LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie royale de Belgique
Professeur à l'Université de Liège

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

TOME II

Géométrie sur une courbe algébrique
Géométrie algébrique du plan

PUBLIÉ AVEC LE CONCOURS
DE LA FONDATION UNIVERSITAIRE DE BELGIQUE

SCIENCES ET LETTRES, LIÈGE
1949

AVANT-PROPOS

Le second volume de notre ouvrage sur la Géométrie algébrique (1) est consacré à la *Géométrie sur une courbe algébrique* et à la *Géométrie algébrique du plan.*

Dans les trois premiers chapitres, nous exposons la Géométrie sur une courbe algébrique en utilisant les séries de groupes de points, méthode introduite par Brill et Noether et portée à un haut degré de perfection par les géomètres italiens. Après avoir établi les théorèmes fondamentaux, nous avons traité des correspondances entre les points d'une ou de deux courbes algébriques.

Il nous a paru intéressant de faire l'étude des correspondances entre les points d'une courbe algébrique en utilisant les intégrales abéliennes, comme l'a fait Hurwitz, et d'indiquer avec quelques détails la féconde représentation hyperspatiale de ces correspondances due à Rosati et à Scorza. Cela nous a conduit à développer la théorie des surfaces de Riemann et des intégrales abéliennes.

En Géométrie algébrique plane, nous avons fait l'étude des systèmes linéaires de courbes en introduisant l'opération d'adjonction. Nous avons ensuite utilisé cette théorie pour classer les transformations birationnelles et les groupes continus de transformations birationnelles. Pour terminer, nous avons étudié les involutions planes du second ordre. Une difficulté d'exposition s'est présentée ici. On sait qu'un faisceau de Halphen ne peut être l'adjoint à un système linéaire que s'il est formé de cubiques ou de sextiques. Dans ce dernier cas, il est l'adjoint à un faisceau de courbes de genre deux, adjoint lui-même à une courbe isolée de genre deux. Lors de l'étude de l'opération d'adjonction, nous nous sommes borné à montrer qu'un faisceau de Halphen de courbes du sixième ordre pouvait être l'adjoint à un certain faisceau de courbes, lui-même adjoint à une courbe isolée, ce qui nous suffisait pour les

(1) Le premier volume, consacré à la théorie des transformations birationnelles du plan et de l'espace, et à une introduction à la géométrie projective hyperspatiale, préfacé par M. Garnier, professeur de Géométrie supérieure à la Sorbonne, est paru en 1948 aux éditions Sciences et Lettres.

applications que nous avions en vue. A l'occasion de l'étude de l'involution de Bertini, nous avons précisé la question en déterminant complètement ce dernier faisceau et cette courbe et en établissant leur existence. Au point de vue de l'enchaînement des théorèmes, cette méthode ne souffre pas d'objection et il nous a paru préférable de laisser l'étude de l'involution de Bertini à sa place naturelle.

Outre les nombreux mémoires parus sur les questions traitées ici, nous avons consulté les ouvrages de F. Enriques et M. O. Chisini, de E. Picard et G. Simart, de M. F. Severi sur les courbes algébriques (1).

Pour la facilité des renvois au premier volume, nous avons continué dans celui-ci la numérotation des paragraphes. Les renvois à notre *Introduction à la Géométrie supérieure* (2), sont indiqués par la lettre I suivie du numéro du paragraphe.

(1) F. Enriques et O. Chisini, *Courbes et fonctions algébriques d'une variable* (Paris, Gauthier-Villars, 1926); — E. Picard et G. Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier-Villars, 1897 et 1906); — F. Severi, *Vorlesungen über Algebraische Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1921); *Trattato di Geometria algebrica*, vol. Ier (Bologne, Zanichelli, 1926).

(2) Liège, Sciences et Lettres, 1946.

TROISIÈME PARTIE

LA GÉOMÉTRIE SUR UNE COURBE ALGÉBRIQUE

CHAPITRE PREMIER

LES SÉRIES LINÉAIRES DE GROUPES DE POINTS

§ 1. *Préliminaires et premières propriétés*

272. Rappel de la définition d'une courbe algébrique. — Nous avons appelé courbe algébrique C dans un espace linéaire S_r à r dimensions l'ensemble des points dont les coordonnées $x_0, x_1, \ldots, x_r$ sont données par

$$\rho x_i = \varphi_i(u_0, u_1, u_2) , \qquad (i = 0, 1, \ldots, r) ,$$
$$\varphi(u_0, u_1, u_2) = 0 ,$$

où $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ sont des formes algébriques de même degré et φ une forme algébrique. L'équation $\varphi = 0$ représente, dans le plan des u, une courbe algébrique γ. A un point de γ correspond un point x de C, mais chaque point x de C peut provenir d'un certain nombre $\nu\ (\geqslant 1)$ de points de γ. La courbe C est irréductible si la courbe γ est irréductible.

Rappelons également la représentation de Cayley-Halphen.

Etant donnée, dans un espace linéaire S_r, une courbe C d'ordre n, rapportons cet espace à une figure de référence telle que l'espace $O_3 O_4 \ldots O_r$ ne rencontre pas C et qu'un espace à $r-2$ dimensions déterminé par $O_3, O_4, \ldots, O_r$ et par un point de C, ne rencontre pas en général C en un second point. Soit alors

$$F(x_0, x_1, x_2) = 0 \tag{1}$$

l'équation du cône, d'ordre n, projetant la courbe C de l'espace $O_3 O_4 \ldots O_r$.

Les coordonnées d'un point de C s'expriment par les formules

$$x_3 = \frac{f_3(x_0, x_1, x_2)}{f(x_0, x_1, x_2)} , \quad x_4 = \frac{f_4}{f} , \ldots , \quad x_r = \frac{f_r}{f} ,$$

où $f_3, f_4, \ldots, f_r$ sont des formes d'un certain degré m et f une forme de degré $m-1$.

Les courbes représentées dans le plan $O_0 O_1 O_2$ par les équations

$$f_3(x_0, x_1, x_2) = 0 , \qquad f_4 = 0, \ldots, f_r = 0$$

passent par les $n(m-1)$ points communs aux courbes

$$F(x_0, x_1, x_2) = 0 , \qquad f(x_0, x_1, x_2) = 0 . \tag{2}$$

Le cône (1) et les monoïdes

$$fx_3 = f_3 , \quad fx_4 = f_4 , \quad \ldots, \quad fx_r = f_r$$

ont en commun la courbe C et les $n(m-1)$ espaces linéaires à $r-2$ dimensions passant par l'espace $O_3 O_4 \ldots O_r$ et par les points communs aux courbes (2) dans le plan $O_0 O_1 O_2$.

273. Répartition des courbes algébriques en classes. — Deux courbes algébriques C, C′, appartenant à des espaces linéaires ayant respectivement r et r' dimensions, seront dites appartenir à la même classe s'il existe entre les points de ces courbes une correspondance biunivoque telle que les coordonnées de tout point de chacune des courbes s'expriment en fonctions rationnelles des coordonnées du point homologue de l'autre courbe. Il est indifférent que la correspondance puisse, ou non, s'étendre aux espaces ambiants.

Une courbe et sa projection sur un espace quelconque, appartiennent à une même classe.

Dans une classe de courbes algébriques, on peut fixer une courbe satisfaisant à certains caractères projectifs ; cette courbe particulière est un modèle projectif de la classe.

Considérons une classe de courbes algébriques et soit C une courbe de cette classe, appartenant à un espace linéaire S_r à r dimensions. Projetons cette courbe sur un plan σ à partir d'un espace S_{r-3} choisi de telle manière qu'un espace à $r-2$ dimensions passant par S_{r-3} et par un point de C, ne rencontre plus en général cette courbe en un second point, variable avec le premier. (L'espace S_{r-3} peut éventuellement rencontrer la courbe en quelques points fixes.) A la courbe C correspond dans σ, point par point, une courbe C′ appartenant à la même classe que C. On peut transformer la courbe C′ en une courbe plane C″ n'ayant que des points doubles ordinaires (n° 24) et cette courbe C″ appartient à la même classe que C′ et C.

Dans toute classe de courbes algébriques, on peut trouver un modèle projectif constitué par une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires.

On verra plus loin que dans toute classe de courbes algébriques, on peut trouver une courbe gauche dépourvue de points singuliers.

La répartition des courbes algébriques en classes remonte à Riemann. On verra plus loin que les courbes d'une même classe sont représentées par une même surface de Riemann.

274. Extension de la notion de courbe. — Imaginons une variété V d'éléments p dépendant algébriquement d'un paramètre. On appelle la variété V un *être algébrique simplement infini*.

On peut assimiler un être algébrique simplement infini à une courbe algébrique ; il suffit de convenir d'appeler « point » l'élément p qui engendre V et d'introduire un dictionnaire approprié.

Quelques exemples feront comprendre cette remarque.

Supposons en premier lieu que V soit une surface réglée algébrique de l'espace ordinaire ; l'élément générateur p est alors une droite. On peut convenir d'appeler point une génératrice rectiligne de la réglée. Cela revient d'ailleurs à représenter la surface réglée par la courbe qui lui correspond sur l'hyperquadrique de Klein (n° 260).

Considérons maintenant les coniques touchant en quatre points variables une courbe plane algébrique Γ ; elles sont en nombre ∞^1 et forment un être algébrique simplement infini. On peut représenter les coniques du plan par les points d'un espace linéaire S_5 à cinq dimensions. A l'être considéré correspond alors une courbe de l'espace S_5. Tout revient donc à appeler point une conique de la famille et à introduire un langage approprié.

Un être algébrique simplement infini pouvant être considéré comme une courbe algébrique, appartiendra à la même classe que cette courbe.

275. Objet de la géométrie sur une courbe algébrique. — Le problème principal de la géométrie algébrique est de déterminer les propriétés qui caractérisent les courbes de chaque classe. Ou encore, de déterminer des caractères tels que s'ils sont égaux pour deux courbes, on puisse dire que ces courbes appartiennent à la même classe.

Les instruments employés dans la recherche doivent donc posséder un caractère invariant vis-à-vis des transformations birationnelles permettant de passer d'une courbe à une autre de la même classe. Ces instruments sont les séries linéaires de groupes de points, qui seront soumises à certaines opérations également invariantes pour les transformations birationnelles des courbes.

276. Séries linéaires simplement infinies sur une courbe algébrique plane. — Soit C une courbe algébrique plane irréductible. Une série linéaire simplement infinie de groupes de points sur la courbe C est un ensemble de groupes de points satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Un point de la courbe C appartient à un seul groupe de l'ensemble ;

2° Il existe une correspondance biunivoque entre les groupes de l'ensemble et les points d'une droite.

Si n est le nombre de points composant un groupe, cela revient à considérer une correspondance $(1, n)$ entre une droite s et la courbe C.

Soient

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

l'équation de la courbe C, λ le paramètre fixant la position d'un point de la droite s. Il existe une relation algébrique entre λ et x_1, x_2, x_3 telle que si l'on fixe le point x, une seule valeur de λ est déterminée. Cette relation est donc de la forme

$$\varphi_0(x_1, x_2, x_3) - \lambda\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = 0\,, \tag{2}$$

où l'on peut supposer que φ_0 et φ_1 sont des formes algébriques du même degré.

L'équation (2) représente un faisceau de courbes ; un certain nombre de points-base de ce faisceau peuvent appartenir à la courbe C et les points d'intersection variables des courbes (2) et de la courbe C, au nombre de n, forment un groupe de la série linéaire.

La série linéaire est dite d'ordre n et est représentée par la notation g_n^1.

On peut étendre cette définition en adjoignant à chaque groupe de la série g_n^1 un certain nombre $m - n$ de points fixes ; on obtient ainsi une série g_m^1 d'ordre m, possédant $m - n$ points fixes.

277. Remarque. — Si la courbe C est rationnelle, la seconde condition est une conséquence de la première en vertu du théorème de Lüroth. Si la courbe C est de genre $p > 0$, il n'en est plus de même et il peut exister sur la courbe un ensemble de groupes de n points tel que par un point de la courbe passe un seul groupe de l'ensemble sans que cet ensemble soit rationnel, c'est-à-dire représentable par les points d'une droite.

Considérons une surface réglée R de genre $p > 0$, c'est-à-dire dont les sections planes soient de genre p. Une surface d'ordre n coupe R suivant une courbe C sur laquelle les génératrices rectilignes de R découpent des groupes de n points. L'ensemble de ces groupes satisfait à la première condition, mais non à la seconde.

Un ensemble de groupes de n points d'une courbe C satisfaisant à la première condition mais non à la seconde est appelé série irrationnelle et représenté par la notation γ_n.

278. Séries linéaires de dimension quelconque sur une courbe plane. — On appelle série linéaire d'ordre n et de dimension r, et on représente par g_n^r un ensemble de groupes de n points tel que :

1° Par r points de la courbe passe un groupe de l'ensemble et en général un seul ;

2° Il existe une correspondance biunivoque entre les groupes de l'ensemble et les points d'un espace linéaire S_r à r dimensions.

Une série g_n^r est découpée sur la courbe C par les courbes d'un système linéaire

$$\lambda_0\varphi_0(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_r\varphi_r = 0$$

dont aucune courbe ne contient la courbe C comme partie, en dehors éventuellement de certains points fixes.

La propriété est vraie pour $r=1$. Supposons-la établie pour les séries de dimension $r-1$.

Considérons une droite s de S_r. Les groupes de g_n^r passant par un point P de C forment une série g_n^{r-1} possédant un point fixe P. Les groupes de cette série sont représentés par les points d'un hyperplan S_{r-1} de S_r, qui, en général, rencontre s en un point. On en conclut que les groupes de g_n^r homologues des points de s forment une série linéaire, puisque par P ne passe qu'un groupe de cette série.

Par hypothèse, la série g_n^{r-1} ayant le point fixe P est découpée sur C par un système linéaire

$$\lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_r\varphi_r = 0 . \tag{3}$$

Considérons un groupe de la série g_n^r ne passant pas par P et découpé sur C par la courbe

$$\varphi_0(x_1, x_2, x_3) = 0 .$$

Soit A_0 le point de S_r qui représente ce groupe. Le point A_0 n'appartient pas à l'hyperplan S_{r-1} et un point A quelconque de S_r détermine avec A_0 une droite s coupant l'hyperplan S_{r-1} en un point. A ce point correspond un groupe de n points de C découpé sur cette courbe par une courbe (3), pour des valeurs déterminées des λ. On en conclut que le groupe représenté par le point A est découpé sur C par la courbe

$$\lambda_0\varphi_0(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_r\varphi_r = 0 , \tag{4}$$

ce qu'il fallait établir.

279. Séries linéaires sur une courbe quelconque. — Soit maintenant C une courbe algébrique irréductible appartenant à un espace linéaire S_ρ à ρ dimensions.

Choisissons dans S_ρ un espace linéaire $S_{\rho-3}$ ne rencontrant pas la courbe C et tel qu'un espace linéaire à $\rho-2$ dimensions passant par $S_{\rho-3}$ et par un point de C, ne rencontre pas en général la courbe en un second point. Projetons la courbe C à partir de $S_{\rho-3}$ sur un plan σ ne rencontrant pas $S_{\rho-3}$. Nous obtenons une courbe plane C′ appartenant à la même classe que C.

Considérons sur C′ une série linéaire g_n^r. Aux groupes de cette série correspondent sur C des groupes de n points tels que r points appartiennent en général à un seul groupe. D'autre part, l'ensemble de ces groupes est représenté groupe par point sur un espace linéaire S_r. Cet ensemble sera appelé série linéaire d'ordre n et de dimension r sur la courbe C ; il sera également représenté par g_n^r.

Sur C′, la série g_n^r est découpée par un système linéaire de courbes tel que (4). Sur la courbe C, la série g_n^r est découpée par le système linéaire d'hypersurfaces (cônes) projetant de $S_{\rho-3}$ le système de courbes (4).

Inversement, un système linéaire d'hypersurfaces

$$\lambda_0\Phi_0(x_0, x_1, \ldots, x_\rho) + \lambda_1\Phi_1 + \ldots + \lambda_r\Phi_r = 0$$

dont aucune ne contient C, découpe sur cette courbe une série linéaire g_n^r, en dehors éventuellement de certains points fixes, appartenant à la base du système et à la courbe C.

Observons que l'on peut adjoindre, à une série g_n^r, un certain nombre de points fixes. En outre, par extension de langage, un groupe de n points fixes pourra être considéré comme une série g_n^0 de dimension zéro.

Des développements précédents il résulte que *le concept de série linéaire est invariant pour les transformations birationnelles*. Si deux courbes appartiennent à une même classe, à une série linéaire g_n^r donnée sur l'une, correspond sur l'autre une série linéaire g_n^r.

280. Image projective d'une série linéaire. — Considérons une courbe C, de S_ρ, représentée par les équations

$$\tau x_i = f_i(u_0, u_1, u_2)\ , \qquad (i = 0, 1, \ldots, \rho)$$

$$f(u_0, u_1, u_2) = 0$$

et une série linéaire g_n^r dépourvue de points fixes, découpée sur cette courbe par les hypersurfaces

$$\lambda_0\Phi_0(x_0, x_1, \ldots, x_\rho) + \lambda_1\Phi_1 + \ldots + \lambda_r\Phi_r = 0\ .$$

Rapportons projectivement ces hypersurfaces aux hyperplans d'un espace linéaire S_r en posant par exemple

$$\tau X_i = \Phi_i(x_0, x_1, \dots, x_\rho), \qquad (i = 0, 1, \dots, r).$$

A la courbe C correspond une courbe C′ représentée par les équations

$$\tau X_i = \Phi_i(f_0, f_1, \dots, f_\rho), \qquad (i = 0, 1, \dots, r)$$
$$f(u_0, u_1, u_2) = 0.$$

Deux cas peuvent se présenter :

1° Un point X de C′ provient d'un seul point x de C. Comme à un point x de C correspond par construction un seul point X de C′, les courbes C, C′ appartiennent à la même classe.

Les groupes de la série g_n^r passant par un point de C ne peuvent en conséquence passer par d'autres points de la courbe ; la série est appelée *série simple*.

Sur la courbe C′, la série g_n^r est découpée par les hyperplans de S_r et la courbe C′ est donc d'ordre n. On dit que la courbe C′ est une image projective de la série g_n^r ;

2° Un point X de C′ correspond à $\nu > 1$ points de C. Les groupes de ν points de C correspondant aux points de C′ forment une série γ_ν d'ordre ν. Les groupes de g_n^r passant par un point de C passent en conséquence par les $\nu - 1$ points qui, avec le point considéré, forment un groupe de γ_ν. La série g_n^r est dite composée au moyen de la série γ_ν et la courbe C′ est d'ordre $\dfrac{n}{\nu}$. On dit que la courbe C′ représente la série γ_ν.

Dans les deux cas, la courbe C′ ne peut appartenir à un espace linéaire ayant moins de r dimensions.

281. Théorème I. — *Etant donné, sur une courbe algébrique irréductible* C, *une série simple* g_n^r, *les groupes de la série passant par* k (k < r) *points génériques de la courbe, ne peuvent passer par d'autres points variables avec les premiers.*

La série g_n^r étant simple, nous pouvons supposer que C est une courbe d'ordre n de l'espace S_r sur laquelle la série est découpée par les hyperplans. Le théorème revient à celui-ci : Les espaces S_{k-1} passant par k points génériques de la courbe, ne passent pas par d'autres points de celle-ci.

Le théorème est évident si l'on a $r = 2$. La courbe C est alors plane et $k = 1$. Les droites du plan passant par un point générique de C ne passent pas en conséquence par d'autres points de la courbe.

Supposons $r > 2$ et démontrons le théorème pour $k = 2$. Si toute corde de C rencontrait la courbe en un troisième point, la courbe posséderait ∞^2 trisécantes. Les trisécantes passant par un point M de la courbe formeraient un cône. Le plan tangent à ce cône le long d'une génératrice contiendrait les tangentes à la courbe aux points de rencontre de cette génératrice avec C, distincts de M. Il en résulte que les tangentes à la courbe C se couperaient deux à deux. Mais alors, ou bien ces droites seraient contenues dans un plan et la courbe C serait plane, contrairement à l'hypothèse $r > 2$, ou bien ces droites passeraient par un même point O. Si ce second cas se présente, projetons la courbe C sur un plan à partir d'un espace S_{r-3} ne passant pas par O ; toutes les tangentes à la courbe plane obtenue passeraient par la projection de O, ce qui est absurde. Le théorème est donc démontré par $r > 2$, $k = 2$.

Supposons le théorème démontré pour $r > 2$ et pour la valeur $k - 1$ de k. Admettons que les espaces S_{k-1} passant par k points génériques de C coupent encore cette courbe en un ou plusieurs points, variables avec les k premiers. Projetons C d'un de ses points O sur un hyperplan ne passant pas par O ; nous obtenons une courbe C′ d'ordre $n - 1$ sur laquelle les sections hyperplanes forment une série g_{n-1}^{r-1}. Un espace S_{k-1} passant par O et par $k - 1$ autres points de C est projeté suivant un espace S_{k-2} passant par $k - 1$ points de C′. Par hypothèse, l'espace S_{k-1} considéré, passant par O et par $k - 1$ points arbitraires de C, rencontre en outre cette courbe en d'autres points, donc l'espace S_{k-2}, passant par $k - 1$ points arbitraires de C′, passe en outre par d'autres points de C′, variables avec les premiers. Or, nous avons admis que le théorème était vrai pour la valeur $k - 1$ de k ; nous arrivons donc à une contradiction. Donc, si le théorème est vrai pour la valeur $k - 1$ de k, il est vrai pour la valeur k. Or, il est vrai pour $k = 2$, donc il est vrai pour k quelconque.

Remarque. — Il peut naturellement exister des espaces S_{k-1} rencontrant C en plus de k points, mais ces espaces sont déterminés par des positions particulières de k points de C.

282. Théorème II. — *Sur une courbe algébrique* C, *irréductible, d'ordre* n, *de l'espace* S_r, *une série d'indice un, simplement infinie, de groupes de* n *points appartenant à la série* g_n^r *des sections hyperplanes, est une série linéaire* g_n^1 *découpée par les hyperplans d'un faisceau.*

Soit Σ le système ∞^1 d'hyperplans découpant sur la courbe C la série d'ordre n et d'indice un en question. Si le système Σ est de classe supérieure à l'unité, c'est-à-dire si par un point de S_r n'appartenant pas à C passent plusieurs hyperplans de Σ, la courbe C doit appartenir à l'enveloppe de Σ. Mais alors, les hyperplans de Σ sont tangents à la courbe C et ne peuvent découper sur cette courbe une série d'ordre n, mais d'ordre $n-1$ au plus. Il en résulte que le système Σ est de classe un, c'est-à-dire est un faisceau.

283. Théorème III. — *Si, sur une courbe algébrique irréductible* C, *deux séries linéaires du même ordre* n *ont un groupe en commun, elles appartiennent à une même série linéaire d'ordre* n.

Considérons deux séries linéaires g_n^r, g_n^s d'ordre n, découpées sur la courbe C par les systèmes linéaires d'hypersurfaces

$$\lambda_0\varphi_0+\lambda_1\varphi_1+\ldots+\lambda_r\varphi_r=0\,, \tag{1}$$

$$\mu_0\psi_0+\mu_1\psi_1+\ldots+\mu_s\psi_s=0\,. \tag{2}$$

Supposons que ces deux séries aient en commun un groupe G, découpé sur C, pour fixer les idées, par $\varphi_0=0$, $\psi_0=0$.

Les hypersurfaces du système (1) peuvent rencontrer la courbe C, en dehors des groupes de la série g_n^r, en un certain groupe H de points fixes. De même, les hypersurfaces du système (2) peuvent rencontrer C, en dehors des groupes de g_n^s, suivant un groupe K de points fixes.

De plus, les séries g_n^r, g_n^s peuvent avoir des points fixes et certains de ces points peuvent être communs à ces deux séries. Désignons par L le groupe de points fixes communs aux deux séries g_n^r, g_n^s.

Formons le système linéaire d'hypersurfaces

$$\begin{aligned}\lambda_0\varphi_0\psi_0+\psi_0(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\ldots+\lambda_r\varphi_r)&\\ +\varphi_0(\mu_1\psi_1+\mu_2\psi_2+\ldots+\mu_s\psi_s)&=0\,.\end{aligned}$$

Ces hypersurfaces rencontrent C aux points fixes des groupes H, K, G, L et, en dehors de ces points découpent sur C une série linéaire comprenant tous les groupes de g_n^r et de g_n^s dont on a supprimé les points du groupe L. Si l'on ajoute à cette série les points du groupe L, on obtient une série linéaire g_n^{r+s} comprenant tous les groupes des séries g_n^r, g_n^s. Le théorème est donc démontré.

284. Théorème IV (Enriques). — *Sur une courbe algébrique irréductible* C, *une série rationnelle de dimension* r *et d'indice un de groupes de* n *points, est contenue dans une série linéaire d'ordre* n [1].

[1] F. Enriques, *Un' osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1896).

Considérons, sur la courbe C, une série Σ de dimension r, de groupes de n points, rationnelle, d'indice m, c'est-à-dire telle que par r points de la courbe C passent m groupes de la série.

Commençons par démontrer le théorème dans le cas $r=1$. Nous considérerons deux cas :

1° Les groupes de Σ passant par un point n'ont pas en commun d'autres points de la courbe ;

2° Le contraire a lieu.

Plaçons-nous dans le premier cas. La série Σ étant rationnelle, nous pouvons représenter ses groupes par les points d'une courbe rationnelle normale K d'ordre m de S_m. Alors, aux groupes de Σ passant par un point de C correspondent m points de K déterminant un hyperplan ξ. A un point de K correspondent n points de C et par conséquent les hyperplans ξ forment une variété Σ', ∞^1, telle que par un point de K passent n de ses hyperplans. Si la classe de Σ' était supérieure à n, c'est-à-dire si par un point extérieur à K de S_m passaient plus de n hyperplans de Σ', la courbe K ferait partie de l'enveloppe de Σ' et les hyperplans ξ toucheraient la courbe K. Mais alors, ces hyperplans ne rencontreraient plus K en m points, contrairement à l'hypothèse. On en conclut que Σ' est de classe n.

Cela étant, opérons une réciprocité sur l'espace S_m. Aux hyperplans ξ de Σ' correspondent les points d'une courbe C', d'ordre n, en correspondance birationnelle avec C. Aux points de K correspondent des hyperplans d'une série de classe m, découpant sur C' les groupes de n points de la série qui correspond, sur cette courbe, à la série Σ de C. Nous désignerons encore cette série par Σ.

La courbe C' peut appartenir à un espace linéaire de dimension μ inférieure à m. Les groupes de Σ appartiennent à la série g_n^μ des sections hyperplanes de C' et le théorème est démontré dans les hypothèses envisagées.

Plaçons-nous maintenant dans le second cas et supposons que les m groupes de Σ passant par un point de C, passent en conséquence par $\nu-1$ autres points de cette courbe. Alors, il existe sur C une série γ_ν d'ordre ν et chaque groupe de n points de Σ est formé de $\frac{n}{\nu}$ groupes de γ_ν. Représentons les groupes de γ_ν par les points d'une courbe Γ. Aux groupes de Σ correspondent sur Γ des groupes de $\frac{n}{\nu}$ points formant un système Σ_1 d'indice m. D'après ce qui vient d'être établi, ces groupes appartiennent à une série linéaire d'ordre $\frac{n}{\nu}$. A cette série correspond sur C une série linéaire d'ordre n (composée au moyen de γ_ν). Le théorème est donc démontré dans l'hypothèse $r=1$.

Supposons maintenant $r>1$. Toute série ∞^1 tirée de Σ appartient à une série linéaire d'ordre n. Deux séries ∞^1 tirées de Σ, ayant un groupe commun, appartiennent à deux séries linéaires d'ordre n ayant un groupe commun, donc à une même série linéaire. De proche en proche, on formera donc une série linéaire d'ordre n comprenant tous les groupes de Σ. Le théorème est donc complètement démontré.

On observera que la dimension de la série d'ordre n comprenant les groupes de la série Σ, de dimension r et d'indice m, est supérieure à r.

§ 2. *Les opérations sur les séries linéaires*

285. Séries linéaires complètes. — Considérons, sur une courbe C (1), une série linéaire g_n^r d'ordre n et de dimension r. Cette série est dite *complète* si elle n'appartient pas à une série linéaire, du même ordre et de dimension supérieure.

Un groupe de n points donné sur la courbe C ne peut appartenir à deux séries complètes d'ordre n, distinctes, car ces deux séries, ayant un groupe commun, appartiendraient à une même série d'ordre n. Il en résulte qu'une série linéaire d'ordre n appartient à une seule série linéaire complète d'ordre n.

Considérons une série complète g_n^r, simple, et construisons son image projective. Nous obtenons une courbe C′, d'ordre n, de S_r. La courbe C′ ne peut être la projection d'une courbe d'ordre n appartenant à un espace de dimension supérieure à r, car alors la série g_n^r ne serait pas complète.

On appelle *courbe normale* dans un espace S_r, une courbe qui n'est pas la projection d'une courbe du même ordre appartenant à un espace de dimension supérieure à r.

L'image projective d'une série complète simple est une courbe normale et la série des sections hyperplanes d'une courbe normale est complète.

286. Groupes équivalents. — Deux groupes de n points G, G′ sur la courbe C sont dits *équivalents* s'ils appartiennent à une même série linéaire d'ordre n. On écrit

$$G \equiv G'.$$

Deux groupes G′, G″ équivalents à un même troisième G, sont équivalents, car les séries linéaires de même ordre déter-

(1) Dorénavant, nous sous-entendrons algébrique et irréductible.

minées par G et G′, G et G″ ont un groupe commun G et appartiennent donc à une même série linéaire.

L'ensemble des groupes équivalents à un groupe G donné constitue une série linéaire complète. Cette série se représente par le symbole $|G|$.

Si l'on ajoute un même groupe H à deux groupes équivalents G, G′, on obtient deux groupes équivalents $H+G$, $H+G'$.

287. Addition des séries linéaires. — Considérons sur C deux séries linéaires g_m^r, g_n^s, découpées sur la courbe respectivement par les systèmes linéaires d'hypersurfaces

$$\lambda_0\varphi_0+\lambda_1\varphi_1+\ldots+\lambda_r\varphi_r=0\,,$$
$$\mu_0\psi_0+\mu_1\psi_1+\ldots+\mu_s\psi_s=0\,,$$

en dehors de groupes de points fixes que nous désignerons respectivement par H et K.

Le système linéaire d'hypersurfaces

$$\nu_{00}\varphi_0\psi_0+\nu_{01}\varphi_0\psi_1+\ldots+\nu_{ik}\varphi_i\psi_k+\ldots+\nu_{rs}\varphi_r\psi_s=0 \qquad (1)$$

découpe sur C, en dehors du groupe de points fixes $H+K$, une série linéaire qui comprend les groupes formés d'un groupe de g_m^r et d'un groupe de g_n^s. Cette série linéaire, d'ordre $m+n$, est appelée somme des séries g_m^r, g_n^s.

Nous allons préciser cette définition.

Considérons deux séries linéaires complètes $|L|$, $|M|$ et formons tous les groupes formés d'un groupe de $|L|$ et d'un groupe de $|M|$. Tous les groupes ainsi obtenus sont équivalents. En effet, soient L_1, L_2 deux groupes de $|L|$ et M_1, M_2 deux groupes de $|M|$. De $L_1\equiv L_2$, nous déduisons

$$L_1+M_1\equiv L_2+M_1\,.$$

Puisque $M_1\equiv M_2$, nous aurons $L_2+M_1\equiv L_2+M_2$ et par conséquent $L_1+M_1\equiv L_2+M_2$.

La série *complète* comprenant tous les groupes formés d'un groupe L et d'un groupe M, est appelée somme des séries $|L|$, $|M|$; elle est représentée par $|L+M|$.

Observons que si les séries g_m^r, g_n^s considérées plus haut sont complètes, la série découpée sur C par le système (1) n'est pas nécessairement complète.

Dans certaines questions, on est conduit à considérer la série linéaire de dimension minimum comprenant tous les groupes formés d'un groupe de $|L|$ et d'un groupe de $|M|$. Cette série est appelée *somme minimum* des séries $|L|$, $|M|$ et est représentée par $|L|+|M|$.

288. Soustraction des séries. — Considérons une série linéaire $|G|$ et un groupe de points H. Supposons qu'il existe dans $|G|$ des groupes contenant tous les points de H. Considérons ces groupes et soient K les groupes que l'on en déduit après suppression des points du groupe H. On a donc

$$G \equiv H + K$$

et les groupes K ainsi obtenus forment une série linéaire. Cette série est complète, car autrement, la série $|G|$ ne serait pas complète.

La série linéaire $|K|$ est appelée *reste* du groupe H par rapport à la série $|G|$.

Si m est l'ordre de $|G|$, n le nombre de points du groupe H, la série $|K|$ est d'ordre $m-n$.

La considération de la série $|K|$ ne sera intéressante que si H_1 étant un groupe équivalent à H, le reste $|K_1|$ du groupe H_1 par rapport à la série $|G|$ coïncide avec $|K|$.

On peut alors écrire

$$|G-H| = |K|$$

et la soustraction des séries sera ainsi définie.

289. Théorème du reste (Brill et Noether). — *Les restes de deux groupes équivalents par rapport à une série linéaire complète, quand ils existent, sont équivalents.*

Soient $|G|$ une série linéaire complète, H et H_1 deux groupes d'une série linéaire $|H|$. Supposons que les restes $G-H$, $G-H_1$ existent et soient

$$K \equiv G - H, \qquad K_1 \equiv G - H_1.$$

On a

$$G \equiv H + K \equiv H_1 + K, \qquad G \equiv H_1 + K_1.$$

On a donc

$$H_1 + K \equiv H_1 + K_1$$

et par conséquent

$$K \equiv K_1.$$

Le théorème est donc démontré.

290. Multiples d'une série linéaire. — Soient $|G_1|$, $|G_2|$, ..., $|G_k|$, k séries linéaires complètes appartenant à la courbe C. Nous avons défini la somme $|G_1+G_2|$ des séries $|G_1|$, $|G_2|$. On peut considérer la somme $|G_1 + G_2 + G_3|$ des séries $|G_1 + G_2|$ et $|G_3|$, c'est-à-dire la somme des séries $|G_1|$, $|G_2|$, $|G_3|$. De proche en proche, on définit la somme

$$|G_1 + G_2 + \dots G_k|$$

des séries $|G_1|$, $|G_2|$, ..., $|G_k|$.

Si les k séries $|G_1|$, $|G_2|$, ..., $|G_k|$ coïncident en une seule série $|G|$, la somme des k séries devient la série $|kG|$, multiple d'ordre k de la série $|G|$.

291. Remarque. — Le concept de série complète, celui de groupes équivalents et les opérations d'addition et de soustraction des séries sont invariants vis-à-vis des transformations birationnelles de la courbe envisagée.

CHAPITRE II

LES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE LA GÉOMÉTRIE SUR UNE COURBE ALGÉBRIQUE

§ 1. *La série canonique et le théorème de Riemann-Roch*

292. Groupe jacobien d'une série linéaire simplement infinie. — Considérons sur une courbe C une série linéaire g_n^1 sans points fixes. Un groupe de cette série est en général formé de n points distincts, mais il y a exception pour un nombre fini de groupes de la série. Ces groupes comprendront en général $n-1$ points, un de ces points devant être compté pour deux. Ces points, dont chacun compte pour deux dans un groupe de la série, sont appelés les points doubles de celles-ci ; leur ensemble est le *groupe jacobien* de la série g_n^1.

Si la courbe C est plane et d'ordre n, et si la série g_n^1 est découpée par les droites passant par un point O n'appartenant pas à la courbe, le groupe jacobien est formé par les points de contact des tangentes à la courbe passant par O. Il est donc découpé sur C par la polaire du point O, en dehors des points singuliers éventuels de cette courbe.

293. Genre d'une courbe. — Soient, sur une courbe C, deux séries distinctes g_m^1, g_n^1, sans points fixes et soient μ le nombre des points du groupe jacobien de g_m^1, ν celui des points du groupe jacobien de g_n^1.

Entre les groupes G_m de la série g_m^1, établissons la correspondance suivante : Les m points d'un groupe G_m déterminent m groupes de la série g_n^1. Les $m(n-1)$ points de ces groupes n'appartenant pas à G_m déterminent $m(n-1)$ groupes G_m de g_m^1 que nous faisons correspondre au groupe G_m dont nous sommes parti. Cette correspondance est symétrique ; elle peut être considérée comme une correspondance entre les points de la droite qui représente la série g_m^1 ; elle possède donc $2m(n-1)$ groupes unis.

Les groupes unis peuvent se présenter dans deux cas :

1° Le groupe G_m contient un point double de la série g_n^1. Alors, à ce groupe G_m correspondent $(m-n)(n-1)+n-2$ groupes de g_m^1 distincts de G_m et le groupe G_m compté une fois. On obtient donc un groupe uni ordinaire ;

2° Le groupe G_m contient deux points d'un groupe de g_n^1. A ce groupe G_m correspondent deux groupes de g_m^1 coïncidant avec G_m. Ce groupe est donc un groupe uni double (comptant pour deux).

Si d est le nombre des couples de points appartenant à des groupes de g_m^1, g_n^1, nous avons donc

$$2m(n-1)=\nu+2d.$$

En intervertissant les rôles des deux séries, on a

$$2n(m-1)=\mu+2d.$$

On en déduit

$$2m-\mu=2n-\nu$$

et par conséquent, l'expression

$$p=\frac{1}{2}\mu-m+1=\frac{1}{2}\nu-n+1$$

ne dépend pas du choix de la série dont on est parti.

Le nombre p est appelé *genre* de la courbe.

Observons que sur deux courbes d'une même classe, les groupes jacobiens de deux séries linéaires g_n^1 homologues, se correspondent. *Les courbes d'une même classe ont donc le même genre.*

294. Remarques. — **I.** Le nombre des couples communs à des groupes de deux séries g_m^1, g_n^1, est donné par

$$d=(m-n)(n-1)-p.$$

II. Le groupe jacobien d'une série g_m^1 se compose de

$$\mu=2(m+p-1)$$

points.

III. Prenons pour modèle projectif de la courbe C, une courbe plane n'ayant que des points multiples à tangentes distinctes. Soient n l'ordre de C, ν le nombre de ses points multiples, $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ les multiplicités de ceux-ci :

La première polaire d'un point O rencontre C, en dehors des points multiples, en

$$n(n-1)-\Sigma s(s-1)$$

points, formant le groupe jacobien de la série g_n^1 découpée sur C par les droites passant par O. On a donc

$$2(n+p-1)=n(n-1)-\Sigma s(s-1),$$

d'où

$$p=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\frac{1}{2}\Sigma s(s-1).$$

On retrouve ainsi la définition du genre donnée antérieurement (n° 25).

295. Série jacobienne d'une série linéaire. — Soit, sur la courbe C, une série g_n^r dépourvue de points fixes ($r>1$). Les différentes séries g_n^1 tirées de g_n^r possèdent un groupe jacobien. Nous allons établir que ces différents groupes jacobiens sont équivalents.

De la série g_n^r, tirons une série g_n^2 sans points fixes et supposons en premier lieu que cette série soit simple. En rapportant projectivement les groupes de g_n^2 aux droites d'un plan σ, nous transformons la courbe C en une courbe C′ d'ordre n de ce plan. Les séries g_n^1 appartenant à g_n^2 sont découpées sur C′ par les droites des faisceaux du plan σ. Les groupes jacobiens de ces séries sont découpés, en dehors des points singuliers éventuels de C′, par les premières polaires des sommets des faisceaux par rapport à C′. Ces premières polaires forment un système linéaire et par conséquent les groupes jacobiens des séries g_n^1 tirées de g_n^2 forment une série linéaire.

Supposons maintenant que la série g_n^2 soit composée au moyen d'une série γ_ν. En rapportant projectivement les groupes de g_n^2 aux droites de σ, il correspond à C une courbe C″ d'ordre $\frac{n}{\nu}$. Les groupes jacobiens des séries découpées sur C″ par les faisceaux de droites du plan, forment une série linéaire. Le groupe jacobien d'une série g_n^1 de g_n^2 est le transformé du groupe jacobien de la série correspondante sur C″, augmenté des points doubles de la série γ_ν. Par conséquent ces groupes jacobiens appartiennent encore à une série linéaire (ayant comme points fixes les points doubles de γ_ν).

Cela étant, tirons de g_n^r, deux séries g_n^2 ayant en commun une série g_n^1. Les groupes jacobiens relatifs à ces deux séries g_n^2 forment deux séries linéaires ayant un groupe en commun, donc elles appartiennent à une même série linéaire. De proche en proche, on démontre que les groupes jacobiens des séries g_n^1 tirées de g_n^r, forment une série linéaire.

Si donc nous considérons une série linéaire complète $|G|$ et si nous désignons par G_j les groupes jacobiens des séries de dimension un tirées de $|G|$, ces groupes appartiennent à une série linéaire. Cette série linéaire, complétée s'il le faut, est appelée *série jacobienne* de la série $|G|$; on la représente par $|G_j|$.

La série jacobienne d'une série linéaire d'ordre n est d'ordre $2(n+p-1)$.

296. Jacobienne de la somme de deux séries. — Considérons, sur la courbe C, une série linéaire $|G|$, d'ordre n, de dimension $r>1$, et un point P. Supposons que la série $G+P$ n'ait pas P comme point fixe. Extrayons de la série $|G+P|$ une série g^2_{n+1} comprenant ∞^1 groupes formés du point P et de groupes G. Rapportons projectivement les groupes de cette série aux droites d'un plan σ. A la courbe C correspond dans σ une courbe C′, d'ordre $n+1$. Soit P′ le point homologue de P. Les droites passant par P′ découpent sur C′ une série g_n^1 dont les groupes correspondent à des groupes G. La première polaire de P′ par rapport à C′ coupe cette courbe suivant le groupe jacobien de g_n^1 et elle touche la courbe en P′. On en conclut que parmi les groupes jacobiens de la série $|G+P|$ se trouve le groupe G_j+2P. On a donc

$$(G+P)_j \equiv G_j+2P .$$

Cela étant, considérons une seconde série $|H|$ et la somme $|G+H|$. En ajoutant successivement les points d'un groupe H à la série $|G|$, on ajoute successivement les points de ce groupe, comptés deux fois, à la série $|G_j|$. En d'autres termes, on a

$$(G+H)_j \equiv G_j+2H .$$

En intervertissant les rôles des séries $|G|$ et $|H|$, on a de même

$$(G+H)_j \equiv H_j+2G .$$

On a donc finalement

$$|(G+H)_j| = |G_j+2H| = |H_j+2G| .$$

297. Série canonique. — De la relation fondamentale qui vient d'être établie, on déduit

$$|G_j-2G| = |H_j-2H| .$$

Par conséquent, si la série

$$|K| = |G_j-2G|$$

existe, elle est indépendante du choix de la série $|G|$.

La série $|K|$ est appelée *série canonique* de la courbe C. Par sa construction, elle est indépendante du choix de la courbe représentative d'une classe ; en d'autres termes, sur deux courbes appartenant à une même classe, les séries canoniques se correspondent.

La série $|G|$ étant d'ordre n, la série $|G_j|$ est d'ordre $2(n+p-1)$, par conséquent la série canonique $|K|$, si elle existe, est d'ordre $2p-2$.

Si la courbe C est rationnelle, $p=0$ et la série canonique n'existe pas.

Si la courbe C est de genre $p=1$, la série canonique est d'ordre zéro.

Le procédé utilisé ici pour introduire la série canonique est dû à F. Enriques [1].

298. Interprétation projective. — Prenons, pour modèle projectif d'une courbe, la courbe plane C d'ordre n ne possédant que des points doubles ordinaires. Soit $p>0$ son genre.

Supposons que la série d'ordre n découpée sur C par les droites de son plan appartienne à la série $|G|$. Les premières polaires des points du plan par rapport à C découpent sur cette courbe, en dehors des points doubles par lesquels elles passent simplement, des groupes de la série jacobienne $|G_j|$. Ces polaires sont d'ordre $n-1$ et par conséquent les courbes d'ordre $n-1$ passant simplement par les points doubles de C, découpent sur cette courbe, en dehors de ces points, des groupes de la série $|G_j|$. Parmi ces courbes, se trouvent des courbes dégénérées en des courbes d'ordre $n-3$ passant simplement par les points doubles de C et en des coniques. Ces dernières découpent sur C des groupes de la série $|2G|$ et les courbes d'ordre $n-3$ considérées (si elles existent), des groupes de la série $|G_j-2G|$, c'est-à-dire de la série canonique $|K|$.

Les courbes du plan de C passant simplement par les points doubles de cette courbe sont appelées *adjointes* à la courbe C. Les adjointes d'ordre $n-3$ à la courbe C d'ordre n découpent donc sur celle-ci des groupes de la série canonique.

Soit d le nombre de points doubles de la courbe C. La dimension r du système des adjointes d'ordre $n-3$ à la courbe C satisfait à l'inégalité

$$r \geqslant \frac{1}{2} n(n-3) - d .$$

Comme on a

$$d = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - p ,$$

on en déduit

$$r \geqslant p-1 .$$

(1) *Programma di un corso di Geometria superiore* (*Boll. di Bibliogr. e Storia delle Sc. matematiche*, 1899).

La dimension de la série canonique $|K|$ est au moins égale à r, donc si $p > 1$, la série canonique existe certainement.

Nous représenterons par $\rho - 1$ la dimension de la série canonique. On a alors $\rho \geqslant p$.

299. Nombre de groupes de $r+1$ points communs aux groupes de deux séries g_n^r, g_m^1. — Soient, sur une courbe C, g_n^r et g_m^1 deux séries linéaires données ; cherchons le nombre N_r des groupes de $r+1$ points appartenant à la fois à un groupe de chacune de ces séries.

Si $r=1$, nous avons trouvé plus haut

$$N_1 = (n-1)(m-1) - p\,.$$

Nous admettrons que le nombre N_r cherché dépend de r, n, m et nous écrirons

$$N_r = F(r,\ n,\ m)\,.$$

Ajoutons à la série g_n^r un point fixe P et cherchons le nombre des groupes de $r+1$ points appartenant à la série g^r_{n+1} ainsi formée et à g_m^1. Ces groupes sont les groupes de $r+1$ points communs à g_n^r et à g_m^1, et les groupes de $r+1$ points contenant le point P et r points choisis parmi les points, distinct de P, appartenant au groupe de g_m^1 passant par P. On a donc

$$F(r,\, n+1,\, m) = F(r,\, n,\, m) + \binom{m-1}{r}\,.$$

L'application répétée de ce raisonnement donne

$$F(r,\, n+h,\, m) = F(r,\, n,\, m) + h\binom{m-1}{r}\,. \qquad (1)$$

Considérons maintenant une série g_n^1 et formons tous les groupes formés de r groupes de cette série. Nous obtenons une série linéaire g^r_{rn} particulière. Un couple commun à un groupe de g_n^1 et à un groupe de g_m^1, joint à $r-1$ points choisis arbitrairement parmi les $m-2$ points qui complètent ce dernier groupe, donne un groupe de $r+1$ points communs à un groupe de g_m^r et à un groupe de g_m^1. D'autre part, si les séries g_n^1 et g_m^1 considérées sont génériques, il n'existe pas d'autre groupe de $r+1$ points communs à des groupes de g^r_{rn} et de g_m^1. On a donc

$$F(r,\, rn,\, m) = \binom{m-2}{r-1}\ N_1 = [(n-1\,(m-1) - p]\binom{m-2}{r-1}\,.$$

En faisant $h=(r-1)n$ dans la formule (1), on a

$$F(r,\, rn,\, m) = F(r,\, n,\, m) + (r-1)\, n\binom{m-1}{r}\,.$$

On en déduit

$$N_r = \binom{m-1}{r}(n-r) - \binom{m-2}{r-1}p\ .$$

300. Groupes de ρ points de la courbe C. — La série canonique de C ayant la dimension $\rho - 1$, il est possible de trouver sur C un groupe G de ρ points n'appartenant pas à la série canonique. Supposons que le groupe G puisse appartenir à une série simplement infinie $g_\rho{}^1$. Un groupe de cette série ne pouvant appartenir à un groupe canonique, le nombre des groupes de ρ points appartenant à des groupes de $g_\rho{}^1$ et de la série canonique $g_{2p-2}^{\rho-1}$, doit être nul. On doit donc avoir

$$N_\rho = \binom{\rho-1}{\rho-1}(2p-2-\rho+1) - \binom{\rho-2}{\rho-2}p = 0\ ,$$

c'est-à-dire $\rho = p - 1$. Or, on a $\rho \geqslant p$, donc le groupe G considéré ne peut appartenir à une série simplement infinie.

Un groupe de ρ points de la courbe C, n'appartenant pas à un groupe de la série canonique, est isolé.

