{110} = X_{100}X_{010},$$

$$X_{111}X_{100} = X_{110}X_{101}, \quad X_{111}X_{010} = X_{110}X_{011}, \quad X_{111}X_{001} = X_{101}X_{011}.$$

Posons

$$x_0 = x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = x_0^{(3)}, \quad x_1 = x_1^{(1)}, \quad x_2 = x_1^{(2)}, \quad x_3 = x_1^{(3)}.$$

A une section hyperplane de V_3^6 correspond dans S_3 la surface cubique

$$\xi_0 x_0^3 + x_0^2 (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) \\ + x_0 (\xi_{23} x_2 x_3 + \xi_{31} x_3 x_1 + \xi_{12} x_1 x_2) + \xi_{123} x_1 x_2 x_3 = 0 .$$

passant simplement par les côtés du triangle

$$x_0 = x_1 = 0 , \qquad x_0 = x_2 = 0 , \qquad x_0 = x_3 = 0$$

et doublement par les sommets de ce triangle.

Aux plans

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$$

de S_3 correspondent dans S_7 les sections de la variété V_3^6 par les hyperplans

$$\lambda_0 X_{000} + \lambda_1 X_{100} + \lambda_2 X_{010} + \lambda_3 X_{001} = 0 .$$

Ces hyperplans ont en commun l'espace S_3 d'équations

$$X_{000} = X_{100} = X_{010} = X_{001} = 0 ,$$

coupant V_3^6 suivant les trois droites

$$X_{011} = X_{101} = 0 , \quad X_{101} = X_{110} = 0 , \quad X_{110} = X_{011} = 0 ,$$

passant par un même point. On obtient donc la représentation de la variété V_3^6 sur l'espace S_3 en le projetant à partir d'un espace à trois dimensions coupant la variété suivant les arêtes d'un trièdre.

§ 2. *La variété de Segre représentant deux plans*

241. Equations de la variété. — Soient y_0, y_1, y_2 les coordonnées des points d'un plan (y) et z_0, z_1, z_2 celles des points d'un plan (z). Les équations paramétriques de la variété de Segre V_4^6 de S_8 représentant les couples de points de ces deux plans sont

$$\rho X_{ik} = y_i z_k , \quad (i, k = 0, 1, 2) .$$

Les équations de la variété V_4^6 sont donc obtenues en exprimant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_{00} & X_{01} & X_{02} \\ X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ X_{20} & X_{21} & X_{22} \end{vmatrix}$$

est de caractéristique un.

242. Les variétés de Segre appartenant à V_4^6. — Aux couples de points y, z dont le point y est fixe et le point z variable correspondent, sur V_4^6, les points d'un plan η d'équations

$$\frac{X_{00}}{y_0}=\frac{X_{10}}{y_1}=\frac{X_{20}}{y_2}, \qquad \frac{X_{01}}{y_0}=\frac{X_{11}}{y_1}=\frac{X_{21}}{y_2},$$
$$\frac{X_{02}}{y_0}=\frac{X_{12}}{y_1}=\frac{X_{22}}{y_2}.$$

Lorsque le point y varie, on obtient ∞^2 plans η formant une congruence possédant les propriétés suivantes :

1° Deux plans η ne se rencontrent pas ;

2° Par un point de V_4^6 passe un plan η et un seul.

Aux couples de points y, z dont le point z est fixe correspondent de même les points d'un plan ζ, engendrant une congruence possédant les mêmes propriétés que la congruence des plans η.

Un plan η et un plan ζ se rencontrent en un seul point.

Soient m une droite du plan (y) et n une droite du plan (z). Les couples de points des droites m, n sont représentés sur V_4^6 par les points d'une quadrique Q. Il existe sur V_4^6 un système ∞^4 de ces quadriques et par deux points de V_4^6 passe une seule quadrique Q. Deux quadriques Q ont en général un point commun, mais elles peuvent avoir une droite en commun.

Les couples formés d'un point de la droite m et d'un point du plan z sont représentés sur V_4^6 par les points d'une variété de Segre V_3^3. La variété V_3^3 contient ∞^1 plans η. Il existe ∞^2 variétés V_3^3 et deux de ces variétés ont en commun un plan η. Par deux points de V_4^6 passe une variété V_3^3.

De même, les couples formés d'un point du plan (y) et d'un point de la droite n sont représentés sur V_4^6 par les points d'une variété de Segre W_3^3, contenant ∞^1 plans ζ. Il existe ∞^2 variétés W_3^3 et deux de ces variétés ont en commun un plan ζ. Par deux points de V_4^6 passe une variété W_3^3.

Une variété V_3^3 et une variété W_3^3 ont en commun une quadrique Q.

243. Sections hyperplanes de la variété V_4^6. — Aux points de la section de V_4^6 par l'hyperplan

$$\Sigma\xi_{ik}X_{ik}=0 \tag{1}$$

correspondent les couples de points conjugués dans la réciprocité

$$\Sigma\xi_{ik}y_iz_k=0. \tag{2}$$

Supposons que cette réciprocité soit singulière de première espèce, c'est-à-dire que le déterminant $|\xi_{ik}|$ soit de caractéristique deux. Il existe alors un point M du plan (y) auquel correspond une droite indéterminée du plan (z) et un point N du plan (z), auquel correspond une droite indéterminée du plan (y). Il existe une projectivité entre les faisceaux de rayons de sommets M, N ; à un point y, distinct de M, correspond la droite passant par N homologue de la droite My dans cette projectivité, et inversement. Soient μ le plan η associé au point M et ν le plan ζ associé au plan N. L'hyperplan considéré contient les plans μ, ν. Si m, n sont deux droites homologues des faisceaux de sommets M, N, la quadrique représentant les couples de points des droites m, n appartient à la section de V_4^6 par l'hyperplan. Cette quadrique passe par le point commun aux plans μ, ν et coupe chacun de ces plans suivant une droite. La section de V_4^6 par l'hyperplan contient ∞^1 quadriques analogues.

Supposons maintenant que la réciprocité (z) soit singulière de seconde espèce, c'est-à-dire que le déterminant $|\xi_{ik}|$ soit de caractéristique un. A tout point du plan (y) correspond une droite fixe n de (z) et à tout point du plan (z), une droite fixe m de (y). La section de V_4^6 par l'hyperplan (1) se compose de la variété de Segre V_3^3 représentant les couples de points de la droite m et du plan (z), et de la variété W_3^3 représentant les couples de points du plan (y) et de la droite n. Ces deux variétés ont en commun la quadrique Q représentant les couples de points des droites m, n.

244. Espaces tangents à la variété V_4^6. — Il existe un espace linéaire S_4 tangent à la variété V_4^6 en un point R de cette variété. Cet espace, qui sera désigné par ρ, doit contenir les droites passant par R et appartenant à V_4^6. Par le point R passent un plan η et un plan ζ; ces plans n'ayant que le point R en commun et appartenant à ρ, déterminent complètement cet espace.

Un hyperplan tangent à V_4^6 au point R contient ρ. Soient M, N les points des plans (y), (z) qui correspondent respectivement au plan η et au plan ζ passant par R. A l'hyperplan considéré doit correspondre une réciprocité entre les plans (y), (z) telle que M soit l'homologue de tout point de (z) et N l'homologue de tout point de (y). Cette réciprocité est donc singulière de première espèce.