301. Séries linéaires spéciales et non spéciales. — Considérons, sur la courbe C, un groupe G de n points. Supposons que la dimension r de la série complète $|G|$ soit supérieure à $n - \rho$. Le reste d'un groupe de $n - \rho$ points par rapport à $|G|$ est une série d'ordre ρ infinie par hypothèse ; les groupes de cette série doivent donc appartenir à des groupes de la série canonique.

Observons que si les n points du groupe G n'appartiennent pas à un groupe de la série canonique, il sera possible de choisir dans ce groupe ρ points n'appartenant pas à un groupe de la série canonique. Le reste des $n - \rho$ points restants de G par rapport à la série $|G|$ sera dans ces conditions une série $g_\rho{}^0$ et la dimension de la série $|G|$ ne pourra être supérieure à $n - \rho$.

On voit donc que les séries linéaires d'ordre n peuvent se répartir en deux catégories :

1° Les séries de dimension supérieure à $n - \rho$. Ces séries seront appelées séries spéciales ;

2° Les séries dont la dimension est au plus égale à $n - \rho$. Ces séries seront appelées *séries non spéciales*.

Une série linéaire dont les groupes n'appartiennent pas à des groupes de la série canonique, est non spéciale.

Par conséquent :

Une série linéaire, d'ordre supérieur à $2p - 2$ est non spéciale.

Une série linéaire de dimension supérieure à $\rho - 1$ *est non spéciale et son ordre est au moins égal à* 2ρ.

302. Dimension de la série canonique. — Prenons pour modèle projectif de la courbe C une courbe plane d'ordre m ne possédant que des points doubles ordinaires, au nombre de

$$d = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - p\,.$$

Les adjointes d'ordre $m-3$ découpent sur C des groupes canoniques, par conséquent, les adjointes d'ordre $m-3+h$, où $h>0$, découpent sur C, en dehors des points doubles, une série dont les groupes n'appartiennent pas à des groupes canoniques et par conséquent non spéciale.

L'ordre de la série est

$$n = m(m-3+h) - 2d = 2p - 2 + hm\,.$$

La dimension r de la série est au moins égale à la dimension du système des adjointes d'ordre $m-3+h$ qui ne comprennent pas la courbe C comme partie. On a donc

$$r \geqslant \frac{1}{2}(m-3+h)(m+h) - \frac{1}{2}h(h-3) - d - 1,$$

c'est-à-dire

$$r \geqslant mh + p - 2\,,$$

ou encore

$$r \geqslant n - p\,.$$

Cette dimension, puisque la série est non spéciale, est au plus égale à $n-\rho$. On a donc

$$n - p \leqslant n - \rho\,,$$

d'où $\rho \leqslant p$. Mais on a d'autre part $\rho \geqslant p$, donc $\rho = p$.

La série canonique a la dimension $\mathrm{p}-1$.

On a de plus $r = n - p$ et par conséquent, *les adjointes à la courbe* C *d'ordre supérieur à* $\mathrm{m}-3$ *découpent sur cette courbe une série linéaire complète, non spéciale.*

Nous avons vu que les adjointes d'ordre $m-3$ formaient un système linéaire de dimension au moins égale à $p-1$. D'après ce qu'on vient d'établir, cette dimension est exactement $p-1$ et *les adjointes d'ordre* $\mathrm{m}-3$ *découpent sur la courbe* C *la série canonique complète.*

303. Théorème du reste sous la forme projective. — Considérons, sur la courbe plane C, un groupe H et deux courbes adjointes d'ordre l passant par H. Soient H_1', H_2' les groupes de points suivant lesquels ces adjointes coupent encore C en dehors de H et des points doubles. Les groupes H_1', H_2' appartiennent à une série linéaire $|H'|$. D'après le théorème du reste, cette série est également découpée sur C par les adjointes d'ordre l passant par un groupe quelconque, équivalent à H. On peut énoncer le théorème du reste sous la forme projective que lui avaient donnée Brill et Noether :

La série linéaire découpée sur la courbe plane C *par les adjointes passant par un groupe de points* H, *est également découpée par les adjointes du même ordre passant par un groupe quelconque de la série* $|H|$.

Observons que la série $|H'|$ est certainement complète, si elle est découpée par des adjointes d'ordre $l \geqslant m-3$, sans quoi la série découpée pour ces adjointes sur C ne serait pas complète. Il en est de même de la série $|H|$, découpée par les adjointes du même ordre passant par un groupe H'.

Cela étant, supposons que le groupe H n'appartienne pas à un groupe canonique et que la série $|H|$ soit par conséquent non spéciale. Alors, l'ordre l des adjointes passant par H et découpant $|H'|$ sur C est certainement supérieur à $m-3$.

Soient q le nombre de points du groupe H, q' celui des points du groupe H', $n=q+q'$ l'ordre de la série découpée par les adjointes d'ordre l. Cette série est non spéciale et de dimension $n-p$. La dimension r de la série $|H|$ satisfait à l'inégalité

$$r \geqslant n-p-q',$$

c'est-à-dire à $r \geqslant q-p$. Mais d'autre part, $|H|$ étant non spéciale, sa dimension est au plus égale à $q-p$. On a donc $r=q-p$.

La dimension d'une série non spéciale d'ordre n *est égale à* n — p.

304. Transformation d'une courbe en une courbe privée de points singuliers. — Considérons, sur la courbe C de genre p, une série complète d'ordre $n>2p$, par conséquent non spéciale, g_n^{n-p}.

La série est dépourvue de points fixes. Supposons en effet qu'elle possède k points fixes. En supprimant ces points, on obtiendra une série g_{n-k}^{n-p}, de dimension $n-p>p-1$ et par suite non spéciale. Sa dimension doit donc être $n-k-p$; d'autre part, elle est égale à $n-p$, donc $k=0$.

La série g_n^{n-p} est simple. Supposons en effet qu'elle puisse être composée au moyen d'une série γ_ν. Les groupes de g_n^{n-p} passant par un point de C passent en conséquence par les $\nu-1$ points qui complètent le groupe de γ_ν contenant le point considéré. Il reste une série $g_{n-\nu}^{n-p-}$ non spéciale, puisque sa dimension $n-p-1$ est supérieure à $p-1$. On doit donc avoir $n-\nu-p=n-p-1$, d'où $\nu=1$.

Cela étant, rapportons projectivement les groupes de g_n^{n-p} aux hyperplans d'un espace linéaire S_{n-p} à $n-p$ dimensions. Il correspond à C une courbe normale C′ d'ordre n, appartenant à la classe de C.

La courbe C′ ne peut posséder un point singulier. Supposons en effet que C′ puisse posséder un point multiple d'ordre s. Les hyperplans passant par ce point découpent sur C′ une série d'ordre $n-s$ et de dimension $n-p-1>p-1$, donc non spéciale. Elle a donc la dimension

$$n-s-p=n-p-1,$$

d'où $s=1$.

Les cordes de C′ engendrent une variété à trois dimensions V_3. Choisissons un espace S_{n-p-4} ne rencontrant pas V_3 et un espace S_3 ne rencontrant pas S_{n-p-4}. En projetant C′ de S_{n-p-4} sur S_3, on obtient une courbe C″ dépourvue de points doubles, puisqu'aucune bisécante de C′ ne s'appuie sur S_{n-p-4}. La courbe C″ est dépourvue de points singuliers, car pour qu'elle possède un point triple par exemple, il faudrait qu'un plan trisécant de C′ rencontre S_{n-p-4} suivant une droite ; mais alors, il y aurait trois bisécantes de C′ rencontrant S_{n-p-4}, ce qui est impossible.

Plus généralement, en projetant C′ d'un espace $S_{n-p-k-1}$ ne rencontrant pas V_3 sur un espace S_k, on obtient dans cet espace une courbe dépourvue de points singuliers.

Dans toute classe de courbes algébriques, il existe des courbes privées de points multiples, appartenant à des espaces ayant au moins trois dimensions.

305. Théorème de réduction. — *Si* $|G|$ *est une série linéaire complète sur une courbe* C, *dont les groupes appartiennent à des groupes canoniques, et si* P *est un point qui n'appartient pas à tous les groupes canoniques contenant un groupe* G, *la série complète* $|G+P|$ *a le point fixe* P.

Prenons pour modèle projectif de C une courbe plane d'ordre m ne possédant qu'un nombre fini de points doubles ordinaires. Sur cette courbe, la série $|G|$ est découpée par les adjointes d'ordre $m-3$ passant par un groupe H de points fixes (en dehors des points doubles). Soit P un point de C n'appartenant pas à toutes les adjointes d'ordre $m-3$ passant par un groupe G. Considérons une droite d passant par P et coupant encore C en un groupe D de $m-1$ points. Il existe une adjointe d'ordre $m-2$ passant par H, par un groupe G, par P et par D ; elle est formée de la droite d et de l'adjointe d'ordre $m-3$ passant par H et par le groupe G considéré. La série complète $|G+P|$ est donc découpée sur C par les adjointes d'ordre $m-2$ passant par H et par D. Mais ces adjointes rencontrent d aux $m-1$ points du groupe D, donc elles comprennent d comme partie fixe. Le point P est donc fixe pour la série complète $|G+P|$.

306. Indice de spécialité. — Nous dirons qu'un groupe de points est spécial s'il appartient à un groupe au moins de la série canonique.

Nous avons vu que si les groupes d'une série linéaire ne sont pas spéciaux, cette série est non spéciale, par conséquent les groupes d'une série spéciale sont spéciaux.

Soit H un groupe spécial. Le nombre i de groupes canoniques linéairement indépendants contenant le groupe H est appelé *indice de spécialité* de ce groupe. La série $|H|$ est spéciale et i est également appelé indice de spécialité de cette série.

On convient de dire qu'une série non spéciale a l'indice de spécialité zéro.

307. Théorème de Riemann-Roch. — *Une série linéaire complète d'ordre* n *et d'indice de spécialité* i, *sur une courbe de genre* p, *a la dimension* n — p + i.

Supposons en premier lieu $i=1$ et représentons par $|G|$ la série complète d'ordre n considérée. Soit r sa dimension. Si P est un point générique de la courbe, la série $|G+P|$ est non spéciale et a le point fixe P. Sa dimension est d'une part $n+1-p$ et d'autre part r, on a donc

$$r=n-p+1$$

et le théorème est démontré dans le cas $i=1$.

Supposons le théorème démontré pour la valeur $i-1$ de i. Soit P un point qui n'appartient pas à tous les groupes canoniques contenant un groupe G. La série $|G+P|$ a l'indice de spécialité $i-1$ et sa dimension est

$$n+1-p+i-1=n-p+i.$$

D'autre part, cette série a le point fixe P et sa dimension est donc égale à celle de $|G|$. Donc la dimension de cette série est

$$r=n-p+i.$$

Le théorème est donc démontré pour les séries d'indice de spécialité i lorsqu'il est vrai pour celles d'indice de spécialité $i-1$. Or, il est vrai pour $i=1$, donc il est vrai pour i quelconque.

Observons que pour les séries non spéciales, on a $i=0$ et $r=n-p$, comme cela a été établi plus haut.

308. Propriétés de la série canonique. — La série canonique g_{2p-2}^{p-1} est spéciale et a l'indice de spécialité $i=1$. Il ne peut exister sur la courbe C une seconde série g_{2p-2}^{p-1}. En effet, une telle série est spéciale, puisque

$$p-1>2p-2-p,$$

et elle a précisément l'indice de spécialité $i=1$, donc elle coïncide nécessairement avec la série canonique.

La série canonique d'une courbe de genre p *est l'unique série d'ordre* 2 p — 2 *et de dimension* p — 1 *appartenant à cette courbe.*

La série canonique est dépourvue de points fixes, car si P était un point fixe de cette série, on pourrait le supprimer et le remplacer par un autre point de la courbe. On obtiendrait ainsi une seconde série g_{2p-2}^{p-1}, ce qui est impossible.

Observons qu'il existe, sur la courbe C, des séries d'ordre $2p-2$ distinctes de la série canonique, mais ces séries sont non spéciales et de dimension $p-2$. Elles sont appelées *séries paracanoniques.*

Les groupes de $2p-2$ points sur une courbe de genre p sont en nombre ∞^{2p-2} et se répartissent en ∞^{p} séries d'ordre $2p-2$ dont une seule : la série canonique, est spéciale.

309. Théorème. — *Un groupe d'une série spéciale complète d'ordre* n *et de dimension* r *impose* n — r *conditions aux groupes canoniques qui doivent le contenir.*

Soit i l'indice de spécialité de la série complète g_n^r considérée. Il existe ∞^{i-1} groupes canoniques contenant un groupe de la série. Or, on a $r=n-p-i$, d'où

$$i-1=p-1-(n-r),$$

ce qui démontre le théorème.

310. Théorème. — *Si* $|G|$ *est une série linéaire complète d'ordre* n *et de dimension* r, *et* P *un point générique de la courbe* C, *la condition nécessaire et suffisante pour que la série complète* $|G+P|$ *ait le point fixe* P, *est que* $|G|$ *soit une série spéciale et qu'il existe au moins un groupe canonique contenant* G *sans contenir* P.

On a $r \geqslant n-p$. Si P est fixe pour la série $|G+P|$, cette série a la dimension $r \geqslant n+1-p$, c'est-à-dire $r>n-p$. La série $|G|$ est donc spéciale.

Un groupe G impose $n-r$ conditions aux groupes canoniques devant le contenir. Si tout groupe canonique contenant un groupe G contenait P, la série $|G+P|$ serait spéciale et le groupe $G+P$ imposerait $n+1-r$ conditions aux groupes canoniques devant contenir $G+P$, c'est-à-dire G. Nous arrivons donc à une contradiction, donc tout groupe canonique passant par un groupe G ne passe pas en conséquence par P.

La condition énoncée est donc nécessaire. Elle est d'autre part suffisante (n° 305).

311. Théorème de Clifford. — *Si une série complète d'ordre* n *et de dimension* r *est spéciale, on a* $n \geqslant 2r$.

Soit H un groupe de points dont le reste par rapport à la série canonique g_{2p-2}^{p-1} est la série g_n^r donnée. Pour qu'un groupe canonique contienne un groupe G de g_n^r, il faut $n-r$ conditions. Pour qu'un groupe canonique contenant H contienne le groupe G, il faut r conditions. On a évidemment $n-r \geqslant r$, d'où $n \geqslant 2r$.

312. Courbes hyperelliptiques. — Proposons-nous de rechercher dans quelles conditions la série canonique d'une courbe C de genre p peut être composée au moyen d'une série γ_ν d'ordre ν.

Si une série complète g_n^r, appartenant à la courbe C, est composée au moyen d'une série γ_ν, il lui correspond, sur la courbe Γ image de γ_ν, une série complète d'ordre $\dfrac{n}{\nu}$ et de dimension r. La dimension d'une série linéaire étant au plus égale à son ordre, on a $r\nu \leqslant n$. L'égalité a lieu lorsque la courbe Γ est rationnelle et γ_ν est alors une série linéaire g_ν^1.

Si la série g_n^r est la série canonique, on a $n=2p-2$, $r=p-1$ et par conséquent $\nu \leqslant 2$, donc $\nu=2$. La courbe Γ est donc rationnelle et γ_ν est une série linéaire g_2^1.

Si la série canonique d'une courbe est composée, c'est au moyen d'une série linéaire d'ordre deux et de dimension un.

Les courbes possédant cette propriété sont appelées *courbes hyperelliptiques.*

Une courbe rationnelle $(p=0)$ contient ∞^2 séries g_2^1.

Une courbe elliptique $(p=1)$ en contient ∞^1. En effet, elle contient ∞^2 couples de points. Une série d'ordre deux étant nécessairement non spéciale, a la dimension un et les ∞^2 couples de points se répartissent en ∞^1 séries g_2^1.

Si une courbe de genre $p>1$ *contient une série linéaire* g_2^1, *elle est hyperelliptique.*

En effet, si i est l'indice de spécialité de la série g_2^1, on a $2-p-i=1$, d'où $i=p-1$. Un de ses groupes présente donc une seule condition aux groupes canoniques qui doivent le contenir. En d'autres termes, les groupes canoniques passant par un point d'un groupe de g_2^1, passent par l'autre, donc la série canonique est composée au moyen de g_2^1 et la courbe est hyperelliptique.

Une courbe hyperelliptique de genre $p > 1$ ne peut posséder deux séries g_2^1 distinctes, car les groupes canoniques passant par un point passeraient en conséquence par deux autres points, ce qui est impossible.

Les groupes canoniques d'une courbe hyperelliptique sont composés de $p-1$ groupes de la série g_2^1. En particulier, les courbes de genre deux sont toujours hyperelliptiques, la série canonique étant une série g_2^1.

§ 2. *Courbes canoniques*

313. Définition et premières propriétés. — L'image projective de la série canonique d'une courbe de genre p, non hyperelliptique, ($p \geqslant 3$), est une courbe C d'ordre $2p-2$, de l'espace S_{p-1}, appelée *courbe canonique*. C'est une courbe normale.

Toute courbe de genre p, d'ordre $2p-2$, de S_{p-1}, est une courbe canonique.

Une courbe canonique est dépourvue de points multiples. Supposons en effet que la courbe C puisse posséder un point P multiple d'ordre s. Les hyperplans passant par P découpent sur C une série d'ordre $2p-2-s$ et de dimension $p-2$; elle a par conséquent l'indice de spécialité $i = s$. Or, par un groupe de cette série ne peut passer qu'un groupe canonique, donc $i = 1$ et par suite $s = 1$.

Les cordes de la courbe C forment une variété V_3. Projetons la courbe C sur un plan à partir d'un espace S_{p-4} ; nous obtenons une courbe C′ d'ordre $2p-2$, possédant

$$2p^2 - 8p + 6 = 2(p-1)(p-3)$$

points doubles. Ceux-ci proviennent des bisécantes de C s'appuyant sur S_{p-4}, donc *les cordes de la courbe canonique* C *engendrent une variété à trois dimensions d'ordre*

$$2(p-1)(p-3).$$

Les hyperquadriques de S_{p-1} découpent sur C une série d'ordre $4p-4$ non spéciale et par conséquent de dimension $3p-4$. Or, les hyperquadriques de S_{p-1} dépendent de

$\frac{1}{2}(p-1)(p+2)$ paramètres ; celles qui contiennent C dépendent donc de

$$\frac{1}{2}(p-1)(p+2)-3p+3=\frac{1}{2}(p-1)(p-4)$$

paramètres. Par conséquent,

Une courbe canonique de genre p *appartient à*

$$\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$$

hyperquadriques linéairement indépendantes.

314. Courbes canoniques des premiers genres. — La courbe canonique de genre trois est une quartique plane sans points doubles.

Soit C_6 une courbe canonique de genre quatre ; elle a l'ordre six, appartient à un espace S_3 et est située sur une quadrique Q.

Les surfaces cubiques de S_3 ne comprenant pas Q comme partie dépendent de 15 paramètres ; elles découpent sur C_6 une série g_{18}^{14}, donc il existe une surface cubique F passant par C_6.

La courbe canonique de genre quatre est l'intersection d'une quadrique et d'une surface cubique.

Si la quadrique Q n'est pas un cône, ses génératrices rectilignes des deux modes découpent sur la courbe deux séries g_3^1.

Si la quadrique Q est un cône, la surface cubique F ne peut passer par le sommet de ce cône et les génératrices de celui-ci déterminent sur la courbe une seule série g_3^1 dont le double est la série canonique.

Soit C_8 une courbe canonique de genre cinq, d'ordre huit, de S_4. Il y a trois hyperquadriques linéairement indépendantes passant par la courbe. Celle-ci est donc l'intersection complète de ces trois hyperquadriques ou bien est tracée sur une surface commune à ces trois hyperquadriques.

Une surface F commune à trois hyperquadriques ne peut être qu'une surface cubique réglée. Cette surface est représentée sur un plan σ par le système des coniques γ_2 passant par un point O. A la courbe C_8 correspond dans σ une courbe d'ordre cinq, γ_5, ayant un point double en O. A la section de F par une hypersurface cubique correspond dans σ une courbe du sixième ordre ayant un point triple en O. La courbe γ_5, jointe à une droite passant par O, forme une courbe de cette espèce, donc C_8 est l'intersection de F et d'une hypersurface cubique contenant une génératrice rectiligne de la surface F.

La courbe canonique de genre cinq, d'ordre huit, de S_4, est l'intersection complète de trois hyperquadriques, ou est l'intersection d'une surface cubique réglée et d'une hypersurface cubique contenant une génératrice de la surface.

315. Courbes canoniques de genre six. — Soit C une courbe canonique de genre six, d'ordre 10, appartenant à un espace S_5 à cinq dimensions. En projetant la courbe C de trois de ses points sur un plan, on obtient en général une courbe C′ d'ordre sept. Observons que le plan déterminé par les trois points de projection peut éventuellement rencontrer la courbe C en d'autres points ; si cette circonstance se présente, la courbe C′ est d'ordre inférieur à sept. Limitons-nous aux cas où la courbe C′ ne possède que des points doubles ordinaires ; nous aurons à considérer trois cas :

1° La courbe C′ est d'ordre cinq et dépourvue de points doubles ;

2° La courbe C′ est d'ordre six et possède quatre points doubles ;

3° La courbe C′ est d'ordre sept et possède neuf points doubles.

Dans le premier cas, les adjointes d'ordre $m-3$ à la courbe C′ sont les coniques du plan. En rapportant projectivement celles-ci aux hyperplans de S_5, on transforme le plan en une surface de Veronese, sur laquelle la courbe C est tracée. La courbe C est l'intersection de cette surface de Veronese et d'une hypersurface cubique coupant encore la surface suivant une conique.

Dans le second cas, les adjointes d'ordre $m-3$ à C sont les cubiques γ_3 passant par les quatre points doubles. En rapportant projectivement ces courbes γ_3 aux hyperplans de S_5, le plan se transforme en une surface F, d'ordre cinq. A la section de la surface F par une hyperquadrique correspond une courbe du sixième ordre passant deux fois par les points doubles de C′. Il en résulte que C est l'intersection complète de F par une hyperquadrique.

On remarquera que par C passent six hyperquadriques linéairement indépendantes. Dans le cas envisagé, cinq de ces hyperquadriques contiennent F.

Passons au troisième cas. Les adjointes d'ordre $m-3$ à la courbe C′ sont les quartiques γ_4 passant par les neuf points doubles de la courbe. Désignons par σ le plan de C′ et par α le plan trisécant de C à partir duquel on projette cette courbe sur σ. Nous resterons dans le cas général, où les neuf points doubles de C′ déterminent une seule cubique γ_3 de genre un.

Les courbes γ_4 forment un système linéaire de degré sept. En rapportant projectivement ces courbes aux hyperplans de

S_5 on obtient une surface F d'ordre sept. A la cubique γ_3 correspond sur F une cubique Γ_3, puisque γ_3 est rencontrée en trois points variables par les courbes γ_4. Aux droites du plan σ correspondent sur F des quartiques rationnelles Γ_4 rencontrant Γ_3 en trois points. Il en résulte que la courbe Γ_3 se trouve dans le plan α. La courbe C rencontre les courbes γ_4 en sept points et la courbe Γ_3 en trois points.

Aux sections de F par les hyperquadriques de S_5 correspondent dans σ des courbes γ_8 d'ordre huit, passant deux fois par les neuf points doubles de C'. Les courbes γ_8 forment un système de dimension 17 et les hyperquadriques de S_5 étant en nombre ∞^{20}, il existe ∞^2 de ces hyperquadriques contenant la surface F et par suite le plan α.

Il existe ∞^2 courbes γ_8 formées de la courbe C' et d'une droite du plan σ. Par suite, il existe ∞^2 hyperquadriques de S_5 ne contenant pas F, passant par C et rencontrant encore F suivant les courbes Γ_4. Il en résulte que la courbe C est l'intersection complémentaire de la surface F et d'une hyperquadrique passant par une courbe Γ_4.

Remarque. — Une étude complète des courbes canoniques de genre six conduirait à considérer également les cas où la courbe C' possède des points de multiplicité supérieure à deux. Supposons par exemple que C' soit du sixième ordre et possède un point triple A et un point double A_1. Les cubiques planes γ_3 ayant un point double en A et passant par A_1 découpent sur C' une série g^5_{10} qui est nécessairement la série canonique de C'. En rapportant projectivement les courbes γ_3 aux hyperplans de S_5, on obtient une surface réglée F d'ordre quatre, appartenant à ∞^4 hyperquadriques. La courbe C est découpée sur F par une hyperquadrique.

316. Courbes canoniques de genre supérieur à six. — Soit C une courbe canonique de genre $p > 6$, de S_{p-1}. Considérons l'espace S_{p-4} déterminé par $p-3$ points de C et supposons, pour rester dans le cas général, que cet espace ne rencontre pas ultérieurement la courbe. Projetons la courbe C sur un plan σ à partir de S_{p-4} ; nous obtenons une courbe C', d'ordre $p+1$ qui, en général, ne possédera que des points doubles ordinaires. Ceux-ci sont au nombre de $\frac{1}{2}p(p-3)$.

Les adjointes d'ordre $m-3$ à la courbe C' sont des courbes d'ordre $p-2$, γ_{p-2}, passant simplement par ces $\frac{1}{2}p(p-3)$ points doubles. Ces courbes forment un système linéaire de dimension $p-1$ et de degré $\frac{1}{2}(p^2-5p+8)$. En rapportant projectivement ces courbes aux hyperplans de

S_{p-1}, nous obtenons une surface F, d'ordre $\frac{1}{2}(p^2-5p+8)$, contenant la courbe C.

Les points doubles de C′ déterminent une courbe γ_{p-3}, d'ordre $p-3$, que, pour rester dans le cas général, nous supposerons unique. A cette courbe correspond sur F une courbe Γ_0, d'ordre $\frac{1}{2}(p-3)(p-4)$. Comme la courbe γ_{p-3} jointe à une droite de σ, donne une courbe γ_{p-2}, la courbe Γ_0 est l'intersection de la surface F et de l'espace S_{p-4}.

A la section de F par une hyperquadrique correspond dans σ une courbe d'ordre $2p-4$ ayant des points doubles aux points doubles de C′. Ces courbes forment un système linéaire de dimension $\frac{1}{2}(p^2-p+4)$; les hyperquadriques de S_{p-1} dépendent de $\frac{1}{2}(p-1)(p+2)$ paramètres, par conséquent, il y a $p-3$ hyperquadriques linéairement indépendantes passant par F. Ces hyperquadriques contiennent l'espace S_{p-4} et sont donc $p-6$ fois spécialisées.

La courbe C′, jointe à une courbe d'ordre $p-5$, constitue une courbe d'ordre $2p-4$ passant deux fois par les points doubles de C′. A une courbe d'ordre $p-5$ de σ correspond sur F une courbe Γ d'ordre $(p-2)(p-5)$ et ces courbes dépendent de $\frac{1}{2}(p-2)(p-5)$ paramètres. Par conséquent, les hyperquadriques contenant C mais non F dépendent de $\frac{1}{2}(p-2)(p-5)$ paramètres et découpent ultérieurement sur F les courbes Γ.

On en conclut que la courbe C est découpée sur F par une hyperquadrique contenant une courbe Γ.

On obtient ainsi une construction simple de la courbe canonique de genre p la plus générale.

317. Courbes paracanoniques. — Considérons, sur une courbe, une série paracanonique complète g_{2p-2}^{p-2} et supposons qu'elle soit simple. En rapportant projectivement ses groupes aux hyperplans d'un espace S_{p-2} à $p-2$ dimensions, on obtient une courbe C d'ordre $2p-2$, que l'on peut appeler *courbe paracanonique*.

Les hyperquadriques de S_{p-2} dépendent de $\frac{1}{2}(p-2)(p+1)$ paramètres ; elles découpent sur C une série d'ordre $4p-4$ certainement non spéciale et par conséquent de dimension

$3p-4$. Il existe donc $\frac{1}{2}(p-1)(p-6)$ hyperquadriques linéairement indépendantes passant par la courbe C.

Pour $p \leqslant 6$, une courbe paracanonique n'appartient donc à aucune hyperquadrique.

Considérons en particulier une courbe paracanonique de genre $p=5$. C'est une courbe du huitième ordre de S_3.

Sur cette courbe C, les quadriques découpent une série g_{16}^9. Cette série, non spéciale, appartient à une série complète g_{16}^{11}. La série découpée par les quadriques est donc incomplète.

Les surfaces cubiques découpent sur C une série g_{24}^{19} complète ; la courbe C ne se trouve donc pas en général tracée sur une surface cubique.

Les surfaces du quatrième ordre découpent sur C une série complète g_{32}^{27}. Comme les surfaces du quatrième ordre de S_3 sont en nombre ∞^{34}, il existe sept surfaces du quatrième ordre linéairement indépendantes passant par C.

Nous avons supposé, dans la définition de la courbe paracanonique, que la série paracanonique était simple. Supposons qu'une courbe C possède une série paracanonique composée au moyen d'une série γ_ν. On doit avoir

$$(p-2)\nu \leqslant 2p-2.$$

Nous pouvons supposer $p>3$, puisque pour $p=3$, les séries paracanoniques sont d'ordre quatre et de dimension un. On peut alors écrire

$$\nu \leqslant 2+\frac{2}{p-2}.$$

Si $p>4$, on a $\nu \leqslant 2$ et par conséquent $\nu=2$. En rapportant projectivement les groupes de la série g_{2p-2}^{p-2} considérée aux hyperplans de S_{p-2}, on obtient une courbe Γ, normale, d'ordre $p-1$. Projetons cette courbe de $p-4$ de ses points sur un plan σ ; nous obtenons une courbe du troisième ordre, de genre un. La courbe Γ est donc de genre un.

Si $p=4$, on peut avoir $\nu=2$ ou 3. Rapportons projectivement les groupes de la série g_6^2 aux droites d'un plan. Si $\nu=3$, nous obtenons une conique et la série γ_3^1 est linéaire; la courbe est hyperelliptique. Si $\nu=2$, nous obtenons une cubique plane, c'est-à-dire une courbe elliptique.

318. Remarque sur les courbes hyperelliptiques. — Soit C une courbe hyperelliptique de genre p. Désignons par $|H|$ la série g_2^1 qu'elle contient et par $|K|$ la série canonique. On a

$$|K|=|(p-1)H|.$$

Considérons la série

$$|2K| = |2(p-1)H|.$$

Les groupes de $|H|$ sont représentés par les points d'une droite s. Aux groupes K correspondent sur s des groupes de $p-1$ points, en nombre ∞^{p-1}.

Si la série $|2K|$ était composée au moyen de $|H|$, aux groupes $2K$ correspondraient des groupes de $2p-2$ points. Or, la série complète $|2K|$ a la dimension $3p-4$. Ce nombre étant supérieur à $2p-2$ pour $p>2$, la série $|2K|$ est simple sur une courbe C de genre $p>2$. L'image projective de la série $|2K|$ est alors une courbe d'ordre $4p-4$ appartenant à un espace S_{3p-4}.

Appelons encore C cette courbe. Les droites déterminées par les couples de points de la série $|H|$ engendrent une surface réglée F. Pour obtenir l'ordre de cette surface, c'est-à-dire le nombre de ses droites s'appuyant sur un espace S_{3p-6}, considérons la série g^1_{4p-4} découpée sur C par les hyperplans passant par cet espace. Cette série et la série $|H|$ ont $3p-5$ couples communs (n° 294), donc la surface F est d'ordre $3p-5$. C'est donc une surface rationnelle normale de S_{3p-4}.

Nous pouvons représenter la surface F sur un plan σ de telle sorte qu'à ses sections hyperplanes correspondent des courbes γ_{3p-5} d'ordre $3p-5$, ayant un point O multiple d'ordre $3p-6$ et passant en outre par $3p-6$ points simples $O_1, O_2, \ldots, O_{3p-6}$ (n° 214). A la courbe C correspond dans σ une courbe C′ d'ordre $4p-4$ passant $4p-6$ fois par O et deux fois par chacun des points $O_1, O_2, \ldots, O_{3p-6}$. A la section de F par une hyperquadrique correspond dans σ une courbe d'ordre $6p-10$, passant $6p-12$ fois par O et deux fois par $O_1, O_2, \ldots, O_{3p-6}$. La courbe C′, jointe à $2p-6$ droites passant par O, appartient au système linéaire formé par ces courbes, donc : *Une courbe hyperelliptique de genre* $p>2$ *peut être transformée birationnellement en une courbe d'ordre* $4p-4$, *de* S_{3p-4}, *découpée sur la surface réglée rationnelle normale d'ordre* $3p-5$, *par une hyperquadrique contenant* $2p-6$ *génératrices rectilignes de cette surface.*

Supposons maintenant $p=2$. La série $|3K|$ est d'ordre six et de dimension quatre ; elle ne peut être composée au moyen de la série $|H|$. Le modèle projectif de cette série est une courbe C d'ordre six de S_4. La surface F engendrée par les droites déterminées par les couples de pointes de $|H|$ est du troisième ordre. Elle est représentée sur un plan σ par les coniques passant par un point O. A la courbe C correspond dans σ une courbe C′ d'ordre quatre, ayant un point double en O. Il en résulte que : *Une courbe de genre deux peut toujours être transformée birationnellement en une courbe d'ordre six de* S_4 *découpée sur une surface cubique réglée par une hyperquadrique.*

§ 3. *Application à la théorie des courbes hyperspatiales*

319. Préliminaires. — Etant donnée sur une courbe C de genre p une série linéaire g_n^r d'ordre n et de dimension r (non nécessairement complète), quelles relations existe-t-il entre les nombres p, n, r ? En d'autres termes, dans quelles conditions existe-t-il, dans un espace S_r, une courbe C d'ordre n et de genre p ?

Dans un important mémoire (¹), G. Castelnuovo a répondu en partie à cette question en donnant une limite supérieure du genre p d'une courbe C d'ordre n de S_r. Ses recherches ont été poursuivies par G. Fano (²). Plus tard, A. Comessatti (³) a établi des limites pour n quand r et p sont donnés, et pour r, quand n et p sont donnés.

Nous allons exposer l'essentiel des recherches de Castelnuovo et deux théorèmes de Comessatti.

320. Sommes minima de séries linéaires. — Soient, sur une courbe algébrique C, irréductible, de genre p, $|G_1|$ et $|G_2|$ deux séries linéaires, *complètes ou non*. Par *somme minimum* $|G_1|+|G_2|$, nous entendons la série de dimension minimum comprenant tous les groupes formés d'un groupe quelconque de $|G_1|$ et d'un groupe quelconque de $|G_2|$.

Par exemple, si C est une courbe de S_r, $|G_1|$ la série des sections hyperplanes, $|G_2|$ la série découpée par les hyperquadriques, la somme minimum de ces deux séries est la série découpée sur C par les hypersurfaces cubiques.

La somme minimum de trois séries $|G_1|$, $|G_2|$, $|G_3|$, complètes ou non, sera la somme minimum des séries $|G_1|+|G_2|$ et $|G_3|$. Et ainsi de suite. On définira ainsi la somme minimum $|G_1|+|G_2|+\ldots+|G_k|$ de k séries $|G_1|$, $|G_2|$, ..., $|G_k|$, complètes ou non.

ν points donnés sur C seront dits indépendants par rapport à une série linéaire $|G|$, complète ou non, quand il existe des groupes de $|G|$ passant par $\nu-1$ quelconques de ces points, ne passant pas par le dernier. Ces ν points imposent donc ν conditions indépendantes aux groupes de $|G|$ qui doivent les contenir. Si n est l'ordre de $|G|$, r sa dimension, on a évidemment $n \geqslant \nu$, $r \geqslant \nu-1$.

(¹) Castelnuovo, *Ricerche di Geometria sulle curve algebriche* (*Atti Accademia di Torino,* 1889, t. XXIV); *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (*Rendiconti Circolo Matematico di Palermo*, 1893); *Memorie scelte* (Bologne, 1937).

(²) Fano, *Sopra le curve di dato ordine e dei massimi generi in uno spazio qualunque* (*Memorie Accademia di Torino*, 1893).

(³) Comessatti, *Limiti di variabilità della dimensione e dell' ordine d'una* g_n^r *sopra una curva di dato genere* (*Atti Istituto Veneto*, 1915, t. LXXIV).

Soit maintenant Γ un groupe de m points de C. Si Γ impose ν conditions aux groupes de $|G|$ qui doivent le contenir, on peut trouver dans Γ des groupes de ν points indépendants par rapport à $|G|$, mais non des groupes de $\nu+1$ points indépendants. On dira que le groupe Γ présente ν conditions par rapport à $|G|$. On a évidemment $0 \leqslant \nu \leqslant m$ et le cas $\nu=0$ ne peut se présenter que lorsque Γ est un groupe de points fixes de $|G|$.

Supposons que le groupe Γ présente μ_1 conditions par rapport à $|G_1|$ et μ_2 conditions par rapport à $|G_2|$. Deux cas peuvent se présenter :

1° $\mu_1+\mu_2 \leqslant m$. Le groupe Γ contient au moins $\mu_1+\mu_2-1$ points indépendants pour la somme minimum $|G_1|+|G_2|$. En effet, un groupe G_1 qui passe par μ_1-1 points de Γ et un groupe G_2 qui passe par μ_2-1 autres points de Γ forment un groupe de $|G_1|+|G_2|$ qui ne contient en général aucun autre point de Γ ;

2° $\mu_1+\mu_2 > m$. Les points de Γ sont tous indépendants pour $|G_1|+|G_2|$.

Cette propriété s'étend immédiatement à la somme minimum de k séries $|G_1|$, $|G_2|$, ..., $|G_k|$. Si le groupe Γ présente respectivement $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ conditions par rapport à ces séries, deux cas sont à considérer :

1° On a
$$\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_k \leqslant m+k-2 .$$
Alors, le groupe Γ présente au moins
$$\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_k-k+1$$
points indépendants par rapport à la somme minimum
$$|G_1|+|G_2|+\ldots+|G_k| ;$$
2° Si on a
$$\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_k > m+k-2 ,$$
les m points du groupe Γ sont indépendants par rapport à la somme minimum considérée.

321. Multiples minima d'une série linéaire. — Soit $|G|$ une série linéaire, complète ou non. Par multiple minimum d'ordre k de la série $|G|$, nous entendons la somme minimum de k séries qui coïncident avec $|G|$. Ce multiple minimum sera représenté par $k|G|$.

Supposons que la série $|G|$, d'ordre n, soit simple. Alors, si r est la dimension de la série, r points quelconques d'un groupe générique de $|G|$ sont toujours indépendants par rapport à $|G|$.

Appliquons le résultat précédent à la série $k|G|$.

Le nombre de conditions ν_k, qu'un groupe générique de $|G|$ impose aux groupes de la série $k|G|$ qui doivent le contenir, satisfait aux inégalités

$$\nu_k \geqslant k(r-1)+1, \qquad \text{si } k \leqslant \frac{n-2}{r-1},$$

$$\nu_k = n, \qquad \text{si } k > \frac{n-2}{r-1}.$$

Désignons par r_k la dimension du multiple minimum $k|G|$. Les groupes de $k|G|$ contenant un groupe G donnent, une fois ce groupe supprimé, une série qui contient certainement la série $(k-1)|G|$. On a donc $r_k - \nu_k \geqslant r_{k-1}$. On a donc

$$r_k - r_{k-1} \geqslant k(r-1)+1 \qquad \text{si } k \leqslant \frac{n-2}{r-1}$$

et

$$r_k - r_{k-1} \geqslant n \qquad \text{si } k > \frac{n-2}{r-1}.$$

Plaçons-nous dans le premier cas et supposons que le genre de la courbe C soit supérieur à zéro. On a alors $r < n$ et la valeur maximum de k est au moins égale à l'unité. Nous avons $(r = r_1)$

$$r_k - r_{k-1} \geqslant k(r-1)+1,$$

$$r_{k-1} - r_{k-2} \geqslant (k-1)(r-1)+1, \ldots, r_2 - r \geqslant 2(r-1)+1,$$

$$r = r-1+1.$$

Par addition on en déduit

$$r_k \geqslant \binom{k+1}{2}(r-1)+k.$$

On obtient ainsi une valeur minimum de r_k lorsque $k \leqslant \dfrac{n-2}{r-1}$, c'est-à-dire lorsque $k < \dfrac{n-1}{r-1}$ si $r > 2$.

322. Genre maximum d'une courbe d'ordre n de S_r. — Soit C une courbe algébrique irréductible d'ordre n, de genre $p > 0$, de S_r. Appliquons les résultats précédents en prenant pour $|G|$ la série des sections hyperplanes. Remarquons que le multiple minimum $k|G|$ de $|G|$ est la série découpée sur C par les hypersurfaces d'ordre k de S_r.

Désignons par χ l'entier satisfaisant à la double inégalité

$$\frac{n-1}{r-1} - 1 \leqslant \chi < \frac{n-1}{r-1}.$$

D'après le résultat qui vient d'être obtenu, la dimension r_χ du multiple minimum $\chi|G|$ est donnée par

$$r_\chi \geqslant \binom{\chi+1}{2}(r-1)+\chi .$$

La série $\chi|G|$ est non spéciale. En effet, si cette série était spéciale, il en serait de même de $|G|$ et un groupe G présenterait au plus $n-r$ conditions aux groupes canoniques devant le contenir. Par conséquent, il en faudrait au plus $n-r$ pour qu'un groupe de $\chi|G|$ contienne un groupe G. On aurait donc $\nu_k \leqslant n-r$, alors qu'on a $\nu_k > n-r$. On parvient donc à une absurdité en supposant $\chi|G|$ spéciale.

Mais alors $\chi|G|$ étant non spéciale, on a

$$r_\chi \leqslant \chi n - p$$

et par conséquent

$$\chi n - p \geqslant \binom{\chi+1}{2}(r-1)+\chi .$$

On obtient ainsi le théorème de Castelnuovo.

Théorème de Castelnuovo. — *Le genre* p *d'une courbe* C *non rationnelle d'ordre* n *de* S_r *satisfait à l'inégalité*

$$\mathrm{p} \leqslant \chi\left[\mathrm{n}-\mathrm{r}-\frac{1}{2}(\chi-1)(\mathrm{r}-1)\right],$$

χ *étant l'entier donné par*

$$\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{r}-1}-1 \leqslant \chi < \frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{r}-1} .$$

323. Courbes de genre maximum de S_r. — Supposons que la courbe C ait le genre maximum. L'égalité

$$p = \chi\left[n-r-\frac{1}{2}(\chi-1)(r-1)\right]$$

entraîne les égalités

$$r_\chi = \chi n - p = \binom{\chi+1}{2}(r-1)+\chi .$$

La série $\chi|G|$, découpée sur C par les hypersurfaces d'ordre χ est donc complète et coïncide avec la série $|\chi G|$.

Les inégalités

$$r_k - r_{k-1} \geqslant k(r-1)+1 ,$$

pour $k \leqslant \chi$, deviennent des égalités et on a donc

$$r_k = \binom{k+1}{2}(r-1)+k .$$

Les hypersurfaces d'ordre k de S_r découpent sur C la série linéaire complète $|kG|$, de dimension r_k. Le nombre de conditions pour qu'une de ces hypersurfaces contienne C est r_k+1.

Supposons maintenant $k>\chi$, c'est-à-dire $k \geqslant \frac{n-1}{r-1}$. La série $k|G|$ est certainement non spéciale et on a

$$r_k - r_{k-1} \geqslant n\,, \qquad r_k \leqslant kn - p\,.$$

Supposons que la série $(k-1)|G|$ soit complète. On a alors $r_{k-1}=(k-1)n-p$, d'où

$$r_k \geqslant kn - p$$

et par suite $r_k = kn-p$. La série $k|G|$ est donc complète.

Le raisonnement précédent, pour $k=\chi+1$, montre que la série $(\chi+1)|G|$ est complète, donc la série $k|G|$ est certainement complète quel que soit k.

Les hypersurfaces d'ordre k *de* S_r *découpent des séries complètes sur la courbe* C *d'ordre* n *et de genre maximum.*

Considérons en particulier les hyperquadriques de $S_r (k=2)$. Si $\chi>1$, on a $r_2 = 3r-1$. Les hyperquadriques de S_r dépendent de $\frac{1}{2}\,r(r+3)$ paramètres, donc il y a $\binom{r-1}{2}$ hyperquadriques linéairement indépendantes passant par la courbe C.

Supposons maintenant $\chi=1$. On a alors $n \leqslant 2r-1$, $p=n-r$ et C appartient à $\binom{r-1}{2}+2r-n$ hyperquadriques linéairement indépendantes.

Une courbe d'ordre n *et de genre maximum de* S_r *appartient à* $\binom{r-1}{2}$ *hyperquadriques linéairement indépendantes si* $\chi>1$; *elle appartient à* $\binom{r-1}{2}+2r-n$ *hyperquadriques linéairement indépendantes si* $\chi=1$.

324. Courbes de genre maximum de S_3. — Une courbe C de genre maximum de S_3 appartient à une quadrique Q (ou à plusieurs si $n \leqslant 4$). Nous supposerons l'ordre n de C supérieur à quatre.

Supposons $n=2\nu$ et que la courbe C soit rencontrée en $\nu+t$ points par les génératrices d'un mode de Q. En projetant C d'un point de Q sur un plan, on obtient une courbe de genre $(\nu-1)^2-t^2$. Le maximum a lieu pour $t=0$ et C est de genre $(\nu-1)^2$; elle rencontre en ν points les génératrices des deux modes de Q.

La courbe C ne peut appartenir à une surface irréductible d'ordre inférieur à ν, distincte de Q. Les surfaces d'ordre ν dépendent de $\binom{\nu+3}{3}-1$ paramètres et découpent sur C une série complète de dimension $\nu^2+2\nu-1$. Observons que parmi les surfaces d'ordre ν se trouvent des surfaces formées de Q et de surfaces d'ordre $\nu-2$. Ces dernières dépendent de $\binom{\nu+1}{3}-1$ paramètres. Les surfaces d'ordre ν irréductibles dépendent donc de $\nu(\nu+2)$ paramètres. Il y a donc une surface irréductible d'ordre ν passant par C.

Supposons maintenant $n=2\nu+1$. Si les génératrices d'un mode de Q rencontrent la courbe C en $\nu+1+t$ points, en projetant la courbe sur un plan d'un point de Q, on trouve le genre $\nu(\nu-1)-\frac{1}{2}t(t+1)$. Le maximum a lieu pour $t=0$ et les génératrices de Q rencontrent C : celles d'un mode en $\nu+1$ points, celles de l'autre en ν points.

Les surfaces d'ordre $\nu+1$ ne contenant pas Q comme partie dépendent de $(\nu+1)(\nu+3)$ paramètres. Elles découpent sur C une série de dimension $\nu^2+4\nu+1$. Il y a donc ∞^1 de ces surfaces passant par C. Chacune d'elles rencontre encore la quadrique Q suivant une génératrice rencontrant C en $\nu+1$ points.

Une courbe gauche d'ordre 2ν et de genre maximum est l'intersection d'une quadrique et d'une surface d'ordre ν.

Une courbe gauche d'ordre $2\nu+1$ et de genre maximum est l'intersection d'une quadrique et d'une surface d'ordre $\nu+1$ ayant encore une génératrice en commun.

325. Théorème I de Comessatti. — *Une courbe algébrique d'ordre* n *et de genre* p *appartient à un espace linéaire dont le nombre de dimension* r *satisfait à l'inégalité*

$$\mathrm{r} \leqslant \frac{2\rho(\mathrm{n}-1)-2\mathrm{p}}{\rho(\rho+1)}+1,$$

ρ *étant un entier satisfaisant à la double inégalité*

$$\frac{2\mathrm{p}-2}{\mathrm{n}}<\rho\leqslant\frac{2\mathrm{p}-2}{\mathrm{n}}+1.$$

Reprenons les notations utilisées plus haut dans la démonstration du théorème de Castelnuovo (n° 322). La série $\chi|G|$ est non spéciale. Soit h le plus petit entier ($h\leqslant\chi$) pour lequel la série $h|G|$ est non spéciale. On a $r_h \leqslant hn - p$, d'où

$$\binom{h+1}{2}(r-1) + h \leqslant hn - p\ ;$$

par conséquent

$$r \leqslant \frac{2h(n-1) - 2p}{h(h+1)} + 1\ .$$

La série $(h-1)|G|$ est d'autre part spéciale, donc

$$(h-1)n \leqslant 2p - 2\ ,$$

ou

$$h \leqslant \frac{2p-2}{n} + 1\ . \tag{1}$$

On en conclut que si ρ est un entier donné pour la double inégalité

$$\frac{2p-2}{n} < \rho \leqslant \frac{2p-2}{n} + 1\ , \tag{2}$$

on a $h \leqslant \rho$.

Posons

$$\varphi(h) = \frac{2h(n-1) - 2p}{h(h+1)} + 1\ .$$

On a

$$\varphi(h) - \varphi(h-1) = 2\,\frac{2p - (h-1)(n-1)}{(h-1)\,h\,(h+1)}\ .$$

Cette différence est positive si on a

$$h < \frac{2p}{n-1} + 1\ ,$$

ce qui a lieu si h satisfait à l'inégalité (1). On a donc $\varphi(h-1) < \varphi(h)$ pour $h \leqslant \rho$ et par suite $\varphi(h) < \varphi(\rho)$.

Par conséquent, si ρ satisfait à la double inégalité (2), on a

$$r \leqslant \frac{2\rho(n-1) - 2p}{\rho(\rho+1)}\ .$$

326. Théorème II de Comessatti. — *L'ordre* n *d'une courbe algébrique de genre* p *appartenant à un espace* S_r *satisfait à l'inégalité*

$$n \geqslant \frac{(\tau+1)}{2}(r-1) + \frac{p}{\tau} + 1\ ,$$

τ étant l'entier satisfaisant à la double inégalité

$$\tau(\tau-1) < \frac{2p}{r-1} \leqslant \tau(\tau+1).$$

La série $\chi|G|$ étant non spéciale, on a

$$\binom{\chi+1}{2}(r-1)+\chi \leqslant \chi n - p,$$

d'où

$$n \geqslant \frac{\chi+1}{2}(r-1) + \frac{p}{\chi} + 1. \qquad (1)$$

On a

$$\chi \geqslant \frac{n-1}{r-1} - 1,$$

d'où

$$n \leqslant (\chi+1)(r-1)+1$$

et par conséquent

$$(\chi+1)(r-1)+1 \geqslant \frac{\chi+1}{2}(r-1) + \frac{p}{\chi} + 1,$$

c'est-à-dire

$$\chi(\chi+1) \geqslant \frac{2p}{r-1}.$$

Si l'on définit l'entier τ par la double inégalité

$$\tau(\tau-1) < \frac{2p}{r-1} \leqslant \tau(\tau+1),$$

χ ne peut être inférieur à τ.

Posons

$$\psi(h) = \frac{h+1}{2}(r-1) + \frac{p}{h} + 1.$$

On a

$$\psi(h+1) - \psi(h) = \frac{h(h+1)(r-1)-2p}{2h(h+1)}$$

et le second membre est positif si

$$h(h+1) \geqslant \frac{2p}{r-1},$$

c'est-à-dire si $h \geqslant \tau$. Or, la relation (1) donne $n \geqslant \psi(\chi)$, donc puisque $\psi(h)$ croît avec h, on a $n \geqslant \psi(\tau)$ et par suite

$$n \geqslant \frac{\tau+1}{2}(r-1) + \frac{p}{\tau} + 1.$$

Remarque. — Dans son travail cité, Comessatti démontre que les limites de r et de n peuvent être effectivement atteintes.

CHAPITRE III

CORRESPONDANCES ENTRE LES COURBES ALGÉBRIQUES

§ 1. *Correspondances entre deux courbes algébriques*

327. Correspondances rationnelles entre deux courbes. — Soient C' une courbe de genre p' et C une courbe de genre p. Supposons qu'il existe entre ces courbes une correspondance $(1, \nu)$. Les groupes de ν points de C qui correspondent aux points de C' forment une série γ_ν. Cette série possède en général des points doubles ; nous désignerons par D le groupe formé par ces points doubles, par δ le nombre de ces points et par D' le groupe des points de C' auxquels correspondent sur C les δ groupes contenant un point double. Les points du groupe D' sont appelés points de diramation de la correspondance.

Considérons sur C' une série linéaire $|G'|$ et sa jacobienne $|G_j'|$; soient $|G|$ la série qui correspond à $|G'|$ sur C et $|\overline{G}_j|$ celle qui correspond à $|G_j'|$. Le groupe jacobien d'une série simplement infinie tirée de $|G|$ se compose d'un groupe $\overline{G}_j$ augmenté du groupe D des points doubles de γ_ν. On a donc

$$|G_j| = |\overline{G}_j + D|,$$

$|G_j|$ étant la série jacobienne de $|G|$.

Si l'on désigne par $|K'|$ le système canonique de C', par $|K|$ celui de C, par $|\overline{K}|$ le transformé de $|K'|$ sur C, on a

$$|K| = |\overline{K} + D|.$$

On en déduit

$$2p - 2 = \nu(2p' - 2) + \delta.$$

Cette dernière formule est due à Zeuthen ; l'interprétation géométrique est due à Castelnuovo.

328. Correspondances algébriques entre deux courbes. — Soient C_1, C_2 deux courbes de genres p_1, p_2, liées par une correspondance (n_1, n_2). Représentons les couples de points de C_1, C_2 homologues dans la correspondance par les points d'une courbe C (¹). Nous dirons que la correspondance est irréductible si la courbe C est irréductible.

Désignons par δ_1 le nombre de points de diramation de C_1, c'est-à-dire des points de C_1 auxquels correspondent, sur C_2, des groupes de n_2 points possédant un point double, par δ_2 le nombre de points de diramation de C_2.

A un point de C_1 correspondent n_2 points de C et il y a, sur C_1, δ_1 points de diramation pour cette correspondance. On a donc, si p désigne le genre de C,

$$2\,n_2(p_1-1)+\delta_1=2(p-1)\,.$$

On a de même

$$2\,n_1(p_2-1)+\delta_2=2(p-1)\,,$$

et par conséquent

$$2\,n_2(p_1-1)+\delta_1=2\,n_1(p_2-1)+\delta_2\,.$$

Cette formule est également due à Zeuthen.

329. Involutions cycliques appartenant à une courbe algébrique. — Comme application de la première formule de Zeuthen, nous allons considérer une involution cyclique appartenant à une courbe algébrique.

Soit C une courbe algébrique admettant une transformation birationnelle T en soi, de période ν. Nous supposerons ν premier. En appliquant ν fois de suite la transformation T à un point P_1, nous obtenons ν points P_2, P_3, ..., P_ν, $P_{\nu+1}$ dont le dernier coïncide avec P_1. Nous avons donc, sur la courbe C, ∞^1 groupes de ν points formant une série γ_ν d'indice un. Cette série sera appelée *involution cyclique* d'ordre ν.

Considérons sur C une série complète $|H_1|$, simple, d'ordre n. La transformation T lui fait correspondre une série complète $|H_2|$ d'ordre n, à celle-ci elle fait correspondre une série complète $|H_3|$ d'ordre n, et ainsi de suite. On obtient finalement une série complète $|H_\nu|$, d'ordre n, à laquelle T fait correspondre $|H_1|$.

(¹) Si C_1 et C_2 sont des courbes planes, on peut considérer la variété V_4^6 de Segre représentant les couples de points des plans de ces courbes. Aux couples de points homologues dans la correspondance entre C_1 et C_2, correspondent sur la variété V_4^6 les points d'une courbe que l'on peut prendre pour courbe C. Notons que les couples de points quelconques de C_1, C_2 sont représentés sur V_4^6 par les points d'une surface.

La série complète

$$|G| = |H_1 + H_2 + \ldots + H_\nu|$$

est transformée en elle-même par T, en ce sens qu'à un de ses groupes G, T fait correspondre un groupe G distinct ou non du premier. La série $|G|$ a l'ordre νn et est simple comme $|H_1|$. Soit r sa dimension. Rapportons projectivement les groupes de $|G|$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. A la courbe C correspond birationnellement une courbe normale d'ordre νn, que nous désignerons dorénavant par C.

Cette courbe admet une transformation birationnelle en soi, homologue de T, que nous désignerons encore par T. Observons que T fait correspondre à une section hyperplane de C, une section hyperplane de cette courbe ; aux sections de C par les hyperplans d'un faisceau, les sections de la courbe par les hyperplans d'un faisceau. Il en résulte que T détermine une homographie entre les hyperplans de S_r et est par conséquent déterminée sur C par une homographie de S_r.

Soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t$ les axes ponctuels de l'homographie $T(2 \leqslant t \leqslant \nu)$. Désignons par Σ_i l'ensemble des hyperplans de S_r passant par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t$ sauf par σ_i. Les hyperplans de Σ_i découpent sur C une série (partielle) que nous désignerons par $|G_i|$ qui est composée au moyen de l'involution γ_ν.

Observons qu'un groupe $H_1 + H_2 + \ldots + H_\nu$, obtenu en appliquant successivement T à un groupe H_1, est transformé en lui-même par T ; nous supposerons que l'hyperplan qui le découpe sur C appartient à Σ_1. En général, le groupe considéré ne contient aucun point uni de T, donc les hyperplans de Σ_1 ne passent pas en général par des points unis de T. Il en résulte que les axes ponctuels $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_t$ ne rencontrent pas C. Les points unis de T sont, s'il en existe, les points de rencontre de C et de σ_1.

Observons, puisque T est cyclique de période ν et que ν est un nombre premier, qu'un point uni de T, compté ν fois, forme un groupe de l'involution γ_ν. Nous désignerons par δ le nombre de ces points unis et nous supposerons qu'en un point uni, la courbe C ne touche pas l'espace σ_1.

330. Construction d'une courbe image de l'involution. — Soit r_1 la dimension du système Σ_1. Rapportons projectivement les hyperplans de Σ_1 aux hyperplans d'un espace linéaire S_{r_1} à r_1 dimensions. Puisque la série découpée sur C par les hyperplans de Σ_1 est composée au moyen de γ_ν, à C correspond une courbe Γ qui représente cette involution. La courbe Γ est d'ordre n et normale dans l'espace S_{r_1}.

Désignons par p le genre de la courbe C et par π celui de la courbe Γ. Entre les courbes Γ et C, nous avons une correspondance $(1, \nu)$ présentant δ points de diramation sur Σ_1.

Mais ces points de diramation sont d'une espèce particulière et doivent être comptés chacun pour $\nu-1$ points de diramation ordinaires. En effet, il leur correspond sur C des points unis multiples d'ordre ν, obtenus en réunissant un point de C aux $\nu-1$ points restants du groupe de γ_ν contenant ce point. En appliquant la première formule de Zeuthen, on a

$$2\nu(\pi-1)+(\nu-1)\delta=2(p-1).$$

Considérons maintenant le système d'hyperplans Σ_2 et la série $|G_2|$ qu'il découpe sur C. Les hyperplans de Σ_2 contiennent σ_1 et par conséquent, la série $|G_2|$ a comme points fixes les points unis de T. Chacun de ces points unis doit être compté un certain nombre de fois. Soit en effet P un point uni de T. L'hyperplan osculateur à C en P est uni pour T ; il doit donc s'appuyer sur les axes $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_t$ de T suivant certains espaces qui, avec P, le déterminent complètement. De même, la tangente à C en P, le plan osculateur, ..., l'espace $S_{\nu-1}$, ν-osculateur à C en P, sont unis pour T et s'appuient sur les axes $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_t$ de cette homographie. Il suffit, pour obtenir la multiplicité de P comme point fixe dans la série $|G_2|$, de voir quelle est la dimension de l'espace osculateur à C en P appartenant à tous les hyperplans de Σ_2. Le point P ne sera compté qu'une fois si la tangente à C en P rencontre σ_2.

La partie variable de la série $|G_2|$ est nécessairement composée au moyen de l'involution γ_ν et il lui correspond, sur Γ, une série linéaire complète $|G_2'|$, d'ordre inférieur à n. Désignons par Δ_2 le groupe des points de diramation de Γ, chacun compté avec le degré de multiplicité que le point uni correspondant a comme point fixe de la série $|G_2|$. Considérons un groupe G quelconque de la série $|G|$; il lui correspond sur Γ un groupe de νn points et inversement, à ce groupe, correspondent sur C le groupe G et ses transformés successifs par T. Faisons varier le groupe G considéré, d'une manière continue dans $|G|$; lorsqu'il tend vers un groupe G_1, le groupe homologue sur Γ tend vers un groupe section hyperplane de cette courbe, compté ν fois. Désignons ce groupe par G_1'. Lorsque le groupe G tend vers un groupe G_2, le groupe homologue sur Γ tend vers le groupe homologue G_2' compté ν fois, augmenté du groupe Δ_2. On a donc

$$\nu G_1' \equiv \nu G_2' + \Delta_2 .$$

On parvient à des équivalences analogues en considérant les séries $|G_3|, \ldots, |G_t|$.

Observons que si $r_1, r_2, \ldots, r_t$ désignent les dimensions des séries (incomplètes) $|G_2|, |G_3|, \ldots, |G_t|$, on a, d'après la théorie des homographies,

$$r_1+r_2+\ldots+r_t+t=r+1 .$$

331. Remarque. — Si deux courbes C, C′ appartiennent à la même classe, c'est-à-dire si elle sont liées par une transformation birationnelle, à la série canonique de l'une correspond la série canonique de l'autre. La courbe C′ peut coïncider avec la courbe C, la transformation devenant une transformation birationnelle de la courbe C en soi. Dans ces conditions la série canonique de C est transformée dans la série canonique de C. On voit donc que :

Si une courbe algébrique contient une transformation birationnelle en soi, celle-ci transforme en elle-même la série canonique.

On observera qu'aucune hypothèse n'est faite sur la transformation ; celle-ci peut être cyclique ou non.

332. Involutions cycliques privées de points unis. — Reprenons les développements précédents dans le cas où la transformation génératrice de l'involution γ_ν est privée de points unis ($\delta = 0$). La formule de Zeuthen donne

$$\nu(\pi - 1) = p - 1.$$

Les séries $|G_2|$, $|G_3|$, ..., $|G_t|$ sont actuellement composées au moyen de γ_ν et il leur correspond, sur Γ, des séries $|G_1'|$, $|G_2'|$, ..., $|G_t'|$ d'ordre n.

Nous pouvons supposer que la série $|G|$ est non spéciale. Si elle l'était, il suffirait de la remplacer par un de ses multiples suffisamment élevé. La série $|G|$, non spéciale, a la dimension $\nu n - p$. Les séries $|G_1'|$, $|G_2'|$, ..., $|G_t'|$ sont alors non spéciales et ont les dimensions $r_1 = r_2 = \ldots = r_t = n - \pi$. On a donc

$$t(n-\pi) + t = \nu n - p + 1 = \nu n - \nu(\pi - 1) ,$$

d'où $t = \nu$.

D'autre part, on a

$$\nu G_1' \equiv \nu G_2' \equiv \ldots \equiv \nu G_\nu' .$$

La série $|\nu G_1'|$ est découpée, sur Γ, par les hypersurfaces d'ordre ν. Il résulte de la relation d'équivalence précédente qu'il existe $\nu - 1$ systèmes d'hypersurfaces d'ordre ν ayant des contacts d'ordre $\nu - 1$ avec la courbe Γ en n points, variables respectivement dans les séries $|G_2'|$, $|G_3'|$, ..., $|G_\nu'|$.

D'après la remarque faite plus haut, on peut également prendre pour $|G|$ la série canonique de C. L'une des séries $|G_1|$, $|G_2|$, ..., $|G_t|$ est alors la transformée de la série canonique de Γ ; supposons que ce soit $|G_1|$. Aux séries $|G_2|$, $|G_3|$, ..., $|G_t|$ correspondent sur Γ des séries complètes d'ordre $2\pi - 2$, qui sont des séries paracanoniques, de dimension $\pi - 2$. On a donc

$$r_1 = \pi - 1 , \qquad r_2 = r_3 = \ldots = r_t = \pi - 2 .$$

On en déduit

$$\pi-1+(t-1)(\pi-2)+t=p=\nu(\pi-1)+1\,,$$

d'où $t=\nu$.

Il existe $\nu-1$ systèmes d'hypersurfaces d'ordre ν ayant des contacts d'ordre $\nu-1$ avec la courbe Γ en $2\pi-2$ points. La courbe Γ est actuellement une courbe canonique.

Voici un exemple. Considérons les hyperquadriques de S_4,

$$x_3^2=\varphi_0(x_0, x_1, x_2)\,, \qquad x_3x_4=\varphi_1(x_0, x_1, x_2)\,,$$
$$x_4^2=\varphi_2(x_0, x_1, x_2)\,,$$

où φ_0, φ_1, φ_2 sont des formes du second degré. Ces trois hyperquadriques ont en commun une courbe canonique C, d'ordre huit et de genre cinq. Cette courbe est transformée en elle-même par l'homographie harmonique

$$\frac{x_0'}{x_0}=\frac{x_1'}{x_1}=\frac{x_2'}{x_2}=\frac{x_3'}{-x_3}=\frac{x_4'}{-x_4}\,.$$

Cette homographie détermine sur la courbe C une involution γ_2 du second ordre, privée de points unis.

En rapportant projectivement les hyperplans

$$\lambda_0x_0+\lambda_1x_1+\lambda_2x_2=0$$

aux droites d'un plan, on obtient le quartique Γ, de genre trois, d'équation

$$\varphi_1^2(x_0, x_1, x_2)-\varphi_0(x_0, x_1, x_2)\,\varphi_2(x_0, x_1, x_2)=0\,.$$

Considérons d'autre part les hyperplans

$$\lambda_3x_3+\lambda_4x_4=0\,.$$

En élevant un carré et en tenant compte des équations de C, on a

$$\lambda_3^2\varphi_0(x_0, x_1, x_2)+2\lambda_3\lambda_4\varphi_1(x_0, x_1, x_2)+\lambda_4^2\varphi_2(x_0, x_1, x_2)=0\,.$$

Cette équation représente une famille de coniques touchant la quartique Γ en des groupes de quatre points formant une série g_4^1 paracanonique.

333. Théorème. — *Une transformation birationnelle en soi d'une courbe algébrique de genre supérieur à l'unité, est nécessairement cyclique.*

Soit C une courbe algébrique de genre $p>1$, admettant une transformation birationnelle T en soi. T transforme en elle-même la série canonique $|K|$ de C.

Si la courbe C n'est pas hyperelliptique, nous prendrons pour modèle projectif de cette courbe la courbe canonique.

Si la courbe C est hyperelliptique de genre $p > 2$, nous prendrons pour modèle projectif la courbe d'ordre $4p-4$, de S_{3p-4}, dont les sections hyperplanes représentent les groupes de la série $|2K|$.

Si la courbe C est de genre $p=2$, nous prendrons comme modèle projectif la courbe du sixième ordre de S_4 dont les sections hyperplanes représentent les groupes de la série $|3K|$.

Dans les trois cas, la transformation T transforme en elle-même la série des sections hyperplanes de C et est par conséquent une homographie.

L'homographie T présente au moins deux hyperplans unis, distincts ou infiniment voisins, et ces hyperplans déterminent un faisceau d'hyperplans unis pour l'homographie. Nous désignerons par g_n^1 la série découpée sur C par les hyperplans de ce faisceau.

Soient s le nombre de groupes de la série g_n^1 possédant des points multiples, r le nombre total de ces points multiples et $i_1, i_2, \ldots, i_r$ leurs multiplicités. Un point multiple d'ordre i étant équivalent à $i-1$ points doubles, on a

$$i_1 - 1 + i_2 - 1 + \ldots + i_r - 1 = 2n + 2p - 2$$

et, puisque $p > 1$,

$$i_1 - 1 + i_2 - 1 + \ldots + i_r - 1 > 2n - 2 .$$

Observons maintenant que les multiplicités des points multiples d'un même groupe ont une somme au plus égale à n, par conséquent, on a $s \geqslant 3$.

Dans le faisceau d'hyperplans considéré, T détermine une homographie ω. Celle-ci fait correspondre à un hyperplan découpant sur C un groupe contenant des points multiples, c'est-à-dire à un hyperplan ayant certains contacts avec C, un hyperplan possédant la même propriété. Or, de tels hyperplans sont en nombre fini s, par conséquent, on pourra toujours trouver une puissance de ω laissant fixe un de ces hyperplans.

Cela étant, puisque $s \geqslant 3$, on pourra trouver trois hyperplans ξ_1, ξ_2, ξ_3 ayant des contacts avec C et une puissance de l'homographie ω laissant fixe chacun de ces hyperplans. En vertu du théorème de von Staudt, cette puissance de ω est l'identité et ω est donc une homographie cyclique. Soit ν sa période. Comme les hyperplans ξ_1, ξ_2, ξ_3 peuvent être choisis parmi s hyperplans, on aura $\nu \leqslant s^3$.

Soit P un point de C. Après avoir effectué ν fois la transformation T, on obtiendra un point P', transformé du point P, appartenant à l'hyperplan du faisceau envisagé, passant par P.

Comme le point P' peut occuper n positions, l'homographie T a une période au plus égale à νn.

Le théorème est donc démontré [1].

334. Corollaires. — De ce théorème, on déduit comme corollaires :

THÉORÈME DE SCHWARZ. — *Une courbe de genre* $p > 1$ *ne peut admettre une infinité continue de transformations birationnelles en soi.*

THÉORÈME DE KLEIN. — *Une courbe de genre* $p > 1$ *ne peut admettre une infinité discontinue de transformations birationnelles en soi.*

335. Remarque. — Dans la démonstration du théorème précédent, on a établi que la période de l'homographie T est au plus égale à $n\nu$. On a $\nu \leqslant s^3$, donc la période de T est au plus égale à $n \cdot s^3$.

Si la courbe C n'est pas hyperelliptique, on a

$$n = 2p - 2\,, \qquad s \leqslant 6(p-1)\,,$$

donc la période de T est au plus égale à $2 \cdot 6^3 (p-1)^4$.

Si la courbe C est hyperelliptique, de genre $p > 2$, on a

$$n = 4p - 4\,, \qquad s \leqslant 10(p-1)\,,$$

donc la période de T est au plus égale à $4 \cdot 10^3 (p-1)^4$.

Si la courbe C est de genre $p = 2$, on a

$$n = 6\,, \qquad s \leqslant 14\,;$$

la période de T est au plus égale à $6 \cdot 14^3$.

336. Théorème. — *Entre deux courbes de genre* $p > 1$, *appartenant à la même classe, il ne peut exister qu'un nombre fini de transformations birationnelles.*

En effet, si entre deux courbes C, C' de genre $p > 1$, il existait une infinité de transformations birationnelles T_1, T_2, T_3, ..., la courbe C posséderait une infinité de transformations birationnelle $T_2T_1^{-1}$, $T_3T_1^{-1}$, ..., en soi, ce qui est impossible.

§ 2. *Correspondances entre les points d'une courbe algébrique*

337. Préliminaires. — La théorie des correspondances entre les points d'une droite a pour extension naturelle la théorie des correspondances entre les points d'une courbe algé-

(1) La démonstration précédente est due à O. CHISINI, *Sul teorema di Schwarz-Klein concernente le trasformazioni birazionali di una curva in se stesse* (*Rendiconti Istituto Lombardo*, 1914).

brique de genre quelconque p. L'extension du principe de Chasles donne le nombre de points unis à ces correspondances fut formulée par Cayley et démontrée, par voie algébrique, par Brill. La théorie des correspondances sur une courbe de genre p fut l'objet de profondes recherches, par voie transcendante, de Hurwitz. Elle fut plus tard traitée par voie algébrico-géométrique par Severi (1); nous exposerons ici les points essentiels de la théorie en utilisant la méthode de ce géomètre.

338. Définitions. — Supposons qu'entre les points d'une courbe algébrique irréductible C, nous ayons une opération algébrique T qui fasse correspondre à un point a un groupe B de β points, l'opération inverse T^{-1} faisant correspondre à un point b, un groupe A de α points. Cette opération est une correspondance (α, β) entre les points de C. Nous supposerons qu'il n'existe aucun point exceptionnel auquel T ferait correspondre tous les points de la courbe.

Considérons une seconde correspondance T_1, d'indices α_1, β_1 et soient B_1 le groupe de β_1 points que T fait correspondre à un point a, A_1 le groupe de α_1 points que T_1^{-1} fait correspondre à un point b.

Par *somme* $T+T_1$ des correspondances T, T_1, nous entendrons l'opération qui fait correspondre à un point a le groupe $B+B_1$ de $\beta+\beta_1$ points. L'opération inverse

$$(T+T_1)^{-1}=T^{-1}+T_1^{-1}$$

fait correspondre au point b le groupe $A+A_1$ de $\alpha+\alpha_1$ points.

A un point a, T fait correspondre un groupe B de β points. A chacun de ces points, T_1 fait correspondre un groupe de β_1 points. L'ensemble de ces β groupes de β_1 points est un groupe $\overline{B}$ de $\beta\beta_1$ points. Nous entendrons par *produit* TT_1 des correspondances T, T_1, l'opération qui fait correspondre au point a le groupe $\overline{B}$. L'opération inverse $(TT_1)^{-1}=T_1^{-1}T^{-1}$ fait correspondre à un point b le groupe $\overline{A}$ formé des α_1 groupes A de α points que T^{-1} fait correspondre aux groupes de α_1 points A_1 homologues de b dans T_1^{-1}.

Ces définitions permettent de donner une signification précise, en opérant de proche en proche, aux symboles kT, T^k, où k est un entier positif.

339. Valence d'une correspondance. — Les groupes B que T fait correspondre aux points a de C forment une série d'ordre β et d'indice α ; un point de la courbe appartient en effet aux α groupes B homologues des points du groupe A que T^{-1} fait correspondre à ce point. En général, les groupes B ne

(1) SEVERI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (*Memorie Accademia di Torino*, 1903).

sont pas deux à deux équivalents, mais les circonstances suivantes peuvent se présenter :

1° Il existe un entier positif γ tel que le groupe $\gamma a + B$ appartienne à une série linéaire, quel que soit a.

En d'autres termes, si T fait correspondre un groupe B' à un point a', on a, quels que soient a et a',

$$\gamma a + B \equiv \gamma a' + B' ;$$

2° Il existe un entier positif γ' tel que, quels que soient a, a', on ait

$$\gamma' a + B' \equiv \gamma' a' + B .$$

Nous ramènerons le second cas au premier en posant $\gamma' = -\gamma$ et nous supposerons que γ est un entier positif ou négatif. Dans ces conditions, lorsque a varie, le groupe $\gamma a + B$ varie dans une série linéaire. Il se peut d'ailleurs que, lorsque γ est négatif, cette série ne puisse être effectivement construite, mais la signification de la phrase précédente est bien précise en vertu des notations posées.

Le nombre γ est appelé *valence* de la correspondance T. Il peut naturellement exister sur une courbe algébrique des correspondances dépourvues de valences ; elles sont appelées *correspondances singulières*.

Supposons qu'une correspondance T puisse avoir deux valences γ, γ', $(\gamma < \gamma')$. On a donc par hypothèse

$$\gamma a + B \equiv \gamma a' + B' , \qquad \gamma' a + B \equiv \gamma' a' + B'$$

et par conséquent $(\gamma' - \gamma) a \equiv (\gamma' - \gamma) a'$. Les multiples d'ordre $\gamma' - \gamma$ de deux points quelconques de la courbe C sont donc équivalents. Soit k un entier positif, multiple de $\gamma' - \gamma$, tel que la série $|ka|$ ait la dimension r au moins égale à 3 et soit simple. Rapportons projectivement les groupes de cette série aux hyperplans d'un espace S_r à r dimensions ; nous obtenons une courbe C' birationnellement identique à C, d'ordre k. En chaque point de C', il doit exister un seul hyperplan ayant un contact d'ordre $k-1$ avec C' ; on a donc $r = k$ et la courbe C est rationnelle.

Sur une courbe de genre $p > 0$, *une correspondance ne peut posséder qu'une seule valence.*

340. Opérations sur les correspondances à valence. — Soient T_1, T_2 deux correspondances à valences γ_1, γ_2. Appelons B_1, B_1', les groupes de β_1 points que T_1 fait correspondre à deux points a, a' et B_2, B_2' les groupes de β_2 points que T_2 fait correspondre aux mêmes points.

Des relations d'équivalence

$$\gamma_1 a + B_1 \equiv \gamma_1 a' + B_1' , \qquad \gamma_2 a + B_2 \equiv \gamma_2 a' + B_2' ,$$

on déduit

$$(\gamma_1+\gamma_2)a+B_1+B_2\equiv(\gamma_1+\gamma_2)a'+B_1'+B_2'.$$

Par conséquent : *La somme de deux correspondances à valences* γ_1, γ_2 *est une correspondance à valence* $\gamma_1+\gamma_2$.

Appelons a_{11}, a_{12}, ..., $a_{1\beta}$ les points du groupe B_1 et a'_{11}, a'_{12}, ..., $a'_{1\beta}$ les points du groupe B_1'. Soit B_{2i} le groupe que T_2 fait correspondre au point a_{1i} et B'_{2i} celui qui correspond au point a'_{1i}.

Nous avons

$$\gamma_2 a_{1i}+B_{2i}\equiv\gamma_2 a'_{1i}+B'_{2i}, \qquad (i=1,2,...,\beta).$$

En additionnant membre à membre les relations obtenues en donnant à i les valeurs 1, 2, ..., β et en représentant par $\overline{B}$ la somme des groupes B_{2i}, par $\overline{B'}$ celle des groupes B'_{2i}, on a

$$\gamma_2 B_1+\overline{B}\equiv\gamma_2 B_1'+\overline{B'}.$$

D'autre part, on a

$$\gamma_1 a+B_1\equiv\gamma_1 a'+B_1',$$

donc

$$\gamma_1\gamma_2 a+\gamma_2 B_1\equiv\gamma_1\gamma_2 a'+\gamma_2 B_1'.$$

On obtient donc

$$-\gamma_1\gamma_2 a+\overline{B}\equiv-\gamma_1\gamma_2 a'+\overline{B'}.$$

Le produit de deux correspondances à valences γ_1, γ_2 *est une correspondance à valence* $-\gamma_1\gamma_2$.

341. Correspondances à valence zéro. — Soit T une correspondance à valence zéro sur une courbe C. Lorsque le point a décrit la courbe C, les groupes B de β points que T leur fait correspondre varient dans une série linéaire $|B|$.

Prenons pour modèle projectif de la courbe C une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires.

Sur cette courbe, la série linéaire $|B|$ à laquelle appartiennent les groupes B est découpée, en dehors d'un groupe H de points fixes, par un système linéaire de courbes

$$\lambda_0\varphi_0(x_1,x_2,x_3)+\lambda_1\varphi_1+...+\lambda_r\varphi_r=0. \qquad (1)$$

Les groupes B de cette série, que T fait correspondre aux points a de C, sont découpés par un système algébrique de courbes du système (1). Puisqu'à un point a correspond un seul de ces groupes B, les coefficients λ_0, λ_1, ..., λ_r de ce système algébrique sont des fonctions rationnelles des coordonnées x_1', x_2', x_3' de a. La correspondance T est donc représentée par une équation

$$\Phi(x_1', x_2', x_3' ;\ x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{2}$$

où Φ est une fonction rationnelle, entière et homogène séparément en x et en x'.

Si nous prenons pour x_1, x_2, x_3 dans l'équation (2) les coordonnées d'un point b de C, cette équation doit représenter une courbe qui coupe C, en dehors d'un groupe K de points fixes, suivant les α points du groupe A que T^{-1} fait correspondre à b. Lorsque b varie, la courbe (2) où les x sont des paramètres, varie dans un système linéaire et les groupes A sont donc équivalents. La correspondance T^{-1} est à valence zéro.

L'inverse d'une correspondance à valence zéro est une correspondance à valence zéro.

De plus, les points unis de la correspondance T sont découpés sur C, en dehors des groupes H et K, par la courbe

$$\Phi(x_1, x_2, x_3 ;\ x_1, x_2, x_3) = 0 .$$

Le groupe U de ces points unis appartient donc à la série linéaire $|A + B|$, où A et B sont les groupes de points que T et T^{-1} font correspondre à un point de C.

On en conclut que :

Le nombre des points unis d'une correspondance (α, β) *à valence zéro, est égal à* $\alpha + \beta$.

342. Construction de correspondances à valence. — Considérons, sur une courbe C, une série g_n^1. A un point a, faisons correspondre les $n-1$ points qui, avec a, forment un groupe de cette série. Nous obtenons ainsi une correspondance $(n-1, n-1)$ de valence un. Une telle correspondance sera appelée *correspondance élémentaire.* Cette correspondance coïncide avec son inverse ; nous dirons qu'elle est symétrique.

Considérons γ correspondances élémentaires T_1, T_2, ..., T_γ. La somme

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_\gamma$$

de ces correspondances a la valence γ.

Soit encore T_0 une correspondance élémentaire. La correspondance T_0T a la valence $-\gamma$.

On voit donc qu'il existe, sur une courbe C, des correspondances dont la valence est un nombre quelconque.

343. Théorème. — *L'inverse d'une correspondance à valence, est une correspondance ayant la même valence.*

Observons que les correspondances élémentaires T_1, T_2, ..., T_γ, T_0 étant symétriques, leurs inverses T_1^{-1}, T_2^{-1}, ...,

T_γ^{-1}, T_0^{-1} ont également la valence un. Par conséquent les correspondances T et T^{-1} ont même valence γ et les correspondances T_0T et $(T_0T)^{-1}$ ont même valence.

Soit θ une correspondance à valence quelconque γ. Nous pouvons, au moyen de correspondances élémentaires, former une correspondance T ayant pour valence $-\gamma$, que γ soit positif ou négatif. La correspondance $\theta + T$ a pour valence zéro et par conséquent $(\theta + T)^{-1} = \theta^{-1} + T^{-1}$ a pour valence zéro. Mais T^{-1} a la valence $-\gamma$, donc θ^{-1} a la même valence γ que θ.

344. Groupe des points unis d'une correspondance à valence. — Considérons en premier lieu une correspondance élémentaire T et soient A, B les groupes que T^{-1} et T font correspondre à un point a. Ces groupes sont d'ailleurs formés des mêmes points. D'autre part, le groupe des points unis U de T n'est autre que le groupe jacobien de la série g_n^1. Par conséquent, si $|K|$ désigne la série canonique de C, on a

$$U \equiv A + B + 2a + K,$$

puisque $a + A$ et $a + B$ sont deux groupes (coïncidents) de g_n^1.

Considérons maintenant γ correspondances élémentaires $T_1, T_2, \ldots, T_\gamma$. Appelons A_i, B_i les groupes de points que T_i^{-1} et T_i font correspondre à un point a (groupes qui coïncident d'ailleurs). Soit enfin U_i le groupe des points unis de T_i. On a

$$U_i \equiv A_i + B_i + 2a + K.$$

Le groupe U des points unis de

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_\gamma$$

est la somme des groupes $U_1, U_2, \ldots, U_\gamma$. On a donc

$$U \equiv A + B + 2\gamma a + \gamma K, \tag{1}$$

A étant la somme des groupes $A_1, A_2, \ldots, A_\gamma$ et B celle des groupes $B_1, B_2, \ldots, B_\gamma$.

Nous allons démontrer que cette équivalence est vraie pour toutes les correspondances à valence γ.

Soit θ une correspondance à valence $-\gamma$. Désignons par U' le groupe de ses points unis, par A', B' les groupes que θ^{-1} et θ font correspondre à un point a. La correspondance $\theta + T$ étant à valence zéro, on a

$$U + U' \equiv (A + A') + (B + B')$$

et par conséquent, par comparaison avec (1),

$$U' \equiv A' + B' - 2\gamma a - \gamma K. \tag{2}$$

Si enfin θ_1 est une correspondance à valence γ, U_1 le groupe de ses points unis et A_1, B_1 les groupes que θ_1^{-1} et θ

font correspondre au point a, la correspondance $\theta+\theta^{-1}$ est à valence zéro et on a

$$U'+U_1\equiv(A'+A_1)+(B'+B_1),$$

d'où par (2),

$$U_1\equiv A_1+B_1+2\gamma a+\gamma K.$$

Le groupe U *des points unis d'une correspondance* T *à valence* γ *satisfait à la relation d'équivalence*

$$U\equiv A+B+2\gamma a+\gamma K,$$

où A, B *sont les groupes de points que* T^{-1} *et* T *font correspondre au point* a, *et* K *un groupe canonique.*

345. Formule de Cayley-Brill. — Supposons que T soit une correspondance (α, β) et que le genre de la courbe C soit p. Le nombre u des points unis de T est

$$u=\alpha+\beta+2\gamma+\gamma(2p-2).$$

On obtient ainsi la formule de Cayley-Brill. *Le nombre des points unis d'une correspondance* (α, β), *à valence* γ, *sur une courbe de genre* p, *est*

$$u=\alpha+\beta+2\gamma p.$$

346. Nombre de points multiples d'ordre $r+1$ d'une série linéaire de dimension r. — Comme application de la théorie des correspondances, nous déterminerons le nombre $N_{r,n}$ des points multiples d'ordre $r+1$ d'une série linéaire g_n^r.

Il existe un seul groupe de g_n^r ayant un point a donné multiple d'ordre r ; il est complété par un groupe B de $n-r$ points. Inversement, les groupes de g_n^r contenant un point b forment, ce point défalqué, une série g_{n-}^{r-1} possédant $N_{r-1,n-1}$ points multiples d'ordre r, formant un groupe A. On a donc, entre les points multiples d'ordre r pour la série g_n^r et les points simples de cette série, une correspondance $(n-r,\ N_{r-1,n-1})$ dont les points unis sont les points cherchés.

Le groupe $ra+B$ étant un groupe de g_n^r, la correspondance a la valence r et le nombre des points unis est

$$N_{r,n}=n-r+N_{r-1,n-1}+2rp.$$

Observons que $N_{r-1,n-1}$ est le nombre des points multiples d'ordre $r-1$ d'une série g_{n-1}^{r-1} ; on a donc

$$N_{r-1,n-1}=n-r+N_{r-2,n-2}+2(r-1)p,$$

$N_{r-2,n-2}$ étant le nombre des points multiples d'ordre $r-1$ d'une série g_{n-2}^{r-2}.

De proche en proche, on arrivera au nombre N_1 de points doubles d'une série g^1_{n-r-1}, c'est-à-dire à l'ordre du groupe jacobien de cette série. On a donc

$$N_{1,\, n-r+1} = 2\,(n-r) + 2\,p\ .$$

On en déduit, par addition

$$N_{r,n} = (r+1)\,n + r\,(r+1) + 2\,\frac{r\,(r+1)}{2}\,p\ ,$$

c'est-à-dire

$$N_{r,n} = (r+1)\,n + r(r+1)\,(p-1)\ .$$

Désignons par $X_{r,n}$ le groupe des points multiples d'ordre $r+1$ d'une série linéaire $|G|$, d'ordre n et de dimension r. L'application du principe de correspondance donne

$$X_{r,n} \equiv (G - ra) + X_{r-1,\,n-1} + 2\,ra + rK\ ,$$

c'est-à-dire

$$X_{r,n} \equiv G + X_{r-1,\,n-1} + ra + rK\ .$$

En particulier, on a

$$X_{1,\,n-r+1} \equiv 2(G - ra) + K\ .$$

Par conséquent, on a

$$X_{r,n} \equiv (r+1)\,G + \binom{r+1}{2} K\ .$$

347. Nombre de groupes d'une série linéaire d'ordre n et de dimension r, contenant r points doubles. — Une série linéaire g_n^r, d'ordre n et de dimension r, possède en général un nombre fini de groupes comprenant r points doubles. Nous allons établir que ce nombre est donné par

$$\alpha_{r,n} = 2^r \sum_{i=0}^{r} \binom{n-r-i}{r-i}\binom{p}{i}\ .$$

Si l'on désigne par $H_{r,n}$ le groupe formé par ces points (comptés chacun une fois) et par $|G|$ la série, on a

$$H_{r,n} \equiv \lambda_{r,n} G + \mu_{r,n} K\ ,$$

où

$$\lambda_{r,n} = 2^r \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n-r-i-1}{r-i-1}\binom{p-1}{i}\ ,$$

$$\mu_{r,n} = \frac{r\alpha_{r,n} - n\lambda_{r,n}}{2\,p-2}\ .$$

Observons que, pour $r=1$, les formules précédentes deviennent

$$\alpha_{1,n}=2(n-1+p), \qquad H_{1,n}=2G+K,$$

qui sont exactes Nous supposerons donc les formules exactes pour les séries de dimensions inférieures à r et démontrerons qu'elles sont exactes pour les séries de dimension r.

Considérons la série g_n^r (ou $|G|$) et les groupes de cette série contenant un point a. En supprimant ce point, nous obtenons une série g_{n-1}^{r-1} qui contient $\alpha_{r-1,n-1}$ groupes possédant $r-1$ points doubles. Les points qui complètent ces groupes correspondent à a dans une correspondance T qui est d'ailleurs symétrique. Le groupe B des points que T fait correspondre à a est formé de $\alpha_{r-1,n-1}(n-2r+1)$ points. On a

$$\alpha_{r-1,n-1}\,a+2\,H_{r-1,n-1}+B\equiv\alpha_{r-1,n-1}\,G. \tag{1}$$

D'autre part, par hypothèse, on a

$$H_{r-1,n-1}\equiv\lambda_{r-1,n-1}(G-a)+\mu_{r-1,n-1}K.$$

Par conséquent, on a

$$(\alpha_{r-1,n-1}-2\lambda_{r-1,n-1})\,a+B$$
$$\equiv(\alpha_{r-1,n-1}-2\lambda_{r-1,n-1})\,G-2\mu_{r-1,n-1}K$$

et la valence de la correspondance T est

$$\gamma=\alpha_{r-1,n-1}-2\lambda_{r-1,n-1}.$$

Un calcul simple montre que l'on a (¹)

$$\gamma=\frac{1}{2}\lambda_{r,n}.$$

Le nombre des points unis de la correspondance est donc donné par

$$r\alpha_{r,n}=2(n-2r+1)\,\alpha_{r-1,n-1}+\lambda_{r,n}\,p,$$

car un groupe $H_{r,n}$ donne r points unis de la correspondance T.

D'autre part, on a, puisque T est symétrique,

$$H_{r,n}\equiv2B+2\gamma a+\gamma K.$$

En tirant de (1) la valeur de B, on trouve

$$H_{r,n}\equiv\lambda_{r,n}G+\mu_{r,n}K.$$

(¹) Il suffit d'appliquer la formule

$$\binom{m}{n}=\binom{m-1}{n}+\binom{m-1}{n-1}.$$

La valeur de $\mu_{r,n}$ s'obtient immédiatement en exprimant le nombre de points composant les différents groupes dans cette relation. On a

$$r\alpha_{r,n} = \lambda_{r,n}n + \mu_{r,n}(2p-2) \ .$$

Remarque I. — La formule établie ici est un cas particulier d'une formule de Jonquières donnant le nombre de groupes d'une série g_n^r contenant des points multiples. La démonstration, au moyen du principe de correspondance, est due à R. Torelli [1], qui l'a utilisée dans le cas général.

Remarque II. — La formule établie, appliquée aux séries g^p_{2p} d'ordre $2p$ et de dimension p, donne

$$\alpha_{p,\,2p} = 2^p \sum_0^p \binom{p}{i} = 2^{2p}.$$

348. Groupes de $r+1$ points communs à une série linéaire de dimension r et à une série de dimension un. — Considérons, sur la courbe C, une série linéaire g_n^r et une série γ_m de dimension un et d'indice ν. Nous allons rechercher le nombre $Z_{r,n}$ des groupes de $r+1$ points communs à un groupe de g_n^r et à un groupe de γ_m.

Soient P un point de C ; Q un des $\nu(m-1)$ points distincts de P, appartenant aux ν groupes de γ_m contenant P ; R un des $n-r$ points du groupe de g_n^r contenant r points Q appartenant à un même groupe de γ_m.

A un point P correspondent $\nu(m-1)$ points Q et cette correspondance est symétrique ; nous la désignerons par S.

Considérons maintenant la correspondance T entre les points P et R. A un point P correspondent ν groupes de $m-1$ points Q et chacun de ces groupes détermine $\binom{m-1}{r}$ groupes de g_n^r contenant r de ses points. A un point P correspondent donc $\nu\binom{m-1}{r}(n-r)$ points R. Inversement, le reste d'un point R par rapport à g_n^r est une série g^{r-1}_{n-1} ; il y a $Z_{r-1,n-1}$ groupes de γ_m ayant r points communs avec des groupes de g^{r-1}_{n-1} et chacun d'eux contient $m-r$ points P. A un point R correspondent donc $(m-r)Z_{r-1,n-1}$ points P.

[1] R. Torelli, *Dimostrazione di una formula di de Jonquières e suo significato geometrico* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1906). Cette démonstration est reproduite avec quelques modifications dans le *Trattato* de M. Severi. De Jonquières a établi la formule dans son *Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque...* (*Journal de Crelle*, 1866, t. LXVI).

Les $\nu\binom{m-1}{r}$ groupes de g_n^r correspondant à un point P contiennent, en dehors des points R homologues de P, les points Q comptés chacun $\binom{m-2}{r-1}$ fois. Lorsque P décrit C, ces groupes varient dans une série linéaire, multiple de g_n^r, et par conséquent la correspondance

$$T+\binom{m-2}{r-1}S$$

est à valence zéro. Les points unis de cette correspondance sont les points unis de T et ceux de S, ces derniers comptés $\binom{m-2}{r-1}$ fois. Les points unis de T donnent les groupes de $r+1$ points cherchés ; ils sont donc au nombre de $(r+1)Z_{r,n}$. Les points unis de S sont les d points doubles de γ_m. On a donc

$$(r+1)\,Z_{r,n}+\binom{m-2}{r-1}d = (m-r)\,Z_{r-1,\,n-1}+\nu\binom{m-1}{r}(n-r).$$

On a

$$Z_{0,n-1}=\nu(n-1)\ ,$$

donc
$$Z_{1,n}=n\nu(m-1)-\frac{1}{2}\,d\,.$$

On en déduit $Z_{1,n-1}$ et ensuite $Z_{2,n}$. Et ainsi de suite. On obtient finalement

$$Z_{r,n}=n\nu\binom{m-1}{r}-\frac{1}{2}\binom{m-2}{r-1}d\ .$$

Cette formule est due à Schubert. Le procédé utilisé ici pour l'établir est dû à Severi.

Remarque. — Si la série γ_m est une série linéaire g_m^1, on a $\nu=1$, $d=2(m+p-1)$ et on retrouve une formule établie plus haut (n° 299). On remarquera que la formule qui vient d'être établie est basée sur la théorie des correspondances, qui n'utilise pas la dimension de la série canonique de la courbe, mais simplement l'ordre de cette série.

349. Critère d'équivalence de Castelnuovo. — Soit, sur une courbe C de genre p, une série γ_m d'ordre m et d'indice ν, possédant d points doubles. Castelnuovo a déduit de la formule de Schubert un critère permettant de voir si les groupes de la série γ_m appartiennent à une série linéaire d'ordre m. Précisément,

Le nombre des points doubles d'une série simplement infinie, d'ordre m *et d'indice* ν, *sur une courbe de genre* p, *est au plus égal à* $2\nu(\mathrm{m}+\mathrm{p}-1)$; *il est égal à ce nombre lorsque les groupes de la série sont équivalents et seulement dans ce cas.*

Considérons, sur la courbe C, une série non spéciale g_{m+p-1}^{m-1} complète, ne contenant pas les groupes de γ_m. Il suffit, pour définir cette série, de prendre la série complète déterminée par un groupe de $m+p-1$ points comprenant $m-1$ points d'un groupe de γ_m sans contenir le dernier. Le nombre z des groupes de γ_m appartenant à des groupes de g_{m+p-1}^{m-1} est fini et égal, d'après la formule de Schubert, à

$$z = \nu(m+p-1) - \frac{1}{2}d.$$

On a $z \geqslant 0$, d'où

$$d \leqslant 2\nu(m+p-1).$$

Supposons que l'on ait $d = 2\nu(m+p-1)$ d'où $z=0$. La série g_{m+p-1}^{m-1} ne contient aucun groupe de γ_m. Par conséquent, s'il existe une série g_{m+p-1}^{m-1} contenant un groupe de γ_m, cette série contient tous les groupes de γ_m.

Soient G un groupe de γ_m et Γ un groupe de p points génériques de C. Le groupe $\mathrm{G}+\Gamma$ appartient à une série g_{m+p}^{m} ; le reste d'un point quelconque de Γ par rapport à cette série est une série g_{m+p-1}^{m-1} contenant G et par conséquent tous les groupes de γ_m. Les restes des groupes de γ_m par rapport à la série g_{m+p}^{m} passent donc tous par le point choisi de Γ et par conséquent par tous les points de Γ, puisque le point en question a été choisi arbitrairement. Il en résulte que les groupes de γ_m sont des groupes du reste g_m de Γ par rapport à g_{m+p}^{m}.

Inversement, si tous les groupes de γ_m sont équivalents, chaque série g_{m+p-1}^{m-1} contenant un groupe de γ_m, les contient tous en vertu du théorème du reste. Si donc on prend une série g_{m+p-1}^{m-1} ne contenant pas un groupe de γ_m, cette série n'en contiendra aucun et on aura $z=0$.

Le théorème est donc démontré.

Le nombre z est appelé *défaut d'équivalence de la série* γ_m.

350. Théorème de Severi. — *Si une série simplement infinie d'ordre* m *et d'indice* ν, *sur une courbe de genre* p, *est telle que les* ν *groupes passant par un point de la courbe varient dans une série linéaire d'ordre* mν, *les groupes de la série sont équivalents.*

Soit γ_m la série donnée. Si nous considérons comme homologues deux points de la courbe appartenant à un même groupe de la série, nous définissons une correspondance symétrique d'indices égaux à $\nu(m-1)$, à valence ν. Les points unis sont les d points doubles de la série et on a donc

$$d = 2\nu(m-1) + 2\nu p = 2\nu(m+p-1)\ ,$$

ce qui démontre le théorème.