245. Représentation d'une homographie. — Soit Ω une homographie entre les plans (y), (z) dont les équations sont

$$\rho y_i = a_{i0} z_0 + a_{i1} z_1 + a_{i2} z_2, \qquad (i = 0,\ 1,\ 2)\,.$$

Aux couples de points y, z homologues dans cette homographie correspondent sur V_4^6 les points d'une surface Ω'. Les équations paramétriques de Ω' peuvent s'écrire

$$\rho X_{ik} = y_i z_k = a_{i0} z_0 z_k + a_{i1} z_1 z_k + a_{i2} z_2 z_k\,. \tag{1}$$

Des équations de Ω, on déduit

$$\rho y_i y_k = a_{i0} X_{k0} + a_{i1} X_{k1} + a_{i2} X_{k2},$$

de sorte que la surface Ω' appartient à un espace S_5 d'équations

$$a_{i0} X_{k0} + a_{i1} X_{k1} + a_{i2} X_{k2} = a_{k0} X_{i0} + a_{k1} X_{i1} + a_{k2} X_{i2},$$
$$(i,\ k = 0,\ 1,\ 2)\ .$$

Il existe, par les relations (1), une projectivité entre les hyperplans de cet espace S_5 et les coniques du plan (z), donc la surface Ω' est une surface de Veronese.

246. Section de la variété V_4^6 par un espace linéaire à six dimensions. — Considérons un espace linéaire S_6 à six dimensions occupant une position générale par rapport à V_4^6 ; il coupe cette variété suivant une surface algébrique F. L'espace S_6 est l'intersection de deux hyperplans, par conséquent les points de F représentent les couples de points y, z conjugués dans deux réciprocités entre les plans (y), (z), c'est-à-dire les couples de points homologues dans une transformation quadratique T entre ces plans.

Soient M_1, M_2, M_3 les points fondamentaux de T dans le plan (y) et N_1, N_2, N_3 les points fondamentaux de T dans le plan (z), R_{ik} le point de V_4^6 représentant le couple $M_i N_k$. Supposons qu'aux points infiniment voisins de M_1, T fasse correspondre les points de la droite N_2N_3 et qu'aux points M_2, M_3 soient de même associées les droites N_3N_1, N_1N_2.

Aux couples de points formés de M_1 et des points de la droite N_2N_3 correspondent sur F les points de la droite $R_{12}R_{13}$. On voit de même que F contient encore cinq autres droites $R_{23}R_{21}$, $R_{31}R_{32}$, $R_{21}R_{31}$, $R_{32}R_{12}$, $R_{13}R_{23}$. Ces six droites forment un hexagone gauche.

La transformation T est représentée par des équations de la forme

$$y_0 : y_1 : y_2 = \varphi_0(z_0,\ z_1,\ z_2) : \varphi_1 : \varphi_2\ ,$$

où $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ sont les équations de trois coniques linéairement indépendantes passant par les points N_1, N_2, N_3. Les équations paramétriques de la surface F sont donc

$$\rho X_{ik} = z_k \varphi_i(z_0,\ z_1,\ z_2)\ .$$

La surface F représente donc, dans S_6, le système linéaire de cubiques ayant trois points-base N_1, N_2, N_3, surface du sixième ordre étudiée plus haut.

Supposons maintenant que l'espace S_6 occupant une position particulière, coupe V_4^6 suivant une variété à trois dimensions, Ω_3. Soient θ_1, θ_2 les réciprocités entre les plans (y), (z) correspondant à deux hyperplans passant par S_6.

Tout point d'un des plans (y), (z), par exemple du plan

(y), doit être associé, dans θ_1, θ_2 à une infinité de point du plan (z). Il faut donc qu'à tout point y, θ_1 et θ_2 fassent correspondre une même droite. Les réciprocités θ_1, θ_2 étant distinctes, cela n'est possible que si cette droite est fixe. Mais alors, θ_1 et θ_2 sont singulières de seconde espèce. Soit n la droite fixe. θ_1 et θ_2 étant singulières de seconde espèce, à tout point z, ces réciprocités font correspondre respectivement des droites m_1, m_2 du plan (y).

La section de V_4^6 par l'espace S_6 contient la variété de Segre V_3^3 représentant les couples de points du plan (y) et de la droite n (variété qui appartient à un espace S_5) et le plan η qui correspond au point $m_1 m_2$.

247. Section de la variété V_4^6 par un espace linéaire à cinq dimensions. — Aux points de la variété V_4^6 situés dans un espace S_5 correspondent les couples de points y, z conjugués dans trois réciprocités. Ces points engendrent en général des cubiques planes C_y, C_z et la courbe C, du sixième ordre, section de V_4^6 par S_5, est en correspondance birationnelle avec chacune de ces cubiques.

Supposons qu'un espace S_5 puisse couper la variété V_4^6 suivant une surface F. Alors, à tout point du plan (y) doit être associé un point du plan (z), le couple formé par ces points devant correspondre à un point de F. Les points homologues y, z représentant un point de F ne peuvent se correspondre dans une transformation quadratique, car alors F appartiendrait à un espace à six dimensions. Les points se correspondent donc dans une homographie et F est une surface de Veronese.

Il existe des espaces S_5 coupant la variété V_4^6 suivant des variétés à trois dimensions. Ces variétés sont les variétés V_3^3 et W_3^3 rencontrées plus haut.

248. Relation entre la variété V_4^6 et la surface de Veronese. — Considérons, entre les plans (y), (z), l'homographie

$$\rho y_i = z_i\,, \qquad (i = 0,\, 1,\, 2)\,.$$

Il lui correspond, dans l'espace S_8, l'homographie harmonique H d'équations

$$\rho X'_{ik} = X_{ki}\,.$$

Les axes de cette homographie sont le plan

$$X_{00} = X_{11} = X_{22} = 0\,,\quad X_{12} + X_{21} = 0\,,\quad X_{20} + X_{02} = 0\,,\quad X_{01} + X_{10} = 0 \tag{1}$$

et l'espace S_5

$$X_{12} = X_{21}\,,\quad X_{20} = X_{02}\,,\quad X_{01} = X_{10}\,. \tag{2}$$

Le plan (1) ne rencontre pas la variété V_4^6, mais l'espace (2) la rencontre suivant une surface de Veronese. La variété V_4^6 est transformée en elle-même par l'homographie H.

Rapportons projectivement les hyperplans passant par le plan (1) aux hyperplans d'un espace S_5 en posant

$$\frac{Y_{00}}{2\,X_{00}} = \frac{Y_{11}}{2\,X_{11}} = \frac{Y_{22}}{2\,X_{22}} = \frac{Y_{12}}{X_{12}+X_{21}}$$
$$= \frac{Y_{20}}{X_{20}+X_{02}} = \frac{Y_{01}}{X_{01}+X_{10}}\,. \tag{3}$$

A la variété V_4^6 correspond la variété

$$\begin{vmatrix} Y_{00} & Y_{01} & Y_{20} \\ Y_{01} & Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{20} & Y_{12} & Y_{22} \end{vmatrix} = 0\,, \tag{4}$$

dont l'équation s'obtient en éliminant les X entre les équations (3) et celles de la variété V_4^6.

L'équation (4) représente le lieu M_4^3 des cordes d'une surface de Veronese Φ.

Aux hyperplans

$$\lambda_0 (X_{12} - X_{21}) + \lambda_1 (X_{20} - X_{02}) + \lambda_2 (X_{01} - X_{10}) = 0\,,$$

passant par l'espace (2), correspondent, dans S_5, les hyperquadriques

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_0 & Y_{00} & Y_{01} & Y_{20} \\ \lambda_1 & Y_{01} & Y_{11} & Y_{12} \\ \lambda_2 & Y_{20} & Y_{12} & Y_{22} \end{vmatrix} = 0\,,$$

passant par la surface de Veronese Φ.

L'enveloppe de ce système d'hyperquadrique est la variété M_4^3.