Cette démonstration est due à Castelnuovo ; la démonstration de M. Severi est obtenue en utilisant les intégrales abéliennes attachées à la courbe (1).

§ 3. *La variété de Jacobi*

351. Définition. — L'ensemble des groupes G de p points, appartenant à une courbe algébrique C, de genre p, forme une variété irréductible à p dimensions, que nous représenterons par $\{G\}$. Soit W_p une variété irréductible à p dimensions dont les points représentent les groupes de $\{G\}$.

Un groupe G de p points, non spécial, est isolé ; il forme une série linéaire g_p^0 de dimension zéro. Un groupe spécial de p points appartient à une série linéaire de dimension au moins égale à un. Nous désignerons par V_p une variété à p dimensions dont les points représentent les séries linéaires d'ordre p appartenant à la courbe C.

A un point de W_p correspond un point de V_p et cette variété est irréductible. A un point P de V_p correspond un point de W_p si P représente une série g_p^0 non spéciale, une infinité de points (formant une variété rationnelle) si P représente une série linéaire spéciale. Les points de V_p auxquels

(1) Ce théorème a été établi en 1905 par M. Severi, dans son mémoire *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (*Annali di Matematica*, 1905, 3e s., t. XII, pp. 55-79). Voir aussi une note de ce géomètre dans les *Comptes rendus*, 3 avril 1905. Il y est utilisé dans la démonstration du théorème sur l'irrégularité d'une surface algébrique.

M. Castelnuovo a également utilisé le théorème de M. Severi pour démontrer le même théorème sur l'irrégularité des surfaces, dans son mémoire *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (*Rendiconti dell' Accademia dei Lincei*, mai-juin 1905; *Memorie scelte*, Bologna, 1937). (Voir la note du n° 11.) La démonstration algébrico-géométrique du théorème de M. Severi fut obtenue l'année suivante par M. Castelnuovo dans sa note *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (*Rendiconti dell' Accademia dei Lincei*, avril 1906; *Memorie scelte*, Bologna, 1937).

correspondent sur W_p une infinité de points formant une variété irréductible w_{p-2} à $p-2$ dimensions. En effet, à une série spéciale g_p, nous pouvons faire correspondre la série g_{p-2}, d'ordre $p-2$, résidu de la série g_p par rapport à la série canonique g_{2p-2}^{p-1}, et inversement. Cette correspondance a lieu sans exception et la variété w_{p-2} est donc en correspondance birationnelle avec les séries linéaires d'ordre $p-2$ de C, qui forment évidemment une variété irréductible.

La variété V_p est la *variété de Jacobi* attachée à la courbe C.

352. Les transformations birationnelles de première espèce de la variété de Jacobi en soi. — Soient $|G_1|$, $|G_1'|$ deux séries linéaires d'ordre p de C. A une série linéaire $|G|$ d'ordre p, faisons correspondre la série $|G'|$ telle que

$$G' - G \equiv G_1' - G_1 .$$

La série $|G'|$ est d'ordre p et existe effectivement. La relation fonctionnelle précédente peut en effet s'écrire

$$|G'| = |G + G_1' - G_1| .$$

La série $|G + G_1'|$ est d'ordre $2p$ et par conséquent non spéciale et de dimension p. Les groupes de cette série contenant un groupe G_1 sont complétés par les groupes de $|G'|$.

Inversement, à une série $|G'|$ correspond une série $|G|$.

Soient P_1, P_1', P, P' les points de la variété de Jacobi V_p représentant respectivement les séries $|G_1|$, $|G_1'|$, $|G|$, $|G'|$. Il existe une transformation birationnelle T de V_p en soi qui fait correspondre P' à P. Observons que si $|G|$ varie d'une manière continue dans la série non linéaire $\{G\}$ et vient coïncider avec $|G_1|$, la série homologue $|G'|$ varie d'une manière continue et vient coïncider avec $|G_1'|$. Par suite, T fait correspondre P_1' à P_1. La transformation T est de plus complètement définie par le couple de points homologues P_1, P_1'.

Appliquons plusieurs fois de suite la transformation T. On a, sur C,

$$G'' - G' \equiv G_1' - G_1 ,$$

$$G''' - G'' \equiv G_1' - G_1 , \ldots , \qquad G^{(n)} - G^{(n-1)} \equiv G_1' - G_1 ,$$

d'où

$$G^{(n)} - G \equiv n(G_1' - G_1) .$$

La transformation T est donc en général non périodique. Elle ne peut être périodique que s'il existe un entier n tel que

$$nG_1' \equiv nG .$$

La transformation T ne peut posséder de points unis sans se réduire à l'identité. S'il existait en effet une série $|G|$ coïncidant avec son homologue $|G'|$, on aurait $G_1 \equiv G_1'$ et toute série $|G|$ coïnciderait avec son homologue.

La série $|G_1|$ étant fixée, on peut choisir $|G_1'|$ de ∞^p manière et on a donc ∞^p transformations T formant un système continu.

Considérons une seconde transformation T_1, définie par les séries $|G_1|$, $|G_1''|$ et soit

$$G'' - G' \equiv G_1'' - G_1 .$$

On a

$$G'' - G \equiv (G_1' + G_1'' - G_1) - G_1 \equiv \overline{G}_1 - G_1 ,$$

en représentant par $|\overline{G}_1|$ la série linéaire $|G_1' + G_1'' - G_1|$, d'ordre p. Le produit TT_1 est donc une transformation de même espèce que T, T_1.

Effectuons maintenant le produit T_1T. On a, en changeant de notations,

$$G' - G \equiv G_1'' - G_1 , \qquad G'' - G' \equiv G_1' - G_1$$

et par conséquent

$$G'' - G \equiv (G_1' + G_1'' - G_1) - G_1 \equiv \overline{G}_1 - G_1 .$$

Le produit T_1T coïncide donc avec TT_1 et les ∞^p transformations T sont deux à deux permutables.

En résumé : *La variété de Jacobi* V_p *possède un groupe continu, transitif, permutable de* ∞^p *transformations birationnelles en soi.*

Les transformations T de ce groupe sont appelés *transformations de première espèce.*

353. Les transformations birationnelles de seconde espèce de la variété de Jacobi en soi. — Reprenons les deux séries $|G_1|$, $|G_1'|$ d'ordre p et faisons correspondre à la série linéaire $|G|$ d'ordre p la série $|G'|$ telle que

$$G + G' \equiv G_1 + G_1' .$$

La série $|G'|$ existe et est d'ordre p. De plus, à la série $|G_1|$ correspond la série $|G_1'|$. On a donc, sur la variété V_p, une transformation birationnelle involutive θ complètement déterminée par les points P_1, P_1' représentant les séries $|G_1|$, $|G_1'|$. La transformation θ engendre sur V_p une involution I_2 du second ordre.

Supposons que l'involution I_2 possède un point uni P ; il correspond à ce point sur C une série linéaire $|G|$ telle que

$$2\,G \equiv G_1 + G_1' .$$

La série $|G_1 + G_1'|$ est d'ordre $2p$, non spéciale et de dimension p. Le groupe de p points G, compté deux fois, est un groupe de cette série, par conséquent G est un groupe de p points doubles de la série $|G_1 + G_1'|$. De tels groupes sont en nombre de 2^{2p} (n° 347). L'involution I_2 possède donc 2^{2p} points unis.

La transformation θ et l'involution I_2 sont complètement déterminées par le couple de points P_1, P_1'. Le point P_1 étant fixé, le point P_1' peut être choisi de ∞^p manières, donc la variété de Jacobi V_p contient ∞^p transformations birationnelles involutives en soi, engendrant ∞^p involutions du second ordre.

Considérons une seconde transformation birationnelle involutive θ_1, déterminée par les séries $|G_1|$, $|G_1''|$ et formons le produit $\theta\theta_1$. Si θ_1 fait correspondre la série $|G''|$ à la série $|G'|$, on a

$$G' + G'' \equiv G_1 + G_1''$$

et par conséquent

$$G'' - G \equiv G_1'' - G_1'.$$

La transformation $\theta\theta_1$ est par conséquent une transformation de première espèce T.

Formons maintenant le produit $\theta_1\theta$. Si à $|G|$, θ_1 fait correspondre $|G'|$, θ faisant correspondre $|G''|$ à $|G'|$, on a

$$G + G' \equiv G_1 + G_1'', \qquad G' + G'' \equiv G_1 + G_1'.$$

On en déduit

$$G'' - G \equiv G_1' - G_1''.$$

La transformation $\theta_1\theta$ coïncide donc avec la transformation T^{-1}.

La variété de Jacobi V_p *possède* ∞^p *transformations birationnelles involutives ayant chacune* 2^{2p} *points unis. Le produit de deux de ces transformations est une transformation de première espèce.*

Les transformations θ sont appelées *transformations de seconde espèce* de V_p.

354. Représentation des séries linéaires d'ordre quelconque. — Considérons l'ensemble des groupes H de n points de la courbe C. Ils sont en nombre ∞^n et nous supposerons $n > p$. Cet ensemble est une série non linéaire que nous désignerons par $\{H\}$; il est constitué par ∞^p séries d'ordre n, $|H|$ qui, si ces séries sont non spéciales, sont de dimension $n - p$.

Considérons, sur la courbe C, une série linéaire complète $|K|$, d'ordre $n + p$. Comme nous avons supposé $n > p$, la série $|K|$ est d'ordre supérieur à $2p$, non spéciale et par conséquent de dimension n.

Si $|G|$ est une série linéaire d'ordre p, la série linéaire $|K-G|$ existe certainement puisque $n>p$. Aux ∞^p séries linéaires $|G|$ d'ordre p correspondent donc les ∞^p séries linéaires $|H|=|K-G|$ d'ordre n. Inversement, si $|H|$ est une série linéaire d'ordre n, la série $|K-H|$ existe certainement et est d'ordre p. Aux ∞^p séries linéaires d'ordre n correspondent donc les ∞^p séries d'ordre p.

Il en résulte que *les* ∞^p *séries linéaires d'ordre* n *sont représentées par les points de la variété de Jacobi* V_p.

355. Application aux courbes elliptiques. — Supposons que la courbe C soit elliptique, c'est-à-dire de genre $p=1$. Les séries linéaires g_p d'ordre $p=1$ sont toutes non spéciales et la variété de Jacobi V_p coïncide avec la courbe C elle-même.

Une transformation de première espèce T est définie par la relation

$$G'-G \equiv G_1'-G_1 \qquad (1)$$

où G_1, G_1', G, G' sont maintenant des points de C. Cette transformation, complètement définie par les points G_1, G_1', est en général non périodique. Pour qu'elle ait la période n, il faut que l'on ait $nG_1 \equiv nG_1'$, c'est-à-dire que G_1, G_1' soient des points multiples d'ordre n d'une même série linéaire d'ordre n, $|nG|$. Supposons que la transformation T, définie par la relation (1), ait la période n. Elle engendre sur C une involution γ_n. Si Γ est une courbe représentant cette involution et π le genre de cette courbe, la formule de Zeuthen montre que $\pi=1$, car l'involution γ_n ne peut posséder de points unis.

Une transformation de seconde espèce θ est définie par la relation

$$G'+G \equiv G_1'+G_1 .$$

Le groupe de points homologues $G+G'$ varie dans une série linéaire g_2^1 possédant quatre points unis.

Observons qu'une courbe elliptique peut toujours se ramener, par une transformation birationnelle, à une cubique plane C_0, dépourvue de points doubles. Sur C_0, une transformation de seconde espèce est déterminée par les couples de points alignés sur un point de la courbe.

Supposons que C_0 soit représentée par les équations (I, chap. III, § 2),

$$x=p(u) , \qquad y=p'(u) ,$$

où $p(u)$ désigne la fonction de Weierstrass.

Une transformation de première espèce est représentée par

$$u' \equiv u+a , \qquad \text{(mod. périodes)}$$

et une transformation de seconde espèce par

$$u' \equiv -u + b\,, \qquad \text{(mod. périodes)}$$

a et b étant des constantes.

On vérifie aisément, sur ces équations, les propriétés du groupe formé par les transformations T et celles des transformations θ.

356. Remarque. — Reprenons la courbe C de genre p et la variété de Jacobi V_p qui lui est attachée. Nous avons trouvé qu'il existait deux familles de transformations birationnelles de V_p en soi. Ces transformations existent quelle que soit la courbe C et sont appelées transformations birationnelles ordinaires de la variété de Jacobi en soi.

Pour certaines courbes C particulières, il peut exister d'autres transformations birationnelles de V_p en soi. Bornons-nous à en fournir un exemple.

Supposons que la courbe C possède une transformation birationnelle τ en soi, de période $n > 2$. Cette transformation τ fait correspondre à une série linéaire g_p de C, une série linéaire de même ordre, en général distincte de la précédente. Par conséquent, à τ correspond une transformation birationnelle τ' de V_p en soi. Observons que τ' a la même période $n > 2$ que la transformation τ. D'autre part, il est toujours possible de former une série linéaire transformée en elle-même par τ. Soit en effet $|G_1|$ une série linéaire de C. Les transformations $\tau, \tau^2, \ldots, \tau^{n-1}$ lui font correspondre des séries linéaires $|G_2|$, $|G_3|, \ldots, |G_n|$. La série linéaire complète

$$|G_1 + G_2 + \ldots + G_n|$$

est transformée en elle-même par τ. Cette série est représentée sur V_p par un point uni de τ'. La transformation τ' possédant des points unis, ne peut être une transformation T de première espèce. Comme elle a la période $n > 2$, elle ne peut non plus être une transformation de seconde espèce. On voit donc que V_p peut posséder des transformations birationnelles en soi distinctes des transformations T et θ.

§ 4. *Modules d'une courbe algébrique*

357. Définition. — Considérons une courbe C, de genre p, que nous supposerons en premier lieu non hyperelliptique. On a donc $p > 2$. Nous pouvons transformer birationnellement la courbe C en une courbe canonique, d'ordre $2p-2$, de l'espace S_{p-1} à $p-1$ dimensions. On peut donc prendre, comme modèle projectif de la famille de courbes à laquelle appartient la courbe C, une courbe (canonique), d'ordre $2p-2$, de S_{p-1}.

Etant donnée une famille de courbes de genre p, non hyperelliptique, il existe une infinité de courbes C, d'ordre $2p-2$, de S_{p-1}, appartenant à cette famille. En effet, il existe certainement une courbe de cette famille d'ordre $2p-2$, de S_{p-1}. Les transformées projectives de cette courbe appartiennent à cette famille.

Considérons d'autre part deux courbes C, C′ de genre p, d'ordre $2p-2$, de S_{p-1}, birationnellement identiques, c'est-à-dire appartenant à la même classe. Il existe donc une transformation birationnelle T entre les courbes C, C′. A un groupe canonique de C, c'est-à-dire à la section de C par un hyperplan, T fait correspondre un groupe canonique de C′, c'est-à-dire la section de C′ par un hyperplan. Il en résulte que T est déterminée par une homographie de S_{p-1} et que les courbes C, C′ sont projectivement identiques.

Cela étant, soient C_1, C_2 deux courbes de genre p, d'ordre $2p-2$, de S_{p-1}. La condition pour que ces deux courbes appartiennent à la même classe, c'est-à-dire soient projectivement identiques, est que certains nombres relatifs à la courbe C_1 soient égaux aux nombres correspondants relatifs à la courbe C_2. Ces nombres sont les invariants projectifs de deux courbes C_1, C_2 ; ils s'expriment en fonction des coefficients des équations des courbes [1]. Ces invariants projectifs sont les *modules* des courbes.

Considérons maintenant une courbe hyperelliptique de genre $p>2$. On peut la transformer en une courbe d'ordre $4p-4$, appartenant à un espace S_{3p-4}, à $3p-4$ dimensions. Les raisonnements précédents peuvent se répéter ; le système des sections hyperplanes de la courbe étant le double du système canonique, deux courbes du type considéré, birationnellement identiques, sont projectivement identiques.

Une courbe de genre deux peut être transformée en une courbe du sixième ordre de S_4, le système des sections hyperplanes étant le triple du système canonique. Les mêmes raisonnements peuvent encore se répéter.

[1] Voici un exemple simple d'invariant projectif.
Si l'on considère une courbe gauche rationnelle du quatrième ordre, sans point double (quartique de seconde espèce), on sait qu'elle possède quatre points stationnaires, en chacun desquels le plan osculateur a un contact du troisième ordre avec la courbe. Le rapport anharmonique des quatre points stationnaires de la courbe est un invariant projectif de cette courbe. Pour que deux courbes de cette espèce soient projectivement identiques, il faut que les rapports anharmoniques des quaternes de points stationnaires des deux courbes, pris dans un ordre convenable, soient égaux.

Les modules des courbes hyperelliptiques se définissent comme invariants projectifs des courbes précédentes.

358. Nombre de séries linéaires appartenant à une courbe algébrique. — Considérons, sur une courbe algébrique C de genre p, les séries linéaires non spéciales d'ordre n et de dimension r, complètes ou non.

Nous avons vu que les séries linéaires non spéciales complètes d'ordre n (et de dimension $n-p$) sont en nombre ∞^p. Considérons les séries linéaires non spéciales g_n^r d'ordre n et de dimension $r \leqslant n-p$.

Considérons une série complète g_n^{n-p} et représentons ses groupes par les points d'un espace linéaire S_{n-p}. Une série g_n^r appartenant à cette série est représentée dans S_{n-p} par un espace linéaire à r dimensions. Le nombre de ces espaces est $\infty^{(n-p-r)(r+1)}$ et tel est le nombre des séries linéaires g_n^r appartenant à la série complète g_n^{n-p}. Celles-ci étant en nombre ∞^p, les séries g_n^r appartenant à la courbe C sont en nombre $\infty^{(n-r)(r+1)-pr}$.

Les séries linéaires non spéciales d'ordre n *et de dimension* r, *appartenant à une courbe* C *de genre* p, *sont en nombre* $\infty^{(n-r)(r+1)-pr}$.

359. Nombre de modules d'une courbe non hyperelliptique. — Soit C une courbe de genre p, non hyperelliptique. Considérons sur cette courbe les séries linéaires g_n^2, d'ordre $n > 2p-2$. En rapportant projectivement les groupes d'une de ces séries aux droites d'un plan, on transforme la courbe C en une courbe plane C_0, d'ordre n et de genre p, possédant par conséquent $d = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - p$ points doubles.

Les séries g_n^2 situées sur C dépendant de $3(n-2)-2p$ paramètres, on obtient dans le plan une famille Σ de courbes C_0 à $3(n-2)-2p$ dimensions.

Supposons que deux courbes C_0, C_0' de la famile Σ soient projectivement identiques. Comme il existe des transformations birationnelles, entre C et C_0 d'une part, entre C et C_0' d'autre part, à la projectivité entre C_0, C_0' correspond une transformation birationnelle ω de C en soi. La courbe C étant non hyperelliptique, est de genre p supérieur à deux et par conséquent, elle ne peut contenir qu'un nombre fini de transformations birationnelles en soi (transformations nécessairement périodiques). Par conséquent, il existe au plus, dans le système Σ, un nombre fini de courbes projectivement identiques à une courbe de ce système.

Cela étant, effectuons sur les courbes de Σ les ∞^8 homographies du plan. Nous obtenons un système Σ' de courbes C_0

d'ordre n et de genre p, dimension $3n-2p+2$, appartenant à la même classe que la courbe C. Toute courbe plane d'ordre n et de genre p, n'appartenant pas à Σ', ne peut appartenir à la même classe que C.

Les courbes planes d'ordre n, possédant d points doubles (en des points variables) et par conséquent de genre p, forment une famille de dimension

$$\frac{1}{2}n(n+3)-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+p=3n+p-1\ .$$

Cette famille est formée de systèmes analogues à Σ' et ces systèmes dépendent donc de

$$3n+p-1-3n+2p-2=3p-3$$

paramètres. On en conclut que pour que deux courbes C de genre p, non hyperelliptiques, appartiennent à la même classe, il faut $3p-3$ conditions. En d'autres termes,

Une courbe de genre p, *non hyperelliptique, dépend de* $3\mathrm{p}-3$ *modules* (Riemann).

360. Remarques sur les courbes hyperelliptiques. — Une courbe hyperelliptique est caractérisée par le fait qu'elle possède une série linéaire g_2^1 d'ordre deux. Soit C une courbe hyperelliptique, de genre $p>1$. Les groupes de la série g_2^1 (unique) qu'elle contient peuvent être représentés par les points d'une droite que nous prendrons pour axe Ox. A chaque point x de Ox correspondent deux points (x, y_1), (x, y_2) de la courbe C, de sorte que celle-ci peut être représentée par une équation de la forme

$$y^2=f(x) \tag{1}$$

où $f(x)$ est un polynome.

Supposons que $f(x)$ possède une racine $x=a$ de multiplicité au moins égale à deux. Effectuons sur la courbe (1) la transformation birationnelle

$$x=x' \qquad y=y'(x'-a)^2$$

et posons $f(x)=(x-a)^2\varphi(x)$. La transformée de la courbe (1) a pour équation

$$y^2=\varphi(x)\ .$$

L'application répétée de ce raisonnement montre que dans l'équation (1), on peut supposer que $f(x)$ n'a que des racines simples.

Sur la courbe (1), la série g_2^1 est découpée par les parallèles à Oy, de sorte que les points $f(x)=0$ sont les points unis de cette série.

La courbe $y^2 = f(x)$ est irréductible, car si elle se décomposait en deux courbes, celles-ci devraient rencontrer Ox aux mêmes points et ceux-ci seraient racines doubles de $f(x)=0$.

Supposons que le polynome $f(x)$ soit de degré impair $2n+1$. En effectuant sur la courbe (1) la transformation birationnelle

$$x = \frac{1}{x'}, \qquad y = \frac{y'}{x'^{n+1}},$$

la courbe devient

$$y^2 = x^{2n+2} f\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{F}(x).$$

Le polynome $\mathrm{F}(x)$ est de degré pair. On en conclut que si $f(x)$ est de degré impair, le point à l'infini de Ox doit être considéré comme un point uni de la série g_2^1. On peut donc toujours supposer que $f(x)$ est de degré pair.

La courbe étant de genre p, la série g_2^1 possède

$$2(2+p-1)=2(p+1)$$

points unis, de sorte que $f(x)$ est de degré $2p+2$.

Observons que si $f(x)$ est de degré $2p+1$, la courbe est de genre p.

361. Nombre de modules d'une courbe hyperelliptique. — Soient

$$y^2 = f(x), \qquad y^2 = \mathrm{F}(x)$$

deux courbes hyperelliptiques de genre $p > 1$. Si elles appartiennent à la même classe, les séries g_2^1 qu'elles contiennent et les points doubles de ces séries se correspondent, par conséquent les groupes de $2p+2$ points $f(x)=0$, $\mathrm{F}(x)=0$ sont projectifs.

Inversement, supposons que les groupes de points $f(x)=0$, $\mathrm{F}(x)=0$ soient projectifs et soit

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

la projectivité qui fait passer de $f(x)=0$ à $\mathrm{F}(x)=0$. La transformation birationnelle

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad y' = y$$

fait passer de $y^2=f(x)$ à $y^2=F(x)$ et les courbes considérées appartiennent à la même classe.

Le nombre des modules d'une courbe hyperelliptique de genre $p>1$ sera donc égal au nombre de conditions pour que deux groupes de $2p+2$ points donnés sur une droite soient projectifs. Pour que deux groupes de $2p+2$ points sur une droites soient projectifs, il faut et il suffit que les $2p-1$ rapports anharmoniques formés par trois points et les $2p-1$ points restants soient égaux. On en conclut que :

Une courbe hyperelliptique de genre $p>1$ *dépend de* $2p-1$ *modules.*

362. Module d'une courbe elliptique. — Soit C une courbe de genre un. Elle contient ∞^1 séries g_3^2 et en rapportant projectivement les groupes d'une de ces séries aux droites du plan, on transforme C en une cubique plane sans points doubles. Nous désignerons dorénavant cette cubique par C.

Les droites passant par un point P de la cubique C coupent encore cette cubique suivant les groupes d'une série g_2^1. Les points doubles de cette série sont déterminés par les tangentes à la courbe passant par P (le point de contact étant distinct de P). Rapportons la courbe à un triangle de référence dont P soit le sommet (0, 0, 1). L'équation de la courbe s'écrit

$$x_3^2\alpha_1(x_1, x_2)+x_3\alpha_2(x_1, x_2)+\alpha_3(x_1, x_2)=0\ ,$$

où α_1, α_2, α_3 sont des formes en x_1, x_2 dont le degré est indiqué par l'indice.

En effectuant sur cette courbe la transformation birationnelle

$$x_1' : x_2' : x_3' = 2\alpha_1 x_1 : 2\alpha_1 x_2 : 2\alpha_1 x_3 - \alpha_2\ ,$$

on fait correspondre à la courbe C une courbe C′ du quatrième ordre

$$4x_3^2\alpha_1^2+\alpha_4(x_1, x_2)=0\ ,$$

où $\alpha_4(x_1, x_2)$ est une forme du quatrième degré.

Passons aux coordonnées non homogènes en posant

$$x_1=x\ ,\quad x_2=1\ ,\quad x_3=y\ ,$$

puis effectuons la transformation birationnelle

$$x'=x\ ,\qquad y'=2y\alpha_1(x, 1)\ ;$$

nous obtenons finalement la courbe

$$y^2=f(x)\ ,$$

où $f(x)$ est un polynome du quatrième degré, à racines distinctes. Nous pourrons répéter le raisonnement fait à propos des courbes hyperelliptiques et on voit que :

Une courbe elliptique dépend d'un module.

On peut, du raisonnement précédent, déduire que les quatre tangentes à une cubique menées par un point de cette courbe, ont un rapport anharmonique constant (Salmon). Ce rapport anharmonique est le module de la courbe (I, chapitre III, § 1).

CHAPITRE IV

SURFACES DE RIEMANN

§ 1. *Fonctions algébriques d'une variable*

363. Définitions. — Considérons un polynome entier et rationnel en z, u, de degré n par rapport à u,

$$f(z, u) \equiv u^n \varphi_0(z) + u^{n-1} \varphi_1(z) + \dots + u\varphi_{n-1}(z) + \varphi_n(z) .$$

On sait que :

1° Le polynome $f(z, u)$ est décomposable en un produit de n facteurs linéaires :

$$f(z, u) \equiv \varphi_0(z)(u - u_1)(u - u_2)\dots(u - u_n) ;$$

2° Si, pour $z = z_0$, le polynome $f(z, u)$ a p racines égales à u_0, on peut prendre z suffisamment voisin de z_0 pour que p racines du polynome $f(z, u)$, et p seulement, soient aussi voisines que l'on veut de u_0.

Nous supposerons que z et u sont des variables complexes. Le polynome $f(z, u)$ étant irréductible, l'équation $f(z, u) = 0$ définit une fonction $u(z)$ de z, à n valeurs, appelée fonction algébrique de z.

Posons $z = x + iy$ et représentons z par le point de coordonnées rectangulaires x, y. Un point z sera dit ordinaire si l'équation $f(z, u) = 0$ a en ce point n racines distinctes et finies. Dans le cas contraire, il sera dit singulier.

Les points singuliers peuvent être de deux sortes :

1° Les points singuliers algébriques. En un de ces points, deux au moins des valeurs correspondantes de u sont égales. Les valeurs de z donnant les points critiques algébriques satisfont à l'équation $\Delta(z) = 0$ résultant de l'élimination de u entre les équations $f(z, u) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 0$, et réciproquement ;

2° Les singularités polaires, données par les valeurs de z satisfaisant à l'équation $\varphi_0(z) = 0$.

364. Point ordinaire. — Supposons que pour $z = z_0$, l'équation $f(z, u) = 0$ admette n racines distinctes et finies u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0. Pour z voisin de z_0, on a une et une seule racine u_1 de $f(z, u) = 0$ voisine de u_1^0. On peut donc considérer une aire suffisamment petite $\mathfrak{A}$ contenant z_0 dans laquelle la fonction $u_1(z)$ soit uniforme. On démontre aisément que cette fonction admet une dérivée et est par conséquent une fonction analytique de z. On peut donc développer cette fonction suivant la formule de Taylor-Cauchy ; on a

$$u_1(z) = u_1^0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

développement convergent dans l'aire $\mathfrak{A}$.

Plus généralement, l'équation $f(z, u) = 0$ définit, dans l'aire $\mathfrak{A}$, n fonctions analytiques uniformes $u_1(z)$, $u_2(z)$, ..., $u_n(z)$, se réduisant respectivement à u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0 pour $z = z_0$.

365. Points critiques algébriques. — Supposons que pour $z = z_0$, l'équation $f(z, u) = 0$ admette p racines égales à $u_0 (p \leqslant n)$. On peut trouver une aire $\mathfrak{A}$ contenant z_0, telle que pour z intérieur à $\mathfrak{A}$, l'équation ait p racines, par exemple u_1, u_2, ..., u_p, voisines de u_0.

Faisons décrire à z un chemin fermé γ, entourant z_0 et situé dans $\mathfrak{A}$; les quantités u_1, u_2, ..., u_p varient et reviennent en bloc à leurs valeurs initiales, mais pas nécessairement dans le même ordre. En général, ces quantités auront subi une certaines permutation,

$$S = \begin{pmatrix} u_{i_1} & u_{i_2} & \dots & u_{i_p} \\ u_1 & u_2 & \dots & u_p \end{pmatrix},$$

$i_1, i_2, \dots, i_p$ étant, dans un certain ordre, les nombres $1, 2, \dots, p$.

Décomposons la substitution S en systèmes cycliques et soit, pour fixer les idées, $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ un de ces systèmes cycliques, de période $k \leqslant p$. Lorsque l'on fera décrire à z, k fois le chemin γ, u_1, u_2, ..., u_k reprendront leurs valeurs initiales dans le même ordre.

Posons $z = z_0 + z'^k$. Lorsque z' décrit un contour γ' entourant l'origine, z décrit k fois un chemin entourant z_0 et u_1, u_2, ..., u_k reviennent à leurs valeurs initiales. Il en résulte que u_1, par exemple, est une fonction uniforme de z' et que l'on a, à l'intérieur d'une aire $\mathfrak{A}'$ contenant l'origine, un développement convergent

$$u_1 = u_0 + a_1 z' + a_2 z'^2 + \dots.$$

On en déduit

$$u_1 = u_0 + a_1 (z - z_0)^{\frac{1}{k}} + a_2 (z - z_0)^{\frac{2}{k}} + \dots, \qquad (1)$$

$(z-z_0)^{\frac{1}{k}}$ étant une des déterminations de la racine d'ordre k de $z-z_0$.

On obtient ainsi le *théorème de Puiseux* : *Les racines de* $f(z, u)=0$ *qui deviennent égales à* u_0 *pour* $z=z_0$, *se distribuent en un ou plusieurs systèmes circulaires représentés, dans une aire contenant* z_0, *par des développements convergents procédant suivant des puissances fractionnaires de* $z-z_0$.

Posons

$$F(z', u')=f(z_0+z'^k, u')=0 .$$

Entre les courbes $f=0$, $F=0$, nous avons une correspondance $(1, k)$ représentée par les équations

$$z=z_0+z'^k, \qquad u=u' .$$

Les groupes de k points qui, sur $F=0$, correspondent aux points de $f=0$, forment une série γ_k, engendrée par l'opération cyclique $\bar{z}=\varepsilon z'$, où $\varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{k}}$ est une racine primitive d'ordre k de l'unité.

Dans une aire $\mathfrak{A}'$ contenant l'origine, nous avons les développements convergents

$$u_1'=u_0+a_1\, z'+a_2\, z'^2+\dots ,$$
$$u_2'=u_0+a_1\,\varepsilon z'+a_2\,(\varepsilon z')^2+\dots ,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_k'=u_0+a_1\,\varepsilon^{k-1}z'+a_2\,(\varepsilon^{k-1}z')^2+\dots .$$

Lorsque le point (z', u') satisfait à l'un quelconque des développements précédents, le point (z, u) satisfait au développement (1). L'ensemble des valeurs $u_1, u_2, \dots, u_k$ ainsi obtenues constitue un *cycle* (Halphen) ou *branche* de la courbe $f=0$. Sur la courbe $F=0$, le point $z'=0$ est l'origine de k branches.

366. Application aux points doubles de la courbe $f(z, u)=0$. — Les points doubles de la courbe $f(z, u)=0$ sont des points critiques algébriques. Supposons que la courbe $f(z, u)=0$ possède un point double ; nous pouvons supposer sans restriction que celui-ci est l'origine des coordonnées et écrire

$$f(z, u)\equiv au^2+buz+cz^2+\varphi(z, u) ,$$

où a, b, c sont des constantes et où $\varphi(z, u)$ ne contient que des termes de degré supérieur au second.

Supposons en premier lieu que O soit un point double ordinaire, à tangentes distinctes; nous supposons donc

$$ac\neq 0 , \qquad b^2-4ac\neq 0 .$$

Il y a deux racines u_1, u_2 de $f(z, u)$ s'annulant pour $z=0$.

Posons $u=vz$ et remarquons que $\varphi(z, zv)$ est divisible par z^3. Après division par z^2, l'équation de la courbe devient

$$av^2+bv+c+z\psi(z, v)=0 .$$

Pour $z=0$, cette équation admet deux racines distinctes v_1, v_2 et dans une aire contenant l'origine, on a les développement convergents

$$v_1=v_1{}^0+a_{11}z+a_{12}z^2+\dots,$$
$$v_2=v_2{}^0+a_{21}z+a_{22}z^2+\dots.$$

On en déduit les développements convergents

$$u_1=u_1{}^0z+a_{11}z^2+a_{12}z^3+\dots,$$
$$u_2=u_2{}^0z+a_{21}z^2+a_{22}z^3+\dots.$$

Un point double ordinaire est l'origine de deux branches distinctes de la courbe.

Supposons maintenant que l'origine soit un point de rebroussement ordinaire de la courbe, la tangente de rebroussement étant $u=0$. On peut écrire

$$f(z, u)\equiv u^2+au^3+bu^2z+cuz^2+dz^3+\varphi(z, u) ,$$

a, b, c, d étant des constantes et $\varphi(z, u)$ un polynome ne contenant que des termes de degré supérieur au troisième. On doit avoir $d\neq 0$, car autrement le point O serait un tacnode pour la courbe.

Posons

$$z=z'^2 , \qquad u=vz'^3 .$$

Après division par z'^6, l'équation devient

$$v^2+d+z'\psi(z', v)=0 .$$

Pour $z'=0$, on a deux racines

$$v_1=\sqrt{-d} , \qquad v_2=-\sqrt{-d} ,$$

d'où, en posant $u_0=\sqrt{-d}$,

$$v_1=u_0+a_{11}z'+a_{12}z'^2+\dots,$$
$$v_2=-u_0+a_{21}z'+a_{22}z'^2+\dots.$$

On a donc

$$u_1=u_0\,z^{\frac{3}{2}}+a_{11}\,z^2+a_{12}\,z^{\frac{5}{2}}+\dots,$$
$$u_2=-u_0\,z^{\frac{3}{2}}+a_{21}\,z^2+a_{22}\,z^{\frac{5}{2}}+\dots.$$

Lorsque $z = \rho e^{i\theta}$ décrit un petit cercle de centre O, son argument θ augmente de 2π et $z^{\frac{3}{2}}$ change de signe. Par conséquent u_1 et u_2 sont permutées, on a

$$a_{11} = a_{21} = a_1 \,, \qquad a_{12} = a_{22} = a_2 \,, \; \ldots$$

et finalement

$$u = u_0 z^{\frac{3}{2}} + a_1 z^2 + a_2 z^{\frac{5}{2}} + \ldots \,.$$

Un point de rebroussement ordinaire est l'origine d'une seule branche de la courbe (cycle de période deux).

367. Application aux points de diramation. — On appelle *point de diramation* ou *point de ramification* un point simple de la courbe $f(z, u) = 0$ où la tangente est parallèle à l'axe des u.

Supposons que l'origine soit un point de diramation où la courbe $f(z, u) = 0$ a un contact d'ordre $p - 1$ avec la droite $z = 0$. On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0 \,, \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = 0 \,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0 \,, \ldots \qquad \frac{\partial^{p-1} f}{\partial u^{p-1}} = 0 \,.$$

L'équation de la courbe prend la forme

$$f(z, u) \equiv az + bu^p + zu\varphi_1(z, u) + \varphi_2(z, u) = 0 \,,$$

où a, b sont des constantes différentes de zéro et $\varphi_2(z, u)$ un polynome contenant z à la seconde puissance au moins et u à la puissance $p + 1$ au moins.

Posons

$$z = z'^p \,, \qquad u = vz' \,.$$

Après division par z'^p, l'équation de la courbe s'écrit

$$a + bv^p + z'\psi(z', v) = 0 \,.$$

Pour $z' = 0$, cette équation possède p racines

$$v_0 \,, \quad \varepsilon v_0 \,, \quad \varepsilon^2 v_0 \,, \ldots \,, \quad \varepsilon^{p-1} v_0 \,, \quad \left(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{p}}\right) .$$

La racine v_i se réduisant à $\varepsilon^i v_0$ pour $z' = 0$ donne, en série convergente dans une aire entourant l'origine,

$$v_i = \varepsilon^i v_0 + a_1 z' + a_2 z'^2 + \ldots \,.$$

On a donc

$$u_i = \varepsilon^i v_0 + a_1 z^{\frac{1}{p}} + a_2 z^{\frac{2}{p}} + \ldots \,.$$

Le point O *est l'origine d'une seule branche* (cycle de période p).

Lorsque $p=2$, le point de diramation est appelé point de diramation ordinaire.

368. Singularités polaires. — Supposons que $z=z_0$ annule $\varphi_0(z)$. Posons $u=\dfrac{1}{u'}$; l'équation s'écrit

$$\varphi_n(z)\,u'^n+\varphi_{n-1}(z)\,u'^{n-1}+\ldots+\varphi_1(z)\cdot u'+\varphi_0(z)=0\,. \qquad (1)$$

Supposons en premier lieu que l'on ait $\varphi_1(z_0)\neq 0$. Alors, l'équation (1) a une seule racine u_1' nulle pour $z=z_0$ et on a

$$u_1'=(z-z_0)^m[a_1+a_2(z-z_0)+\ldots]\,, \qquad (a_1\neq 0)\,.$$

Par suite,

$$u_1=\frac{A_1}{(z-z_0)^m}+\frac{A_2}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_{m-1}}{z-z_0}+P\,(z-z_0)\,,$$

où $P(z-z_0)$ est une série entière. La branche u_1 de u présente donc un pôle d'ordre m au point $z=z_0$.

Supposons maintenant que l'on ait

$$\varphi_1(z_0)=0\,,\quad \ldots,\quad \varphi_p(z_0)=0\,,\quad \varphi_{p+1}(z_0)\neq 0\,.$$

L'équation (1) possède p racines u_1', u_2', ..., u_p' se réduisant à 0 pour $z=z_0$. Le point z_0 est l'origine d'un certain nombre de branches. Considérons l'une de celles-ci, provenant d'un cycle de période k. On a un développement convergent de la forme

$$u'=(z-z_0)^{\frac{m}{k}}\left[a_1+a_2\,(z-z_0)^{\frac{1}{k}}+\ldots\right], \qquad (a_1\neq 0)\,.$$

On en déduit

$$u=\frac{A_1}{(z-z_0)^{\frac{m}{k}}}+\frac{A_2}{(z-z_0)^{\frac{m-1}{k}}}+\ldots$$
$$+\frac{A_{m-1}}{(z-z_0)^{\frac{1}{k}}}+P\left[(z-z_0)^{\frac{1}{k}}\right].$$

Nous avons ici une singularité, combinée avec un point critique algébrique.

369. Remarque. — Il reste à examiner le point $z=\infty$. Pour étudier ce point, on posera dans l'équation $z=\dfrac{1}{z'}$ et on sera ramené aux cas précédents. Le point $z=\infty$ peut être ordinaire, ou point critique algébrique, ou pôle, ou combinaison de ces deux derniers cas. Les développements correspondants procèdent suivant les puissances de $\frac{1}{z}$.

On voit que : *Une fonction algébrique a un nombre fini de points singuliers qui sont des points critiques algébriques, ou des pôles, ou des combinaisons des deux singularités précédentes.*

Ces points sont les racines des équations

$$\Delta(z)=0, \qquad \varphi_0(z)=0.$$

370. Théorème fondamental. — *Un chemin fermé du plan des z, réductible par déformation continue à un point sans traverser de points critiques algébriques, produit la substitution identique sur les déterminations de* u.

Soit γ un chemin du plan des z répondant aux conditions de l'énoncé (fig. 1). Considérons en un point A de γ une détermination de u, soit u_1 et déterminons par prolongement analytique la valeur de u_1 le long de γ, parcouru par exemple dans le sens positif ABCDA. Supposons que nous revenions en A avec une détermination u_2 de u différente de u_1. Menons la ligne BED. Le chemin ABCDA change u_1 en u_2 ; il en sera de même du chemin ABEDEBCDA et par conséquent de l'un au moins des chemins ABEDA, BCDEB. Recommençons la même opération sur ce chemin et ainsi de suite. Nous parviendrons finalement à un chemin fermé aussi petit que l'on veut, entourant un point non critique et produisant une permutation entre les déterminations u_1, u_2 de u. Cette conclusion est absurde, car dans le voisinage d'un point non critique, u_1 et u_2 sont uniformes.

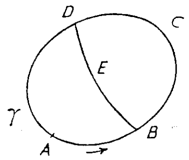

FIG. 1.

371. Théorème II. — *Une fonction analytique à* n *déterminations, ne possédant qu'un nombre fini de pôles et de points critiques algébriques, est une fonction algébrique.*

Soient u_1, u_2, ..., u_n les n déterminations d'une fonction analytique $u(z)$ n'admettant qu'un nombre fini de pôles et de points critiques algébriques.

Considérons une fonction symétrique $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ des déterminations de u. Lorsque le point z décrit un chemin fermé quelconque, φ revient à sa valeur initiale. D'autre part, lorsque z_0 est un pôle d'une (au moins) des déterminations de u, les développements de u_1, u_2, ..., u_n en séries procédant suivant les puissances de $z-z_0$, ne contiennent qu'un nombre fini de termes à exposants négatifs, la fonction uniforme

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \psi(z)$$

ne peut posséder que des pôles, en nombre fini. De même, le point $z=\infty$ est un point ordinaire ou un pôle pour $\psi(z)$. Il en résulte que la fonction $\psi(z)$ est rationnelle.

Les fonctions

$$u_1+u_2+\ldots+u_n\,, \quad u_1u_2+u_1u_3+\ldots+u_{n-1}u_n\,, \quad \ldots, \quad u_1u_2\ldots u_n$$

sont rationnelles et par conséquent u_1, u_2, ..., u_n sont les racines d'une équation algébrique de degré n, à coefficients rationnels en z.

372. Théorème III. — *Pour que la courbe* f(z, u) = 0 *soit irréductible, il faut qu'il existe, dans le plan des* z, *des circuits fermés permutant deux quelconques des déterminations de* u.

Supposons en effet qu'il ne soit pas possible de trouver un circuit fermé du plan des z permettant de passer de u_1 à l'une des déterminations u_{p+1}, u_{p+2}, ..., u_n de u. Alors, il n'est pas possible de trouver un circuit fermé faisant passer de u_2, u_3, ..., u_p à u_{p+1}, u_{p+2}, ..., u_n. Il en résulte que u_1, u_2, ..., u_p sont racines d'une équation de degré p en u, dont les coefficients sont rationnels en z. L'équation $f(z, u)=0$, de degré n, serait donc réductible.

373. Théorème IV. — *Pour que la courbe* f(z, u) = 0 *soit irréductible, il suffit qu'il existe, dans le plan des* z, *des circuits fermés permutant deux quelconques des déterminations de* u, *à moins que* f(z, u) *ne soit la puissance exacte d'un polynome irréductible.*

En effet, si le polynome $f(z, u)$ était le produit de deux polynomes $f_1(z, u)$, $f_2(z, u)$, il ne serait pas possible de passer, par un circuit fermé du plan des z, d'une valeur de u satisfaisant à $f_1(z, u)=0$, à une valeur de u satisfaisant à $f_2(z, u)=0$, à moins que ces deux courbes ne coïncident.

374. Groupe de monodromie. — Considérons la courbe irréductible $f(z, u)=0$, où $f(z, u)$ est de degré n en u. Lorsque le point z décrit un chemin fermé γ, les déterminations u_1, u_2, ..., u_n subissent une subtitution S. Lorsque z décrit le chemin γ en sens inverse, les déterminations de u subissent la substitution S^{-1}.

Soient γ_1, γ_2 deux chemins fermés issus du même point A et produisant sur les déterminations de u les substitutions S_1, S_2. Lorsque z partant de A, parcourt le chemin γ_1, puis le chemin γ_2, nous dirons que z parcourt le chemin $\gamma_1+\gamma_2$. Les déterminations de u subissent alors la substitution $S_1 \cdot S_2$.

On observera que si l'on déforme un chemin γ d'une manière continue, sans traverser de point critique algébrique, on ne modifie pas la substitution S.

Considérons l'ensemble de tous les chemins fermés pouvant être décrits par le point z dans son plan et l'ensemble des substitutions S correspondantes. Ce dernier possède les propriétés suivantes :

1° Le produit de deux substitutions de l'ensemble appartient à l'ensemble ;

2° L'inverse d'une substitution de l'ensemble appartient à l'ensemble.

Cet ensemble est donc un groupe, appelé *groupe de monodromie* de l'équation $f(z, u)=0$.

L'équation $f(z, u)=0$ étant irréductible, il est possible de trouver un chemin fermé permutant deux quelconques des déterminations de u, donc le groupe de monodromie est transitif.

Le groupe de monodromie possède les deux propriétés suivantes, que nous nous bornerons à énoncer :

1° Si une fonction rationnelle $F(u_1, u_2, \ldots, u_n, z)$ des n déterminations de u est invariante pour les substitutions du groupe de monodromie, c'est une fonction rationnelle de z ;

2° Si une fonction rationnelle $F(u_1, u_2, \ldots, u_n, z)$ est une fonction rationnelle de z, elle est invariante pour les substitutions du groupe de monodromie.

Le groupe de monodromie est en général distinct du groupe de Galois de l'équation $f(z, u)=0$; c'est un sous-groupe invariant de ce groupe.

§ 2. *Construction d'une surface de Riemann*

375. Remarque préliminaire. — Soit une courbe algébrique plane, irréductible, de genre p. On peut transformer birationnellement la courbe en une courbe plane C n'ayant que des points doubles ordinaires. On peut supposer sans restriction que la courbe C, d'ordre n, rencontre la droite de l'infini en n points distincts, en effectuant éventuellement une homographie. Cela étant, choisissons deux axes Oz, Ou satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Les axes Oz, Ou ne sont pas des directions asymptotiques de la courbe ;

2° L'axe Ou n'est pas parallèle à une tangente à la courbe ayant un contact d'ordre supérieur à l'unité avec celle-ci.

Soit alors

$$f(z, u)=0 \tag{1}$$

l'équation de la courbe C. Si d est le nombre des points doubles (ordinaires) de C, cette courbe possède

$$m = n(n-1) - 2d = 2(n+p-1)$$

tangentes parallèles à l'axe Ou.

L'équation (1) définit une fonction u à n valeurs de z, ayant comme points de diramation ordinaires les m points de rencontre de Oz avec les tangentes parallèles à Ou. Nous nous proposons de construire une surface, appelée surface de Riemann, sur laquelle la fonction $u(z)$ définie par l'équation (1) soit uniforme. La construction employée est due à Clebsch et Lüroth.

376. Préparation du plan des z. — Marquons, dans le plan des z, les points de diramation $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Choisissons un point O tel qu'une droite tournant autour de O dans le sens direct, rencontre successivement tous les points critiques, mais un seul à la fois. Nous supposerons ces points numérotés de telle sorte qu'on les rencontre successivement dans l'ordre naturel.

Traçons un petit cercle autour du point a_i et joignons-le par une droite au point O. Soient A le point de rencontre de la droite et du cercle, B, C deux points de celui-ci tels que ABC indique le sens direct. Le chemin OABCAO, parcouru dans le sens direct, est appelé lacet. Lorsque le point z parcourt le lacet relatif au point a_i, deux déterminations de u sont échangées.

Traçons les lacets relatifs aux m points $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et supposons que le premier lacet Oa_1 échange les déterminations u_1, u_2. Partons de O avec la valeur u_1 ; après avoir parcouru le premier lacet, nous sommes en O avec la valeur u_2. Parcourons successivement les lacets suivants jusqu'au moment où nous reviendrons en O avec la valeur u_1. Ceci est certainement possible, car la fonction $u(z)$ est uniforme à l'extérieur d'un cercle de rayon suffisamment grand pour comprendre à l'intérieur tous les points critiques. En effet, d'après la position choisie pour la courbe dans le plan des z, le point $z = \infty$ est ordinaire.