249. Représentation de la variété V_4^6 sur un espace S_4. — Posons $x_0 = y_0 = z_0$. Aux sections hyperplanes de V_4^6 correspondent, dans l'espace S_4 dont les coordonnées sont x_0, y_1, y_2, z_1, z_2, les hyperquadriques

$$\xi_{00} x_0^2 + x_0 (\xi_{10} y_1 + \xi_{20} y_2 + \xi_{01} z_1 + \xi_{02} z_2)$$
$$+ \xi_{11} y_1 z_1 + \xi_{12} y_1 z_2 + \xi_{21} y_2 z_1 + \xi_{22} y_2 z_2 = 0\,.$$

Ces hyperquadriques passent par les droites s_1, s_2 ayant respectivement pour équations

$$x_0 = y_1 = y_2 = 0\,, \qquad x_0 = z_1 = z_2 = 0\,.$$

La correspondance birationnelle entre V_4^6 et l'espace S_4 est donnée par

$$\frac{X_{00}}{x_0}=\frac{X_{10}}{y_1}=\frac{X_{20}}{y_2}=\frac{X_{01}}{z_1}=\frac{X_{02}}{z_2}\ .$$

A un hyperplan

$$\lambda_{00}x_0+\lambda_{10}y_1+\lambda_{20}y_2+\lambda_{01}z_1+\lambda_{02}z_2=0$$

de S_4 correspond la section de V_4^6 par l'hyperplan

$$\lambda_{00}X_{00}+\lambda_{10}X_{10}+\lambda_{20}X_{20}+\lambda_{01}X_{01}+\lambda_{02}X_{02}=0\ .$$

Ces hyperplans passent par l'espace S_5 d'équations

$$X_{00}=X_{10}=X_{20}=X_{01}=X_{02}=0\ , \tag{2}$$

qui coupe V_4^6 suivant la quadrique

$$X_{11}X_{22}-X_{12}X_{21}=0\ . \tag{3}$$

La représentation de V_4^6 sur S_4 s'obtient donc en projetant la variété de l'espace (2).

Considérons les hyperquadriques (1) passant par la droite

$$x_0=0\ ,\qquad y_2=\lambda y_1\ ,\qquad z_2=\mu z_1\ ,$$

s'appuyant sur s_1, s_2. A ces hyperquadriques correspondent les hyperplans

$$\xi_{00}X_{00}+\xi_{10}X_{10}+\xi_{20}X_{20}+\xi_{01}X_{01}+\xi_{02}X_{02}$$
$$+\xi_{12}(X_{12}-\mu X_{11})+\xi_{21}(X_{21}-\lambda X_{11})+\xi_{22}(X_{22}-\lambda\mu X_{11})=0\ .$$

Ces hyperplans passent par le point $(1, \mu, \lambda, \lambda\mu)$ de la quadrique (3). Donc, aux points de la variété V_4^6 infiniment voisins d'un point de la quadrique (3), correspondent les points d'une droite s'appuyant sur les droites s_1, s_2.

CHAPITRE XI

INTERPRÉTATION HYPERSPATIALE DE LA GÉOMÉTRIE RÉGLÉE

§ 1. *Représentation des droites de* S_3 *par les points d'une hyperquadrique de* S_5

250. Préliminaires [1]. — Une droite de l'espace S_3 est déterminée par deux points y, z ou par deux plans η, ζ. Les coordonnées radiales de la droite sont p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{42}, p_{34}, où l'on pose

$$p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i\,.$$

Ces coordonnées sont liées par la relation

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0\,. \tag{1}$$

Les coordonnées axiales de la droite sont q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{23}, q_{42}, q_{34}, où l'on pose

$$q_{ik} = \eta_i\zeta_k - \eta_k\zeta_i\,.$$

On a

$$q_{12}q_{34} + q_{13}q_{42} + q_{14}q_{23} = 0$$

et

$$\frac{q_{12}}{p_{34}} = \frac{q_{13}}{p_{42}} = \frac{q_{14}}{p_{23}} = \frac{q_{23}}{p_{14}} = \frac{q_{42}}{p_{13}} = \frac{q_{34}}{p_{12}}\,.$$

La condition d'incidence de deux droites p, p' s'exprime en annulant la forme polaire du premier membre de l'équation (1), c'est-à-dire par

$$p_{12}p_{34}' + p_{13}p_{42}' + p_{14}p_{23}' + p_{23}p_{14}' + p_{42}p_{13}' + p_{34}p_{12}' = 0\,.$$

Nous représenterons le premier membre de cette relation par $\Omega(p, p')$, de sorte que l'équation (1) s'écrira

$$\Omega(p, p) = 0 \tag{2}$$

[1] Voir nos *Leçons de Géométrie analytique à trois dimensions*, chap. IX, § 5 (Liège, Edit. Sciences et Lettres, 1945).

et la condition d'incidence de deux droites,

$$\Omega(p, p')=0 . \tag{3}$$

251. L'hyperquadrique de Klein. — Interprétons les quantités $p_{12}, p_{13}, \dots, p_{34}$ comme coordonnées d'un point d'un espace S_5. L'équation (2) représente dans cet espace une hyperquadrique Q, appelée hyperquadrique de Klein. A une droite de S_3 correspond un point de l'hyperquadrique Q et inversement, à un point de Q correspond une droite de S_3.

La relation (3) exprime la condition pour que deux points p, p' de S_5, appartenant ou non à Q, soient conjugués par rapport à cette hyperquadrique. Si les points p et p' appartiennent à Q, chacun d'eux appartient à l'hyperplan tangent à Q en l'autre point

252. Complexes linéaires de droites. — Un complexe linéaire de droites est l'ensemble de droites dont les coordonnées satisfont à l'équation linéaire

$$\Omega(a, p)=0 ,$$

où les a sont des constantes quelconques. Dans l'espace S_5, cette équation présente un hyperplan α coupant Q suivant les points qui représentent les droites du complexe. L'hyperplan α est appelé la première image du complexe linéaire.

Dans S_5, le point a est le rôle de l'hyperplan α par rapport à Q. Il est appelé seconde image du complexe linéaire.

Si $\Omega(a, a)$ n'est pas nul, le complexe est général et le point a n'appartient pas à Q. Si au contraire $\Omega(a, a)=0$, le point a représente une droite et le complexe est l'ensemble des droites s'appuyant sur cette droite. La première image du complexe est l'hyperplan tangent à Q au point a. L'hyperplan α coupe Q suivant une hyperquadrique V_3^2 ayant un point double en a, c'est-à-dire suivant un cône ayant pour sommet le point a.

253. Séries de plans appartenant à l'hyperquadrique Q. — Considérons, dans S_3, un faisceau de rayons (R, ρ), de sommet R et de plan ρ. Un complexe linéaire contient une droite du faisceau ou contient toutes les droites du faisceau. Par conséquent, aux droites de (R, ρ) correspondent sur Q les points d'une courbe rencontrée en un point par un hyperplan ou appartenant à cet hyperplan. Cette courbe est donc une droite. Réciproquement, une droite de Q représente un faisceau de droites de S_3.

Un faisceau de droites de S_3 *a pour image une droite de* Q *et réciproquement.*

Considérons une gerbe de droites de S_3 ; elle contient ∞^2 faisceaux de rayons et deux de ces faisceaux ont en commun une droite. Par conséquent, à la gerbe correspond sur Q une surface contenant ∞^2 droites se coupant deux à deux en un point, c'est-à-dire un plan σ. Aux ∞^3 gerbes de rayons de S_3 correspondent ∞^3 plans σ formant un système Σ.

De même, aux plans réglés de S_3 correspondent sur Q ∞^3 plans σ' formant un système Σ'.

Deux plans de Σ (ou de Σ') ont en commun un point.

Un plan de Σ et un plan de Σ' ne se rencontrent pas en général. S'ils se rencontrent, ils ont en commun une droite.

Par un point de Q passent ∞^1 plans de Σ et ∞^1 plans de Σ'. Par une droite de Q passent un plan de Σ et un plan de Σ'.

L'hyperquadrique Q *contient deux séries* ∞^3 *de plans* Σ, Σ'. *Deux plans de* Σ *ou de* Σ', *ont un point commun. Un plan de* Σ *et un plan de* Σ' *ne se rencontrent pas ou se rencontrent suivant une droite.*

254. Congruences bilinéaires de droites. — Une congruence bilinéaire de droites est l'ensemble des droites appartenant à deux complexes linéaires

$$\Omega(a, p) = 0, \qquad \Omega(b, p) = 0. \tag{1}$$

Soient α, β les premières images de ces complexes dans S_5, a, b leurs secondes images. L'espace S_3, intersection des hyperplans α, β, est la première image de la congruence (1), la droite ab en est la seconde image.

L'espace $\alpha\beta$ coupe Q suivant une quadrique V_2^2 dont les points représentent les droites de la congruence.

Trois cas peuvent se présenter :

1° La droite ab coupe Q en deux points distincts a_1, b_1. La congruence est le lieu des droites s'appuyant sur les droites représentées par les points a_1, b_1, droites qui ne se rencontrent pas. La section de Q par l'espace $\alpha\beta$ est une quadrique non conique.

2° La droite ab touche Q en un point a_1. Les hyperplans polaires des points de la droite ab par rapport à Q passent par a_1. La congruence est donc le lieu des droites s'appuyant sur la droite représentée par a_1 et appartenant à un complexe linéaire général auquel appartient la droite représentée par a_1. La section de Q par l'espace $\alpha\beta$ est un cône du second ordre de sommet a_1.

3° La droite ab appartient à Q et par conséquent les hyperplans α, β passant par cette droite. Par ab passent un plan σ de Σ et un plan σ' de Σ' ; l'intersection de Q et de $\alpha\beta$ est formée de ces deux plans. Ceux-ci représentent une gerbe de droites et un plan réglé passant par le sommet de la gerbe. La congruence se compose des droites de cette gerbe et de ce plan.

255. Représentation d'une quadrique. — Considérons trois complexes linéaires

$$\Omega(a, p) = 0\,, \qquad \Omega(b, p) = 0\,, \qquad \Omega(c, p) = 0\,,$$

n'ayant pas en commun une congruence bilinéaire de droites, c'est-à-dire n'appartenant pas à un même faisceau. Ils ont en commun une demi-quadrique.

Soient α, β, γ les hyperplans premières images de ces complexes, a, b, c les points secondes images. Les hyperplans α, β, γ ont en commun un plan ρ_1 et les points a, b, c déterminent un plan ρ_2. Les plans ρ_1, ρ_2 sont conjugués par rapport à Q.

Trois cas peuvent se présenter :

1° Les plans ρ_1, ρ_2 ne se rencontrent pas. Soient γ_1, γ_2 les coniques sections de Q par ρ_1, ρ_2 et R_1 un point de γ_1, R_2 un point de γ_2. Les points R_1, R_2 sont conjugués par rapport à Q et par conséquent la droite R_1R_2 appartient à Q. Cette droite représente un faisceau de rayons auquel appartiennent les droites r_1, r_2 représentées respectivement par R_1, R_2. Les droites représentées par les points de γ_1, ou de γ_2, sont deux à deux gauches. On en conclut que les droites r_1 et r_2 engendrent deux demi-quadriques (r_1), (r_2), de même support. Ce support est évidemment une quadrique non conique.

Deux plans conjugués par rapport à Q *et ne se rencontrant pas coupent* Q *suivant deux coniques qui représentent les deux systèmes de génératrices d'une quadrique. Réciproquement, une quadrique non conique de* S_3 *est représentée par deux plans conjugués par rapport à* Q *et ne se rencontrant pas.*

La réciproque est immédiate, car une demi-quadrique peut toujours être considérée comme l'intersection de trois complexes linéaires spéciaux dont les axes sont trois génératrices de la demi-quadrique complémentaire.

2° Les plans ρ_1, ρ_2 se rencontrent en un point R. Celui-ci, étant son propre conjugué, appartient à Q. L'hyperplan polaire de R, tangent à Q en ce point, coupe cette hyperquadrique suivant un cône de sommet R ; il contient d'autre part ρ_1, ρ_2. Ces plans coupent ce cône le premier suivant deux droites s_{11}, s_{12}, le second suivant deux droites s_{21}, s_{22}. Les quatre plans $s_{11}s_{21}$, $s_{11}s_{22}$, $s_{12}s_{21}$, $s_{12}s_{22}$ appartiennent à Q. Les plans $s_{11}s_{21}$, $s_{12}s_{22}$, qui ne se rencontrent qu'au point R, appartiennent soit au système Σ, soit au système Σ'. Supposons pour fixer les idées qu'ils appartiennent à Σ ; ils représentent alors deux gerbes de sommet A_1, A_2. Les plans $s_{11}s_{22}$ et $s_{12}s_{21}$ appartiennent à Σ' et représentent deux plans α_1, α_2 passant par la droite A_1A_2. La quadrique représentée par le couple de plans ρ_1, ρ_2, considérée comme quadrique-lieu, dégénère en deux plans α_1, α_2 ; considérée comme quadrique-enveloppe, elle dégénère en deux gerbes de sommets A_1, A_2. La demi-quadrique représentée par la section de Q par ρ_1 dégénère en deux faisceaux de rayons (A_1, α_1), (A_2, α_2) ; la demi-quadrique représentée par la section de Q par ρ_2 dégénère en deux faisceaux de rayons (A_1, α_2), (A_2, α_1).

3° Les plans ρ_1, ρ_2 ont en commun une droite r. Celle-ci appartient à Q et les plans ρ_1, ρ_2 ne peuvent rencontrer cette hyperquadrique en dehors de r. Soit (R, ρ) le faisceau de rayons représenté par r. La quadrique représentée par les plans ρ_1, ρ_2 dégénère, si elle est considérée comme quadrique-lieu, dans le plan ρ compté deux fois, si elle est considérée comme quadrique-enveloppe, dans la gerbe réglée de sommet R comptée deux fois. La quadrique réglée dégénère dans le faisceau de rayons (R, ρ) compté deux fois.

Remarquons qu'un cône du second ordre est représenté par une conique tracée dans un plan σ de Σ. Il n'apparaît donc pas ici comme cas particulier d'une quadrique.

256. Intersection de quatre complexes linéaires. — Considérons quatre complexes linéaires indépendants ; ils ont pour premières images dans S_5 quatre hyperplans se coupant suivant une droite r.

En général, la droite r coupe Q en deux points distincts et les quatre complexes ont en commun deux droites. Si la droite r est tangente à Q, ces deux droites sont confondues.

Si la droite r appartient à Q, les quatre complexes ont en commun un faisceau de droites.

Soient a_1, a_2, a_3, a_4, les secondes images des quatre complexes. Ces points déterminent un espace S_3, conjugué à la droite r et qui coupe Q suivant une quadrique non conique si r coupe cette hyperquadrique en deux points distincts ; suivant une quadrique conique si r touche Q ; suivant deux plans si r appartient à Q.