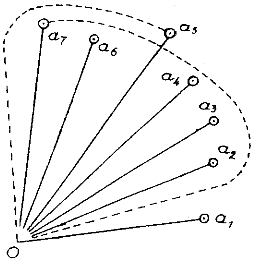

FIG. 2.

Supposons, pour fixer les idées, que le lacet 7 nous ramène u_1 en O (fig. 2). Soient u_2, u_3 les déterminations échangées par le lacet 2 ; u_3, u_4, celles qui sont échangées par le lacet 3 ; u_5, u_7 par le lacet 4 ; u_1, u_5 par le lacet 5 ; u_3, u_4 par le lacet 6 ; u_1, u_3 par le lacet 7. Seul le lacet 5, entre les lacets 1 et 7, change la détermination de u_1.

Remplaçons le lacet 7 par le lacet en traits interrompus (fig. 2). Le nouveau lacet peut se ramener, par déformation continue, au lacet

$$Oa_2 + Oa_3 + Oa_4 + Oa_6 + Oa_7 - Oa_6 - Oa_4 - Oa_3 - Oa_2 .$$

Il échange entre elles les déterminations de u_1, u_2.

Remplaçons maintenant le lacet 5 par le second lacet en traits interrompus. Ce nouveau lacet est équivalent au lacet $Oa_7 + Oa_6 + Oa_5 - Oa_6 - Oa_7$; il laisse donc fixe les déterminations u_1, u_2.

Continuons à parcourir, dans le sens positif, à partir du lacet 7, les lacets restants, en partant toujours de la détermination u_1 et en envisageant sa permutation avec u_2. Nous obtiendrons finalement un nombre pair de lacets permutant u_1 et u_2.

Faisons maintenant abstraction des lacets ainsi obtenus et recommençons l'opération sur les lacets permutant u_2, u_3, et ainsi de suite. Nous obtiendrons ainsi, en parcourant les lacets dans le sens direct, un nombre pair de lacets permutant u_1 et u_2, un nombre pair de lacets permutant u_2 et u_3, ..., un nombre pair de lacets permutant u_{n-1} et u_n.

Nous numéroterons ces nouveaux lacets 1, 2, 3, ..., m.

377. Construction de la surface de Riemann. — Imaginons n feuillets plans superposés au plan des z et attribuons à chacun d'eux une des n déterminations de la fonction algébrique u. Supposons que les $2\,k_1$ premiers lacets permutent u_1 et u_2 ; les $2\,k_2$ suivants, u_2 et u_3 ; ... ; les $2\,k_{n-1}$ derniers, u_{n-1} et u_n. Nous désignerons par a_1, a_2, ..., a_m les points critiques placés dans le nouvel ordre, nous avons

$$m = 2(k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1}) .$$

Traçons des lignes a_1a_2, a_3a_4, ..., $a_{m-1}a_m$ ne se coupant pas deux à deux.

Lorsque le point z décrit un chemin fermé dans le plan u_1 par exemple, sans franchir l'une des lignes a_1a_2, a_3a_4, ..., $a_{2k_1-1}a_{2k_1}$, il revient à son point de départ avec la valeur a_1. On obtiendra le même résultat avec la valeur u_2 pour un chemin fermé ne franchissant pas les $k_1 + k_2$ premières lignes a_1a_2, a_3a_4, ... Et ainsi de suite. Appelons pour abréger γ_1 les k_1 premières lignes a_1a_2, ..., γ_2 les k_2 lignes suivantes, ..., γ_{n-1} les k_{n-1} dernières lignes. Coupons le plan u_1 le long des lignes γ_1 ; le plan u_2 le long des lignes γ_1, γ_2 ; le plan u_3 le long des lignes γ_2, γ_3 ; ..., le plan u_{n-1} le long des lignes γ_{n-2}, γ_{n-1} ; enfin le plan u_n le long des lignes γ_{n-1}.

Considérons maintenant un chemin partant de O, franchissant la coupure a_1a_2 et revenant en O. Soient z_1 un point du chemin voisin de la coupure avant le franchissement de celle-ci ; z_2 un point du chemin voisin de la coupure après le franchissement de celle-ci (fig. 3). Si nous partons de O avec la détermination u_1, après avoir parcouru le chemin Oz_1z_2O, nous revenons en O avec la détermination u_2. Par conséquent, si nous partons de O vers z_1 dans le sens direct avec la détermination u_1 et de O vers z_2 dans le sens inverse avec la détermination u_2, les valeurs en z_1, z_2 seront égales. Cela étant, soudons en croix les bords des plans u_1, u_2 le long de la coupure

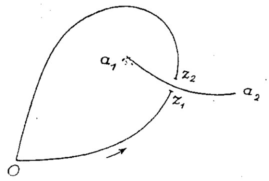

FIG. 3.

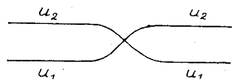

FIG. 4.

a_1a_2 (fig. 4). Si nous partons de O avec la détermination u_1, c'est-à-dire dans le plan u_1, au moment de franchir la coupure, nous passons dans le plan u_2 et revenons en O avec la détermination u_2. Si au contraire nous partons de O avec la détermination u_2, donc dans le plan u_2, en franchissant la coupure, nous passons dans le plan u_1 et revenons en O avec la détermination u_1. Ceci est vrai que le chemin soit parcouru dans le sens direct ou non.

Ce raisonnement peut se répéter pour toutes les coupures γ. Nous souderons les plans u_i, u_{i+1} en croix le long des coupures permutant les valeurs u_i, u_{i+1}.

Nous aurons ainsi construit une surface connexe, formée de n feuillets soudés en croix : u_1 et u_2 le long des coupures γ_1 ; u_2 et u_3 le long des coupures γ_2 ; ... ; u_{n-1} et u_n le long des coupures γ_{n-1}. A un point de cette surface connexe correspond une valeur bien déterminée de la fonction algébrique $u(z)$ définie par $f(z, u) = 0$; le passage d'une des déterminations de u à une autre se fait d'une manière continue. Il y a une correspondance biunivoque entre les points de la surface connexe à n feuillets et les couples de quantités (z, u), réelles ou complexes, satisfaisant à l'équation $f(z, u) = 0$.

Le concept de cette surface connexe à n feuillets est dû à Riemann et cette surface est appelée *surface de Riemann*.

378. Le disque à *p* trous comme surface de Riemann. — Passons de la surface de Riemann formée par n feuillets plans à l'ensemble de n sphères concentriques par projections stéréographique. Désignons encore ces sphères par u_1, u_2, ..., u_n, la première étant supposée à l'extérieur. Déformons ensuite ces sphères, sans déchirures ni duplicature, de manière à conserver la correspondance biunivoque, de telle sorte que les coupures γ_1, γ_2, ..., γ_{n-1} viennent se placer sur un même grand cercle. Remplaçons la sphère u_2 par sa symétrique par rapport au plan de ce grand cercle. Les soudures entre les sphères u_1, u_2 le long des coupures γ_1 se font non plus en croix, mais directement d'une lèvre à la lèvre superposée. Il en est de même des soudures entre les sphères u_2, u_3 le long des coupures γ_2.

Nous pouvons élargir les coupures γ_1 de manière à les remplacer par des cylindres unissant les sphères u_1, u_2. Elargissons encore une de ces coupures de manière, en déformant les sphères u_1, u_2, à en faire sortir l'ensemble des sphères u_3, u_4, ..., u_n. On peut imaginer que les sphères u_1, u_2 ont été remplacées par un disque à $k_1 - 1$ trous, la sphère u_1 étant devenue la face inférieure, la sphère u_2 la face supérieure. Il y a k_2 tubes soudés d'une part à la face supérieure u_2 du disque et d'autre part à la sphère u_3.

Remplaçons la sphère u_4 par sa symétrique par rapport au plan du grand cercle contenant les coupures γ_3 et recommençons, sur les sphères u_3, u_4, les opérations précédentes. Et ainsi de suite.

On parviendra finalement à une surface, obtenue par déformation continue, sans déchirure ni duplicature, de la surface primitive, formée d'un disque à $k_1 - 1$ trous, joint par k_2 tubes à un disque à $k_3 - 1$ trous, joint par k_4 tubes à un disque à $k_5 - 1$ trous, etc. Si n est pair, l'ensemble sera terminé par un disque à k_{n-1} trous ; si n est impair, par une sphère (face extérieure).

Par déformation continue, nous pouvons remplacer les deux premiers disques, joints par k_2 tubes, par un seul disque ayant $k_1 + k_2 + k_3 - 2$ trous, et ainsi de suite. On parviendra finalement à un disque possédant

$$k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1} - (n-1) = \frac{1}{2} m - (n-1) = p$$

trous. Par conséquent :

Il existe une correspondance biunivoque entre les points de la face extérieure d'un disque à p *trous et les couples de valeurs* (z, u) *satisfaisant à l'équation* f(z, u) = 0, *c'est-à-dire les points réels et complexes d'une courbe de genre* p.

Observons que l'on peut remplacer le disque à p trous par déformation continue, par une sphère possédant p anses.

379. Rétrosections. — En déformant d'une manière continue un disque à p trous, nous pouvons le transformer en un tore percé de $p - 1$ trous. Nous désignerons par σ le cercle de gorge et par τ un cercle méridien. Pour fixer les idées, nous supposerons que les $p-1$ trous sont de petits cylindres de révolution dont les axes sont perpendiculaires au plan du cercle de gorge, le plan du cercle méridien τ ne rencontrant aucun de ces cylindres.

Coupons le tore le long du cercle τ et appelons τ', τ'' les lèvres de la coupure. Nous pouvons déformer le tore d'une manière continue de manière à le transformer en un cylindre droit dont les bases sont les cercles τ', τ''. Le cercle σ est devenu une génératrice de ce cylindre. Coupons le cylindre le long de σ et soient σ', σ'' les lèvres de la coupure, que nous écarterons légèrement.

Si nous revenons par déformation continue au disque à p trous, nous aurons remplacé un trou par un contour fermé que l'on peut parcourir dans un sens déterminé, par exemple en parcourant successivement σ', τ', σ'', τ''. Au chemin σ correspond un chemin entourant un trou du disque et au chemin τ, un chemin contournant le bord de ce trou et le bord du disque

L'ensemble des chemins σ, τ porte le nom de rétrosection (Rückerschnitt). Au parcours σ', τ', σ'', τ'' correspondent des orientations de ces chemins.

Sur une surface de Riemann de genre p, disque à p trous, il existe p rétrosections que nous désignerons par σ_1, τ_1 ; σ_2, τ_2 ; ... ; σ_p, τ_p.

380. Transformation d'une surface de Riemann en une aire simplement connexe. — Partons de la surface de Riemann constituée par un disque à p trous et traçons sur cette surface les p rétrosections. Menons des lignes γ_1 joignant un point de σ_1 à un point de σ_2, γ_2 joignant un point de σ_2 à un point de σ_3, ..., γ_{p-1} joignant un point de σ_{p-1} à un point de σ_p. Nous supposerons que ces lignes ne se coupent pas deux à deux, ne coupent pas les lignes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ ni les lignes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ lorsqu'elles ne doivent pas les réunir. Coupons la surface de Riemann le long des chemins $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{p-1}$.

Nous pouvons alors développer la surface sur un plan ; elle recouvrira une portion $\mathcal{A}$ de ce plan, limitée par un contour K qui correspond aux lèvres des différentes coupures faites dans le disque. Ce contour K peut être par conséquent parcouru d'une manière continue et il est fermé.

L'aire $\mathcal{A}$, limitée au contour K, est en correspondance biunivoque avec la surface de Riemann et par conséquent avec l'ensemble des points réels et imaginaires de la courbe $f(z, u)=0$.

Une coupure allant d'un point à un autre du contour K partage l'aire $\mathcal{A}$ en deux parties, donc $\mathcal{A}$ est une aire simplement connexe. Tout chemin fermé, tracé dans $\mathfrak{A}$ et ne se coupant pas, peut se réduire à un point par déformation continue, sans franchir le bord K.

381. Réduction des cycles tracés sur une surface de Riemann. — Un chemin fermé, orienté, tracé sur une surface de Riemann, porte le nom de *cycle*. Les p rétrosections sont formées de $2p$ cycles qui jouent un rôle fondamental.

Un cycle A, parcouru dans le sens positif, est dénoté par A ; s'il est parcouru dans le sens négatif, il est dénoté par $-$A. Si k est un entier, le symbole kA signifie que le cycle A est parcouru k fois dans le sens positif si k est positif ; dans le sens négatif, si k est négatif.

Deux cycles A, B dont l'un peut se réduire à l'autre par déformation continue sans sortir de la surface, sont dits *homologues*, s'ils ont même orientation. On écrit

$$A \sim B\,.$$

En particulier, si un cycle A peut se réduire à un point sans sortir de la surface, est dit homologue à zéro ; on écrit $A \sim 0$.

Si deux cycles A, B sont réductibles l'un à l'autre par déformation continue, mais sont d'orientations opposées, on écrit $A \sim -B$ ou $A + B \sim 0$.

Soient maintenant A, B deux cycles ne se rencontrant pas. Remplaçons B par un cycle B′ homologue, mais rencontrant A en un seul point P (par exemple, les cycles A, B′ peuvent se toucher en P). Partons d'un point O de A et parcourons ce cycle dans le sens positif jusqu'en P. Sans franchir ce point, parcourons ensuite B′ ; ce parcours sera fait dans le sens positif ou négatif. Lorsque l'on aura atteint P, parcourons A jusqu'en O sans franchir P. Le nouveau cycle ainsi parcouru sera appelé $A + B$ si B′ a été parcouru dans le sens positif, $A - B$ dans le cas opposé.

Ces définitions donnent un sens précis au symbole

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k\,,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sont des entiers positifs ou négatifs, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ des cycles donnés.

k cycles seront dits indépendants s'il n'est pas possible de trouver une combinaison linéaire à coefficients entiers, non tous nuls, de ces cycles, homologue à zéro. Dans le cas opposé, ils sont dit dépendants.

Les $2p$ cycles des rétrosections d'une surface de genre p sont indépendants.

THÉORÈME. — *Sur une surface de Riemann de genre* p, *tout cycle est homologue à une combinaison linéaire, à coefficients entiers, des* 2 p *cycles formant les rétrosections.*

Considérons un cycle γ tracé sur la surface de Riemann et rencontrant un certain nombre de fois le cycle σ_1. Déformons γ de manière que les points d'intersection du nouveau cycle avec σ_1 soient tous confondus. Ce cycle est la somme d'un cycle ne rencontrant plus σ_1 augmenté d'un certain nombre de fois le cycle τ_1. Opérons de même vis-à-vis de $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_p$. Il restera un cycle ne rencontrant plus $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$, augmenté d'une combinaison linéaire des cycles $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$. Le premier cycle se réduit à une combinaison linéaire des cycles $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ et on aura finalement

$$\gamma \sim \lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 + \ldots + \lambda_p\sigma_p + \mu_1\tau_1 + \mu_2\tau_2 + \ldots + \mu_p\tau_p,$$

les λ et les μ étant des entiers.

§ 3. *Fonctions uniformes sur une surface de Riemann*

382. Préliminaires. — Soient R la surface de Riemann à n feuillets correspondant à l'équation $f(z, u) = 0$ et $v = \psi(z, u)$ une fonction uniforme sur cette surface. A un point (z, u) de R correspond une seule valeur de v, par conséquent à une valeur de z correspondent n valeurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de v, homologues des n valeurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de u.

Considérons tout d'abord un point z_0, à distance finie, qui ne soit pas un point de diramation. Choisissons en ce point une détermination de u, par exemple u_1. Si la fonction $\psi(z, u_1)$ est développable, dans le domaine de z_0, en une série de puissances entières et positives de $z - z_0$, la fonction v sera appelée régulière au point (z_0, u_1) de R ; cette fonction sera donc finie et continue en ce point. Si la fonction $v = \psi(z, u_1)$ est développable en série de Laurent, le point (z_0, u_1) sera un pôle d'ordre m ou un point singulier essentiel de la fonction v suivant que la suite des puissances entières et négatives de $z - z_0$ s'arrêtera au m^e terme ou ne s'arrêtera pas.

Le point à l'infini du plan des z qui, d'après les hypothèses faites plus haut, n'est pas un point de diramation, donne lieu aux mêmes définitions, la variable étant $\frac{1}{z}$.

Supposons maintenant que z_0 soit un point de diramation, ordinaire d'après les hypothèses faites. Dans le voisinage de ce point, origine d'un cycle du second ordre, u est développable en série de puissances de la variable $(z - z_0)^{\frac{1}{2}}$. Nous utiliserons encore les définitions précédentes lorsque la variable indépendante est $z' = (z - z_0)^{\frac{1}{2}}$.

383. Théorème. — *Toute fonction uniforme* $v(z)$ *sur la surface de Riemann, peut se mettre sous la forme*

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1} ;$$

où les α *sont des fonctions uniformes de* z.

D'après l'observation faite plus haut, on a en effet

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_1^2 + \dots + \alpha_{n-1} u_1^{n-1} , \\ v_2 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_2 + \alpha_2 u_2^2 + \dots + \alpha_{n-1} u_2^{n-1} , \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_n &= \alpha_0 + \alpha_1 u_n + \alpha_2 u_n^2 + \dots + \alpha_{n-1} u_n^{n-1} . \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{vmatrix} v & 1 & u & u^2 & \dots & u^{n-1} \\ v_1 & 1 & u_1 & u_1^2 & \dots & u_1^{n-1} \\ v_2 & 1 & u_2 & u_2^2 & \dots & u_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_n & 1 & u_n & u_n^2 & \dots & u_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0 .$$

Dans cette équation, le coefficient de v est le déterminant de Vandermonde ; il est donc différent de zéro, sauf aux points de diramation. Le coefficient de u^r, divisé par celui de v, est une fonction uniforme de z, car lorsque z décrit un circuit fermé, u_1, u_2, ..., u_n subissent les mêmes permutations que v_1, v_2, ..., v_n. Les coefficients α_0, α_1, ..., α_{n-1} sont donc bien des fonctions uniforme de z.

384. Extension des théorèmes de Cauchy. — Considérons une aire $\mathcal{A}$ connexe sur la surface de Riemann R, dans laquelle la fonction $v(z)$ soit partout régulière, ainsi que sur le contour C de cette aire.

Si l'aire $\mathcal{A}$ appartient à un seul feuillet de R, on, a, d'après le théorème de Cauchy dans le plan,

$$\int_C v dz = 0 .$$

Si l'aire $\mathcal{A}$ appartient à plusieurs feuillets de R, on peut la décomposer en plusieurs aires partielles appartenant chacune à un feuillet. Le théorème de Cauchy est applicable à chacune des aires partielles et par conséquent à l'aire totale.

La notion de résidu s'étend également à la surface de Riemann. Si le point z_0 n'est pas un point de diramation et à distance finie, le résidu de $v(z)$ sera le coefficient de $(z - z_0)^{-1}$ dans le développement de $v(z)$. Si le point z_0 est à l'infini, le résidu sera le coefficient de z^{-1}, changé de signe, dans le développement de v.

Supposons maintenant que z_0 soit un point de diramation, ordinaire, et, pour fixer les idées, un point où les déterminations u_1, u_2 soient échangées. Traçons, sur la surface de Roemann R, une courbe fermée entourant z_0. Cette courbe sera en partie sur le feuillet u_1, en partie sur le feuillet u_2. Soient s ce chemin, s_1 la partie qui se trouve dans le plan u_1, s_2 celle qui se trouve dans le plan u_2 (fig. 5). Prenons comme variable indépendante $z' = (z - z_0)^{\frac{1}{2}}$ et le développement en série de $v(z, u)$ procédant suivant les puissances entières de z'. Le résidu sera, par définition,

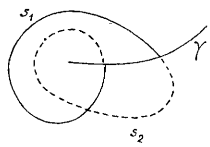

FIG. 5.

$$\frac{1}{2\,i\pi}\int_s vdz = \frac{1}{2\,i\pi}\int_{s_1} vdz + \frac{1}{2\,i\pi}\int_{s_2} vdz\,.$$

Désignons par s_1' le chemin décrit par z' lorsque z décrit s_1 et par s_2' le chemin décrit par z' décrit s_2. Observons que quand z décrit s_1, son argument varie de 0 à 2π et que par conséquent, l'argument de z', lorsque ce point décrit s_1', varie de 0 à π. Il en est de même lorsque z' décrit s_2'. Lorsque z' décrit $s' = s_1' + s_2'$, l'argument de z' varie de 0 à 2π. On a

$$\int_{s_1} v\,(z\,, u)\;dz = 2\int_{s_1'} v\,(z_0 + z'^2, u)\;z'dz'\,,$$

$$\int_{s_2} v\,(z\,, u)\;dz = 2\int_{s_2'} v\,(z_0 + z'^2, u)\;z'dz'\,,$$

donc

$$\int_{s} v\,(z\,, u)\;dz = 2\int_{s'} v\,(z_0 + z'^2, u)\;z'dz'\,.$$

Si le développement de $v(z_0 + z'_2, u)$ contient un terme $\frac{A}{z'^2}$, on a

$$\int_{s} v\,(z\,, u)\;dz = 4\,i\pi\,A\,.$$

Il en résulte que le résidu au point de diramation z_0 est le double du coefficient de $(z - z_0)^{-1}$ dans le développement de $v(z, u)$.

De ce qui précède, on déduit l'analogue du théorème de l'indicateur logarithmique de Cauchy sur la surface de Riemann.

Considérons, sur la surface de Riemann R, une aire $\mathcal{A}$ ne contenant en son intérieur que des pôles (en nombre fini) de la fonction $v(z, u)$. Il suffira d'examiner les singularités de cette fonction aux points de diramation.

Supposons qu'en un point de diramation z_0, $v(z, u)$ ait un zéro d'ordre q. On aura, dans le voisinage de ce point

$$v = (z - z_0)^{\frac{q}{2}} \left[a_0 + a_1 (z - z_0)^{\frac{1}{2}} + a_2 (z - z_0) + \dots \right],$$

où $a_0 \neq 0$. On en déduit

$$\frac{v'}{v} = \frac{q}{2(z - z_0)} + \mathrm{P}\left[(z - z_0)^{\frac{1}{2}} \right],$$

P étant le symbole d'une série entière. Le résidu en z_0 est $2\,\frac{q}{2} = q$.

Supposons maintenant qu'en un point de diramation z_0, la fonction $v(z, u)$ ait un pôle d'ordre q. On a

$$v = (z - z_0)^{-\frac{q}{2}} \left[a_0 + a_1 (z - z_0)^{\frac{1}{2}} + \dots \right],$$

d'où

$$\frac{v'}{v} = -\frac{q}{2(z - z_0)} + \mathrm{P}\left[(z - z_0)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Le résidu est $-2\,\frac{q}{2} = -q$.

Observons que, contrairement à ce qui se passe dans le plan (surface de Riemann de genre zéro), la dérivée logarithmique de v peut avoir un pôle en un point régulier de v, ce point étant nécessairement un point de diramation. Si l'on a en effet

$$v = a_0 + a_1 (z - z_0)^{\frac{1}{2}} + a_2 (z - z_0) + \dots,$$

il vient

$$\frac{v'}{v} = (z - z_0)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{P}\left[(z - z_0)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Le résidu est nul.

On conclut de ce qui précède que si C est le contour de l'aire $\mathcal{A}$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{C}} \frac{v'}{v}\, dz = \mathrm{N}_0 - \mathrm{N}_\infty,$$

N_0 étant le nombre des zéros, N_∞ celui des pôles de la fonction $v(z, u)$ dans l'aire $\mathcal{A}$, chacun d'eux étant compté avec son degré de multiplicité.

385. Théorème. — *Une fonction analytique uniforme sur toute la surface de Riemann, ne possédant que des singularités polaires, est une fonction rationnelle de* z *et de* u.

Soit

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \ldots + \alpha_{n-1} u^{n-1}$$

une fonction analytique uniforme sur toute la surface de Riemann R, ne possédant que des pôles. $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ sont des fonctions uniformes de z.

Les développements en séries procédant suivant les puissances de $z - z_0$ ou de z^{-1} des n déterminations $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de $v(z, u)$ ne peuvent posséder par hypothèse qu'un nombre fini de puissances entières négatives, donc il en sera de même des développements en séries des fonctions $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, d'après les expressions de ces fonctions données plus haut (n° 383). Il en résulte que ces fonctions sont rationnelles. Par conséquent $v(z, u)$ est une fonction rationnelle de z, u.

386. Théorème. — *Une fonction rationnelle de* z *et de* u, *privée de singularités polaires, sur une surface de Riemann, est une constante.*

Soient $v(z, u)$ une fonction rationnelle de z, u et $v_1, v_2, \ldots, v_n$ les n déterminations de cette fonction. Les fonctions

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n,$$

$$v_1 v_2 + v_1 v_3 + \ldots + v_{n-1} v_n, \quad \ldots, \quad v_1 v_2 \ldots v_n$$

sont des fonctions rationnelles de z privées de pôles, donc des constantes. Il en résulte que v est une constante.

387. Conséquence du théorème précédent. — Il résulte des théorèmes précédents, comme dans le plan, que la somme des résidus de v aux points singuliers et au point $z = \infty$, est nulle. La dérivée logarithmique $\frac{v'}{v}$ d'une fonction rationnelle étant d'autre part une fonction rationnelle, on voit que :

Le nombre des zéros et celui des pôles d'une fonction rationnelle, comptés avec leurs degrés de multiplicité, sur une surface de Riemann, sont égaux.

Si k est une constante, le nombre des zéros de la fonction rationnelle $v - k$ est indépendant de k. Ce nombre est appelé ordre de la fonction rationnelle.

Deux fonctions rationnelles sur une surface de Riemann, ayant les mêmes zéros et les mêmes pôles, avec les mêmes degrés de multiplicité, ne diffèrent que par un facteur constant.

388. Inégalité de Riemann. — Considérons la surface de Riemann rendue simplement connexe par des coupures (n° 380). Soient K son contour, C un circuit fermé ne rencontrant pas le contour K et $\mathcal{A}$ l'aire entourée par C.

Posons $z = x + iy$ et soit $v = P(x, y) + iQ(x, y)$ une fonction analytique de z dans l'aire $\mathcal{A}$ et sur le contour C. La formule de Green donne

$$\int\int_a \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = -\int_C^P \frac{dP}{dn} ds\,,$$

ds étant l'élément d'arc de C et la dérivée

$$\frac{dP}{dn} = \frac{\partial P}{\partial x} \text{ cas } (\widehat{x, n}) - \frac{\partial P}{\partial y} \sin (\widehat{y, n})$$

étant la dérivée de P par rapport à la normale n à C, dirigée vers l'intérieur de l'aire.

On a

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}\,,$$

d'où

$$\frac{dQ}{ds} = -\frac{dP}{dn}\,.$$

On en conclut

$$\int_C P dQ = \int\int_a \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2\right] dxdy\,.$$

Le second membre est essentiellement positif ou nul et n'est nul que si P et Q se réduisent à des constantes. Ce cas exclu, on a donc

$$\int_C P dQ > 0\,.$$

Cette inégalité sera utile dans l'étude des intégrales abéliennes.

CHAPITRE V

INTÉGRALES ABÉLIENNES

§ 1. *Propriétés générales*

389. Définition et classification. — On appelle *intégrale abélienne* attachée à la courbe $f(z, u) = 0$ une intégrale

$$\int_{z_0, u_0}^{z_1, u_1} \varphi(z, u)\, dz,$$

où $\varphi(z, u)$ est une fonction rationnelle de z, u et (z_0, u_0), (z_1, u_1) les extrémités du chemin tracé sur la surface de Riemann, le long duquel s'effectue l'intégration.

On écrira généralement (z, u) au lieu de (z_1, u_1) et l'intégrale sera considérée comme fonction de sa limite supérieure z.

La fonction $\varphi(z, u)$ possède nécessairement des pôles ; soit (a, b) un de ces pôles. Dans le voisinage de a, $\varphi(z, u)$ est développable en série de puissance de $z - a$, ou de $\frac{1}{z}$ si $a = \infty$, ou de $(z - a)^{\frac{1}{2}}$ si a est un point de diramation. L'intégration peut introduire des termes en $\operatorname{Log}(z - a)$, ou en $\operatorname{Log} z$. Nous dirons que l'intégrale est de *seconde espèce* s'il n'y a pas de terme en $\operatorname{Log}(z - a)$ ou en $\operatorname{Log} z$; qu'elle est de *troisième espèce* dans le cas contraire.

Pour qu'une intégrale abélienne soit de seconde espèce, il faut que la fonction $\varphi(z, u)$ ait des résidus nuls en chaque pôle. La valeur d'une intégrale de seconde espèce, le long de tout cycle homologue à zéro, est donc nulle. Réciproquement, si la valeur d'une intégrale abélienne le long de tout cycle homologue à zéro est nulle, les résidus de la fonction $\varphi(z, u)$ sont nuls en chaque point et l'intégrale est de seconde espèce.

390. Remarque. — Supposons qu'une intégrale abélienne, calculée le long d'un cycle quelconque, homologue à zéro ou non, soit nulle. Considérons deux chemins γ, γ' allant du point (z_0, u_0) en posant (z, u).. Quels que soient ces chemins, on a

$$\int_{\gamma-\gamma'} \varphi\, dz = \int_{\gamma} \varphi\, dz - \int_{\gamma'} \varphi\, dz = 0\ .$$

Par conséquent, si l'on considère l'intégrale comme fonction de sa limite supérieure, on obtient une fonction uniforme n'ayant que des pôles et par suite rationnelle.

Inversement, si $\psi(z, u)$ est une fonction rationnelle, elle peut être considérée comme l'intégrale de la fonction

$$\varphi(z, u) = \frac{d\psi}{dz} = \frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{du}{dz} = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial u} - \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}}\ .$$

Une fonction rationnelle est une intégrale abélienne de seconde espèce.

391. Périodes cycliques. — Reprenons, pour une intégrale de seconde espèce quelconque, deux chemins γ, γ' allant du point (z_0, u_0) au point (z, u). Nous avons

$$\gamma - \gamma' \sim \Sigma(\lambda_i \sigma_i + \mu_i \tau_i)\ , \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)\ ,$$

les λ et les μ étant des entiers.

Appelons α_i la valeur de l'intégrale le long du cycle τ_i et β_i sa valeur le long de σ_i. De l'homologie précédente, on déduit

$$\int_{\gamma} \varphi dz = \int_{\gamma'} \varphi dz + \Sigma\,(\lambda_i\, \beta_i + \mu_i\, \alpha_i)\ .$$

Les valeurs d'une intégrale de seconde espèce en un point de la surface de Riemann s'obtiennent donc de l'une d'entre elles en lui ajoutant une combinaison linéaire à coefficients entiers, positifs, négatifs ou nuls, de ses valeurs α_i, β_i le long des $2p$ cycles de rétrosections.

Les quantités α_i, β_i sont appelées *périodes cycliques* ou plus simplement *périodes* de l'intégrale.

392. Périodes polaires. — Considérons maintenant une intégrale de troisième espèce et un cycle γ, homologue à zéro, entourant tous les points singuliers logarithmiques de l'intégrale. Entourons chacun de ces points d'un petit cercle et soit $2\, i\pi\rho_j$ la valeur de l'intégrale le long du j^e petit cercle ; ρ_j est donc le résidu de la fonction à intégrer $\varphi(z, u)$ au j^e point singulier. Le cycle γ peut se réduire, par déformation continue, à une combinaison de ces petits cercles et on a, pour la valeur de l'intégrale,

$$\int_\gamma \varphi dz = 2\, i\pi\, \Sigma\, \nu_j\, \rho_j\,,$$

les ν_j étant des entiers positifs, négatifs ou nuls.

Les quantités $2\, i\pi\rho_j$ sont les *périodes polaires* de l'intégrale.

Reprenons les chemins quelconques γ, γ' allant du point (z_0, u_0) au point (z, u), considérés plus haut. Nous avons

$$\int_\gamma \varphi dz = \int_{\gamma'} \varphi dz + \Sigma\, (\lambda_k\, \beta_k + \mu_k\, \alpha_k) + 2\, i\pi\, \Sigma\, \nu_j\, \rho_j\,.$$

On a donc actuellement des périodes cycliques α_k, β_k et des périodes polaires ρ_j. Les valeurs d'une intégrale de troisième espèce se déduisent donc de l'une d'entre elles en ajoutant une combinaison linéaire à coefficients entiers des périodes cycliques et polaires.

Considérons maintenant un circuit γ entourant l'ensemble des points logarithmiques de l'intégrale, réductible, par déformation continue, à l'ensemble des petits cercles dont on a entouré ces points. La valeur de l'intégrale, prise le long de γ, est $2\, i\pi\Sigma\rho_j$. Plaçons-nous sur la surface de Riemann rendue simplement connexe, de contour K (n° 380). Ce contour est formé des courbes que l'on a appelées σ_k', σ_k'', τ_k', τ_k''. Par déformation continue, le contour γ peut être amené en coïncidence avec le contour K. Or, l'intégrale, le long de K, est évidemment nulle. Par conséquent, on a $\Sigma\rho_j = 0$.

La somme des périodes polaires d'une intégrale abélienne de troisième espèce, est nulle.

§ 2. *Intégrales abéliennes de première espèce*

393. Définition. — Nous avons appelé intégrale de seconde espèce une intégrale ne possédant que des pôles. Une intégrale abélienne étant une fonction multiforme, on ne peut affirmer à priori qu'il n'y a pas d'intégrale de seconde espèce dépourvue de pôles et restant par conséquent finie sur toute la surface. Nous admettons provisoirement qu'il existe de telles intégrales ; elles seront appelées *intégrales de première espèce.* On démontrera plus loin qu'elles existent effectivement.

394. Inégalité fondamentale. — Considérons une intégrale de première espèce, $\int \varphi(z, u)\, dz$, restant donc finie sur toute la surface et posons

$$z = x + iy\,, \qquad \int \varphi(z, u)\, dz = \mathrm{P}(x, y) + i\mathrm{Q}(x, y)\,.$$

Soient $\alpha_k = \alpha_k' + i\alpha_k''$ la valeur de l'intégrale le long du cycle τ_k et $\beta_k = \beta_k' + i\beta_k''$ sa valeur le long du cycle σ_k.

Pour transformer la surface de Riemann en une aire simplement connexe de contour K (n° 380), nous avons fait des coupures le long des cycles σ, τ et le long de $p-1$ cycles γ. Nous supposerons, pour les développements qui vont suivre, $p=3$ (fig. 6).

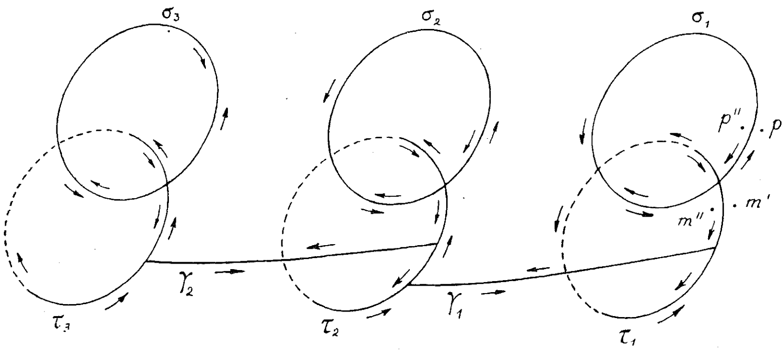

FIG. 6.

Orientons les cycles en partant du point de jonction de τ_1 et de γ_1, comme il est indiqué par les flèches sur la figure 6. Cette orientation donne celle du contour K. Considérons l'intégrale $\int_K PdQ$. Si φ n'est pas une constante, cette intégrale ne peut être nulle et a un signe déterminé. On peut supposer que les orientations aient été choisies de manière que l'on ait $\int_K PdQ > 0$.

Nous allons évaluer cette intégrale. A cet effet, on supposera que les périodes α_k, β_k aient été calculées en tenant compte de l'orientation donnée aux cycles τ_k, σ_k. Dans ces conditions, $P(x, y)$ a la valeur α_k' le long de τ_k et β_k' le long de σ_k ; $Q(x, y)$ a la valeur α_k'' le long de τ_k et β_k'' le long de σ_k.

Désignons par $I = \int \varphi dz$ l'intégrale considérée et soient m', m'' deux points voisins de la coupure τ_1, situés de part et d'autre de cette coupure. On passe de m' à m'' en suivant un cycle homologue à σ_1, donc on a $I(m'') = I(m') + \beta_1$.

De même, si p', p'' sont des points voisins de σ_1 et situés de part et d'autre de ce cycle, on a $I(p'') = I(p') - \alpha_1$.

En m', l'élément de l'intégrale $\int_K PdQ$ est PdQ, en m'', en tenant compte du sens parcouru, il est $-(P+\beta_1')dQ$. La valeur de l'intégrale le long du cycle τ_1 sera donc

$$-\beta_1' \int_{\tau_1} dQ = -\alpha_1'' \beta_1'.$$

En p', l'élément de l'intégrale est PdQ et en p'',

$-(P-\alpha_1'')dQ$. L'intégrale, calculée le long de σ_1 a la valeur

$$\alpha_1' \int_{\sigma_1} dQ = \alpha_1' \beta_1'' .$$

Soient enfin r' et r'' deux *points voisins de* γ_1, situés de part et d'autre de cette coupure. On passe de r' à r'' par un cycle homologue à zéro, donc $I(r')=I(r'')$ et l'intégration de PdQ le long de γ_1 donne une valeur nulle.

Le même raisonnement peut se répéter pour les autres cycles et s'étend sans difficultés au cas $p>3$. Dans le cas général, on a donc

$$\int_K PdQ = \Sigma(\alpha_h'\beta_h'' - \alpha_h''\beta_h') , \qquad (h=1, 2, \ldots p)$$

On obtient donc *l'inégalité de Riemann,*

$$\Sigma(\alpha_h'\beta_h'' - \alpha_h''\beta_h') > 0 ,$$

entre les parties réelles et imaginaires des périodes α_h, β_h.

395. Conséquences de l'inégalité de Riemann. — L'inégalité précédente ne se transforme en une égalité que si P et Q sont des constantes, c'est-à-dire si l'intégrale I se réduit à une constante. Par suite :

Une intégrale de première espèce dont toutes les périodes sont réelles, ou imaginaires pures, ou dont toutes les périodes sont nulles, soit le long des cycles σ, *soit le long des cycles* τ, *se réduit à une constante.*

Si $I_1, I_2, \ldots, I_r$ sont r intégrales de première espèce de R, il en est de même de

$$\lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \ldots + \lambda_r I_r ,$$

où les λ sont des constantes. S'il est possible de trouver des valeurs non toutes nulles des λ de manière que l'intégrale précédente se réduise à une constante, les intégrales $I_1, I_2, \ldots, I_r$ sont *linéairement dépendantes* ; dans le cas contraire, elles sont *linéairement indépendantes.*

Soit r le nombre des intégrales de première espèce linéairement indépendantes de R. Supposons $r \geqslant p$ et désignons par α_{jk} la période de l'intégrale I_j le long du cycle τ_k. Il est toujours possible de satisfaire, par des valeurs non toutes nulles des λ, aux équations

$$\lambda_1\alpha_{1k} + \lambda_2\alpha_{2k} + \ldots + \lambda_r\alpha_{rk} = 0 , \qquad (k=1, 2, \ldots, p) ,$$

donc les intégrales sont dépendantes, contrairement à l'hypothèse. On a donc $r \leqslant p$.

Le nombre des intégrales de première espèce linéairement indépendantes, est au plus égal à p.

396. Etude d'une intégrale de première espèce. — Par hypothèse, la courbe $f(z, u)=0$ ne possède que des points doubles ordinaires, elle rencontre la droite de l'infini en des points distincts et aucun de ceux-ci ne se trouve sur un axe de coordonnées. Il en résulte que la courbe est d'ordre n ; nous poserons

$$f(z, u) \equiv u^n\varphi_0 + u^{n-1}\varphi_1(z) + \ldots + \varphi_n(z) ,$$

où les φ sont des polynomes en z dont les degrés sont indiqués par les indices.

Soit $Q(z, u)$ un polynome d'ordre $n-3$, adjoint à $f=0$, c'est-à-dire s'annulant aux points doubles de la courbe $f=0$. La courbe $Q=0$ est une adjointe d'ordre $n-3$ à $f=0$.

Nous allons démontrer que

$$I = \int \frac{Q}{f_u'}\, dz$$

est une intégrale de première espèce attachée à la surface de Riemann, c'est-à-dire à la courbe algébrique $f(z, u)=0$.

La courbe $f_u'=0$ est la polaire du point à l'infini sur l'axe des u par rapport à la courbe $f=0$; elle passe donc simplement par les points doubles et par les points de diramation de $f=0$.

Les singularités de I ne peuvent provenir que des pôles de la fonction figurant sous le signe d'intégration, c'est-à-dire des zéros de $f_u'=0$ et du pôle $z=\infty$ de Q.

En un point de diramation, on a $f_z' \neq 0$ et à cause de $f_z'dz + f_u'du = 0$, on a

$$\int \frac{Q}{f_u'}\, dz = -\int \frac{Q}{f_z'}\, du ;$$

donc I reste finie.

Soit (u_0, z_0) un point double de la courbe $f=0$. Ce point est l'origine de deux branches, de sorte que le développement de f_u' en ce point, pour chacune des branches, sera de la forme

$$f_u' = a(z - z_0) + \ldots , \qquad (a \neq 0) .$$

Le développement de $Q(z, u)$ au même point, aura la même forme, puisque la courbe $Q=0$ passe simplement par le point. L'intégrale I restera donc finie au point double (z_0, u_0).

Considérons maintenant le point $z=\infty$. Les n déterminations de u en ce point sont distinctes par hypothèse. Pour une de ces déterminations, par exemple pour u_1, on a

$$u_1 = k_1 z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots .$$

Ecrivons l'équation de la courbe $f=0$ en groupant les termes de même puissance, sous la forme

$$f(z, u) = \psi_n(z, u) + \psi_{n-1}(z, u) + \dots + \psi_0 = 0,$$

où les ψ sont des polynomes homogènes dont le degré est indiqué par l'indice.

Nous pouvons écrire

$$f(z, u) = z^n \psi_n\left(1, \frac{u}{z}\right) + z^{n-1} \psi_{n-1}\left(1, \frac{u}{z}\right) + \dots,$$

et k_1 est racine simple de l'équation $\psi_n(1, k) = 0$. On en déduit

$$f'_u(z, u) = z^{n-1} \psi'_n\left(1, \frac{u}{z}\right) + z^{n-2} \psi'_{n-1}\left(1, \frac{u}{z}\right) + \dots,$$

où ψ'_n est la dérivée de ψ_n par rapport à $\frac{u}{z}$, ...

Si dans cette expression, on remplace u par u_1, $\psi'_n(1, k_1)$ n'est pas nul et on a une fonction de z commençant par un terme en z^{n-1}. En partant du polynome $Q(z, u)$, on trouvera, par le même procédé, une fonction dont le développement commencera par un terme en z^{n-3}. Par conséquent, le développement de $\frac{Q}{f'_u}$ commence par un terme en $\frac{1}{z^2}$ et celui de I, par un terme en $\frac{1}{z}$. Il en résulte que les points $z = \infty$ ne sont pas des pôles pour I, mais des zéros (simples si le polynome Q est exactement de degré $m - 3$).

L'intégrale I est donc de première espèce.

397. Nombre des intégrales de première espèce linéairement indépendantes. — La courbe $f(z, u) = 0$ est par hypothèse d'ordre n et possède $d = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - p$ points doubles ordinaires. Les adjointes d'ordre $n - 3$ forment un système linéaire de dimension $p - 1$ et il y en a donc p qui sont linéairement indépendantes. Chacune de ces courbes donne une intégrale de première espèce et on obtient donc ainsi p intégrales de première espèce linéairement indépendantes. Si r est le nombre d'intégrales de première espèce linéairement indépendantes attachées à la courbe, on a donc $r \geqslant p$. On a vu tantôt que l'on aurait $r \leqslant p$, donc $r = p$.

Une courbe algébrique de genre p *possède* p *intégrales abéliennes de première espèce linéairement indépendantes.*

Il en résulte que toute intégrale abélienne de première espèce est de la forme qui vient d'être étudiée. Si l'on transforme birationnellement la courbe $f(z, u)=0$ en une courbe C d'ordre m, possédant des singularités quelconques, le concept d'intégrale de première espèce ne subit pas de modification. Les courbes $Q=0$ deviennent des courbes d'ordre $m-3$ passant $i-1$ fois par un point multiple d'ordre i de C. On en conclut que toute intégrale de première espèce attachée à la courbe C a la forme indiquée plus haut.

398. Propriété des périodes d'une intégrale de première espèce. — Soient $I_1, I_2, \ldots, I_p$ les p intégrales de première espèce, linéairement indépendantes, de la surface R. Désignons par α_{jk} la période de I_j le long de τ_k et par β_{jk} celle de I_j le long de σ_k. L'intégrale

$$I=\lambda_1 I_1+\lambda_2 I_2+\ldots+\lambda_p I_p$$

a les périodes $\Sigma\lambda_j\alpha_{jk}$ le long de τ_k et $\Sigma\lambda_j\beta_{jp}$ le long de σ_k.
Posons

$$\alpha_{jk}=\alpha'_{jk}+i\alpha''_{jk}, \quad \beta_{jk}=\beta'_{jk}+i\beta''_{jk}, \quad \lambda_j=\lambda_j'+i\lambda_j'',$$
$$I=U+iV.$$

Les périodes de la partie réelle U de I sont $\Sigma(\lambda'_j\alpha'_{jk}-\lambda''\alpha''_{jk})$ le long de τ_k et $\Sigma(\lambda'_j\beta'_{jk}-\lambda''\beta''_{jk})$ le long de σ_k. Posons

$$\Sigma(\lambda_j'\alpha'_{jk}-\lambda''_j\alpha''_{jk})=a_k, \quad \Sigma(\lambda_j'\beta'_{jk}-\lambda_j''\beta''_{jk})=b_k,$$
$$(k=1, 2, \ldots, p),$$

les a et les b étant des constantes arbitrairement choisies, non toutes nulles.

Ces équations peuvent être résolues par rapport aux quantités λ', λ'', car le déterminant de ces inconnues ne peut être nul. En effet, s'il était nul, on pourrait trouver des valeurs non toutes nulles des λ', λ'' satisfaisant aux équations obtenues en faisant $a_k=0$, $b_k=0$. Mais alors I aurait des périodes imaginaires pures, ce qui est impossible. Il en résulte que :

On peut choisir arbitrairement les parties réelles des périodes d'une intégrale abélienne de première espèce.

On démontrerait de même que :

On peut choisir arbitrairement les parties imaginaires des périodes d'une intégrale abélienne de première espèce.

Remarque. — Les équations (1), pour $a_k=b_k=0$, donnent la condition pour qu'une intégrale

$$\lambda_1 I_1+\lambda_2 I_2+\ldots+\lambda_p I_p$$

se réduise à une constante, c'est-à-dire la condition pour que les intégrales I_1, I_2, ..., I_p ne soient pas linéairement indépendantes.

399. Propriété des périodes de deux intégrales de première espèce. — Soient I, J deux intégrales de première espèce, α_k, β_k les périodes de I le long des cycles τ_k, σ_k et α_k', β_k' celles de J le long des mêmes cycles.

Référons-nous au modèle de la surface de Riemann formé d'une aire simplement connexe $\mathfrak{A}$ limitée par un contour K et considérons l'intégrale $\int_K I \frac{dJ}{dz} dz$. En reprenant le raisonnement fait plus haut (n° 394), on obtient

$$\int_K I \frac{dJ}{dz} dz = \Sigma (\alpha_k \beta_k' - \alpha_k' \beta_k) .$$

D'un autre côté, l'intégrale du premier membre est égale à la somme des résidus de $I \frac{dJ}{dz}$, K étant parcouru dans le sens positif. Ces résidus ne peuvent provenir que des pôles de la fonction rationnelle $\frac{dJ}{dz}$. Or, à distance finie, les résidus de cette fonction doivent être nuls. En un point de diramation, le développement de $\frac{dJ}{dz}$ ne peut être que de la forme

$$a (z - z_0)^{-\frac{1}{2}} + a_0 + a_1 (z - z_0)^{\frac{1}{2}} + \ldots$$

et par conséquent, le résidu est nul. D'autre part, en un point à l'infini, $\frac{dJ}{dz}$ possède un zéro du second ordre et I est finie ; le résidu de $I \frac{dJ}{dz}$ est donc nul.