Un point de cet espace S_3 a des coordonnées de la forme

$$p = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4$$

et la quadrique suivant laquelle il coupe Q a pour équation, en coordonnées λ,

$$\lambda_1^2 \Omega(a_1, a_2) + \lambda_2^2 \Omega(a_2, a_2) + \lambda_3^2 \Omega(a_3, a_3) + \lambda_4^2 \Omega(a_4, a_4) \\ + 2\lambda_1\lambda_2 \Omega(a_1, a_2) + \ldots + 2\lambda_3\lambda_4 \Omega(a_3, a_4) = 0 .$$

La condition pour que les quatre complexes aient en commun une seule droite est donc

$$|\Omega(a_i, a_k)| = 0 , \qquad (i, \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ 4) .$$

La condition pour que ces quatre complexes aient en commun un faisceau de rayons s'exprime en écrivant que le déterminant précédent a la caractéristique deux.

257. Homographies conservant l'hyperquadrique Q. — Une projectivité (homographie ou réciprocité) de l'espace S_3 échange entre eux les complexes linéaires, par conséquent il lui correspond, dans S_5, une homographie conservant l'hyperquadrique Q.

Inversement, soit H une homographie de l'espace S_5 transformant Q en elle-même. Deux cas peuvent se présenter :

1° H fait correspondre à un plan de Σ un plan de Σ et par conséquent à un plan de Σ', un plan de Σ'. Il existe alors, dans S_3, une transformation H' entre les droites, qui fait correspondre à une gerbe de rayons une gerbe de rayons et à un plan réglé un plan réglé. La transformation H' est déterminée par une homographie de S_3.

2° H fait correspondre à un plan de Σ un plan de Σ' et inversement. La correspondance H' entre les droites de S_3 qui correspond à H fait correspondre à une gerbe de rayons un plan réglé et inversement ; elle est donc déterminée par une réciprocité de S_3.

Nous allons considérer trois cas particuliers de l'homographie H.

a) Soient A un point n'appartenant pas à Q, α son hyperplan polaire par rapport à Q, H_1 l'homologie harmonique de centre A et d'hyperplan α. Cette homologie transforme Q en elle-même.

Un plan σ de Σ coupe α suivant une droite et H_1 lui fait correspondre un plan σ' passant par cette droite et appartenant, comme σ, à Q. Il en résulte que σ' appartient au système Σ' et que H_1 transforme Σ en Σ'. A H_1 correspond donc dans S_3 une réciprocité R_1. La réciprocité R_1 est, comme H_1, involutive et toutes les droites du complexe linéaire ayant α comme première image sont unies pour cette réciprocité. Par conséquent R_1 est le système-nul attaché au complexe linéaire (1).

b) Soient a une droite rencontrant Q en deux points distincts A_1, A_2 ; α l'espace à trois dimensions conjugué à a par rapport à Q ; H_2 l'homographie harmonique ayant comme axes ponctuels a et α. Cette homographie transforme Q en elle-même.

L'espace α coupe Q suivant une quadrique non conique V_2^2. Soit r une génératrice rectiligne de cette quadrique. Le plan A_1r est uni par H_2 et appartient à Q. Il en est de même du plan A_2r. L'un des plans A_1r, A_2r appartient à Σ, l'autre à Σ'. Supposons que le plan A_1r appartienne à Σ. Alors, lorsque r décrit la quadrique V_2^2, on obtient les ∞^1 plans de Σ passant

(1) Voir nos *Leçons de Géométrie projective*, chap. XII, § 3 (Liège, 1933).

par A_1 et Σ est transformé en lui-même par H_2. De même, Σ' est transformé en lui-même par H_2. A cette homographie correspond dans S_3 une homographie Ω, involutive comme H_2.

Remarquons en passant que si s est une génératrice de V_2^2 du second mode, le plan A_1s appartient à Σ' et le plan A_2s à Σ.

Soient a_1, a_2 les droites de S_3 représentées par A_1, A_2. Tout plan passant par a_1 est uni pour Ω, de même que toute gerbe dont le sommet est sur a_1. Par conséquent a_1 est un axe de Ω. Il en est de même de a_2 et Ω est une homographie biaxiale harmonique d'axes a_1, a_2.

c) Soient α_1, α_2 deux plans conjugués par rapport à Q, ne se rencontrant pas, et H_3 l'homographie harmonique d'axes α_1, α_2. L'homographie H_3 transforme Q en elle-même. Désignons par Φ la quadrique de l'espace S_3 ayant pour image le couple de plans α_1, α_2.

Considérons une droite de Q s'appuyant sur α_1 en R_1 et sur α_2 en R_2. Cette droite est unie par H_3. Par la droite R_1R_2 passent un plan σ de Σ et un plan σ' de Σ'. Ces plans ne rencontrent α_1 qu'en R_1, α_2 qu'en R_2 ; ils ne peuvent donc être unis par H_3 et par conséquent, ils sont échangés entre eux par cette homographie. Il en résulte que H_3 transforme Σ en Σ'. Par conséquent, à H_3 correspond dans S_3 une réciprocité R_3, involutive comme H_3. Les génératrices rectilignes de Φ sont unies pour R_3 et par conséquent cette réciprocité est la polarité par rapport à Φ.

258. Complexes linéaires en involution. — Deux complexes linéaires

$$\Omega(a, p) = 0\,, \qquad \Omega(b, p) = 0$$

sont dits en *involution* lorsque l'on a

$$\Omega(a, b) = 0\,.$$

Soient α et a la première et la seconde images du premier complexe dans S_5, β et b celles du second. L'hyperplan α passe par b et par conséquent, l'hyperplan β passe par a.

L'homologie harmonique de centre a et d'hyperplan α a comme éléments unis le point b et l'hyperplan β, et inversement, l'homologie harmonique de centre b et d'hyperplan β a comme éléments unis a et α. On en conclut que :

Si deux complexes linéaires sont en involution, chacun d'eux est transformé en lui-même par le système-nul associé à l'autre.

§ 2. *Les complexes de droites*

259. Représentation d'un complexe de droites. — Un complexe algébrique de droites est l'ensemble des droites de l'espace S_3 dont les coordonnées satisfont à une équation

$$F(p_{12}, p_{13}, \ldots, p_{34}) = 0, \qquad (1)$$

dont le premier membre est une forme algébrique. Le degré n de cette forme est appelé *degré* du complexe. Les droites du complexe passant par un point engendrent un cône d'ordre n et les droites du complexe situées dans un plan enveloppent une courbe de classe n.

Dans l'espace S_5, l'équation (1) représente une hypersurface V_4^n d'ordre n et le complexe a pour image sur Q la variété V_3^{2n} intersection de Q et de V_4^n.

Les droites de S_3 tangentes à une surface, ou s'appuyant sur une courbe, forment des complexes appelés *complexes spéciaux*.

Le complexe des tangentes à une surface contient ∞^2 faisceaux de droites et a pour image sur Q une variété V_3 contenant ∞^2 droites.

Le complexe des droites s'appuyant sur une courbe contient ∞^1 gerbes de rayons et a pour image sur Q une variété formée de ∞^1 plans du système Σ. Le corrélatif de ce complexe est représenté par une variété formée de ∞^1 plans du système Σ' ; c'est l'image des tangentes à une surface développable.

260. Représentation d'une surface réglée. — Aux génératrices g d'une surface réglée (g) de S_3 correspondent sur Q les points G d'une courbe (G).

Soient g, g' deux génératrices de la surface réglée (g), G et G′ les points qui les représentent sur la courbe (G). La droite GG′ est la seconde image de la congruence bilinéaire γ, lieu des droites s'appuyant sur g et g'. Lorsque G′ tend vers G sur la courbe (G), la droite GG′ a pour limite la tangente t à (G) en G.

Supposons en premier lieu que la droite t appartienne à l'hyperquadrique Q. La limite γ_0 de la congruence γ lorsque g' tend vers g sur (g) est l'ensemble des droites d'un plan ρ passant par g et d'une gerbe de rayons dont le sommet R appartient à g. La surface (g) touche le plan ρ le long de g et a un point double en R.

Si toutes les tangentes t à la courbe (g) appartiennent à Q, la surface (g) est l'enveloppe du plan ρ ; c'est une développable dont l'arête de rebroussement est le lieu du point R.

Supposons maintenant que la tangente t n'appartienne pas à Q. La limite γ_0 de la congruence γ est l'ensemble des tangentes à la surface (g) le long de g. Elle est l'intersection du complexe spécial des droites s'appuyant sur g et d'un complexe général auquel g appartient. Les tangentes à (g) en un point A de g engendrent un plan α qui varie lorsque A parcourt g. La ponctuelle (A) et le faisceau de plans (α) d'axe g sont projectifs ; on retrouve ainsi la corrélation de Chasles.

Une surface réglée est représentée par une courbe tracée sur l'hyperquadrique Q. *Si les tangentes à cette courbe appartiennent à* Q, *la réglée est développable ; c'est une réglée gauche dans le cas contraire.*

Si n est l'ordre de la réglée (g), elle contient n droites d'un complexe linéaire et par conséquent la courbe (G) est d'ordre n.

261. Surfaces réglées appartenant à un complexe. — Soient Γ un complexe non spécial de degré n, V_4^n l'hypersurface de S_5 représentée par son équation, V_3^{2n} la variété, image du complexe, qu'elle découpe sur Q. Toute courbe tracée sur la variété V_3^{2n} représente une surface réglée dont les génératrices appartiennent au complexe Γ, c'est-à-dire, comme nous dirons en abrégé, une surface réglée du complexe Γ.

Considérons une droite r de Γ et soit R le point de V_3^{2n} qui la représente. Soient ρ_0 l'hyperplan tangent à Q en R, ρ_1 l'hyperplan tangent à V_4^n en R et ρ l'espace S_3 intersection de ρ_0 et de ρ_1. L'espace ρ coupe Q suivant un cône du second ordre de sommet R, dont les génératrices sont tangentes à la variété V_3^{2n}. On peut donc tracer, sur V_3^{2n}, des courbes dont toutes les tangentes appartiennent à Q ; il passe une infinité de ces courbes par chaque point de la variété. Il existe donc une infinité de développables appartenant au complexe Γ, contenant une droite r de ce complexe. Deux de ces développables ont en général des plans tangents distincts le long de la droite r.

262. Corrélation de Chasles. — Conservons les notations précédentes et soit R_1 le pôle , par rapport à Q, de l'hyperplan ρ_1. Le complexe linéaire Γ_1 dont ρ_1 est la première image et R_1 la seconde, peut être appelé complexe linéaire tangent à Γ le long de la droite r ; il contient cette droite.

Supposons en premier lieu que le point R_1 n'appartienne pas à Q. La droite RR_1 est tangente à Q en R et est la seconde image d'une congruence bilinéaire G dont la première image est l'espace ρ. Les droites du complexe Γ_1 passant par un point A de r forment un faisceau de rayons dont le plan α passe par r. Les droites de ce complexe situées dans un plan α passant par r forment un faisceau de rayons dont le sommet est un point A de r. Les points A et les plans α se correspondent dans une projectivité appelée *corrélation de Chasles.*

Les faisceaux (A, α) sont représentés sur Q par les génératrices du cône γ section de Q par l'espace ρ.

Considérons une développable appartenant au complexe Γ et contenant la droite r ; elle est représentée sur Q par une courbe tracée sur la variété V_3^{2n}, passant par R et dont la tangente t en ce point appartient au cône γ. Cette droite représente un faisceau de rayons (A, α) ; le point A est le point de r appartenant à l'arête de rebroussement de la développable, le plan α est le plan tangent à celle-ci le long de r.

Supposons en second lieu que le point R_1 appartienne à Q mais soit cependant distinct du point R. La droite RR_1 appartient à Q et R_1 est l'image d'une droite r_1 s'appuyant sur r en un point A_0 et déterminant avec cette droite un plan α_0. La gerbe de sommet A_0 et le plan réglé α_0 sont représentés sur Q par le plan σ de Σ et le plan σ' de Σ' passant par la droite RR_1. La section de Q par l'espace ρ est formée des plans σ, σ'. La corrélation de Chasles est dégénérée : à un point A de r distinct de A_0 correspond le plan α_0 ; à un plan α passant par r, distinct de α_0 correspond le point A_0 ; le plan correspondant à A_0 est indéterminé dans le faisceau d'axe r et le point correspondant à α_0 est indéterminé sur la droite r.

Le cône du complexe de sommet A_0 a la droite r comme droite double et la courbe du complexe située dans le plan α_0 est bitangente à r.

La droite r est appelée *droite singulière du complexe* ; le point A_0 est le *point singulier* et le plan α_0 le *plan singulier* correspondants.

Le lieu des pôles par rapport à Q des hyperplans ρ_1 tangents à V_4^n aux points de V_3^{2n} est en général une variété à trois dimensions V_3'. Cette variété rencontre l'hyperquadrique Q suivant une surface et par conséquent le complexe Γ contient ∞^2 droites singulières. Le lieu de ces droites est une congruence, appelée *congruence singulière* du complexe.

263. Equations de la congruence singulière d'un complexe. — Supposons que le complexe Γ ait pour équation

$$F(p_{12}, p_{13}, \ldots, p_{34})=0 ;$$

soient $r_{12}, r_{13}, \ldots, r_{34}$ les coordonnées de la droite r. L'hyperplan ρ_1 a pour équation

$$p_{12}\frac{\partial F}{\partial r_{12}}+p_{13}\frac{\partial F}{\partial r_{13}}+\cdots+p_{34}\frac{\partial F}{\partial r_{34}}=0 .$$

Le pôle R_1 de cet hyperplan par rapport à Q a donc pour coordonnées

$$r_{12}'=\frac{\partial F}{\partial r_{34}}, \quad r_{13}'=\frac{\partial F}{\partial r_{42}}, \ldots, r_{34}'=\frac{\partial F}{\partial r_{12}} .$$

Pour que R_1 appartienne à Q, c'est-à-dire que la droite r soit singulière, on doit donc avoir

$$\Omega\left(\frac{\partial F}{\partial r}\,, \quad \frac{\partial F}{\partial r}\right) = 0\,.$$

Cette équation, jointe à celle du complexe Γ, donne les équations de la congruence singulière.

La seconde de ces équations représente un complexe d'ordre $2(n-1)$. Par un point de l'espace passent donc $2n(n-1)$ droites singulières d'un complexe de degré n et un plan contient $2n(n-1)$ de ces droites.

264. Faisceaux de rayons liés au complexe. — Etant donnée une hypersurface $V_4{}^n$, en un point ordinaire de cette hypersurface, il y a ∞^4 tangentes ordinaires, formant l'hyperplan tangent ; ∞^3 tangentes d'inflexion, formant un cône du second ordre ; ∞^2 tangentes d'ondulation (ayant un contact du troisième ordre avec l'hypersurface), formant un cône du sixième ordre.

Reprenons la variété $V_3{}^{2n}$, intersection de $V_4{}^n$ et de Q, image du complexe Γ. Une droite de Q, qui n'est pas tangente à $V_3{}^{2n}$, coupe cette variété en n points, qui représentent les n droites d'un faisceau de rayons appartenant au complexe Γ.

Par un point R de $V_3{}^{2n}$, passent ∞^1 tangentes à cette variété en ce point, appartenant à Q et formant un cône du second ordre γ. Une de ces droites a représente un faisceau de rayons (A, α) contenant la droite r homologue de R. Le cône du complexe de sommet A touche α le long de r et la courbe du complexe située dans α touche r au point A.