Cela étant, on a $\int_K I \frac{dJ}{dz} dz = 0$ et par conséquent

$$\Sigma(\alpha_k\beta_k' - \alpha_k'\beta_k) = 0 .$$

400. Intégrales normales de première espèce. — Soient I_1, I_2, ..., I_p, p intégrales de première espèce linéairement indépendantes et

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_p & \tau_1 & \tau_2 & \ldots & \tau_p \\
I_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1p} & \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1p} \\
I_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2p} & \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2p} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
I_p & \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \ldots & \alpha_{pp} & \beta_{p1} & \beta_{p2} & \ldots & \beta_{pp}
\end{array}$$

la table des périodes de ces intégrales (α_{jk}, β_{jk} sont les périodes de I_j à travers les cycles σ_k, τ_k, c'est-à-dire les périodes le long des cycles τ_k, σ_k).

Ecrivons les équations

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \alpha_{11} + \lambda_2 \alpha_{21} + \dots + \lambda_p \alpha_{p1} &= 1 , \\
\lambda_1 \alpha_{12} + \lambda_2 \alpha_{22} + \dots + \lambda_p \alpha_{p2} &= 0 , \\
\dots \dots \dots \dots & \dots \\
\lambda_1 \alpha_{1p} + \lambda_2 \alpha_{2p} + \dots + \lambda_p \alpha_{pp} &= 0 .
\end{aligned}$$

Le déterminant des coefficients des λ n'est pas nul, sans quoi on pourrait trouver une intégrale dont toutes les périodes seraient nulles le long des cycles τ. En résolvant les équations précédentes, on obtiendra une intégrale

$$\mathrm{J}_1 = \lambda_1 \mathrm{I}_1 + \lambda_2 \mathrm{I}_2 + \dots + \lambda_p \mathrm{I}_p$$

ayant les périodes 1, 0, ..., 0, ρ_{11}, ρ_{12}, ..., ρ_{1p} à travers les cycles σ_1, σ_2, ..., σ_p, τ_1, τ_2, ..., τ_p.

On pourra de même former une intégrale J_2 ayant, à travers les mêmes cycles, les périodes 0, 1, 0, ..., 0, ρ_{21}, ρ_{22}, ..., ρ_{23}, ..., une intégrale J_p ayant à travers les mêmes cycles, les périodes 0, 0, ..., 0, 1, ρ_{p1}, ρ_{p2}, ..., ρ_{pp}.

On obtiendra ainsi un système de p intégrales, linéairement indépendantes, ayant le tableau des périodes

	σ_1	σ_2	...	σ_p	τ_1	τ_2	...	τ_p
J_1	1	0	...	0	ρ_{11}	ρ_{12}	...	ρ_{1p}
J_2	0	1	...	0	ρ_{21}	ρ_{22}	...	ρ_{2p}
.	.	.	.	.	.	.	.	.
J_p	0	0	...	1	ρ_{p1}	ρ_{p2}	..	ρ_{pp}.

Appliquons l'égalité trouvée plus haut (n° 399) aux intégrales J_j, J_k ; on obtient

$$\rho_{jk} = \rho_{kj} .$$

Les intégrales J_1, J_2, ..., J_p sont appelées *intégrales normales de première espèce relatives* aux rétrosections σ, τ.

§ 3. *Intégrales de seconde espèce*

401. Intégrales élémentaires de seconde espèce. — On appelle intégrale élémentaire de seconde espèce une intégrale de seconde espèce ayant un seul pôle, de premier ordre.

Les courbes d'ordre $n-2$ passant par les points doubles de la courbe $f(z, u) = 0$ forment un système linéaire de dimension $n+p-2$. Parmi ces courbes, il y en a ∞^p au moins passant par les $n-2$ des points d'intersection de la courbe et d'une droite. Parmi ces courbes, il y en a ∞^{p-1} formées de la droite et d'une adjointe d'ordre $m-3$, donc il y a au moins une courbe irréductible d'ordre $n-2$ passant par les $n-2$ points en question.

Soit $az+bu+c=0$ l'équation d'une droite tangente à $f=0$ au point ζ, η. Soit encore $\psi(z, u)=0$ l'équation d'une courbe irréductible, d'ordre $n-2$, passant par les points doubles de $f=0$ et par les $n-2$ points de rencontre de la droite et de cette courbe distincts du point ζ, η. Considérons l'intégrale

$$H=\int \frac{\psi(z, u)}{(az+bu+c) f_u'(z, u)} dz .$$

En reprenant les raisonnements faits plus haut (n° 396), on démontre que cette intégrale reste finie aux points à l'infini de $f=0$, aux points doubles de la courbe $f=0$ et aux points de rencontre de cette courbe avec la droite $az+bu+c=0$ distincts du point ζ, η, enfin aux points de diramation.

Au point ζ, η, la fonction à intégrer présente un pôle du second ordre et par conséquent, H présente soit un pôle, soit un point singulier logarithmique. Mais dans ce dernier cas, ce point singulier est unique et sa période polaire doit être nulle (n° 392). Il en résulte que H est de seconde espèce et présente un pôle du premier ordre au point ζ, η.

Soit L une intégrale élémentaire de seconde espèce, ayant le même pôle que H. Si h est le résidu de H au point ζ, η et l celui de L au même point, l'intégrale $hL-lH$ reste finie en tout point de la surface de Riemann et est donc de première espèce. On a donc

$$hL \equiv \lambda H+\lambda_1 I_1+\lambda_2 I_2+\ldots+\lambda_p I_p .$$

On obtient ainsi : l'expression d'une intégrale élémentaire de seconde espèce.

402. Intégrale élémentaire normale de seconde espèce. — Une intégrale élémentaire de seconde espèce est appelée normale lorsque son résidu au pôle est égal à l'unité et que ses périodes à travers les cycles σ sont nulles.

Reprenons l'intégrale H et choisissons λ de manière que l'intégrale

$$L=\lambda H+\mu_1 I_1+\mu_2 I_2+\ldots+\mu_p I_p$$

ait pour résidu l'unité au pôle ζ, η. Soient alors α_{jk}, β_{jk} les périodes de I_j à travers les cycles σ_k, τ_k et α_k, β_k les périodes de

H à travers les mêmes cycles. On peut trouver des valeurs des μ telles que

$$\mu_1\alpha_{1k} + \mu_2\alpha_{2k} + \ldots + \mu_p\alpha_{pk} = -\lambda\alpha_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

car le déterminant $|\alpha_{ik}|$ n'est pas nul.

Pour ces valeurs des μ, on obtiendra une intégrale E, normale, dont les périodes à travers les cycles τ seront désignées par $e_1, e_2, \ldots, e_p$. Cette intégrale est déterminée à une constante additive près, car si E' est une intégrale possédant les mêmes propriétés, E — E' est une intégrale de première espèce ayant des périodes à travers les cycles σ nulles ; c'est donc une constante.

403. Expression des périodes $e_1, e_2, \ldots, e_p$. — Considérons l'intégrale de première espèce $I = \int \frac{Q}{f'_u}\, dz$ et ensuite l'intégrale

$$\frac{1}{2\,i\pi}\int_K E\,dI,$$

sur la surface de Riemann de contour K, rendue simplement connexe. La fonction $E\,\frac{dI}{dz}$ ne peut avoir un résidu différent de zéro qu'au point ζ, η. On aura donc

$$\frac{1}{2\,i\pi}\int_K E\,dI = \frac{Q(\zeta, \eta)}{f'_\eta}.$$

Supposons que I soit l'intégrale normale J_h. Les périodes de E, J sont

	σ_1	σ_2		σ_h		σ_p	τ_1	τ_2	$\ldots$	τ_p
J_h	0	0	.	1	.	0	ρ_{h1}	ρ_{h2}	$\ldots$	ρ_{hp}
E	0	0	.	0	.	0	e_1	e_2	$\ldots$	e_p .

On a donc

$$\int_K E\,d\,J_h = -\,e_h$$

et

$$e_h = -\,2\,i\pi\,\frac{Q(\zeta, \eta)}{f'_\eta}.$$

404. Système fondamental d'intégrales de seconde espèce. — Soient (ζ_1, η_1), (ζ_2, η_2), ..., (ζ_p, η_p) p points de la courbe $f = 0$ non situés sur une adjointe d'ordre $n - 3$. Formons les intégrales élémentaires normales $E_1, E_2, \ldots, E_p$ relatives à ces points et soient e_{j1}, e_{j2}, ..., e_{jp} les périodes de E_j à travers les cycles τ_1, τ_2, ..., τ_p.

Considérons l'intégrale

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_p E_p + \mu_1 J_1 + \mu_2 J_2 + \dots + \mu_p J_p ,$$

J_1, J_2, ..., J_p étant p intégrales normales de première espèce.

Supposons que cette intégrale puisse se réduire à une fonction rationnelle. Pour cela, il faut que les périodes à travers les cycles σ, τ soient toutes nulles. Les périodes à travers les cycles σ sont μ_1, μ_2, ..., μ_p et ces nombres doivent être nuls. Les périodes à travers les cycles τ sont

$$\lambda_1 e_{1k} + \lambda_2 e_{2k} + \dots + \lambda_p e_{pk} , \qquad (k = 1, 2, \dots, p) .$$

On devra donc avoir

$$\lambda_1 Q_k (\zeta_n , \eta_1) + \lambda_2 Q_k (\zeta_2 , \eta_2) + \dots + \lambda_p Q_k (\zeta_p , \eta_p) = 0 .$$

Pour que l'on puisse déduire de ces p équations des valeurs non toutes nulles des λ, il faut que le déterminant $|Q_k(\zeta_j, \eta_j)|$ soit nul. Mais dans ce cas, on a

$$\lambda_1' Q_1 (\zeta_j , \eta_j) + \lambda_2' Q_2 (\zeta_j , \eta_j) + \dots + \lambda_p' Q_p (\zeta_j , \eta_j) = 0 ,$$
$$(j = 1 , 2, \dots p)$$

Cela signifie que les p points considérés appartiennent à une adjointe d'ordre $n - 3$, contrairement à l'hypothèse. Il en résulte que l'intégrale considérée ne peut se réduire à une fonction rationnelle.

On dit que des intégrales abéliennes de seconde espèce sont *linéairement indépendantes* quand aucune de leurs combinaisons linéaires ne se réduit à une fonction rationnelle. Les intégrales E_1, E_2, ..., E_p, J_1, J_2, ..., J_p sont linéairement indépendantes.

405. Expression d'une intégrale de seconde espèce. — Soit H une intégrale quelconque de seconde espèce. Appelons α_j sa période à travers σ_j et β_j sa période à travers τ_j.

L'intégrale

$$H' = H - \alpha_1 J_1 - \alpha_2 J_2 - \dots - \alpha_p J_p$$

a des périodes nulles à travers les cycles σ. Si β_j' est la période de H' à travers τ_j, déterminons des quantités λ_1, λ_2, ..., λ_p de manière à avoir

$$\lambda_1 \frac{Q_k (\zeta_1 , \eta_1)}{f'_{\eta_1}} + \lambda_2 \frac{Q_k (\zeta_2 , \eta_2)}{f'_{\eta_2}} + \dots + \lambda_p \frac{Q_k (\zeta_p , \eta_p)}{f'_{\eta p}} = - \rho_k' ,$$
$$(k = 1, 2, \dots, p) ,$$

ce qui est possible puisque le déterminant $\left|\dfrac{Q_k(\zeta_i, \eta_i)}{f'_{\eta i}}\right|$ n'est pas nul.

L'intégrale

$$H' - \lambda_1 E_1 - \lambda_2 E_2 - \ldots - \lambda_p E_p$$

a des périodes nulles le long des cycles σ_k, τ_k et se réduit à une fonction rationnelle. On a donc

$$H = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots + \lambda_p E_p + \mu_1 J_1 + \mu_2 J_2 + \ldots + \mu_p J_p + \text{fonct. rat.}$$

Le déterminant des périodes cycliques des intégrales E, J est différent de zéro.

406. Théorème de Riemann-Roch. — Soit $F(z, u)$ une fonction rationnelle sur la surface de Riemann. L'équation $F(z, u) = \lambda$ s'annule pour m valeurs de z, u, quel que soit λ. Le nombre de pôles de la fonction $F(z, u)$ est également égal à m. Sur la courbe $f(z, u) = 0$, on a ∞^1 groupes de m points formant une série linéaire $g_m^{\ 1}$, privée de point fixes. Le théorème de Riemann-Roch donne le nombre de paramètres dont dépend la fonction $F(z, u)$, les pôles étant assignés.

Soient (ζ_1, η_1), (ζ_2, η_2), ..., (ζ_m, η_m) les pôles de $F(z, u)$ et $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ les résidus de la fonction en ces pôles. L'intégrale abélienne

$$F - \nu_1 E_1 - \nu_2 E_2 - \ldots - \nu_m E_m ,$$

où $E_1, E_2, \ldots, E_m$ sont les intégrales élémentaires normales de seconde espèce relatives aux pôles de $F(z, u)$, reste finie sur toute la surface R et est donc de première espèce. Ses périodes à travers les cycles σ sont nulles, donc cette intégrale se réduit à une constante ν_0. On a donc

$$F = \nu_1 E_1 + \nu_2 E_2 + \ldots + \nu_m E_m + \nu_0 .$$

Les quantités $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ satisfont aux équations

$$\nu_1 Q_k(\zeta_1, \eta_1) + \nu_2 Q_k(\zeta_2, \eta_2) + \ldots + \nu_m Q_k(\zeta_m, \eta_m) = 0 ,$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p) ,$$

qui expriment que $F(z, u)$ a des périodes nulles à travers les cycles σ. Réciproquement, les valeurs des ν satisfaisant à ces équations donnent une fonction $F(z, u)$ ayant pour pôles les points assignés.

Le nombre des quantités ν que l'on peut choisir arbitrairement est égal à $m - \mu$, où μ est la caractéristique de la matrice $|Q_k(\zeta_i, \eta_i)|$. Mais alors, les équations

$$\lambda_1 Q_1(\zeta_i, \eta_i) + \lambda_2 Q_2(\zeta_i, \eta_i) + \ldots + \lambda_p Q_p(\zeta_i, \eta_i) = 0 ,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

se réduisent à μ équations indépendantes. Il y a donc $\infty^{p-\mu}$ adjointes d'ordre $n-3$ passant par les pôles de F. Si i est l'indice de spécialité du groupe des pôles de $F(z, u)$, on a $p-\mu+1=i$. Le nombre de constantes dont dépend $F(z, u)$ est donc égal à $m-p+i-1$. Si l'on ajoute à ces constantes la constante ν_0, on trouve que *la fonction* F(z, u) *dépend de* m — p + i *constantes*. On retrouve ainsi le théorème de Riemann-Roch (n° 307).

La fonction $F(z, u)$, c'est-à-dire la série $g_m{}^{m-p+i}$, est représentée par

$$\nu_1 E_1 + \nu_2 E_2 + \ldots + \nu_m E_m + \nu_0 = 0 .$$

§ 4. *Intégrales de troisième espèce*

407. Intégrale normale de troisième espèce. — Soient (ζ_1, η_1) et (ζ_2, η_2) deux points simples de la courbe $f(z, u)=0$ et $az+bu+c=0$ l'équation de la droite qui les joint. Soit $\psi(z, u)=0$, une courbe irréductible d'ordre $n-2$, adjointe à $f=0$, passant par les $n-2$ points de rencontre de la droite précédente avec la courbe $f=0$, distincts des deux points choisis. Considérons l'intégrale

$$\Pi = \int \frac{\psi(z, u)}{(az+bu+c) f_u'} dz .$$

Cette intégrale est finie en tout point de la surface de Riemann, sauf aux points (ζ_1, η_1), (ζ_2, η_2) où la fonction à intégrer a des pôles du premier ordre. Par conséquent, Π a en ces points des points singuliers logarithmiques. Les périodes polaires sont $2 i\pi\rho$, $2 i\pi\rho'$ et on a (n° 392), $\rho+\rho'=0$. La seconde période est donc $-2 i\pi\rho$.

On peut supposer avoir divisé la fonction à intégrer par ρ, de manière que les périodes polaires soient $2 i\pi$, $-2 i\pi$.

Toute intégrale de troisième espèce, ayant les mêmes points singuliers, les périodes polaires étant $2 i\pi\rho_1$, $-2 i\pi\rho_1$, peut s'écrire sous la forme

$$\rho_1 \Pi + \lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \ldots + \lambda_p I_p .$$

Déterminons les λ de telle sorte que les périodes de l'intégrale

$$\Pi + \lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \ldots + \lambda_p I_p$$

à travers les cycles σ, soient nulles. L'intégrale abélienne obtenue sera appelée *intégrale normale de troisième espèce*, relative aux points singuliers (ζ_1, η_1), (ζ_2, η_2). Cette intégrale sera représentée par

$$\Pi_{\zeta_2\,\eta_2}^{\zeta_1\,\eta_1} .$$

408. Périodes cycliques d'une intégrale normale. — Désignons par $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_p$ les périodes de l'intégrale précédente à travers les cycles $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$. Considérons la surface de Riemann de contour K rendue simplement connexe et traçons une coupure joignant les points (ζ_1, η_1), (ζ_2, η_2) et une autre coupure joignant la précédente au contour K (fig. 7).

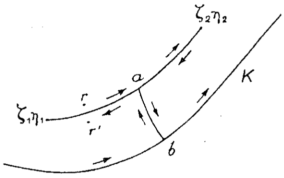

FIG. 7.

Soit K′ le nouveau contour. Nous supposerons K orienté dans le sens positif et le contour K′ orienté par cette condition.

Considérons l'intégrale

$$\int_{K'} \Pi \begin{matrix} \zeta_1 \, \eta_1 \\ \zeta_2 \, \eta_2 \end{matrix} \, dJ_h \,,$$

où J_h est une intégrale normale de première espèce. La fonction à intégrer est uniforme dans l'aire limitée par le contour K′ et ses résidus sont nuls en tout point, par conséquent l'intégrale précédente est nulle.

En reprenant un raisonnement déjà fait plusieurs fois, on a

$$\int_K \Pi dJ_h = -\pi_h \,.$$

La coupure ab étant parcourue dans les deux sens, l'apport à l'intégrale sera nul le long de cette coupure.

Si r, r' sont deux points voisins de la coupure joignant les points singuliers et situés de part et d'autre de cette coupure, on aura

$$\Pi(r) + 2\,i\pi = \Pi(r') \,.$$

L'apport à l'intégrale le long de cette coupure sera donc $-2\,i\pi \int_{\zeta_1\,\eta_1}^{\zeta_2\,\eta_2} dJ_h$. On aura donc

$$\pi_h = 2\,i\pi[J_h(\zeta_1, \eta_1) - J_h(\zeta_2, \eta_2)] \,.$$

Cette relation, pour $h = 1, 2, \ldots, p$, donne les périodes de l'intégrale à travers les coupures $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$.

409. Expression d'une intégrale de troisième espèce. — Soit Π une intégrale de troisième espèce ayant r points singuliers logarithmiques (ζ_1, η_1), (ζ_2, η_2), …, (ζ_r, η_r), avec les périodes polaires $2\,i\pi\rho_1$, $2\,i\pi\rho_2$, …, $2\,i\pi\rho_r$. On a d'ailleurs (n° 392)

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_r = 0 \,. \qquad (1)$$

Formons l'intégrale

$$\Pi - \lambda_1 \Pi_{\zeta_1 \eta_1}^{\zeta_2 \eta_2} - \lambda_2 \Pi_{\zeta_2 \eta_2}^{\zeta_3 \eta_3} - \ldots - \lambda_{r-1} \Pi_{\zeta_{r-1} \eta_{r-1}}^{\zeta_r \eta_r} . \tag{2}$$

Disposons des constantes λ de manière à faire disparaître les points singuliers logarithmiques. Il suffit de prendre

$$\lambda_1 = \rho_1 , \quad \lambda_2 - \lambda_1 = \rho_2 , \quad \ldots, \quad \lambda_{r-1} - \lambda_{r-2} = \rho_{r-1} , \quad -\lambda_{r-1} = \rho_r ,$$

équations qui sont compatibles à cause de la relation (1).

Dans ces conditions, l'intégrale (2) est une intégrale de seconde espèce, donc :

Toute intégrale abélienne de troisième espèce est la somme d'intégrales normales de troisième espèce et d'une intégrale de seconde espèce.

§ 5. *Le théorème d'Abel*

410. Théorème direct. — *La somme des valeurs d'une intégrale abélienne aux points d'un groupe variable dans une série γ_m dont les éléments dépendent rationnellement de* r *paramètres, est une fonction rationnelle, augmentée de logarithmes de fonctions rationnelles, de ces paramètres.*

Considérons, sur la courbe $f(z, u) = 0$, une série γ_m d'ordre m, rationnelle, c'est-à-dire un ensemble de groupes de m points de la courbe, dépendant rationnellement de r paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_r$ $(r < m)$. Considérons une intégrale abélienne

$$U = \int \varphi(z, u)\, dz$$

et un groupe (z_1, u_1), (z_2, u_2), $\ldots$, (z_m, u_m) de γ_m. Formons la somme

$$U(z_1) + U(z_2 + \ldots + U(z_m) .$$

Supposons en premier lieu $r = 1$ et représentons la variable $t = t_1$ sur un plan. Les points $z_1, z_2, \ldots, z_m$ dépendent algébriquement de t, donc il en est de même de la somme

$$\varphi(z_1, u_1) \frac{dz_1}{dt} + \varphi(z_2, u_2) \frac{dz_2}{dt} + \ldots + \varphi(z_m, u_m) \frac{dz_m}{dt} .$$

Cette somme est d'autre part symétrique par rapport à $z_1, z_2, \ldots, z_m$, donc c'est une fonction uniforme de t et par suite une fonction rationnelle $v(t)$ de t. On a donc

$$U(z_1) + U(z_2) + \ldots + U(z_m) = \int v(t)\, dt .$$

Observons que si U est de première espèce, le second membre se réduit à une constante.

Si U est de seconde espèce, le second membre est une fonction rationnelle.

Si U est de troisième espèce, le second membre est une fonction rationnelle augmentée du logarithme d'une fonction rationnelle.

Lorsque l'on a $r > 1$, on parvient au même résultat, en faisant varier successivement les r paramètres.

411. Remarque. — Supposons que $U(z)$ soit une intégrale de première espèce. La somme

$$\overline{U}(z) = U(z_1) + U(z_2) + \ldots + U(z_m)$$

reste constante lorsque le groupe $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ varie dans γ_m. Cela suppose que les chemins d'intégration allant de la valeur initiale z^0 aux points $z_1, z_2, \ldots, z_m$ respectivement, sont fixés. S'il en est autrement, on peut seulement affirmer que les valeurs de $\overline{U}(z)$ en deux groupes $z_1', z_2', \ldots, z_m'$ et $z_1'', z_2'', \ldots, z_m''$ de γ_m ne diffèrent que par des combinaisons des périodes. On écrira

$$\overline{U}(z') \equiv \overline{U}(z'') \qquad \text{(mod. périodes)}.$$

412. Réciproquement : *La condition nécessaire et suffisante pour que deux groupes de points d'une courbe algébrique appartiennent à une même série linéaire, est que les sommes des valeurs prises aux points de chacun de ces groupes par chacune des intégrales normales de première espèce, ne diffèrent que par des périodes.*

Soient $z_1', z_2', \ldots, z_m'$ et $z_1'', z_2'', \ldots, z_m''$ deux groupes de m points de la courbe $f(z, u) = 0$. Supposons que, $J_1, J_2, \ldots, J_p$ étant p intégrales normales de premières espèce, on ait

$$J_k(z_1') + J_k(z_2') + \ldots + J_k(z_m') \equiv J_k(z_1'') + J_k(z_2'') + \ldots + J_k(z_m''),$$
$$\text{(mod. périodes)}, \quad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Nous pouvons écrire ces relations sous la forme

$$\overline{J}_k(z') = J_k(z'') + \lambda_1 \rho_{k1} + \lambda_2 \rho_{k2} + \ldots + \lambda_p \rho_{kp} + \mu_k,$$

en adoptant les notations définies antérieurement (n° 400). Les λ et les μ sont des entiers ne dépendant que du chemin d'intégration.

Formons les intégrales de troisième espèce

$$\Pi_{z_1''}^{z_1'}, \quad \Pi_{z_2''}^{z_2'}, \ldots, \quad \Pi_{z_m''}^{z_m'}$$

et ensuite l'intégrale

$$\Pi = \Pi_{z_2''}^{z_1'} + \Pi_{z_2''}^{z_2'} + \dots + \Pi_{z_m''}^{z_m'} .$$

Les périodes de l'intégrale $\Pi_{z_j''}^{z_j'}$ à travers les cycles σ sont nulles. La période à travers le cycle τ_k est

$$\pi_k = 2\, i\pi [J_k(z_j') - J_k(z_j'')]$$

lorsque le chemin d'intégration est fixé. S'il en est autrement, on pourra écrire

$$\begin{aligned}\pi_k = 2\, i\pi\, [J_k(z_j') - J_k(z_j'')] \\ + 2\, i\pi\, [\lambda_1' \rho_{k1} + \lambda_2' \rho_{k2} + \dots + \lambda_p' \rho_{kp} + \mu_k'] ,\end{aligned}$$

les λ' et μ' étant des entiers dépendant du chemin d'intégration.

L'intégrale Π aura des périodes nulles à travers les cycles σ et à travers le cycle τ_k, la période

$$2\, i\pi (\nu_1 \rho_{k1} + \nu_2 \rho_{k2} + \dots + \nu_k \rho_{kp} + \eta_k) ,$$

les ν et η étant des entiers.

Formons l'intégration de première espèce

$$J = 2\, i\pi (\nu_1 J_1 + \nu_2 J_2 + \dots + \nu_p J_p)$$

et considérons, sur la surface de Riemann, la fonction

$$\varphi(z) = e^{J - \Pi} .$$

Lorsque z parcourt le cycle τ_k, J augmente de $2\, i\pi\nu_k$ et Π ne change pas, donc $\varphi(z)$ est multipliée par $e^{2\, i\pi\nu_k} = 1$. Lorsque z parcourt σ_k, J augmente de

$$2\, i\pi (\nu_1 \rho_{1k} + \nu_2 \rho_{2k} + \dots + \nu_p \rho_{pk}) ,$$

et Π de

$$2\, i\pi\, (\nu_1 \rho_{1k} + \nu_2 \rho_{2k} + \dots + \nu_k \rho_{pk} + \eta_k) ,$$

donc $\varphi(z)$ est multipliée par $e^{-2i\pi\eta_k} = 1$. La fonction $\varphi(z)$ est donc uniforme.

La fonction $\varphi(z)$ reste finie sauf peut-être aux points z', z''. Plaçons-nous au point z_1' ; nous avons

$$\begin{aligned} J &= \alpha_0 + \alpha_1 (z - z_1') + \dots , \\ \Pi &= \operatorname{Log}(z - z_1') + \beta_0 + \beta_1 (z - z_1') + \dots , \end{aligned}$$

d'où

$$\varphi(z) = \frac{\gamma_0}{z - z_1'} + \gamma_1 + \gamma_2 (z - z_1') + \dots .$$

Aux points z_1'', on aurait au contraire

$$\varphi(z) = \gamma_0'(z - z_1'') + \dots .$$

Par conséquent, $\varphi(z)$ a des pôles du premier ordre en z_1', z_2', ..., z_m' et des zéros simples en z_1'', z_2'', ..., z_m''. Il en résulte que $\varphi(z)$ est une fonction rationnelle et que les groupes z_1', z_2', ..., z_m' et z_1'', z_2'', ..., z_m'' appartiennent à la série g_m^1 représentée par $\varphi(z) = C^{te}$.

Remarque. — On peut évidemment, dans l'énoncé précédent, remplacer les intégrales normales par p intégrales de première espèce linéairement indépendantes.

CHAPITRE VI

APPLICATIONS À LA THÉORIE DES COURBES ALGÉBRIQUES

§ 1. *Représentation géométrique des intégrales abéliennes de première espèce*

413. Préliminaires. — La représentation géométrique des intégrales abéliennes et les applications de cette représentation, dont nous allons dire quelques mots, sont dues à C. Rosati ([1]). Cette représentation permet notamment une interprétation géométrique des formules sur les correspondances (α, β) entre les points d'une courbe algébrique.

Une autre représentation géométrique des intégrales abéliennes, en quelque sorte dualistique de la précédente, a été donnée par G. Scorza ([2]) ; nous indiquerons brièvement en quoi elle consiste.

414. Représentation des cycles. — Soit C une courbe algébrique de genre p. Nous indiquerons également par C la surface de Riemann associée à cette courbe.

Soient (σ_i, σ_{p+i}), $(i=1, 2, \dots, p)$ un système de rétrosections de la surface de Riemann C. Tout cycle σ donne lieu à une relation

$$\sigma \sim m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + \dots + m_{2p}\sigma_{2p} ,$$

où $m_1, m_2, \dots, m_{2p}$ sont des entiers.

Au cycle σ, associons le point M de coordonnées projectives homogènes $m_1, m_2, \dots, m_{2p}$ d'un espace linéaire S_{2p-1}, à

([1]) Rosati, *Sugli integrali abeliani riducibili* (*Atti della Accademia di Torino*, 1914-1915, pp. 685-694); *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e in particolare fra i punti di una curva di genere due* (*Rendiconti della Accademia dei Lincei*, 2e sem. 1915, pp. 182-184; *Annali di Matematica*, 3e série, vol. XXV, 1915, pp. 1-32).

([2]) Scorza, *Sugli integrali abeliani riducibili* (*Rendiconti della Accademia dei Lincei*, 1er sem. 1915, pp. 412-468, 645-654).

$2p-1$ dimensions. Les cycles σ_i correspondent aux sommets de la pyramide de référence.

Deux cycles homologues ont pour images des points confondus ; deux cycles non homologues ont pour images des points distincts.

A tout point rationnel, c'est-à-dire à coordonnées rationnelles de S_{2p-1} correspond un cycle de la surface de Riemann C.

415. Représentation des intégrales abéliennes. — Soient $I_1, I_2, \ldots, I_p$ un système de p intégrales de première espèce, linéairement indépendantes, attachées à la courbe C. Désignons par $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{j2p}$ les périodes de l'intégrale I_j le long des cycles $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2p}$. A cette intégrale, nous ferons correspondre, dans S_{2p-1}, l'hyperplan

$$\alpha_{j1}x_1 + \alpha_{j2}x_2 + \ldots + \alpha_{j2p}x_{2p} = 0 .$$

Aux p intégrales $I_1, I_2, \ldots, I_p$ correspondent donc p hyperplans linéairement indépendants, ayant en commun un espace S_{p-1} à $p-1$ dimensions.

A une intégrale abélienne de première espèce correspond un hyperplan de la gerbe Σ_{p-1} ayant pour sommet l'espace S_{p-1}. Inversement, à un hyperplan de la gerbe Σ_{p-1} correspond une intégrale abélienne de première espèce déterminée à une constante multiplicative et à une constante additive près.

L'espace S_{p-1} ne contient aucun point réel, car en exprimant que ce point appartient à l'hyperplan représentant une intégrale abélienne, on aurait une relation linéaire à coefficients réels entre les périodes de cette intégrale, ce qui est impossible. L'espace S_{p-1} est donc imaginaire et n'a aucun point commun avec son imaginaire conjugué $\bar{S}_{p-1}$. La gerbe Σ_{p-1} ne contient aucun hyperplan réel.

416. Relation entre les images d'un cycle et d'une intégrale. — Supposons que l'intégrale

$$I = \lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \ldots + \lambda_p I_p$$

ait une période nulle le long du cycle

$$\sigma \sim m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + \ldots + m_{2p}\sigma_{2p} .$$

Nous avons donc par hypothèse

$$\lambda_1 (\alpha_{11} m_1 + \alpha_{12} m_2 + \ldots + \alpha_{12p} m_{2p}) + \lambda_2 (\alpha_{21} m_1 + \alpha_{22} m_2 + \ldots$$
$$+ \alpha_{22p} m_{2p}) + \ldots + \lambda_p (\alpha_{p1} m_1 + \alpha_{p2} m_2 + \ldots \alpha_{p2p} m_{2p}) = 0 .$$

Ecrivons cette identité sous la forme

$$(\lambda_1 \alpha_{11} + \lambda_2 \alpha_{21} + \ldots + \lambda_p \alpha_{p1})\, m_1 + (\lambda_1 \alpha_{12} + \lambda_2 \alpha_{22} + \ldots + \lambda_p \alpha_{p2}) m_2$$
$$+ \ldots + (\lambda_1 \alpha_{12p} + \lambda_2 \alpha_{22p} + \ldots + \lambda_p \alpha_{p2p})\, m_{2p} = 0 .$$

Cette relation exprime que l'hyperplan de Σ_{p-1} représentant l'intégrale I passe par le point représentant σ. La réciproque est immédiate.

L'hyperplan de Σ_{p-1}, *image d'une intégrale abélienne de première espèce ayant une période nulle le long d'un cycle* σ, *passe par le point image de* σ *et réciproquement.*

417. Représentation de Scorza. — Considérons un espace linéaire S_{2p-1} à $2p-1$ dimensions et appelons A_j le point dont les coordonnées homogènes sont les périodes $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{j2p}$ de I_j le long des cycles $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2p}$. Soit S_{p-1} l'espace à $p-1$ dimensions déterminé par les points $A_1, A_2, \ldots, A_p$. L'espace S_{p-1} et son imaginaire conjugués $\overline{S}_{p-1}$ sont indépendants.

A une intégrale abélienne de première espèce correspond un point de S_{p-1}. Réciproquement, à un point de cet espace correspond une intégrale abélienne de première espèce, déterminée à une constante multiplicative et à une constante additive près.

Cette représentation est due à Scorza, qui l'a utilisée pour étudier les systèmes d'intégrales abéliennes réductibles attachées à une courbe.

§ 2. *Correspondances entre les points d'une courbe algébrique*

418. Formules de Hurwitz [1]. — Considérons, sur une courbe de genre p, une correspondance (α, β) irréductible. Supposons qu'à un point x correspondent β points $y_1, y_2, \ldots, y_\beta$ et qu'à un point y correspondent α points $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$.

Soit I_k une intégrale de première espèce attachée à la courbe C. Considérons la somme

$$I_k(y_1) + I_k(y_2) + \ldots + I_k(y_\beta)$$

comme fonction de x. Cette somme reste finie sur toute la surface et est donc une intégrale de première espèce. Lorsque x décrit un cycle sur la surface de Riemann, les valeurs de y subissent une certaine permutation et la somme considérée est une combinaison linéaire de p intégrales indépendantes de première espèce $I_1, I_2, \ldots, I_p$. On a donc

$$\sum_{i=1}^{p} I_k(y_i) = \sum_{j=1}^{p} \pi_{kj} I_j(x) + \pi_k, \tag{1}$$

[1] Hurwitz, *Ueber algebraische Korrespondenzen und das verallgemeinerte Korrespondenzprincip* (*Berichte von sächs. Gesellschaft der Wissensch.*, 1886, pp. 10-38; *Mathematische Annalen*, 1887, Bd. 28, pp. 561-585; *Mathematische Werke*, Bd. I, Bâle, 1932).

les coefficients π_{kj} étant indépendants de x et π_k dépendant de l'origine du chemin d'intégration .

Supposons que les intégrales $I_1, I_2, \ldots, I_p$ soient les intégrales normales de première espèce relatives aux rétrosections (σ_i, σ_{p+i}) [1]. Désignons par ρ_{ki} la période de I_k le long du cycle σ_{p+i} [2]. Le tableau des périodes prend donc la forme

$$\begin{array}{ccccccccc} & \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_p & \sigma_{p+1} & \ldots & \sigma_{2p} \\ I_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \rho_{11} & \ldots & \rho_{1p} \\ I_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \rho_{21} & \ldots & \rho_{2p} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ I_p & 0 & 0 & \ldots & 1 & \rho_{p1} & \ldots & \rho_{pp} . \end{array}$$

Lorsque le point x décrit le cycle σ_l $(l \leqslant p)$, l'intégrale I_l devient $I_l + 1$, tandis que les autres intégrales ne changent pas. Le second membre de la relation (1) augmente donc de π_{kl}. Le premier membre augmente d'une combinaison linéaire à coefficients entiers des périodes. On a donc

$$\pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il}\rho_{ki} , \tag{2}$$

$$(k,\ l = 1, 2, \ldots, p) ,$$

h_{kl} et g_{il} étant des entiers.

Lorsque le point x décrit le cycle σ_{p+l}, on a de même

$$\sum_i \pi_{kl}\rho_{il} = H_{kl} + \sum_i G_{il}\rho_{ki} , \tag{3}$$

$$(k,\ l = 1, 2, \ldots, p) ,$$

H_{kl} et G_{il} étant des entiers.

L'élimination des quantitées π_{kl} entre les équations (2) et (3) donne les p^2 relations

$$\sum_i h_{ki}\,\rho_{il} + \sum_i \sum_m g_{mi}\,\rho_{km}\,\rho_{il} = H_{kl} + \sum_i G_{il}\,\rho_{ki} , \tag{4}$$

$$(k,\ l = 1, 2, \ldots, p) .$$

Ces formules sont dues à Hurwitz.

419. Classification des correspondances. — Deux cas peuvent se présenter suivant que les relations (4) sont des identités ou non, les périodes ρ_{ki} étant données.

Pour que les relations (4) soient des identités, on doit avoir

$$h_{11} = h_{22} = \ldots = h_{pp} = G_{11} = G_{22} = \ldots = G_{pp} , \tag{5}$$

tous les autres nombres h, H, g, G étant nuls.

(1) Nous modifions nos notations du chapitre précédent. Les cycles τ de ce chapitre deviennent les cycles $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ et les cycles σ primitifs deviennent $\sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_{2p}$.

Désignons par $-\gamma$ la valeur commune des nombres (5). La relation (1) s'écrit

$$I_k(y_1) + I_k(y_2) + \ldots + I_k(y_\beta) + \gamma I_k(x) = \pi_{k'}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p) .$$

Si $\gamma \geqslant 0$, cela signifie, par le théorème d'Abel, que le groupe $\gamma x + y_1 + y_2 + \ldots + y_\beta$ varie dans une série linéaire. La correspondance (α, β) considérée est à valence γ (n° 339).

Si $\gamma < 0$, soient x' un autre point de C et $y_1', y_2', \ldots, y_\beta'$ ses points homologues. On a

$$I_k(y_1) + \ldots + I_k(y_\beta) - \gamma I_k(x') \equiv I_k(y_1') + \ldots + I_k(y_\beta') - \gamma I_k(x) ,$$
$$(\text{mod. périodes}) \quad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

et, d'après le théorème d'Abel, les groupes

$$\gamma x' + y_1 + \ldots + y_\beta , \qquad \gamma x + y_1' + \ldots + y_\beta'$$

sont équivalents. La correspondance (α, β) est à valence négative γ (n° 339).

Dans le second cas, lorsque les relations (4) ne sont pas des identités, la correspondance (α, β) est appelée *correspondance singulière*. L'existence d'une correspondance singulière sur une courbe C implique celle de relations entre les périodes des intégrales de première espèce, par conséquent, la courbe C est particulière. Sur une courbe générale, seules des correspondances à valence peuvent exister.

420. Interprétation géométrique de Rosati. — Lorsque le point x décrit le cycle σ_i, les points y homologues décrivent des cycles dont la somme est un cycle σ_i'. Les relations (2) et (3) traduisent les homologies

$$\sigma_i' \sim h_{1i}\sigma_1 + h_{2i}\sigma_2 + \ldots + h_{pi}\sigma_p + g_{1i}\sigma_{p+1} + g_{2i}\sigma_{p+2} + \ldots + g_{pi}\sigma_{2p} ,$$
$$\sigma'_{p+i} \sim H_{1i}\sigma_1 + H_{2i}\sigma_2 + \ldots + H_{pi}\sigma_p + G_{1i}\sigma_{p+1} + G_{2i}\sigma_{p+2} + \ldots + G_{pi}\sigma_{2p} ,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p) .$$

Les points de S_{2p-1} représentant les cycles $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_{2p}$ correspondent à ceux qui représentent les cycles $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2p}$ dans l'homographie Ω d'équations

$$\rho x_i' = h_{i1}x_1 + h_{i2}x_2 + \ldots + h_{ip}x_p + H_{i1}x_{p+1} + H_{i2}x_{p+2} + \ldots + H_{ip}x_{2p} ,$$
$$\rho x'_{p+1} = g_{i1}x_1 + g_{i2}x_2 + \ldots + g_{ip}x_p + G_{i1}x_{p+1} + G_{i2}x_{p+2} + \ldots + G_{ip}x_{2p} ,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p) .$$

Les coefficients des seconds membres sont des entiers et pour cette raison, Ω sera appelé homographie rationnelle.

La somme $\sum_i I_k(y_i)$, considérée comme fonction de x, est une intégrale de première espèce I_k'. Si l'on considère, dans la gerbe Σ_{p-1}, les hyperplans homologues des intégrales normales $I_1, I_2, \ldots, I_p$ comme fondamentaux, les équations (1) donnent, dans cette gerbe, l'homographie H d'équations

$$\begin{aligned} \rho\xi_1' &= \pi_{11}\xi_1 + \pi_{21}\xi_2 + \ldots + \pi_{p1}\xi_p , \\ \rho\xi_2' &= \pi_{12}\xi_1 + \pi_{22}\xi_2 + \ldots + \pi_{p2}\xi_p , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho\xi_p' &= \pi_{1p}\xi_1 + \pi_{2p}\xi_2 + \ldots + \pi_{pp}\xi_p . \end{aligned}$$

A l'hyperplan

$$x_k + \rho_{k1}x_{p+1} + \rho_{k2}x_{p+2} + \ldots + \rho_{kp}x_{2p} = 0 ,$$

de Σ_{p-1}, qui représente I_k, l'homographie Ω^{-1} fait correspondre l'hyperplan

$$\begin{aligned} h_{k1}x_1 + h_{k2}x_2 + \ldots + h_{kp}x_p & \\ + H_{k1}x_{p+1} + H_{k2}x_{p+2} + \ldots + H_{kp}x_{2p} & \\ + x_1\Sigma\rho_{ki}g_{i1} + \ldots + x_p\Sigma\rho_{ki}g_{ip} & \\ + x_{p+1}\Sigma\rho_{ki}G_{i1} + \ldots + x_{2p}\Sigma\rho_{ki}G_{ip} &= 0 . \end{aligned}$$

En tenant compte des équations (2) et (3), cette équation s'écrit

$$\begin{aligned} \pi_{k1}x_1 + \pi_{k2}x_2 + \ldots + \pi_{kp}x_p & \\ + x_{p+1}\Sigma\pi_{ki}\rho_{i1} + \ldots + x_{2p}\Sigma\pi_{ki}\rho_{ip} &= 0 , \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \pi_{k1}(x_1 + \rho_{11}x_{p+1} + \rho_{12}x_{p+2} + \ldots + \rho_{1p}x_{2p}) & \\ + \pi_{k2}(x_2 + \rho_{21}x_{p+1} + \rho_{22}x_{p+2} + \ldots + \rho_{2p}x_{2p}) & \\ + \ldots + \pi_{kp}(x_p + \rho_{p1}x_{p+1} + \ldots + \rho_{pp}x_{2p}) &= 0 . \end{aligned}$$

On en conclut que l'homographie Ω^{-1} détermine, dans la gerbe Σ_{p-1}, l'homographie H.

A une correspondance entre les points de C, *correspond une homographie rationnelle de* S_{2p-1}, *transformant en lui-même l'espace* S_{p-1} *et par suite son conjugué* $\overline{S}_{p-1}$.

Observons que si la correspondance envisagée est à valence, l'homographie associée Ω et par suite l'homographie H, se réduisent à l'identité.

421. Représentation de la correspondance inverse. — Au lieu de considérer les β points y qui correspondent à un point x, fixons l'attention sur les points $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ que l'inverse de la correspondance fait correspondre à un point y. En répétant les raisonnements précédents, nous sommes conduits à considérer les sommes

$$\mathrm{I}_k(x_1) + \mathrm{I}_k(x_2) + \ldots + \mathrm{I}_k(x_\alpha) = \sum_{j=1}^{p} \pi'_{kj}\mathrm{I}_j(y) + \pi_k'.$$

On en déduit alors

$$\pi'_{kl} = h'_{kl} + \sum_i g'_{il}\rho_{ki},$$

$$\sum_i \pi'_{ki}\rho_{il} = \mathrm{H}'_{kl} + \sum_i g'_{il}\rho_{ki},$$

d'où, par élimination des π',

$$\sum_i h'_{ki}\rho_{il} + \sum_{i}\sum_{m} g'_{mi}\rho_{km}\rho_{il} = \mathrm{H}'_{kl} + \Sigma \mathrm{G}_i{}'_{il}\rho_{ki}. \tag{4'}$$

$$(k,\ l = 1, 2, \ldots, p).$$

Ces p^2 relations doivent être une conséquence des p^2 relations (4), car l'existence d'une correspondance implique celle de la correspondance inverse. En identifiant les relations (4) et (4') où les périodes ρ sont données, on trouve

$$h'_{ik} = \mathrm{G}_{ki}, \quad g'_{ik} = -g_{ki}, \quad \mathrm{H}'_{ik} = -\mathrm{H}_{ki}, \quad \mathrm{G}'_{ik} = h_{ki}.$$

Il en résulte que l'homographie rationnelle Ω' associée dans S_{2p-1} à la correspondance inverse, a pour équation

$$\begin{aligned}\rho x_i' = \mathrm{G}_{1i}x_1 + \mathrm{G}_{2i}x_2 + \ldots + \mathrm{G}_{pi}x_p \\ - \mathrm{H}_{1i}x_{p+1} - \mathrm{H}_{2i}x_{p+2} + \ldots + \mathrm{H}_{pi}x_{2p},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho x'_{p+i} = -g_{1i}x_1 - g_{2i}x_2 - \ldots - g_{pi}x_p \\ + h_{1i}x_1 + h_{2i}x_2 + \ldots + h_{pi}x_{2p},\end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p).$$

422. Correspondances symétriques et hémisymétriques. — On dit qu'une correspondance est *symétrique* lorsque les groupes de points que la correspondance et son inverse font correspondre à un point, ont pour différence un groupe de points variable dans une série linéaire.

Si une correspondance est symétrique, les homographies Ω et Ω' coïncident et on doit avoir

$$h_{ik} = \mathrm{G}_{ki}, \quad g_{ik} + g_{ki} = 0, \quad \mathrm{H}_{ik} + \mathrm{H}_{ki} = 0.$$

Une correspondance est dite *hémisymétrique* lorsque la somme des groupes de points que la correspondance et son inverse font correspondre à un même point, varie dans une série linéaire.

Si une correspondance est hémisymétrique, les homographies Ω et Ω' doivent avoir leurs coefficients de mêmes termes de signes contraires, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$h_{ik} = -G_{ki}\,. \qquad g_{ik} = g_{ki} \qquad H_{ik} = H_{ki}\,.$$

423. Système-nul fondamental. — Considérons, dans S_{2p-1}, le système-nul $\wedge$ d'équations

$$\begin{array}{lll} \rho\xi_1 = -x_{p+1}\,, & \rho\xi_2 = -x_{p+2}\,, \ldots, & \rho\xi_p = -x_{2p}\,, \\ \rho\xi_{p+1} = x_1\,, & \rho\xi_{p+2} = x_2\,, \ldots, & \rho\xi_{2p} = x_p\,. \end{array}$$

Les hyperplans images des intégrales $I_1, I_2, \ldots, I_p$ ont respectivement pour pôles les points

$$\begin{array}{llllll} \rho_{11}\,, & \rho_{12}\,, \ldots, & \rho_{1p}\,, -1\,, & 0\,, \ldots, & 0\,, \\ \rho_{21}\,, & \rho_{22}\,, \ldots, & \rho_{2p}\,, 0\,, & -1\,, \ldots, & 0\,, \\ \ldots & & & & \\ \rho_{p1}\,, & \rho_{p2}\,, \ldots, & \rho_{pp}\,, 0\,, & 0\,, \ldots, & -1\,. \end{array}$$

Ces points appartiennent précisément à l'espace S_{p-1}, donc celui-ci est transformé en soi par le système-nul. Il en est par conséquent de même de son conjugué $\overline{S}_{p-1}$.

Observons que l'hyperplan polaire d'un point rationnel par rapport à $\wedge$ est rationnel et réciproquement.

424. Réciprocités associées à une correspondance. — Faisons le produit de l'homographie Ω par le système-nul $\wedge$. Nous obtenons la réciprocité

$$\rho\xi_i' = -g_{i1}x_1 - g_{i2}x_2 - \ldots - g_{ip}x_p \\ \qquad - G_{i1}x_{p+1} - G_{i2}x_{p+2} - \ldots - G_{ip}x_{2p}\,,$$

$$\rho\xi'_{p+i} = h_{i1}x_1 + h_{i2}x_2 + \ldots + h_{ip}x_p \\ \qquad + H_{i1}x_{p+1} + H_{i2}x_{p+2} + \ldots + H_{ip}x_{2p}\,.$$

Cette réciprocité R sera associée à la correspondance (α, β) donnant lieu à Ω.