Les tangentes d'inflexion à la variété $V_4{}^n$ en R forment un cône du second ordre qui rencontre γ suivant quatre droites.

Soit a une de ces droites ; elle représente un faisceau (A, α) contenant r. Le cône du complexe de sommet A possède le plan α comme plan d'inflexion et la courbe du complexe appartenant à α a un point de rebroussement en A. Le faisceau (A, α) est appelé *faisceau inflexionnel* du complexe. Chaque droite de celui-ci appartient à quatre faisceaux inflexionnels.

Pour $n \geqslant 3$, il y a six tangentes à la variété $V_4{}^n$ ayant en R un contact du troisième ordre avec cette variété. En général, elles n'appartiennent pas à Q.

Supposons qu'une de ces droites a appartienne à Q et soit (A, α) le faisceau, contenant r, qu'elle représente. Le cône du complexe de sommet A a un contact du troisième ordre avec α le long de r et la courbe du complexe située dans le plan α a un tacnode en A. Le faisceau est appelé *faisceau d'ondulation* du complexe.

Posons

$$\Delta = p_{12}\frac{\partial}{\partial r_{12}} + p_{13}\frac{\partial}{\partial r_{13}} + \cdots + p_{34}\frac{\partial}{\partial r_{34}} .$$

La droite r appartiendra à un faisceau d'ondulation si les équations

$$\Omega(r, p) = 0, \quad \Delta F(r) = 0, \quad \Delta^2 F(r) = 0, \quad \Delta^3 F(r) = 0$$

admettent une solution distincte de $p = r$. Il existera donc en général ∞^2 faisceaux d'ondulation pour un complexe.

265. Complexes contenant des faisceaux de droites. — La variété V_3^4, qui représente sur Q un complexe du second degré, contient une infinité de droites. En effet, par tout point R de cette variété passent quatre droites ayant un contact du second ordre avec la variété et qui, par conséquent, lui appartiennent. Chaque droite de V_3^4 provient de ∞^1 points et par conséquent la variété contient ∞^2 droites.

Un complexe du second degré contient ∞^2 faisceaux de rayons.

Ces faisceaux de rayons sont obtenus en considérant les ∞^2 cônes du complexe dégénérés en deux plans ou les ∞^2 coniques-enveloppes du complexe dégénérées en deux faisceaux de rayons.

La variété V_3^6 représentant sur Q un complexe du troisième degré contient ∞^2 points en lesquels il existe une tangente ayant un contact du troisième ordre avec la variété. Celle-ci contient cette tangente. Une telle droite provient de ∞^1 points en lesquels la propriété précédente est vérifiée, donc la variété V_3^6 contient ∞^1 droites.

Un complexe cubique contient ∞^1 faisceaux de rayons.

266. Complexes du second degré. — Soit Γ un complexe du second degré, non spécial. Il est représenté sur Q par une variété V_3^4 intersection de Q et d'une hyperquadrique V_4^2.

Soit

$$F(p_{12}, p_{13}, \ldots, p_{34}) = 0$$

l'équation de Γ. Ecrivons que l'hyperquadrique

$$F(p_{12}, p_{13}, \ldots, p_{34}) + \lambda\Omega(p, p) = 0$$

est un cône. Nous devons pour cela égaler à zéro le hessien du premier membre de l'équation précédente, ce qui donne une équation du sixième degré en λ. Il y a donc six cônes passant par la variété V_3^4 image de Γ. Soient $A_0, A_1, \ldots, A_5$ les sommets de ces cônes, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_5$ les hyperplans $A_1A_2\ldots A_5$, $A_2A_3\ldots A_5A_0$, $\ldots$, $A_0A_1\ldots A_4$. Il est facile de voir que les hyperplans polaires de

$A_0, A_1, \ldots, A_5$ par rapport à Q et à V_4^2 sont confondus et respectivement $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_5$. Les points $A_0, A_1, \ldots, A_5$ sont donc deux à deux conjugués par rapport à Q.

Si nous désignons par $a_{i12}, a_{i13}, \ldots, a_{i34}$ les coordonnées du point A_i, les hyperplans $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_5$ ont respectivement pour équations

$$\Omega(a_0, p) = 0\,, \quad \Omega(a_1, p) = 0\,, \ldots, \quad \Omega(a_5, p) = 0\,.$$

Les complexes linéaires $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_5$ ayant pour premières images les hyperplans $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_5$ sont deux à deux en involution, car si l'on exprime que les points $A_0, A_1, \ldots, A_5$ sont deux à deux conjugués par rapport à Q, on a

$$\Omega(a_0, a_1) = 0\,, \quad \Omega(a_0, a_2) = 0\,, \ldots, \Omega(a_4, a_5) = 0\,.$$

L'équation de la variété V_4^2, c'est-à-dire l'équation du complexe Γ, peut s'écrire sous la forme

$$\lambda_0 [\Omega(a_0, p)]^2 + \lambda_1 [\Omega(a_1, p)]^2 + \ldots + \lambda_5 [\Omega(a_5, p)]^2 = 0\,.$$

Le système-nul associé à chacun des complexes linéaires $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_5$ transforme ces complexes en eux-mêmes et par conséquent le complexe Γ en lui-même.

Un complexe général du second degré est transformé en lui-même par six systèmes-nuls associés à six complexes linéaires deux à deux en involution.

§ 3. *Les congruences de droites*

267. Représentation d'une congruence de droites. — Une congruence algébrique de droites est une variété algébrique à deux dimensions formée de droites de l'espace. Elle est représentée, sur l'hyperquadrique Q, par une surface algébrique.

Par un point de l'espace passent des droites d'une congruence G en général en nombre fini m ; ce nombre est l'*ordre* de la congruence. Les droites de la congruence G appartenant à un plan sont en général en nombre fini n ; ce nombre est la *classe* de la congruence.

Un point par lequel passent des droites de G en nombre infini, formant un cône algébrique, est appelé *point singulier* à la congruence. De même, un plan contenant une infinité de droites de la congruence G, formant une courbe-enveloppe est un *plan singulier* de la congruence.

La surface F qui représente sur Q la congruence G, est rencontrée par un plan σ de Σ en m points et par un plan σ' de Σ' en n points. Un espace à trois dimensions coupant Q suivant un plan σ et un plan σ' rencontre donc F en $m + n$ points. Le nombre de points d'intersection de F avec un espace S_3 quelconque est également $m+n$, car lorsque cet espace varie d'une manière continue et tend vers un espace contenant un plan σ et un plan σ', le nombre des intersections reste constant.

Une congruence de droites d'ordre m *et de classe* n *est représentée sur l'hyperquadrique* Q *par une surface d'ordre* $\mathrm{m}+\mathrm{n}$.

On appelle *rang* d'une congruence le nombre de couples de droites de cette congruence se coupant sur une droite a et dont les plans passent par a. Soit A le point de Q qui représente la droite a. Par A passent ∞^2 droites appartenant à Q. Le rang de la congruence G est égal au nombre de cordes de la surface F passant par A, cordes appartenant nécessairement à Q.

268. Nappes focales d'une congruence de droites. — On sait, par la géométrie infinitésimale, qu'une congruence de droites est formée des droites tangentes à deux surfaces (ou à deux nappes d'une même surface), appelées *surfaces focales* de la congruence. Une de ces surfaces ou les deux surfaces, peuvent d'ailleurs dégénérer en des courbes (appelées *courbes singulières*) sur lesquelles les droites de la congruence s'appuient. Les points de contact d'une droite de la congruence avec les surfaces focales sont les *foyers* de cette droite ; les plans tangents aux surfaces focales aux foyers d'une droite passent par celle-ci et sont les *plans focaux* de cette droite.