Supposons que la correspondance soit symétrique. Le déterminant des coefficients de la réciprocité R s'écrit

$$\begin{vmatrix} -g_{ik} & -h_{ki} \\ h_{ik} & H_{ik} \end{vmatrix}\,. \tag{1}$$

Observons que les déterminants $|g_{ik}|$, $|H_{ik}|$ sont symétriques gauches. Par conséquent, le déterminant (1) est lui-même symétrique gauche. Il en résulte que *la réciprocité* R *associée à une correspondance symétrique est un système-nul.*

Supposons maintenant que la correspondance soit hémisymétrique. Le déterminant des coefficients de R s'écrit

$$\begin{vmatrix} -g_{ik} & h_{ki} \\ h_{ik} & H_{ik} \end{vmatrix}\,. \tag{2}$$

Actuellement, les déterminants $|g_{ik}|$, $|H_{ik}|$ sont symétriques et par conséquent le déterminant (2) est symétrique. Par conséquent, *la réciprocité* R *associée à une correspondance hémisymétrique est une polarité.*

Observons que les espaces S_{p-1} et $\overline{S}_{p-1}$ sont transformés en eux-mêmes par les réciprocités R.

Note. — Hurwitz [1] a démontré qu'étant donnés les entiers h, g, H, G, il existe une correspondance singulière entre les points de la courbe C ; sa démonstration utilise les fonctions Θ à p variables et pour cette raison sort du cadre que nous nous sommes tracé. A une homographie Ω de S_{2p-1} est donc associée une correspondance entre les points de la courbe C.

Ajoutons que Hurwitz a démontré que le nombre des points unis d'une correspondance singulière est donné par

$$\alpha + \beta - (h_{11} + h_{22} + \ldots + h_{pp} + G_{11} + G_{22} + \ldots + G_{pp})p\,,$$

formule qui contient comme cas particulier celle de Cayley-Brill.

§ 3. *Intégrales abéliennes réductibles*

425. Définition. — Considérons une intégrale de première espèce attachée à une courbe algébrique C. Supposons qu'il existe une ou plusieurs relations à *coefficients entiers* entre les périodes de cette intégrale. Au moyen de ces relations, un certain nombre de ces périodes s'expriment en fonction des autres ; les périodes de l'intégrale sont réductibles. On convient de dire que *l'intégrale est réductible.*

Une intégrale réductible est une intégrale particulière, car les parties réelles des périodes d'une intégrale générale pouvant être choisies arbitrairement, cette intégrale générale ne peut être réductible.

Soient I une intégrale réductible, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ ses périodes le long des cycles $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ ses périodes le long des cycles $\sigma_{p+1}, \sigma_{p+2}, \ldots, \sigma_{2p}$. Nous supposerons qu'il existe $2p-r$ relations à coefficients entiers

$$\begin{aligned}
m_{11}\alpha_1 + m_{12}\alpha_2 + \ldots + m_{1p}\alpha_p + m_{1p+1}\beta_1 + \ldots + m_{12p}\beta_p &= 0\,,\\
m_{21}\alpha_1 + m_{22}\alpha_2 + \ldots + m_{2p}\alpha_p + m_{2p+1}\beta_1 + \ldots + m_{22p}\beta_p &= 0\,,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
m_{2p-r1}\alpha_1 + m_{2p-r2}\alpha_2 + \ldots + m_{2p-rp}\alpha_p \qquad&\\
+ m_{2p-rp+1}\beta_1 + \ldots + m_{2p-r2p}\beta_p &= 0\,,
\end{aligned}$$

entre ses périodes.

[1] *Loc. cit.*

L'intégrale I est représentée, dans la gerbe Σ_{p-1}, par l'hyperplan μ d'équation

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_p x_p + \beta_1 x_{p+1} + \ldots + \beta_p x_{2p} = 0 .$$

Appelons M_i le point de S_{2p-1} dont les coordonnées sont m_{i1}, m_{i2}, ..., m_{i2p}. Les équations précédentes signifient que l'hyperplan μ passe par les points rationnels M_1, M_2, ..., M_{2p-r}. Nous supposerons les relations données linéairement indépendantes ; dans ces conditions, les points M_1, M_2, ..., M_{2p-r} sont indépendants. L'intégrale I a des périodes nulles le long des cycles qu'ils représentent.

Il en est de même des intégrales de première espèce représentées par les hyperplans de S_{2p-1} passant par les mêmes points.

426. Périodes réduites. — Les points M_1, M_2, ..., M_{2p-r} déterminent un espace linéaire rationnel R_{2p-r-1} à $2p-r-1$ dimensions. L'hyperplan μ ne peut contenir un espace rationnel de dimension supérieure à $2p-r-1$, car alors, il existerait, entre les périodes α_i, β_i, plus de $2p-r$ relations linéaires indépendantes.

L'espace rationnel R_{2p-r-1} est l'intersection de r hyperplans rationnels linéairement indépendants. Désignons par μ_1, μ_2, ..., μ_r ces hyperplans. On peut supposer que les coefficients des équations de ces hyperplans sont des entiers. Ecrivons l'équation de l'hyperplan μ_i sous la forme

$$\mu_{i1} x_1 + \mu_{i2} x_2 + \ldots + \mu_{i2p} x_{2p} = 0 ,$$

les μ_{ik} étant donc des entiers.

L'équation de l'hyperplan μ peut s'écrire sous la forme

$$\mu_x = \omega_1 \mu_{1x} + \omega_2 \mu_{2x} + \ldots + \omega_r \mu_{rx}$$

et on a par conséquent

$$\alpha_i = \mu_{1i}\omega_1 + \mu_{2i}\omega_2 + \ldots + \mu_{ri}\omega_r ,$$
$$\beta_i = \mu_{1p+i}\omega_1 + \mu_{2,p+i}\omega_2 + \ldots + \mu_{r,p+i}\omega_r ,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p) .$$

Les périodes d'une intégrale réductible, liées par $2p - r$ *relations linéaires à coefficients entiers, s'expriment en fonctions linéaires à coefficients entiers de* r *quantités.*

Ces quantités ω_1, ω_2, ..., ω_r sont appelées *périodes réduites* de l'intégrale.

Ce théorème est dû à Weierstrass ; la démonstration est de M. G. Fabbrizzi (1).

(1) G. Fabrizzi, *Sugli integrali abeliani riducibili* (*Giornale di Battaglini*, 1919).

427. Systèmes complets et systèmes réguliers d'intégrales réductibles. — Supposons que l'espace S_{p-1} et l'espace R_{2p-r-1} déterminent un espace S_{2p-q-1} à $2p-q-1$ dimensions. Les hyperplans passant par cet espace sont en nombre ∞^{q-1} et les intégrales correspondantes sont réductibles. Le système linéaire qu'elles forment est appelé *système complet d'intégrales réductibles.*

L'imaginaire conjugué $\overline{S}_{2p-q-1}$ de S_{2p-q-1} contient l'imaginaire conjugué $\overline{S}_{p-1}$ de S_{p-1} et l'espace R_{2p-r-1}. Les espaces S_{2p-q-1} et $\overline{S}_{2p-q-1}$ ont en commun un espace réel contenant R_{2p-r-1}. On a donc $2p-r \leqslant 2(p-q)$, d'où $r \geqslant 2q$.

Si un système complet, de dimension $q-1$, *d'intégrales réductibles, a* r *périodes réduites, on a* $r \geqslant 2q$.

Un système complet pour lequel on a $r=2q$, est appelé *système régulier.*

428. Théorème de Poincaré. — *Si une courbe de genre* p *possède un système régulier* ∞^{q-1} *d'intégrales réductibles, elle en possède un second,* ∞^{p-q-1}, *indépendant du premier* (¹).

Par hypothèse, il existe, dans S_{2p-r}, un système linéaire de ∞^{q-1} hyperplans passant par S_{p-1} et par $2(p-q)$ points rationnels indépendants. Soit Σ' ce système ; il a pour base un espace S'_{2p-q-1} contenant l'espace rationnel $R_{2p-2q-1}$ déterminé par les $2(p-q)$ points rationnels indépendants. Cet espace $R_{2p-2q-1}$ coupe S_{p-1} suivant un espace S'_{p-q-1}.

Les hyperplans polaires des points de S'_{p-q-1} par rapport rapport au système-nul $\wedge$ (n° 423), passent par S_{p-1} et forment un système Σ'' ayant pour base un espace S''_{p+q-1}.

L'espace S'_{p-q-1} appartenant à $R_{2p-2q-1}$, l'espace S''_{p+q-1} contient l'espace polaire R_{2q-1} de R_{2p-q-1} par rapport à $\wedge$. Ce dernier étant rationnel, il en est de même de R_{2q-1}. Cet espace R_{2q-1} contient $2q$ points rationnels indépendants et par conséquent Σ'' est l'image d'un système régulier ∞^{p-q-1} d'intégrales réductibles.

Il reste à prouver que Σ' et Σ'' n'ont aucun hyperplan commun. Supposons qu'il en soit autrement ; alors les espaces S'_{p-q-1} d'appui de $R_{2p-2q-1}$ et S''_{q-1} d'appui de R_{2q-1} sur S_{p-1} ont en commun un espace S_l de dimension $l \geqslant 0$. Il en résulte que les espaces $R_{2p-2q-1}$ et R_{2q-1} ont en commun un espace nécessairement rationnel, R_{2l+1}, s'appuyant sur S_{p-1} suivant un espace S_l et sur le conjugué $\overline{S}_{p-1}$ de S_{p-1}, suivant l'espace $\overline{S}_l$, conjugué de S_l. Il en résulte que S_{2l+1} est son propre conjugué par rapport au système-nul $\wedge$.

(¹) H. Poincaré, *Sur les fonctions abéliennes* (*American Journal of Mathematics*, 1886).

Dans la gerbe de sommet S_{2l+1}, $\wedge$ détermine un système-nul possédant des espaces linéaires doubles, rationnels, de dimension $p-1$. Soient R_{p-1} un de ces espaces et $L_1, L_2, \dots, L_p$, p points rationnels qui le déterminent, $L_{p+1}, L_{p+2}, \dots, L_{2p}$, p points rationnels indépendants et indépendants des précédents. Si $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_{2p}$ sont les cycles ayant pour images $L_1, L_2, \dots, L_{2p}$, on a

$$\begin{aligned}
\sigma_1' &\sim l_{11}\sigma_1 + l_{12}\sigma_2 + \dots + l_{12p}\sigma_{2p} \, , \\
\sigma_2' &\sim l_{21}\sigma_1 + l_{22}\sigma_2 + \dots + l_{22p}\sigma_{2p} \, , \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sigma'_{2p} &\sim l_{2p1}\sigma_1 + l_{2p2}\sigma_2 + \dots + l_{2p2p}\sigma_{2p} \, ,
\end{aligned}$$

le déterminant $|l_{ik}|$ étant différent de zéro.

A un hyperplan passant par R_{p-1} et S_{p-1}, correspond une intégrale abélienne I de première espèce ayant des périodes nulles le long des cycles $\sigma_1', \sigma_2', \dots, \sigma_p'$.

Soient $a_k = a_k' + ia_k''$, $b_k = b_k' + ia_k''$ les périodes de I le long des cycles σ_k, σ_{p+k} et $c_k = c_k' + ic_k''$ celle de I le long de σ'_{p+k}. On a

$$\begin{aligned}
0 &= l_{11}a_1 + l_{12}a_2 + \dots + l_{12p}\, b_p \, , \\
0 &= l_{21}a_1 + l_{22}a_2 + \dots + l_{22p}\, b_p \, , \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
0 &= l_{p1}a_1 + l_{p2}a_2 + \dots + l_{p2p}\, b_p \, , \\
c_{p+1} &= l_{p+11}\, a_1 + l_{p+12}\, a_2 + \dots + l_{p+12p}\, b_p \, , \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
c_{2p} &= l_{2p1}\, a_1 + l_{2p2}a_2 + \dots + l_{2p,2p}\, b_p \, .
\end{aligned}$$

En posant $l = |l_{ik}|$ et en appelant λ_{ik} le complément algébrique le l_{ik} dans l, on en déduit

$$\begin{aligned}
la_k &= \lambda_{p+1k} c_{p+1} + \dots + \lambda_{2pk}\, c_{2p} \, , \\
lb_k &= \lambda_{p+1p+k}\, c_{p+1} + \dots + \lambda_{2pp+k}\, c_{2p} \, .
\end{aligned}$$

Egalons les parties réelles et les parties imaginaires dans les relations précédentes, puis formons les expressions $a'b'' - a''b'$. On en tire sans difficulté la relation

$$l^2 \sum_k (a_k'\, b_k'' - a_k''\, b_k') = \sum_{i\,j}\sum c'_{p+i}\, c''_{p+j} \sum (\lambda_{p+ik}\, \lambda_{p+jp+k} - \lambda_{p+jk}\, \lambda_{p+ip+k}) \, ,$$

$$(i, j, k = 1, 2, \dots, p) \, .$$

Le premier membre ne peut être nul d'après l'inégalité de Riemann (n° 394). Au contraire, le second membre est nul. En effet, les pôles par rapport à $\wedge$ des hyperplans opposés à

L_{p+i}, L_{p+j} dans la pyramide de sommets $L_1, L_2, \ldots, L_{2p}$ ont pour coordonnées

$$\begin{array}{llllll} \lambda_{p+i,p+1}, & \lambda_{p+i,p+2}, \ldots, & \lambda_{p+i,2p}, & -\lambda_{p+i1}, \ldots, & -\lambda_{p+ip}, \\ \lambda_{p+j,p+1}, & \lambda_{p+j,p+2}, \ldots, & \lambda_{p+j,2p}, & -\lambda_{p+j1}, \ldots, & \lambda_{p+j,p}. \end{array}$$

Ils appartiennent à R_{p-1} et la droite qui les joint appartient donc au complexe linéaire associé à $\wedge$. Le second membre de l'égalité précédente est donc bien nul. L'absurdité à laquelle nous sommes conduit montre qu'il n'y a aucun hyperplan commun aux systèmes Σ', Σ''. Le théorème est donc démontré.

La démonstration précédente est due à Rosati (1). On peut consulter sur le même objet des travaux de M. Severi (2) et de G. Scorza (3).

(1) Rosati, *Sugli integrali abeliani riducibili* (*loc. cit.*). Voir également Rosati, *Sui sistemi regolari di integrali abeliani riducibili*... (*Annali di Matematica*, 1925-1926, 3e série, t. III, pp. 109-132).

(2) Severi, *Sugli integrali abeliani riducibili* (*Rendiconti Accademia Lincei*, 1er sem. 1914, pp. 581-587, 641-651).

(3) Scorza, *Sugli integrali abeliani riducibili* (*loc. cit.*).

QUATRIÈME PARTIE

LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE PLANE

CHAPITRE VII

LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE COURBES ALGÉBRIQUES PLANES

§ 1. *Les systèmes linéaires et les transformations birationnelles*

429. Définitions. — Nous rappellerons les définitions relatives aux systèmes linéaires de courbes planes et celles de leurs propriétés déjà établies (nos 28 à 33).

On appelle système linéaire de courbes planes l'ensemble des courbes représentées par l'équation

$$\lambda_0 f_0(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_r f_r = 0 , \tag{1}$$

où $f_0(x_1, x_2, x_3)$, f_1, ..., f_r sont des formes algébriques de même degré et λ_0, λ_1, ..., λ_r des paramètres.

Si les formes f_0, f_1, ..., f_r sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire s'il n'est pas possible de satisfaire identiquement à l'équation (1) pour des valeurs non toutes nulles des λ, le système linéaire est de dimension r. Pour r points du plan, il passe une courbe du système et en général une seule.

Un système linéaire est appelé irréductible lorsque ses courbes sont en général irréductibles ; il est dit réductible dans le cas opposé.

Si un système linéaire est réductible, il possède une composante fixe, courbe commune à toutes ses courbes, ou il est composé au moyen d'un faisceau, ou ces deux circonstances se présentent simultanément (Bertini).

La courbe générale d'un système linéaire privé de composante fixe, ne peut posséder un point multiple variable (Bertini).

Le groupe-base d'un système linéaire est l'ensemble des points (propres ou infiniment voisins de points propres) communs à toutes les courbes du système. Les points du groupe-base sont appelés points-base.

L'ensemble de toutes les courbes C, d'un certain ordre m, ayant un comportement déterminé en un groupe de points donnés (propres ou infiniment voisins de points propres) constitue un système linéaire complet, représenté par $|C|$.

Une courbe D, qui n'est pas rencontrée en dehors des points-base d'un système linéaire $|C|$ par les courbes de ce système, est appelée courbe fondamentale de ce système. Les courbes C passant par un point de D, distinct des points-base de $|C|$, contiennent cette courbe comme partie.

430. Caractères d'un système linéaire. — Les caractères d'un système linéaire $|C|$ sont :

1° Le *degré* n, nombre de points communs à deux courbes du système, variables avec ces courbes, c'est-à-dire nombre de points communs à ces deux courbes, en dehors des points-base ;

2° Le *genre* π, genre de la courbe générale du système ;

3° La *dimension* r.

Observons que le degré d'un système linéaire, privé de composante fixe, composé au moyen d'un faisceau, est nul. En particulier, le degré d'un faisceau est nul.

Inversement, si un système linéaire de dimension $r \geqslant 2$ est de degré nul, les courbes de ce système passant par un point ont nécessairement une partie commune. Le système est donc réductible et composé au moyen d'un faisceau.

431. Transformation birationnelle d'un système linéaire. — Considérons, entre deux plans σ, σ' superposés ou non, une correspondance birationnelle T.

Aux courbes C d'un système linéaire $|C|$ donné dans le plan σ, T fait correspondre dans σ' des courbes C′ formant un système linéaire $|C'|$ de même dimension que $|C|$.

Soient O un point de σ, fondamental pour la transformation T et ω' la courbe fondamentale qui lui correspond dans σ'.

Si O est un point-base de $|C|$, la courbe ω' fait partie de toutes les transformées des courbes C ; c'est une composante fixe de $|C'|$. On conviendra de la supprimer et d'appeler C′ les transformées des courbes C débarrassées des courbes fondamentales de T, correspondant aux points fondamentaux de T appartenant au groupe-base de $|C|$.

Si O n'est pas un point-base de $|C|$, les courbes C′ ne rencontrent pas la courbe ω' en dehors des points-base de $|C'|$; cette courbe ω' est fondamentale pour le système $|C'|$. La courbe ω' appartient à toutes les courbes C′ transformées des courbes C passant par O.

Les systèmes linéaires $|C|$ et $|C'|$ ont même degré et même genre.

Deux systèmes linéaires tels que l'on peut passer de l'un à l'autre par une transformation birationnelle, sont dits *birationnellement équivalents* ou birationnellement identiques.

Deux systèmes linéaires birationnellement équivalents ont mêmes degré, genre et dimension.

432. Familles de systèmes linéaires. — Les transformations birationnelles entre deux plans superposés forment un groupe. En effet, le produit de deux transformations birationnelles est une transformation birationnelle et l'inverse d'une transformation birationnelle est une transformation birationnelle.

La géométrie algébrique plane a pour objet la recherche des propriétés des figures planes qui ne sont pas altérées par les transformations birationnelles.

D'après le théorème de Noether (n^{os} 41-45), le groupe des transformations birationnelles du plan peut être engendré par les transformations quadratiques de celui-ci (et par les homographies, qui peuvent ici être considérées comme des identités). Pour étudier les propriétés de la géométrie algébrique plane, on peut donc se limiter à considérer des transformations quadratiques.

Considérons un système linéaire $|C|$ et l'ensemble des systèmes linéaires qui lui sont birationnellement identiques. Cet ensemble constitue une famille de systèmes linéaires qui peut être définie par un quelconque de ses systèmes.

Supposons que le système linéaire $|C|$, qui définit une famille de systèmes linéaires, possède des points-base auxquels sont infiniment voisins d'autres points-base. Nous savons, d'après un théorème de Noether (n° 23), que l'on peut, par un nombre fini de transformations quadratiques, transformer une courbe de ce système en une courbe n'ayant que des points multiples ordinaires (à tangentes distinctes). Ces transformations quadratiques, appliquées à toutes les courbes du système $|C|$, conduisent à un système linéaire $|C_1|$ n'ayant que des points-base multiples ordinaires pour les courbes C_1. Il peut se faire qu'en un de ces points-base, les courbes C_1 aient des tangentes communes. Des transformations quadratiques, ayant de tels points pour points fondamentaux, permettront de faire correspondre à $|C_1|$, donc à $|C|$, un système linéaire dont tous les points-base sont multiples ordinaires, à tangentes variables, pour les courbes.

Dans une famille de systèmes linéaires de courbes planes, il existe des systèmes n'ayant que des points-base à tangentes variables.

433. Remarque. — On peut définir un système linéaire en se donnant l'ordre de ses courbes et les multiplicités de celles-ci en des points donnés (propres ou infiniment voisins de points propres). Il convient de remarquer que ces données n'impliquent pas la connaissance du groupe-base du système.

Si l'on impose aux courbes C, d'ordre m, de passer respectivement, s_1, s_2, ..., s_ν fois par des points O_1, O_2, ..., O_ν (propres ou infiniment voisins), il se peut que ces courbes aient, en quelques points une multiplicité effective supérieure à la multiplicité assignée. Il se peut également qu'elles passent nécessairement par d'autres points.

Considérons par exemple une cubique ayant un point de rebroussement O_1 et soient O_2, O_3 les points simples infiniment voisins successifs de O_1. Les courbes C assujetties à passer simplement par les points O_1, O_2, O_3 ont nécessairement un point double en O_1. Effectuons en effet une transformation quadratique ayant O_1 comme point fondamental. Aux points O_2, O_3 correspondent deux points O_2', O_3' infiniment voisins situés sur la droite fondamentale homologue de O_1. Aux courbes C correspondent des courbes C' passant par O_2', O_3' ou ayant un point double en O_2' ; les courbes C ont donc un point double en O_1 (en général un point de rebroussement ordinaire).

D'autre part, on sait que les cubiques planes passant par huit points, passent nécessairement par un neuvième point.

434. Série caractéristique d'un système linéaire. — Soit $|C|$ un système linéaire irréductible de degré n, de genre π et de dimension r.

Sur une courbe C déterminée, les autres courbes du système découpent, en dehors de la base, ∞^{r-1} groupes de n points formant une série linéaire g_n^{r-1} appelée *série caractéristique* du système.

Il est clair que les séries caractéristiques de deux systèmes linéaires, birationnellement identiques, se correspondent. Pour étudier la série caractéristique, nous pouvons donc supposer que le système $|C|$ possède ν points-base O_1, O_2, ..., O_ν respectivement multiples d'ordres s_1, s_2, ..., s_ν, à tangentes variables. Soit m l'ordre des courbes C. Nous avons

$$n = m^2 - \Sigma s^2 , \quad \pi = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{2}\Sigma s(s-1) ,$$

$$r \geqslant \frac{1}{2} m(m+3) - \frac{1}{2}\Sigma s(s+1).$$

On en déduit

$$n - \pi \leqslant r - 1 .$$

Si la série caractéristique g_n^{r-1} est non spéciale, elle appartient à une série linéaire complète de dimension $n-\pi$, et on a

$$r-1=n-\pi.$$

En d'autres termes, la série caractéristique est complète.

Mais si la série caractéristique a l'indice de spécialité i, elle appartient à une série complète de dimension $n-\pi+i$; le raisonnement précédent ne permet plus d'affirmer que la série caractéristique est complète. Cette propriété reste cependant vraie et sera démontrée dans un instant.

Observons que si le système $|C|$ est de genre $\pi=0$, la série caractéristique est certainement non spéciale et par suite complète.

Si $\pi=1$, la série canonique est d'ordre 0, donc si $r>1$, la série caractéristique, qui a l'ordre $n>0$ puisque $|C|$ est par hypothèse irréductible, est non spéciale et complète.

La série caractéristique d'un système linéaire complet de courbes rationnelles, ou d'un système linéaire complet de courbes elliptiques de dimension supérieure à l'unité, est complète.

435. Théorème. — *La série caractéristique d'un système linéaire irréductible et complet, est complète.*

Reprenons le système linéaire $|C|$ dont les courbes ont des tangentes variables aux points-base. Nous supposerons qu'il est de genre $\pi>1$.

Les courbes d'ordre $m-3$ passant respectivement s_1-1 fois, s_2-1 fois, ..., $s_\nu-1$ fois par O_1, O_2, ..., O_ν forment un système linéaire de dimension au moins égale à

$$\frac{1}{2}m(m-3)-\frac{1}{2}\Sigma s(s-1)=\pi-1.$$

Elles découpent sur une courbe C, en dehors des points-base des groupes de

$$m(m-3)-\Sigma s(s-1)=2\pi-2$$

points. Ces groupes sont nécessairement les groupes canoniques de la courbe C. Par conséquent, les courbes d'ordre $m-3$ envisagées découpent sur une courbe C la série canonique complète et forment un système linéaire de dimension $\pi-1$ (¹).

Les courbes d'ordre m passant s_1-1 fois par O_1, s_2-1

(¹) Lorsque $s_1=s_2=\ldots=s_\nu=2$, on retrouve un théorème établi plus haut (n° 302). Les courbes d'ordre $m-3$ passant s_i-1 fois par O_i $(i=1, 2, \ldots, \nu)$ sont appelées adjointes à la courbe C. Nous les retrouverons plus loin.

fois par O_2, ..., $s_\nu - 1$ fois par O_ν forment un système linéaire de dimension au moins égale à $3m + \pi - 1$ et découpent, sur une courbe C, une série d'ordre $3m + 2\pi - 2$. Cette série est certainement non spéciale et appartient donc à une série complète de dimension $3m + \pi - 2$. Les courbes d'ordre m envisagées forment donc un système linéaire de dimension $3m + \pi - 2$ et découpent sur une courbe C, une série complète d'ordre $3m + 2\pi - 2$.

De la série complète $g^{3m+\pi-2}_{3m+2\pi-2}$ découpée sur une courbe C par les courbes d'ordre m envisagées, soustrayons les s_1 points de C infiniment voisins de O_1, les s_2 points de C infiniment voisins de O_2, ..., les s_ν points de C infiniment voisins de O_ν ; nous obtenons une série complète. Les courbes découpant cette série sur C ont des points multiples d'ordre $s_1 - 1$, $s_2 - 1$, ..., $s_\nu - 1$ en O_1, O_2, ..., O_ν et mêmes tangentes en ces points que la courbe C, donc elles ont les multiplicités effectives s_1, s_2, ..., s_ν en O_1, O_2, ..., O_ν, c'est-à-dire sont des courbes C. Le théorème est donc démontré pour $\pi > 1$; il l'a été plus haut pour $\pi = 0$, 1.

Remarque. — Nous avons supposé, dans la démonstration précédente, que les courbes d'ordre m ayant les multiplicités $s_1 - 1$, $s_2 - 1$, ..., $s_\nu - 1$ en O_1, O_2, ..., O_ν avaient effectivement ces multiplicités. Il se pourrait que ces courbes aient par exemple nécessairement la multiplicité s_1 en O_1, mais elles ne pourraient avoir une multiplicité d'ordre supérieur à s_1, à cause de l'existence du système $|C|$. Sous l'hypothèse envisagée, la démonstration serait analogue.

436. Systèmes linéaires surabondants. — Conservons le système $|C|$. On appelle *dimension virtuelle* ρ de ce système la dimension calculée comme si toutes les conditions imposées aux courbes étaient indépendantes. On a donc

$$\rho = \frac{1}{2} m (m + 3) - \frac{1}{2} \Sigma s (s + 1)$$

et par conséquent

$$\rho - 1 = n - \pi .$$

Soient i l'indice de spécialité de la série caractéristique sur une courbe C et r la dimension effective du système $|C|$. On a, pour le théorème de Riemann-Roch,

$$r - 1 = n - \pi + i .$$

D'autre part, on a $r \geqslant \rho$. Si $i = 0$, on a précisément $r = \rho$ et le système $|C|$ est régulier ; si $i > 0$, on a $r - \rho = i$ et le système $|C|$ est surabondant (n° 30).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linéaire irréductible de courbes planes soit régulier (ou surabondant) est que la série caractéristique soit non spéciale (ou spéciale).

On en déduit que :

Un système linéaire de genre π et de degré supérieur à $2\pi - 2$ est régulier.

Un système linéaire de genre π et de dimension au moins égale à π, est régulier.

La différence $r - \rho$ est appelée *surabondance* du système ; elle est égale à l'indice de spécialité de la série caractéristique.

Observons que si $|C|$ est surabondant, la série caractéristique g_n^{r-1} est spéciale et d'après le théorème de Clifford (n° 311), on a

$$2(r-1) \leqslant n .$$

On en déduit

$$2(r-1) \leqslant \rho + \pi - 1 ,$$

d'où

$$i \leqslant \pi - r + 1 .$$

La surabondance d'un système linéaire de dimension r *et de genre π ne peut dépasser* $\pi - \mathrm{r} + 1$.

Voyons maintenant dans quelles conditions on a $2(r-1) = n$:

1° $r = 1$, $n = 0$. Le système $|C|$ est un faisceau et $i = \pi$; par conséquent :

Dans un faisceau, la surabondance est égale au genre ;

2° $r = \pi$, $n = 2\pi - 2$. La série caractéristique coïncide alors avec la série canonique. On a $i = 1$;

3° Si les courbes C sont hyperelliptiques. En effet, la série canonique d'une courbe C est composée au moyen d'une série g_2^1 d'ordre deux et la série caractéristique est également composée au moyen de cette série. Dans ce cas, les groupes des séries g_2^1 appartenant aux courbes C forment dans le plan une involution I_2 d'ordre deux, à laquelle appartient le système $|C|$ [1].

[1] Au sujet des systèmes linéaires surabondants, on peut consulter CASTELNUOVO, *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* (*Mem. Accad. Torino*, 1891; *Memorie scelte*, Bologne, 1937); — LÉGAUT, *Sur les systèmes de points du plan* (*Annales de la Faculté des Sc. de Toulouse*, 1924); — GAMBIER, *Systèmes linéaires de courbes algébriques de degré donné admettant un groupe donné de points-base* (*Annales de l'Ecole Normale Sup.*, 1924).

437. Addition des systèmes linéaires. — Soient $|C_1|$, $|C_2|$ deux systèmes linéaires de courbes d'ordre m_1, m_2. On appelle somme

$$|C| = |C_1 + C_2|$$

de ces systèmes, le système linéaire complet comprenant toutes les courbes formées d'une courbe C_1 et d'une courbe C_2.

Soient $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$ les points-base de ces systèmes. Nous pouvons supposer qu'en ces points, les courbes des systèmes ont des tangentes variables. Désignons par s_i, s_i' les multiplicités de O_i pour les courbes C_1, C_2 (l'un de ces nombres pouvant être nul si le point n'est point-base que pour un seul des systèmes). Le système $|C|$ sera formé des courbes d'ordre $m_1 + m_2$ passant $s_i + s_i'$ fois par O_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$.

Appelons n_1, π_1 le degré et le genre de $|C_1|$, n_2, π_2 le degré et le genre de $|C_2|$.

En dehors des points-base, une courbe C_1 et une courbe C_2 se coupent en

$$m = m_1 m_2 - \Sigma s s'$$

points. Le degré de $|C|$ a pour valeur

$$n = (m_1 + m_2)^2 - \Sigma (s + s')^2 = n_1 + n_2 + 2m.$$

Le genre π de $|C|$ est donné par

$$\pi = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 - 1)(m_1 + m_2 - 2) - \frac{1}{2}\Sigma(s + s' - 1)(s + s')$$
$$= \pi_1 + \pi_2 + m - 1.$$

438. Soustraction des systèmes linéaires. — Soient $|C|$, $|C_1|$ deux systèmes linéaires. S'il existe des courbes C contenant une courbe C_1 comme partie, les parties restantes C_2 forment un système linéaire. On a

$$|C_1 + C_2| = |C|,$$

ce qui permet de déterminer les points-base du système linéaire $|C_2|$. Il en résulte que le système complet $|C_2|$ est indépendant de la courbe C_1 choisie. Le système $|C_2|$ est la différence des systèmes $|C|$, $|C_1|$ et on écrit

$$|C_2| = |C - C_1|.$$

Conservons les notations précédentes. Le nombre des points d'intersection, en dehors des points-base, d'une courbe C et d'une courbe C_1 est

$$\mu = m + n_1.$$

On en déduit

$$n_2 = n - n_1 - 2\mu ,$$
$$\pi_2 = \pi - \pi_1 - \mu + 1 .$$

Remarque. — Si D est une courbe fondamentale du système $|C|$, les courbes C passant par un point de D distinct des points-base, contiennent cette courbe comme partie ; on construit ainsi le système linéaire $|C - D|$.

§ 2. *Le système adjoint à un système linéaire*

439. Le système jacobien. — Le système jacobien $|C_j|$ d'un système linéaire $|C|$, de dimension $r \geqslant 2$, non composé au moyen d'un faisceau, est le système complet comprenant les jacobiennes de tous les réseaux tirés de $|C|$ (n° 33).

La jacobienne d'un réseau composé au moyen d'un faisceau est indéterminée et réciproquement, si la jacobienne d'un réseau est indéterminée, celui-ci est composé au moyen d'un faisceau (I, n° 69). C'est pour cette raison que nous supposons que $|C|$ n'est pas composé au moyen d'un faisceau.

Si un réseau possède une composante fixe, celle-ci, comptée trois fois, fait partie de la jacobienne du réseau et la jacobienne est complétée par la jacobienne de la partie variable du réseau (I, n° 70). Par conséquent, *si le système* $|C|$ *possède une composante fixe* D, *cette courbe, comptée trois fois, est une composante fixe du système jacobien* $|C_j|$ *et le système* $|C_j - 3D|$ *est le jacobien de* $|C - D|$.

Supposons maintenant que le système $|C|$ possède une courbe fondamentale D. Un réseau tiré de $|C|$ possède D soit comme courbe fondamentale, soit comme composante fixe. Dans le premier cas, D fait partie de la jacobienne du réseau. Dans le second cas, comptée trois fois, elle fait partie de la jacobienne du réseau. On en conclut que *si le système linéaire* $|C|$ *possède une courbe fondamentale, celle-ci est une composante fixe du système jacobien* $|C_j|$.

Etant donné un système linéaire $|C|$, de dimension r, il peut se faire qu'un point P soit double pour ∞^{r-2} courbes C ; dans ces conditions, le point P appartient à toutes les jacobiennes C_j. On convient en général de considérer le point P comme point-base virtuellement non existant du système jacobien $|C_j|$.

440. Théorème fondamental. — *Si* $|C|$, $|D|$ *sont deux systèmes linéaires dont les jacobiens sont* $|C_j|$, $|D_j|$, *on a*

$$|C_j + 3D| = |D_j + 3C| .$$

Considérons le système $|C+D|$. Parmi les réseaux tirés de ce système, il en est qui sont formés d'un réseau tiré de $|C|$ et d'une courbe fixe D. Ce réseau a pour composante fixe D et par conséquent, sa jacobienne comprend la courbe D comptée trois fois. Cette jacobienne appartient au système jacobien $|(C+D)_j|$ de $|C+D|$ et on a

$$|(C+D)_j|=|C_j+3D|.$$

Le même raisonnement donne, en permutant les rôles des systèmes $|C|$, $|D|$,

$$|(C+D)_j|=|D_j+3C|.$$

On a donc

$$|(C+D)_j|=|C_j+3D|=|D_j+3C|.$$

441. Système adjoint. — Considérons un système linéaire $|C|$, de dimension $r \geqslant 2$, non composé au moyen d'un faisceau. Soit $|C_j|$ son jacobien. Désignons par n le degré et par p le genre du système $|C|$.

Fixons l'attention sur une courbe générale C_0 de $|C|$. Les courbes d'un réseau général de $|C|$, contenant la courbe C_0, découpent sur celle-ci une série g_n^1 appartenant à la série caractéristique de C_0. La jacobienne du réseau découpe sur C_0 le groupe jacobien de cette série g_n^1. Si l'on désigne par G un groupe de g_n^1 et par G_j le groupe jacobien de cette série, le groupe G_j-2G, s'il existe, est un groupe canonique de C_0. Par conséquent, les courbes C_j-2C, si elles existent, découpent sur une courbe générale C_0 de $|C|$ des groupes de la série canonique de cette courbe. Plus généralement les courbes C_j-2C, si elles existent, découpent sur une courbe de $|C|$, des groupes canoniques de cette courbe.

Lorsqu'elles existent, les courbes $C'=C_j-2C$ sont appelées *adjointes* aux courbes C et le système

$$|C'|=|C_j-2C|$$

est l'*adjoint* au système $|C|$.

Du théorème fondamental qui vient d'être établi, on déduit que :

Si les adjoints $|C'|$, $|D'|$ *aux systèmes linéaires* $|C|$, $|D|$ *existent, on a*

$$|C'+D|=|D'+C|.$$

Nous avons vu que si un système $|C|$ possède une courbe fondamentale, celle-ci est une composante fixe du système jacobien, par conséquent :

Si un système linéaire $|C|$ *possède une courbe fondamentale, celle-ci est une composante fixe du système adjoint* $|C'|$, *supposé existant.*

442. Les systèmes jacobiens et adjoints, et les transformations birationnelles. — Soit T une transformation birationnelle entre deux plans σ, σ_1. A un réseau $|C|$ de σ, T fait correspondre un réseau $|C_1|$ de σ_1 et à deux courbes C tangentes en un point correspondent deux courbes C_1 tangentes au point homologue. On en conclut que la jacobienne de $|C|$ a pour homologue la jacobienne de $|C_1|$. On en conclut que :

Si deux systèmes linéaires sont birationnellement identiques, il en est de même de leurs jacobiens.

Il convient de faire une remarque. Le jacobien $|C_j|$ du système $|C|$ a pour composantes fixes les courbes fondamentales de $|C|$. Quelques-unes de ces courbes peuvent être fondamentales pour la transformation T dans σ. De même, $|C_1|$ étant le transformé de $|C|$ dans σ_1, il peut exister des courbes fondamentales de T dans σ_1 qui soient fondamentales pour $|C_1|$. Dans l'application du théorème précédent, il est évident que l'on doit défalquer, des systèmes jacobiens $|C_j|$ et $|C_{1j}|$, les courbes fondamentales de la transformation T qui sont fondamentales pour $|C|$ et $|C_1|$. Dans tous les cas, les parties variables des systèmes jacobiens sont des systèmes linéaires birationnellement identiques.

Du théorème précédent, on déduit que :

Si deux systèmes linéaires sont birationnellement identiques, il en est de même de leurs adjoints.

Ce théorème donne lieu à une remarque analogue à la précédente ; nous y reviendrons plus loin.

443. Propriétés du système adjoint. — Considérons un système linéaire $|C|$, de degré n et de genre p, non composé au moyen d'un faisceau et dépourvu de composante fixe. Si les courbes C sont d'ordre m, les courbes du système jacobien sont d'ordre $3m-3$ et par conséquent les adjointes C', si elles existent, sont d'ordre $m-3$.

Supposons que le système $|C|$ n'ait que des points-base isolés O_1, O_2, ..., O_ν, multiples d'ordre s_1, s_2, ..., s_ν pour les courbes C, ces dernières ayant en ces points des tangentes variables. Le point-base O_i est multiple d'ordre $3s_i-1$ pour les courbes C_j et par conséquent multiple d'ordre s_i-1 pour les adjointes C'. Nous avons vu plus haut que ces courbes, si elles existent, découpent sur une courbe C la série canonique complète g_{2p-2}^{p-1} de celle-ci. Par conséquent, le système adjoint a la dimension $p-1$.

Les adjoints de deux systèmes birationnellement identiques étant birationnellement identiques et tout système linéaire étant birationnellement identique à un système ne possédant que des points-base isolés à tangentes variables, on en conclut :

L'adjoint $|C'|$ *à un système linéaire* $|C|$, *quand il existe, découpe sur une courbe* C *la série canonique complète de celle-ci.*

Si le genre p de $|C|$ est au moins égal à 2, le système adjoint existe.

Si $p=0$, le système adjoint ne peut exister, donc :

Un système linéaire de courbes rationnelles est dépourvu de système adjoint.

Si $p=1$, la série canonique d'une courbe de genre un étant d'ordre zéro, le système adjoint à $|C|$ doit se réduire à une courbe isolée, ne rencontrant pas les courbes C en des points variables et par conséquent fondamentale pour le système $|C|$.

Supposons que $|C|$ soit formé de cubiques elliptiques. L'adjoint $|C'|$ ne peut exister, car ses courbes seraient d'ordre zéro. On peut admettre l'existence, dans le plan, d'une courbe d'ordre zéro. Moyennant cette convention de langage, on peut écrire que :

L'adjoint à un système linéaire de courbes de genre un se réduit à une courbe fondamentale du système.

444. Remarque sur la définition du système adjoint. — D'après ce qui précède, on pourrait définir le système adjoint à un système linéaire $|C|$, de courbes d'ordre m, de genre $p \geqslant 1$ et de dimension $r \geqslant 2$, comme formé par les courbes d'ordre $m-3$, passant $s-1$ fois par un point multiple d'ordre s pour les courbes C. Si l'on adopte cette définition, on peut définir le système adjoint à une système linéaire de dimension 0 ou 1, c'est-à-dire à une courbe isolée ou à un faisceau.

Supposons par exemple que $|C|$ soit un faisceau de Halphen, formé de courbes du sixième ordre, ayant neuf points-base doubles (I, n° 178). Les courbes C sont de genre un et le système adjoint à $|C|$ est constitué par la cubique (unique), passant par les neuf points-base. C'est donc un système de dimension zéro, formé par la courbe fondamentale du faisceau.

Il convient de préciser et de démontrer que l'adjoint à un faisceau de genre $p>1$, ou à une courbe isolée de genre $p>1$, est infini.

Soit $|C|$ un système linéaire irréductible de dimension $r \leqslant 1$, de courbes d'ordre m et de genre p. Considérons un système linéaire irréductible $|D|$, de courbes d'ordre m' et de genre p', choisis de telle manière que le système complet $|C+D|$ soit irréductible. On supposera, pour plus de simplicité, que $|D|$ n'a aucun point-base commun avec $|C|$. Nous définirons l'adjoint $|C'|$ à $|C|$ par la relation

$$|C'|=|(C+D)'-D|.$$

Les courbes $C+D$ ont le genre $p+p'+mm'-1$ et le système $|(C+D)'|$ a donc la dimension $p+p'+mm'-2$. Ce système découpe, sur une courbe D, une série d'ordre $mm'+2p'-2$, car on a

$$|(C+D)'|=|C+D'|.$$

Cette série est non spéciale et par conséquent de dimension $mm'+p'-2$. Par conséquent, les courbes $(C+D)'$ passant par $mm'+p'-1$ points d'une courbe D contiennent ces courbes comme partie et le système $|C'|$ a la dimension

$$p+p'+mm'-2-(mm'+p'-1)=p-1.$$

D'autre part, les courbes $(C+D)'$ découpent, sur une courbe C, une série d'ordre $mm'+2p-2$, donc les courbes C' découpent, sur une courbe C, la série canonique complète de celle-ci.

On voit donc que si $p>1$, le système adjoint $|C'|$ à $|C|$ a la dimension $p-1$. De plus, quel que soit $|D|$, on a

$$|C'+D|=|D'+C|.$$

445. Système adjoint pur. — Nous avons vu que les courbes fondamentales d'un système linéaire $|C|$ sont des composantes fixes du système adjoint $|C'|$ à $|C|$, supposé existant (ce qui revient à supposer que le genre des courbes C est supérieur à l'unité). Si d'autre part, $|C|$ possède une composante fixe, celle-ci, comptée trois fois, est une composante fixe du jacobien $|C_j|$ et est par conséquent, comptée une fois, une composante fixe de l'adjoint $|C'|$.

On appelle *système adjoint pur* au système $|C|$ le système adjoint $|C'|$ débarrassé de ses composantes fixes.

Supposons que le système $|C|$ soit dépourvu de composantes fixes. Une courbe fondamentale D du système $|C|$ ne peut rencontrer une courbe C en dehors des points-base du système, par conséquent les courbes du système adjoint pur à $|C|$ découpent, sur les courbes de ce système, la série canonique de celles-ci.

Inversement, supposons que D soit une composante fixe de l'adjoint $|C'|$ à $|C|$. Les courbes C' découpent, sur une courbe C, la série canonique complète et on sait que celle-ci est dépourvue de points fixes, donc la courbe D ne peut rencontrer une courbe C en dehors des points-base de $|C|$ et est donc une courbe fondamentale de ce système.

Désignons par $|C_1|$ le système linéaire formé par les courbes C passant par un point de D, distinct des points-base, c'est-à-dire le système $|C-D|$. On a

$$|C|=|C_1+D|,$$

d'où

$$|C'|=|C_1'+D|.$$

On en conclut que l'adjoint pur à $|C|$ coïncide avec l'adjoint $|C_1'|$ à $|C_1|$. Les courbes de l'adjoint pur découpent donc la série canonique sur les courbes C_1. Cette remarque s'étend immédiatement au cas où $|C|$ possède plusieurs courbes fondamentales.

Dans la suite, la notation $|C'|$ désignera l'adjoint pur à un système linéaire $|C|$.

446. Systèmes adjoints successifs. — Considérons un système linéaire $|C|$, irréductible, de degré n, de genre $p>1$ et de dimension r. Soit m l'ordre des courbes C.

L'adjoint pur $|C'|$ à $|C|$ a la dimension $p-1$ et est formé de courbes d'ordre $m-3$ au plus.

Soit, s'il existe, $|C''|$ l'adjoint pur à $|C'|$. Ce système est appelé le second adjoint à $|C|$; ses courbes ont l'ordre au plus égal à $m-6$.

Si le système $|C''|$ admet un adjoint, soit $|C'''|$ l'adjoint pur à ce système. Il est appelé troisième adjoint à $|C|$ et ses courbes ont l'ordre $m-9$ au plus. Et ainsi de suite.

On obtiendra, par l'opération d'adjonction, une suite de systèmes linéaires

$$|C|, \quad |C'|, \quad |C''|, \quad \ldots,$$

dont chacun est l'adjoint pur du précédent.

Cette suite ne peut comprendre qu'un nombre fini de termes. Elle s'arrêtera en effet lorsque l'on arrivera à un système de courbes rationnelles ou elliptiques. Or, comme l'ordre des courbes C', C'', ... va en décroissant, on arrivera, dans le cas le plus favorable, à un système linéaire de courbes d'ordre trois (elliptiques ou rationnelles) ou d'ordre deux ou un rationnelles).

Observons que si deux systèmes linéaires sont birationnellement équivalents, il en est de même de leurs adjoints purs d'ordre quelconque.

Remarque. — Si p, p', p'', ... sont les genres des systèmes $|C|$, $|C'|$, $|C''|$, ..., cette suite de nombres n'est pas nécessairement décroissante. Il existe des systèmes linéaires dont l'adjoint pur a un genre non inférieur à celui du système de départ. Cette question a été étudiée par M. Nollet (1), au mémoire duquel nous renverrons. Naturellement, la suite $p, p', p'', \ldots$ finit par devenir décroissante.

§ 3. *Réduction des systèmes linéaires des courbes planes*

447. Position du problème. — Considérons une famille de systèmes linéaires de courbes algébriques planes, deux à deux birationnellement équivalents. Pour caractériser cette famille, il suffit d'en connaître un système linéaire, les autres pouvant s'en déduire par des transformations birationnelles. Pour déterminer d'une manière uniforme les systèmes linéaires caractérisant les diverses familles de systèmes linéaires, il faut introduire un caractère projectif, permettant de déterminer ces systèmes.

Nous avons vu que dans toute famille de systèmes linéaires, il existe des systèmes n'ayant que des points-base isolés, les courbes du système ayant en ces points des tangentes variables. Mais il existe évidemment, dans chaque famille, une infinité de systèmes satisfaisant à ces conditions.

On peut également caractériser une famille de systèmes linéaires par le système de la famille dont les courbes ont l'ordre minimum.

Le problème de la classification des systèmes linéaires de courbes algébriques planes a été abordé de la manière suivante : *Déterminer les systèmes linéaires, birationnellement distincts, de genre donné, formés de courbes d'ordre minimum.*

Le nombre de ces systèmes croit rapidement avec le genre et en fait, il n'a été abordé que pour les valeurs du genre inférieures à 5 (1). Les méthodes utilisées par les géomètres peuvent se ranger en trois catégories :

1° Méthode arithmétique ;

2° Méthode des adjoints successifs ;

3° Méthode basée sur la détermination des surfaces rationnelles.

(1) *Recherches sur les systèmes linéaires de courbes algébriques* (*Mémoires de la Société des Sciences de Liège*, 1947).