Parmi les surfaces réglées appartenant à une congruence, c'est-à-dire dont les génératrices appartiennent à la congruence, se trouvent ∞^1 développables. Une droite de la congruence appartient à deux de ces développables ; les arêtes de rebroussement de ces développables passent une par chacun des foyers de la droite et les plans tangents à ces surfaces le long de la droite sont les plans focaux.

Aux réglées de la congruence G correspondent les courbes tracées sur F. Soient R un point de F, ρ le plan tangent à cette surface en ce point. Le plan ρ est également tangent à Q en R et coupe cette hyperquadrique suivant deux droites r_1, r_2 passant par R, tangentes à F en ce point. Les droites r_1, r_2 ont pour homologues dans S_3 deux faisceaux de rayons (R_1, ρ_1), (R_2, ρ_2). Les développables de la congruence G sont représentées sur F par des courbes γ tangentes, en chacun de leurs points R, à une des droites r_1 ou r_2. Soient γ_1, γ_2 les courbes représentant des développables de g passant par R, γ_1 étant tangente à r_1 et γ_2 à r_2 en ce point. A la courbe γ_1 correspond une développable Δ_1 dont l'arête de rebroussement passe par R_1 et dont le plan tangent le long de la droite r homologue de R est le plan ρ_1. A la courbe γ_2 correspond une développable Δ_2 dont l'arête de rebroussement passe par R_2 et qui touche le plan ρ_2 le long de r. Les points R_1, R_2 sont les foyers de la droite r et les plans ρ_1, ρ_2 en sont les plans focaux. Le plan ρ_1 est tangent en R_2 à la nappe de la surface focale lieu du point R_2 et le plan ρ_2 est tangent en R_1 à la nappe de la surface focale lieu du point R_1.

269. Ordre et classe de la surface focale d'une congruence. — Appelons surface focale d'une congruence l'ensemble des deux nappes focales. Nous allons déterminer l'ordre et la classe de la surface focale de la congruence G en fonction de l'ordre m, de la classe n et du rang p de cette congruence.

Par un point A de l'espace réglé S_3, passent m droites de G. Si le point A tend vers un point R_1 de la surface focale, le plan α qui correspond au point A dans le système Σ tend vers le plan σ de ce système qui correspond à R_1. Le plan α rencontre F en m points et le plan σ rencontre cette surface en m points dont deux sont confondus en R_1. Il en résulte que la surface focale de G est le lieu des points par lesquels passent deux droites confondues de la congruence.

De même, les plans tangents à la surface focale de G sont les plans qui contiennent deux rayons confondus de G.

Soit d une droite de l'espace réglé S_3. Un plan α passant par d contient n droites de G. Par chacun des n points de rencontre de ces droites avec d passent $m-1$ droites de G, non situées en général dans α. Faisons correspondre à α les $n(m-1)$ plans passant par d et contenant ces droites. Nous obtenons ainsi une correspondance symétrique, d'indice $n(m-1)$, possédant $2n(m-1)$ plans unis. Ces plans unis proviennent des μ points de rencontre de la droite d avec la surface focale de G, par lesquels passent deux rayons coïncidants, et des p points de d par lesquels passent deux rayons dont le plan contient d. Chacun de ces p plans compte pour deux plans unis et l'ordre de la surface focale de G est donc

$$\mu = 2n(m-1) - 2p\,.$$

On démontre de même que la classe de cette surface est

$$\nu = 2m(n-1) - 2p\,.$$

270. Congruence singulière d'un complexe. — Soit Γ un complexe non spécial de droites, d'ordre n, V_3^{2n} la variété qui le représente sur Q, V_4^n la variété découpant V_3^{2n} sur Q. Considérons une droite singulière r de Γ et le point R qui lui correspond sur Q. Le pôle R_1 par rapport à Q de l'hyperplan ρ_1 tangent à V_4^n en R appartient à Q. La droite RR_1, qui appartient à Q_1 représente un faisceau de rayons dont le sommet A_0 appartient à r et dont le plan α_0 passe par r.

La congruence singulière (r) du complexe Γ est représentée sur Q par la surface (R). Le plan tangent à cette surface au point R ne contient pas en général la droite RR_1 ; ce plan tangent coupe Q suivant deux droites p_1, p_2 qui représentent deux faisceaux de rayons (P_1, ϖ_1), (P_2, ϖ_2) contenant r.

Désignons par σ, σ' les plans respectivement de Σ, Σ' passant par la droite RR_1. Le plan σ représente la gerbe réglée de sommet A_0 et le plan σ' le plan réglé α_0. Comme nous l'avons vu, les tangentes à la variété V_3^{2n} en R appartenant à Q sont les droites situées dans σ, σ'. Par conséquent, la droite p_1 appartient à l'un de ces plans, par exemple à σ et la droite p_2 à l'autre plan σ'. Le point P_1 coïncide donc avec A_0 et le plan ϖ_2 avec α_0.

La surface (A_0), lieu du point A_0, est appelée *surface singulière* du complexe Γ. On voit que :

La surface singulière du complexe Γ *est une nappe focale de la congruence singulière de ce complexe.*

Les plans singuliers du complexe Γ *sont tangents à la surface singulière du complexe aux points singuliers correspondants.*

La seconde nappe focale de la congruence singulière est le lieu du point P_1.

271. Théorème de Halphen. — *Deux congruences de droites d'ordres* m, m' *et de classe* n, n' *ont en commun* mm' + nn' *droites.*

Soient G, G' deux congruences de droites, d'ordres m, m' et de classes n, n', n'ayant qu'un nombre fini de droites en commun. Elles sont respectivement représentées sur Q par deux surfaces F, F', d'ordres $m+n$, $m'+n'$. Il s'agit de démontrer que les surfaces F, F' se rencontrent en $mm'+nn'$ points.

Soient A un point de Q n'appartenant ni à F, ni à F', α l'hyperplan tangent à Q en A. Projetons Q de A sur un hyperplan S_4 ne passant pas par A. Par le point A passent ∞^1 plans σ de Σ coupant S_4 suivant ∞^1 droites s. Par le point A passent également ∞^1 plans σ' de Σ' coupant S_4 suivant ∞^1 droites s'. L'hyperplan α coupe Q suivant un cône du second ordre de sommet A, rencontré par S_4 suivant une quadrique Q' dont les droites s, s' sont les génératrices des deux modes.

Les surfaces F, F' sont projetées sur S_4 de A suivant des surfaces $\overline{F}$, $\overline{F'}$ d'ordres $m+n$, $m'+n'$. Ces deux surfaces ont en commun $(m+n)(m'+n')$ points. Ceux de ces points qui n'appartiennent pas à Q' proviennent de points communs aux surfaces F, F'. Les points qui appartiennent à Q' proviennent des droites de Q passant par A et qui s'appuient sur les surfaces F, F' en des points distincts.

La surface F est rencontrée par un plan σ de Σ passant par A en m points qui se projettent sur une droite s de Q'. Un plan σ' passant par A coupe F en n points dont les projections sont sur une droite s'. La section de $\bar{\mathrm{F}}$ par Q' est donc une courbe C d'ordre $m+n$, rencontrant les droites s en m points et les droites s' en n points. De même, la section de $\overline{\mathrm{F}'}$ par Q' est une courbe C' d'ordre $m'+n'$ rencontrant les droites s en m' points et les droites s' en n' points. Les courbes C, C' se rencontrent en $mn'+m'n$ points. Par conséquent, les surfaces F, F' se rencontrent en

$$(m+n)(m'+n')-(mn'+m'n)=mm'+nn',$$

points, ce qui démontre le théorème de Halphen.