(2) On trouvera la bibliographie dans notre exposé sur *Les transformations birationnelles du plan* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. XXII, Paris, Gauthier-Villars, 1927) et dans les leçons faites par Enriques à l'Université de Rome, publiées par M. F. Conforto, *Le superficie razionali* (Bologne, Zanichelli, 1939). A cette bibliographie, il faut ajouter les travaux suivants : P. Burniat, *Sur la réduction à l'ordre minimum des systèmes de courbes algébriques planes de genre quelconque* (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1945); — P. Defrise, *Une propriété des systèmes linéaires d'ordre minimum de courbes algébriques planes* (*Mathesis*, 1939); — F. Jongmans, *Les variétés algébriques*

Nous indiquerons brièvement en quoi consistent ces méthodes, puis nous exposerons la solution du problème posé pour les systèmes linéaires de courbes rationnelles et elliptiques.

448. Méthode arithmétique. — Considérons un système linéaire $|C|$, irréductible, de degré n et de genre p, formé de courbes d'ordre m. Supposons qu'il possède des points-base, propres ou non, multiples d'ordre $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$, ces nombres étant rangés dans l'ordre non croissant :

$$s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3 \geqslant \ldots \geqslant s_\nu .$$

Si l'on a

$$s_1 + s_2 + s_3 > m ,$$

on peut, par des transformations quadratiques, transformer ce système en un système de courbes d'ordre inférieur à m. Eventuellement, on utilisera le procédé employé par M. Chisini pour démontrer le théorème de Noether (n° 45).

Si la somme des multiplicités s_1, s_2, s_3 est au plus égale à m, on écrira les équations

$$n = m^2 - \Sigma s^2 , \qquad 2p = (m-1)(m-2) - \Sigma s(s-1) ,$$

qui expriment le degré et le genre du système. On en déduit

$$s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_\nu^2 = m^2 - n ,$$
$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu = 3m + 2p - 2 - n .$$

On est conduit à rechercher les nombres $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ satisfaisant à ces équations sous l'hypothèse $s_1 + s_2 + s_3 \leqslant m$. Il reste alors à examiner quelles sont les solutions arithmétiques trouvées qui correspondent à des systèmes de courbes irréductibles.

449. Méthode des adjoints successifs. — Cette méthode, due à M. Castelnuovo et F. Enriques, a été appliquée au pro-

à courbes-sections de genre quatre (*Mémoires in-8° de l'Académie de Belgique*, 1944); — L. Nollet, *Sur un théorème de M. de Franchis* (*Bull. de l'Acad. de Belgique*, 1946); *La réduction à l'ordre minimum des systèmes linéaires des courbes algébriques planes dotées d'un faisceau de bisécantes elliptiques* (*Ibid.*, 1946); *De la réduction à l'ordre minimum des systèmes linéaires de courbes algébriques planes* (*Ibid.*, 1946); *Recherches sur les systèmes linéaires de courbes algébriques planes* (*Mémoires de la Société des Sciences de Liège*, 1947); — F. Jongmans et L. Nollet, *Un théorème sur les systèmes linéaires de courbes algébriques planes à système adjoint réductible* (*Bull. Acad. de Belgique*, 1948); *Classification des faisceaux de courbes algébriques planes de genre deux* (*Bull. des Sciences mathématiques*, 1948); *La classification des systèmes linéaires de courbes algébriques planes de genre quatre* (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1948).

blème qui nous occupe par G. Ferretti [1]. Elle ne s'applique d'ailleurs qu'aux systèmes dont le degré est au moins égal à l'ordre de la série canonique d'une courbe générale du système.

Soient $|C|$ un système linéaire de courbes d'ordre m, de degré n, de genre p et de dimension r, $|C'|$, $|C''|$, ... ses adjoints sucessifs. On suppose donc $n \geqslant 2p-2$.

Supposons que les systèmes $|C'|$, $|C''|$, ..., $|C^{(k)}|$ existent, mais que les systèmes adjoints suivants $|C^{(k+1)}|$, ..., n'existent pas. Dans ces conditions, si l'ordre m des courbes C est minimum, l'une au moins des alternatives suivantes se présente :

1° L'ordre m est compris entre $3k$ et $3k+2$;

2° Le système possède au moins un point-base de multiplicité $m-2k-1$ ou $m-2k$.

On montre en effet que si les courbes C ont l'ordre $m > 3k+2$, et si les points-base sont de multiplicités au plus égales à $m-2k-2$, on peut construire une transformation de Jonquières qui transforme le système linéaire en un système dont les courbes sont d'ordre inférieur à m.

L'application de cette méthode aux systèmes linéaires de courbes rationnelles ($p=0$) de dimension $r \geqslant 0$ et aux systèmes linéaires de courbes elliptiques ($p=1$) de dimension $r \geqslant 1$, est immédiate, car les premiers sont dépourvus d'adjointes et les seconds sont dépourvus d'adjointes d'indice supérieur à un.

450. Emploi des surfaces rationnelles. — Reprenons le système $|C|$ de degré n, de genre p, de courbes d'ordre m et supposons que sa dimension soit $r \geqslant 3$. Rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. Aux points du plan correspondent dans S_r les points d'une surface rationnelle F, d'ordre n, dont les sections hyperplanes, que nous désignerons encore par C, ont le genre p. Nous avons établi que les surfaces qui représentent deux systèmes linéaires birationnellement identiques, sont projectivement identiques (n° 208). Le problème de la classification des systèmes linéaires dans le groupe des transformations birationnelles du plan revient donc à celui de la classification des surfaces rationnelles dans la géométrie projective. Cette importante observation est due à C. Segre [1].

[1] *Sulla reduzione all' ordine minimo dei sistemi lineari di curve piane irriducibile di genere* p ; *in particolare per i valori* 0, 1, 2 *del genere* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1902).

[2] Nous renvoyons, pour la bibliographie, à notre exposé paru dans le *Mémorial des Sciences mathématiques* et aux travaux cités plus haut (n° 447).

Observons que le système linéaire $|C|$ étant complet, la surface F est normale.

Supposons que le système linéaire $|C|$ appartienne à une involution d'ordre ν, c'est-à-dire que les courbes C passant par un point du plan passent en conséquence par $\nu - 1$ autres points (formant avec le premier un groupe de l'involution I_ν).

La surface F se réduit à une surface d'ordre $\frac{n}{\nu}$ comptée ν fois.

Aux points unis de l'involution I_ν, qui forment en général une courbe, correspondent sur F des points en lesquels on passe d'une des nappes de la surface à une autre nappe.

Supposons le système linéaire $|C|$ simple $(\nu = 1)$ et $p > 1$. A l'adjoint pur $|C'|$ à $|C|$ correspond sur F un système linéaire que nous désignerons encore par $|C'|$, formé de courbes d'ordre $2p - 2$ et de dimension $p - 1$.

Si ce système est réductible, comme il ne peut avoir de partie fixe, il est composé au moyen d'un faisceau $|\gamma|$. Les courbes γ ne peuvent être des droites, car alors la surface F serait une réglée de genre $p > 1$. La série canonique d'une courbe C est donc composée, donc les courbes C sont hyperelliptiques et les courbes γ sont des coniques.

Si le système $|C'|$ est irréductible, le genre de ces courbes admet un maximum donné par une formule de Castelnuovo (n° 322). On sera amené à examiner les différentes valeurs possibles du genre.

On conçoit que, pour des valeurs assez faibles de p, ce procédé peut conduire assez rapidement à la classification des systèmes linéaires.

451. Un lemme sur les systèmes linéaires de courbes algébriques planes. — Supposons que le système linéaire complet irréductible $|C|$, de degré n, de genre p et de dimension r, formé de courbes d'ordre m, ait ν points-base respectivement multiples d'ordre $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$. Nous supposerons ces nombres rangés dans l'ordre non croissant :

$$s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3 \geqslant \ldots \geqslant s_\nu$$

et que les points-base sont propres ou infiniment voisins les uns des autres, en tout ou en partie.

Nous avons

$$\Sigma s^2 = m^2 - n, \qquad \Sigma s = 3m - n + 2(p-1),$$

les sommations s'étendent à tous les points-base.

Posons, pour abréger, en supposant $\nu \geqslant 3$,

$$\Sigma' s^2 = \Sigma s^2 - (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2), \qquad \Sigma' s = \Sigma s - (s_1 + s_2 + s_3).$$

On peut écrire

$$s_3 \Sigma' s - \Sigma' s^2 = m\,(3\,s_3 - m) - n\,(s_3 - 1) \\ + 2\,s_3\,(p-1) - s_3\,(s_1 + s_2) + s_1^{\,2} + s_2^{\,2},$$

$$s_3 \Sigma' s - \Sigma' s^2 = \sum_{i=4}^{\nu} s_3\,(s_3 - s_i) \geqslant 0\,,$$

donc

$$- n\,(s_3 - 1) + 2\,s_3\,(p-1) - s_3\,(s_1 + s_2) + s_1^{\,2} + s_2^{\,2} \\ \geqslant m\,(m - 3\,s_3)\,. \quad (1)$$

Supposons en premier lieu que l'on ait

$$m \geqslant s_1 + s_2 + s_3\,. \quad (2)$$

Alors, on a $m \geqslant 3\,s_3$ et

$$m(m - 3\,s_3) \geqslant (s_1 + s_2 + s_3)\,(s_1 + s_2 - 2\,s_3)\,.$$

L'inégalité (1) donne

$$n - s_3(n - 2\,p + 2) - 2\,(s_1 s_2 - s_3^{\,2}) \geqslant 0\,. \quad (3)$$

On a

$$s_1 s_2 - s_3^{\,2} \geqslant 0\,,$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour $s_1 = s_2 = s_3$. On trouve donc

$$n - s_3(n - 2\,p + 2) \geqslant 0$$

comme conséquence de l'inégalité (2).

On ne peut donc avoir

$$n - s_3(n - 2\,p + 2) < 0$$

que si

$$m < s_1 + s_2 + s_3\,.$$

Observons que l'on ne peut avoir

$$n - s_3(n - 2\,p + 2) = 0$$

que si

$$s_1 = s_2 = s_3\,.$$

Si le système linéaire $|C|$ *possède au moins trois points-base et si* s_1, s_2, s_3 *sont les multiplicités les plus élevées de ces points, rangées par ordre non croissant, on a*

$$n - s_3(n - 2\,p + 2) \geqslant 0 \quad \textit{si} \quad m \geqslant s_1 + s_2 + s_3\,,$$

la première inégalité ne pouvant être une égalité que si $s_1 = s_2 = s_3$ *et*

$$m < s_1 + s_2 + s_3 \quad si \quad n - s_3(n - 2p + 2) < 0 .$$

452. Lemme de Chisini. — Considérons un système linéaire $|C|$ irréductible, de degré n, de genre p et de dimension r, formée de courbes C d'ordre m. Soit O un des points-base de multiplicité maximum s, auquel sont infiniment voisins d'autres points-base du système. Effectuons une transformation quadratique ayant O comme point fondamental. A certains points-base de $|C|$, infiniment voisins de O (dans les domaines des différents ordres de ce point) correspondront des points (distincts ou infiniment voisins) situés sur la droite fondamentale homologue de O. Nous désignerons ces points par $O_1, O_2, \ldots, O_k$, par $s_1, s_2, \ldots, s_k$ leurs multiplicités pour les courbes C. Pour abréger, nous les appellerons les *points proches* de O. Nous supposerons que l'on a

$$s + s_1 + s_2 + \ldots + s_k > m . \tag{1}$$

Soient $s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots, s_\nu$ les multiplicités pour les courbes C des autres points-base de $|C|$. Nous avons

$$s^2 + \Sigma s_i^2 = m^2 - n , \qquad s + \Sigma s_i = 3m - n + 2(p-1) ,$$

les sommations étant étendues de 1 à ν.

En vertu de l'hypothèse (1), nous avons $s + \Sigma s_i > m$ et par suite

$$n < 2m + 2(p-1) . \tag{2}$$

Considérons une courbe dégénérée formée par les droites joignant O aux différents autres points-base de $|C|$, la droite passant par le point-base de multiplicité s_i étant comptée s_i fois. Cette courbe est d'ordre Σs_i, passe Σs_i fois par O et virtuellement s_i fois par le point-base de multiplicité s_i. Le nombre des points d'intersection de cette courbe avec une courbe C est donc au moins égal à

$$s\Sigma s_i + \Sigma s_i^2$$

et on a donc

$$m\Sigma s_i - (s\Sigma s_i + \Sigma s_i^2) \geqslant 0 ,$$

d'où

$$(m-s)\Sigma s_i \geqslant \Sigma s_i^2 ,$$

$$(m-s)\Sigma s_i \geqslant m^2 - n - s^2 .$$

En tenant compte de l'inégalité (2), on en déduit

$$(m-s)\Sigma s_i > m(m-2) - 2(p-1) - s^2 . \tag{3}$$

Supposons que l'on puisse avoir $\Sigma s_i \leqslant s$. Alors, l'inégalité (3) donne

$$s > m - 2 - 2\,\frac{p-1}{m}\,.$$

Par conséquent, *si*

$$s \leqslant m - 2 - 2\,\frac{p-1}{m}\,, \quad \textit{on a} \quad s < \Sigma s_i\,.$$

En dehors des points O, O_1, O_2, ..., O_k, le système linéaire C possède un point-base O′ de multiplicité

$$s' \geqslant \frac{s^2_{k+1} + s^2_{k+2} + \ldots + s_\nu^2}{s_{k+1} + s_{k+2} + \ldots + s_\nu}\,.$$

c'est-à-dire

$$s' \geqslant \frac{m^2 - n - s^2 - s_1^2 - \ldots - s_k^2}{3\,m - n + 2\,(p-1) - s - s_1 - \ldots - s_k}\,. \tag{4}$$

On a

$$s_1 \leqslant m - s\,, \quad s_2 \leqslant m - s_1\,, \quad \ldots, \quad s_k \leqslant m - s\,,$$

donc

$$m^2 - n - s^2 - s_1^2 - \ldots - s_k^2 \\ \leqslant (m-s)\,(m + s - s_1 - s_2 - \ldots - s_k) - n\,.$$

D'autre part, on a nécessairement

$$s \geqslant s_1 + s_2 + \ldots + s_k\,,$$

donc on peut écrire

$$m^2 - n - s^2 - s_1^2 - \ldots - s_k^2 \leqslant m(m-s) - n\,.$$

Si l'on suppose

$$s \leqslant m - 2 - 2\,\frac{p-1}{m}\,, \tag{5}$$

on a, en vertu de (2),

$$m(m-s) \geqslant 2\,m + 2(p-1) > n\,,$$

dont le second membre de l'inégalité précédente est positif.

En utilisant l'inégalité (1), on a

$$s' > \frac{m\,(m-s) - n}{2\,m - n + 2\,(p-1)}\,.$$

A fortiori, si $n > 2(p-1)$, nous avons

$$s' > \frac{m-s}{2}.$$

Nous obtenons donc le résultat suivant [1]:

Si l'on a

$$s + s_1 + s_2 + \dots + s_k > m,$$

$$s \leqslant m - 2 - 2\,\frac{p-1}{m}, \qquad n > 2p - 2,$$

le système $|C|$ *possède un point-base multiple d'ordre*

$$s' > \frac{m-s}{2},$$

qui ne peut être un point proche de O.

453. Systèmes linéaires de courbes rationnelles d'ordre minimum. — Supposons que les courbes C sont rationnelles ($p=0$).

Si $|C|$ a au moins trois points-base, le premier lemme (n° 451) donne, pour les points-base de multiplicité maximum, $n - s_3(n+2) \geqslant 0$ si $m \geqslant s_1 + s_2 + s_3$, ce qui est impossible. On a donc toujours $s_1 + s_2 + s_3 > m$.

Si les coniques passant par les points O_1, O_2, O_3 sont irréductibles, on peut abaisser l'ordre des courbes de $|C|$ par une transformation quadratique. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si les points O_2, O_3 sont infiniment voisins de O_1 ou se succèdent sur une branche cuspidale. Nous utiliserons alors le lemme de Chisini. Modifions nos notations. Nous supposerons donc que le point-base O, de multiplicité maximum, a une multiplicité inférieure à $m-1$ et qu'il a des points O_1, O_2, ..., O_k, de multiplicité s_1, s_2, ..., s_k proches de O et tels que

$$s + s_1 + s_2 + \dots + s_k > m.$$

Actuellement, on a $p=0$, donc $n > 2p-2$ ou -2. Il existe donc un point-base O′, de multiplicité $s' > \dfrac{m-s}{2}$.

Parmi les points O_1, O_2, ..., O_k, il y en aura certainement quelques-uns de multiplicité supérieure à $\dfrac{1}{2}(m-s)$. Soient O_1, O_2, ..., O_h ces points. Il suffira alors de reprendre

[1] Ce lemme a été établi par M. Chisini dans le cas des réseaux homaloïdaux (n° 45) et étendu aux systèmes linéaires de courbes rationnelles ou elliptiques par M. CONFORTO (*Le superficie razionali*, Bologne, 1939).

le raisonnement fait à propos des réseaux homaloïdaux (n° 45) pour établir qu'au moyen de $2h$ transformations quadratiques successives, on abaisse l'ordre des courbes C.

Cela étant, un système linéaire de courbes rationnelles d'ordre minimum possède au plus deux points-base ou bien possède un point multiple d'ordre $m-1$ auquel sont proches des points-base nécessairement simples. On en conclut que :

Un système linéaire de courbes planes rationnelles est birationnellement équivalent à l'un des systèmes suivants :

1° *Réseau des droites du plan ;*

2° *Système linéaire* ∞^5 *formé par les coniques du plan ;*

3° *Faisceau de droites ;*

4° *Système formé par les courbes d'ordre* m *ayant un point-base multiple d'ordre* m — 1 *et éventuellement un second point-base simple ;*

5° *Système formé par les courbes d'ordre* m *ayant un point-base multiple d'ordre* m — 1 *et un certain nombre de tangentes distinctes, fixes en ce point.*

Remarque. — Si le système $|C|$ possédait un point base O multiple d'ordre $m-1$ auquel seraient infiniment voisins successifs deux points-base simples O_1, O_2, sur une branche cuspidale, une transformation quadratique obtenue en rapportant projectivement aux droites du plan les coniques passant par O, O_1 et par un point quelconque A, ramènerait $|C|$ à un système de courbes d'ordre m ayant un point multiple d'ordre $m-1$ auquel est infiniment voisin un seul point simple. On en conclut que dans le système 5, la base est constituée par le point O, multiple d'ordre $m-1$, auquel sont infiniment voisins, dans $h \leqslant m-1$ directions différentes, des points-base simples. Le système ne possède plus de points-base dans le domaine du second ordre du point O.

454. Systèmes linéaires de courbes elliptiques d'ordre minimum. — Supposons maintenant que $|C|$ soit formé de courbes elliptiques ($p=1$).

Supposons que le système $|C|$ ait au moins trois points-base et soient s_1, s_2, s_3 les multiplicités les plus élevées de ces points. D'après le lemme établi plus haut (n° 451), si

$$m \geqslant s_1 + s_2 + s_3 ,$$

on a, par l'inégalité (3)

$$n(s-s_3)-2(s_1s_2-s_3^2) \geqslant 0 ,$$

c'est-à-dire soit $s_1=s_2=s_3=1$, soit $n=0$, $s_1=s_2=s_3$.

Dans le premier cas, les courbes C étant dépourvues de points multiples, sont des cubiques et $|C|$ est un système linéaire de cubiques passant par un certain nombre de points.

Dans le second cas, $|C|$ est un faisceau.

Si nous avons

$$n(1-s_3)<0, \qquad m<s_1+s_2+s_3$$

et, si les coniques passant par ces trois points ne sont pas irréductibles, nous appliquerons le lemme de Chisini. Changeons de notations et supposons que $|C|$ possède un point-base O de multiplicité maximum s, auquel sont proches des points O_1, O_2, ..., O_k tels que $s+s_1+s_2+\ldots+s_k>m$.

Pour appliquer le lemme de Chisini, on doit avoir $n>0$, donc $r>1$. Ensuite, on doit avoir $s\leqslant m-2$. Cette condition est toujours réalisée, car une courbe d'ordre m possédant un point multiple d'ordre $m-1$ est rationnelle.

Cela étant, il existe un point-base du système $|C|$ ayant la multiplicité $s'>\dfrac{m-s}{2}$.

Nous prendrons, parmi les points O_1, O_2, ..., O_k, ceux dont la multiplicité est supérieure à $\dfrac{m-s}{2}$. Soient O_1, O_2, ..., O_h ces points. On a certainement $h>0$. En répétant le raisonnement fait pour les réseaux homaloïdaux (n° 45), on voit que par $2h$ transformations quadratiques, on abaisse l'ordre des courbes C.

En dehors des cas déjà rencontrés au début, un système linéaire de courbes elliptiques d'ordre minimum a au plus deux points-base. Le système adjoint, s'il existe, c'est-à-dire si $m>3$, se réduira à une courbe fixe, par conséquent le système possède deux points-base O_1, O_2 et le système adjoint se réduit à la droite O_1O_2 comptée un certain nombre de fois. Comme cette adjointe ne peut rencontrer les courbes C en dehors des points-base, on a $s_1+s_2=m$. On en conclut facilement que l'on a $m=4$, $s_1=s_2=2$, $n=8$.

Supposons maintenant que $|C|$ soit un faisceau ayant ν points-base de multiplicités $s_1=s_2=s_3\geqslant s_4\geqslant\ldots\geqslant s_\nu$. On a

$$\begin{aligned} 3\,s_1^2+s_4^2+\ldots+s_\nu^2 &= m^2\,, \\ 3\,s_1+s_4+\ldots+s_\nu &= 3\,m\,, \end{aligned}$$

d'où

$$s_4\,(s_1-s_4)+\ldots+s_\nu\,(s_1-s_\nu)=m\,(3\,s_1-m)\,.$$

On a d'autre part $m\geqslant 3\,s_1$. Le premier membre de l'égalité précédente est positif ou nul, donc on a $m=3\,s_1$, $s_4=\ldots=s_\nu=s_1$ et par conséquent $\nu=9$.

En résumé :

Un système linéaire de courbes planes elliptiques est birationnellement équivalent à un des systèmes suivants :

1° *Système linéaire de cubiques planes ayant* 0, 1, 2, ..., 7 *points-base simples* ;

2° *Système linéaire de quartiques planes ayant deux points-base doubles* ;

3° *Faisceaux de courbes d'ordre* 3 n *ayant* 9 *points-base multiples d'ordre* n.

Ces faisceaux sont appelés *faisceaux de Halphen*.

455. Faisceaux de Halphen. — Nous avons démontré (I, n° 178) l'existence des faisceaux de Halphen formés de courbes du sixième ordre. Nous allons démontrer l'existence de ces faisceaux lorsque les courbes ont l'ordre $3n$.

Considérons, dans un plan σ, une cubique plane γ_0 et fixons sur cette courbe huit points $A_1, A_2, \ldots, A_8$. Rapportons projectivement les cubiques γ, passant par les six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ aux plans de l'espace et soit F la surface cubique qui correspond point par point au plan σ. A la courbe γ_0 correspond une section plane C_0 de F et aux points A_7, A_8 deux points A_7', A_8', de C_0.

Les courbes d'ordre n ayant un contact d'ordre $n-1$ avec C_0 aux points A_7', A_8', découpent sur C_0 une série g_n^{n-1} d'ordre n et de dimension $n-1$. Cette série possède n^2 groupes formés d'un point compté n fois (n° 364). Soit A_9' un de ces points. Il est toujours possible de le choisir de telle sorte que, ν étant un diviseur quelconque de n, il n'existe pas une courbe d'ordre ν ayant un contact d'ordre $\nu-1$ avec C_0 aux points A_7', A_8', A_9'. Dans ces conditions, il existe une courbe ψ, d'ordre n, irréductible, ayant un contact d'ordre $n-1$ avec la courbe C_0 en A_7', A_8', A_9'.

Les surfaces d'ordre n, linéairement indépendantes et ne contenant pas F comme partie, sont au nombre de

$$\binom{n+3}{3}-\binom{n}{3}=\frac{1}{2}(3\,n^2+3\,n+2)\,.$$

Celles de ces surfaces qui ont un contact d'ordre $n-1$ avec F en A_7', A_8' et un contact d'ordre $n-2$ avec F en A_9' dépendent de

$$\frac{3}{2}n\,(n+1)-n\,(n+1)-\frac{1}{2}n\,(n-1)=n$$

paramètres ; elles ont un contact d'ordre $n-1$ avec C_0 en A_9' l'intersection de F avec une de ces surfaces est une courbe d'ordre $3\,n$ ayant des points multiples d'ordre n en A_7', A_8' et un point multiple d'ordre $n-1$ en A_9'. En ce dernier point, la courbe a une tangente fixe : la tangente à C_0, et $n-2$ tangentes variables. Par conséquent, celles des courbes envisagées assujetties à toucher en A_9', $n-1$ tangentes non situées dans le plan de C_0 ont en A_9' la multiplicité n et dépendent d'un paramètre. Il existe donc un faisceau de surfaces d'ordre n, dont aucune ne contient F comme partie, ayant un contact d'ordre $n-1$ avec F aux points A_7', A_8', A_9'. L'une de ces surfaces est formée du plan de C_0 compté n fois. Aux courbes découpées sur F par ces surfaces correspondent dans le plan des courbes d'ordre $3n$ ayant des points multiples d'ordre n aux points $A_1, A_2, \ldots, A_8$ et au point A_9 de γ_0 qui correspond à A_9'. Ces courbes forment un faisceau de Halphen et celui-ci comprend la courbe γ_0 comptée n fois (1).

Les conditions imposées plus haut aux surfaces d'ordre n sont d'ailleurs indépendantes, car on ne peut évidemment avoir ∞^2 surfaces répondant à ces conditions.

456. Théorème. — *Si un faisceau de Halphen de courbes d'ordre* 3 n *est l'adjoint d'un système linéaire, on a* n $\leqslant 2$.

Supposons qu'un faisceau de Halphen $|C|$ de courbes d'ordre $3n$ ayant les points-base $O_1, O_2, \ldots, O_9$ multiples d'ordre n, puisse être l'adjoint pur à un système linéaire $|K|$. D'une manière précise supposons que l'adjoint pur à $|K|$ soit composé au moyen du faisceau $|C|$. La série canonique d'une courbe K est composée, cette courbe est hyperelliptique et les courbes C rencontrent les courbes K en deux points variables. Si les courbes K sont d'ordre m et passent $s_1, s_2, \ldots, s_9$ fois par $O_1, O_2, \ldots, O_9$, on a

$$n(3m - s_1 - s_2 - \ldots - s_9) = 2 ,$$

d'où $n=1$ ou 2.

Si $n=1$, on voit immédiatement que $|C|$ est l'adjoint à un système linéaire $|K|$ de courbes du sixième ordre ayant huit points-base doubles $O_1, O_2, \ldots, O_8$.

Supposons $n=2$ et observons que trois points-base de $|C|$ ne peuvent se succéder sur une branche cuspidale ni que deux d'entre eux ne peuvent être infiniment voisins à un troisième dans des directions différentes. Par conséquent les coniques passant par trois des points $O_1, O_2, \ldots, O_9$ sont toujours irréductibles et il existe toujours une transformation quadratique ayant trois de ces points comme points fondamentaux. Une telle transformation change $|C|$ en un faisceau de même nature.

Cela étant, nous devons avoir

$$3m - s_1 - s_2 - \ldots - s_9 = 1 .$$

Si l'on a $s_1 + s_2 + s_3 > m$, une transformation quadratique

(1) La démonstration dans le cas $n=2$, est due à R. Sturm ; nous l'avions exposée dans *Mathesis*, 1925. L'extension de cette démonstration au cas $n > 2$ a été faite par M. B. Gambier (*Mathesis*, 1926).

ayant O_1, O_2, O_3 comme points fondamentaux [1] change $|K|$ en un système de courbes d'ordre inférieur à m, ayant comme adjoint pur le faisceau de Halphen transformé du faisceau $|C|$. Il résulte de cette observation que l'on peut supposer que la somme de trois quelconques des nombres $s_1, s_2, \ldots, s_9$ est au plus égale à m. Dans ces conditions, on a nécessairement

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_8 = s\,, \qquad s_9 = s - 1\,, \qquad m = 3s\,.$$

Opérons une transformation quadratique ayant comme points fondamentaux O_1, O_2 et O_9. Au système $|K|$ correspond un système $|K_1|$ de courbes d'ordre $3s+1$ ayant les multiplicités $s+1$ en des points O_1', O_2', s en O_3', ces points étant fondamentaux pour la transformation quadratique envisagée. De plus, les courbes K_1 passant s fois par chacun des points O_3', O_4', ..., O_8' transformés de O_2, O_3, ..., O_8.

L'adjoint pur à $|K_1|$ sera le faisceau $|C_1|$ formé par les sextiques passant deux fois par les points O_1', O_2', ..., O_9'. Par suite, la droite $O_1'O_2'$ doit être fondamentale pour $|K_1|$ et l'on a $s = 2t+1$. L'adjoint pur à $|K_1|$ est composé au moyen du faisceau $|C_1|$, chaque adjointe étant formée de t courbes C_1.

Les courbes K_1 sont de genre $t+1$ et par conséquent, en dehors de O_1', O_2', ..., O_9', elles ont encore des points multiples d'ordre α_1, α_2, ... abaissant le genre de t unités. Ces points doivent se trouver sur la droite fondamentale $O_1'O_2'$ et on a donc

$$\Sigma\alpha = 2t\,, \qquad \Sigma\alpha(\alpha - 1) = 2t\,.$$

Par conséquent, les courbes K_1 possèdent t points doubles A_1, A_2, ..., A_t sur la droite $O_1'O_2'$.

Considérons maintenant les courbes K_1 passant par un point de la droite $O_1'O_2'$ distinct de O_1', O_2' ; elles comprennent cette droite comme partie et sont complétées par des courbes K_2 d'ordre $6t+3$, passant $2t+1$ fois par O_1', O_2', ..., O_9' et une fois par A_1, A_2, ..., A_t. Une courbe K_2 n'est pas rencontrée par une courbe C_1 en dehors de O_1', O_2', ..., O_9' et par conséquent les courbes K_2 sont formées de t courbes C_1 et de la cubique γ passant par O_1', O_2', ..., O_9'. Un des points A_1, A_2, ..., A_t ne peut appartenir à γ, car cette courbe rencontrerait alors les courbes K_1 en $3(6t+4)+1$ points, les courbes K_1 et par suite les courbes K seraient réductibles, contrairement à l'hypothèse. Pour la même raison, une courbe C_1 ne peut passer par deux des points A_1, A_2, ..., A_t. Par conséquent, il existe une seule courbe K_2 formée des t courbes C_1 distinctes passant par A_1, A_2, ..., A_t et par la cubique γ. Le système $|K_1|$ et par suite le système $|K|$ est un faisceau. Observons que les

[1] Le système $|K|$ étant irréductible, les points O_1, O_2, O_3 ne peuvent être en ligne droite.

courbes K_1 rencontrent la courbe γ en un point fixe qui complète la base du faisceau $|K_1|$.

Nous voyons donc que l'adjoint d'un faisceau $|K|$, de genre $t+1$, dont les courbes, d'ordre $6t+3$, passent $2t+1$ fois par les points $O_1, O_2, \ldots, O_8$, et $2t$ fois par le point O_9 et possèdent, dans le domaine de ce point, t points doubles dans des directions différentes, peut être composé au moyen du faisceau $|C|$.

Le théorème est donc démontré. Observons cependant que l'existence du faisceau $|K|$ n'est pas établie ; nous reviendrons plus loin sur cette question (nº 496) et montrerons que l'on a $t=1$. En même temps, nous prouverons l'existence du faisceau $|K|$ (1).

457. Dernier adjoint à un système linéaire. — Considérons un système $|C|$ et ses adjoints successifs $|C'|$, $|C''|$, ... Nous avons déjà observé que le genre de l'adjoint à un système linéaire peut être supérieur au genre de celui-ci, mais les ordres des adjointes successives allant en s'abaissant de trois unités au moins, les genres des adjoints successifs finissent par décroître et on arrivera finalement à un dernier adjoint auquel l'opération d'adjonction cessera d'être applicable. Ce dernier adjoint sera formé de courbes rationnelles ou elliptiques.

Par une transformation birationnelle, il sera donc possible de ramener un système linéaire quelconque à un système dont le dernier adjoint sera un système linéaire de courbes rationnelles ou elliptiques d'ordre minimum.

Nous allons montrer que si le genre du système linéaire $|C|$ est suffisamment élevé, le dernier adjoint ne peut être un faisceau de Halphen de courbes d'ordre six. Nous venons de voir que celui-ci peut composer l'adjoint à un faisceau $|K|$ de courbes d'ordre $6t+3$, de genre $t+1$, ayant huit points-base multiples d'ordre $2t+1$, $O_1, O_2, \ldots, O_8$ et un point-base O_9 multiple d'ordre $2t$, auquel sont infiniment voisins t points doubles. Retournons au faisceau $|K_1|$ de courbes d'ordre $6t+4$, passant $2t+2$ fois par O_1', O_2', $2t+1$ fois par O_3', O_4', ..., O_9' et deux fois par t points doubles $A_1, A_2, \ldots, A_t$ situés sur la droite $O_1'O_2'$. Ce faisceau est l'adjoint d'un système de courbes $|H_1|$, d'ordre $6t+7$, passent $2t+3$ fois par O_1', O_2', $2t+2$ fois par O_3', O_4', ..., O_9' et ayant des tacnodes en A_1, $A_2, \ldots, A_t$, les tangentes tacnodales étant distinctes de la droite $O_1'O_2'$. Le système $|H_1|$ a la dimension zéro, car s'il existait

(1) Voir au sujet de ce théorème : CONFORTO, *Le superficie razionali* (Bologne, 1939) et NOLLET, *Recherches sur les systèmes linéaires de courbes algébriques planes* (*Mémoires de la Société des Sciences de Liège*, 1947).

deux courbes H_1, elles se rencontreraient en $3-4t$ points. La courbe H_1 est de genre deux.

On voit donc que $|K|$ peut être l'adjoint d'une courbe H, de genre deux, d'ordre $6t+6$, ayant huit points multiples d'ordre $2t+2$ et un point multiple d'ordre $2t+1$, auquel sont infiniment voisins successifs, dans t directions, deux points doubles.

On en conclut que :

Un système linéaire de genre suffisamment élevé peut toujours se ramener, par une transformation birationnelle, à un système dont le dernier adjoint est :

Le réseau des droites ;

Un faisceau de droites ;

Le système des coniques ;

Un système de courbes d'ordre n *ayant un point-base multiple d'ordre* n — 1 *et un point-base simple ;*

Un système de courbes d'ordre n *ayant un point-base multiple d'ordre* n — 1 *et un certain nombre de tangentes fixes en ce point ;*

Un système linéaire de cubiques planes ;

Le système linéaire des quartiques ayant deux points-base doubles.

CHAPITRE VIII

APPLICATIONS À LA THÉORIE DES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES

§ 1. *Les transformations birationnelles cycliques*

458. Préliminaires. — Une transformation birationnelle T entre les points d'un plan est dite cyclique de période p si la transformation T^p coïncide avec l'identité, p étant le plus petit entier positif pour lequel cette circonstance se présente.

Les exemples les plus simples de transformations cycliques de période p sont les homographies cycliques, qui sont de deux espèces

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^\alpha x_3 \,, \qquad (1 < \alpha < p)$$
$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon x_3 \,,$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Soit $|H_1|$ un système linéaire irréductible quelconque. Une transformation birationnelle cyclique T de période p lui fait correspondre un système linéaire $|H_2|$. A ce système, T fait correspondre un système linéaire $|H_3|$, et ainsi de suite. On arrive finalement à un système linéaire $|H_p|$, auquel T fait correspondre le système $|H_1|$.

Le système linéaire complet

$$|C| = |H_1 + H_2 + \ldots + H_p|$$

est irréductible et transformé en lui-même par T. A une courbe de $|C|$, T fait correspondre une courbe de $|C|$, distincte ou non de la première.

Observons que par sa construction, le genre du système $|C|$ est aussi grand qu'on le veut.

La transformation T transforme en lui-même l'adjoint pur $|C'|$ à $|C|$. A son tour, l'adjoint pur $|C''|$ à $|C'|$ est transformé en lui-même par T. Et ainsi de suite, jusqu'à l'adjoint d'indice le plus élevé à $|C|$. Cet adjoint d'ordre le plus élevé est un système de courbes rationnelles ou elliptiques, au moins simplement infini. Donc

Une transformation birationnelle cyclique transforme en *soi soit un système linéaire de courbes rationnelles, soit un système linéaire de courbes elliptiques, de dimension au moins égale à l'unité.*

459. Classification des transformations. — Un système linéaire au moins ∞^1 de courbes rationnelles ou elliptiques peut se ramener, par une transformation birationnelle, au réseau des droites, à un faisceau de droites, au système de coniques, à un système linéaire de courbes d'ordre n ayant un point multiple d'ordre $n-1$, à un système linéaire de cubiques, au système linéaire des quartiques ayant deux points doubles ou à un faisceau de Halphen de courbes du sixième ordre. Comme le système en question est le dernier adjoint d'un système linéaire de genre aussi grand qu'on le veut, le faisceau de Halphen peut être exclu. Par conséquent, toute transformation birationnelle cyclique peut se ramener, par une transformation birationnelle, à une transformation laissant invariant un des systèmes linéaires précédents, sauf le dernier. Chacune des transformations ainsi obtenues représentera une classe de transformations birationnelles cycliques.

Observons que si une transformation birationnelle cyclique laisse invariant un système linéaire de courbes sans points-base, c'est nécessairement une homographie. En effet, si n est l'ordre des courbes du système, celui-ci comprend les droites comptées n fois et la transformation fait correspondre à une droite comptée n fois une droite comptée n fois, donc à une droite, une droite. C'est donc une homographie.

Nous pouvons donc négliger, dans l'étude qui va suivre, les transformations qui laissent invariant soit le système des droites, soit le système des coniques, soit le système des cubiques sans points-base. Nous aurons donc à examiner trois types :

a) Transformations laissant invariant soit un faisceau de droites, soit un système de courbes d'ordre n ayant un point-base multiple d'ordre $n-1$;

b) Transformations laissant invariant un système de cubiques ayant au moins un point-base ;

c) Transformations laissant invariant le système des quartiques ayant deux points-base doubles.

460. Transformations du premier type. — Supposons que la transformation birationnelle T, de période p, laisse invariant un système linéaire $|C|$, de courbes d'ordre n, ayant un point base O, multiple d'ordre $n-1$, et éventuellement d'autres points-base simples dont certains peuvent être infiniment voisins de O.

Supposons en premier lieu que les courbes C aient $n-1$ tangentes fixes en O, c'est-à-dire que $|C|$ ait $n-1$ points-base simples infiniment voisins de O, dans des directions différentes. Il existe alors dans $|C|$ des courbes formées de n droites passant par O et ces courbes sont transformées les unes dans les autres par T, donc cette transformation laisse invariant le faisceau de droites de sommet O.

Supposons maintenant que les courbes C aient au moins une tangente variable en O. Alors, le système $|C|$ possède un seul point-base à distance finie de O, ou $\nu < n-1$ points-base infiniment voisins de O (n° 453). Dans tous les cas, il existe des courbes C formées de n droites passant par O et ces droites ne peuvent être toutes fixes, donc T transforme en lui-même le faisceau de droites de sommet O.

Les transformations du second type laissent donc invariant un faisceau de droites et sont par conséquent des transformations de Jonquières (n° 46).

461. Transformations du second type. — Soit $|C|$ un système linéaire de cubiques planes ayant ν points-base O_1, O_2, ..., O_ν $(\nu \geqslant 1)$.

Si $\nu = 1$, le système $|C|$ comprend des courbes formées d'une droite passant par O_1 et d'une droite quelconque comptée deux fois. T transforme cette courbe en une courbe de même nature et par conséquent les droites en droites ; c'est donc une homographie.

Si $\nu = 2$, $|C|$ contient des courbes formées de la droite O_1O_2 et d'une droite comptée deux fois, par suite T transforme les droites en droites et est une homographie.

Si $\nu = 3$, $|C|$ contient des courbes formées d'une droite r et d'une conique γ passant par O_1, O_2, O_3. T fait correspondre à cette courbe une courbe C formée d'une droite r' et d'une conique γ' passant par O_1, O_2, O_3. Si r' correspond à r, γ' correspond à γ et T est une homographie. Si γ' correspond à r et r' à γ, T est une transformation quadratique.

Supposons maintenant que $|C|$ soit un faisceau. Il est l'adjoint d'un système linéaire $|K|$ de sextiques ayant huit points-base doubles O_1, O_2, ..., O_8. La transformation T laissant invariant le faisceau $|C|$, laisse également invariant le système $|K|$.

Il reste en outre comme cas possibles $\nu = 4, 5, 6, 7$.

462. Transformations du troisième type. — Supposons que T laisse invariant le système linéaire des quartiques C ayant deux points-base doubles O_1, O_2 (et non un point-base ultérieur, car alors $|C|$ pourrait se ramener, par une transformation quadratique, à un système de cubiques).

Le système $|C|$ contient les coniques γ passant par O_1, O_2 comptées deux fois, par conséquent T laisse invariant le système $|\gamma|$ formé par ces coniques ; T est donc une homographie ou une transformation quadratique dont O_1, O_2 sont des points fondamentaux.

Si O_2 est infiniment voisin de O_1, T transforme en lui-même le faisceau de droites de sommet O_1.

Si O_1 et O_2 sont à distance finie, T transforme en lui-même chacun des faisceaux de droites de sommets O_1, O_2 ou échange ces faisceaux entre eux. Dans ce dernier cas, en multipliant T par une homographie échangeant entre eux les points O_1, O_2, on obtiendra une transformation laissant invariants les faisceaux de sommets O_1, O_2.

En résumé :

Une transformation birationnelle cyclique du plan est birationnellement équivalente à :

1° *Une homographie périodique ;*

2° *Une transformation de Jonquières laissant invariant un faisceau de droites (et en particulier une transformation quadratique) ;*

3° *Une transformation laissant invariant un système linéaire de cubiques ayant* 4, 5, 6 *ou* 7 *points-base ;*

4° *Une transformation laissant invariant le système des sextiques ayant huit points-base doubles.*

En se basant sur ce théorème, S. Kantor (1) et après lui, d'une manière plus rigoureuse, Winen (2), ont déterminé les transformations cycliques. Nous nous bornerons à étudier les transformations involutives.

463. Transformations birationnelles involutives. — Supposons que la transformation T ait la période $p=2$. Nous considérerons en premier lieu le cas où T laisse invariant un système linéaire $|C|$ de cubiques planes ayant $\nu=4$, 5, 6 ou 7 points-base.

Si $\nu=7$, les couples de points homologues de T forment, avec les points-base $O_1, O_2, \ldots, O_7$ les points communs aux cubiques d'un faisceau. On obtient ainsi ∞^2 couples de points formant une involution du second ordre appelée *involution de Geiser*. Chaque courbe C est transformée en soi par T.

Si $\nu=6$, $|C|$ a le degré trois et chaque courbe C ne peut être transformée en soi par T. Rapportons projectivement les courbes C aux plans de l'espace. Nous obtenons ainsi une surface cubique F en correspondance biunivoque avec le plan de $|C|$. A T correspond une transformation birationnelle T' de F en soi, qui échange entre elles les sections planes et est par

(1) *Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen der Ebene* (Berlin, Mayer et Müller, 1895).

(2) *Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene* (*Math. Annalen,* 1896, t. XLVIII).

conséquent une homographie harmonique. Si T′ est une homologie, le centre d'homologie appartient nécessairement à F et aux sections de F par les plans passant par ce centre correspondent ∞^2 courbes C passant par sept points. On retrouve l'involution de Geiser. Si T′ est une homographie biaxiale, l'un des axes appartient à F et aux sections de cette surface par les plans passant par cet axe correspondent dans le plan de $|C|$ soit un faisceau de droites, soit un faisceau de coniques, soit un faisceau de cubiques ayant comme base un point double et cinq points simples, ce faisceau étant transformé en lui-même par T. Le second et le troisième faisceaux se ramènent à un faisceau de droites par des transformations quadratiques et dans tous les cas, T est birationnellement équivalente à une transformation laissant invariant un faisceau de droites.

Si $\nu = 5$, soit γ la conique passant par les cinq points-base $O_1, O_2, \ldots, O_5$. Supposons γ irréductible. Une droite r du plan et γ forment une courbe C. Si T n'est pas une homographie transformant γ en soi, cette transformation fait correspondre à r une conique passant par trois points-base O_1, O_2, O_3 par exemple et à γ la droite O_4O_5. T est donc une transformation quadratique. Si la conique γ était réductible, c'est-à-dire si trois des points $O_1, O_2, \ldots, O_5$ étaient en ligne droite, T laisserait invariant le système de coniques passant par les deux autres points et serait une homographie ou une transformation quadratique.

Si $\nu = 4$, le système $|C|$ a le degré cinq et chaque courbe C ne peut être transformée en soi. Rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_5 à cinq dimensions. Aux points du plan correspondent ceux d'une surface normale F d'ordre cinq. A la transformation T correspond une transformation birationnelle involutive T′ de F en soi. Cette transformation T′ échange entre elles les sections hyperplanes de F et est par suite une homographie harmonique.

Si T′ est une homologie de centre A, les hyperplans passant par A doivent découper des courbes formant un système linéaire de degré pair et par suite A appartient à F. A ces courbes correspondent des courbes C passant par O_1, O_2, O_3, O_4 et par le point A′ homologue de A. On est donc ramené au cas précédent.

Si T′ n'est pas une homologie, c'est une homographie biaxiale ayant comme axes ponctuels soit une droite et un espace à trois dimensions, soit deux plans. Les hyperplans passant par les axes découpent des courbes transformées en elles-mêmes par T′. On en conclut que le système $|C|$ contient deux systèmes linéaires $|C_1|$, $|C_2|$, ∞^1 au moins, dont les courbes sont transformées en elles-mêmes par T. Une courbe C_1 et une courbe C_2 doivent donc se rencontrer en un nombre pair de points, ce qui n'est possible que si l'un au moins des systèmes $|C_1|$, $|C_2|$ possède une partie fixe. Mais alors, la partie variable de ce système est rationnelle. Il existe un système linéaire de courbes rationnelles, de dimension un, deux, ou trois, transformées en elles-mêmes par T. Ce système se ramène, par des transformations quadratiques, à un faisceau de droites, ou au système des droites, ou à un système de coniques ayant deux points-base. Dans le premier cas, T laisse donc invariant un faisceau de droites, dans le second, T est une homographie. Dans le troisième, l'identité.

Supposons maintenant que T laisse invariant le système des sextiques $|C|$ ayant huit points-base doubles $O_1, O_2, \ldots, O_8$ et par conséquent son adjoint $|C'|$, formé par les cubiques passant par les huits points précédents et par un neuvième point O_9. Le système $|C|$ a le degré quatre, le genre deux et la dimension trois. Les courbes C rencontrent une courbe C' suivant des couples de points formant une série linéaire g_2^1. Sur chaque courbe C' se trouve donc déterminée une série g_2^1. Soient P, P' les points d'un groupe de cette série ; les courbes C passant par un de ces points passent, en conséquence par l'autre et P, P' sont nécessairement homologues dans la transformation T. Les ∞^2 couples de points ainsi obtenus forment une involution appelée *involution de Bertini.*

En résumé, nous avons le théorème de Bertini.

Théorème de Bertini (1). — *Une transformation birationnelle involutive du plan est birationnellement équivalente à :*

1° *Une homologie harmonique ;*

2° *Une transformation de Jonquières, laissant invariant un faisceau de droites (et en particulier une transformation quadratique) ;*

3° *Une transformation dont les couples de points homologues sont les intersections variables des cubiques passant par sept points fixes (Involution de Geiser) ;*

4° *Une transformation dont les couples de points homologues imposent une condition aux sextiques ayant huit points doubles fixes qui doivent les contenir (Involution de Bertini).*

464. Transformations de Jonquières involutives. — Soit T une transformation de Jonquières involutive d'ordre n, dont O est le point fondamental multiple d'ordre $n-1$. Le faisceau de droites de sommet O est invariant et T détermine dans ce faisceau soit l'identité, soit une involution.

(1) Ce théorème est dû à Bertini (*Rendiconti Istituto Lombardo*, 1877). Il marque une étape dans l'évolution de la Géométrie algébrique ; c'est la première fois que des êtres géométriques étaient classés par rapport au groupe des transformations birationnelles.

Plaçons-nous dans le premier cas. La transformation peut être représentée par les équations

$$\rho x_1' = x_1 [x_3 \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}] ,$$
$$\rho x_2' = x_2 [x_3 \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}] ,$$
$$\rho x_3' = x_3 \beta_{n-1} + \alpha_n ,$$

où α_{n-2}, α_{n-1}, β_{n-1}, α_n sont des formes en x_1, x_2 dont le degré est indiqué par l'indice.

La transformation inverse est représentée par

$$\rho' x_1 = x_1' [x_3' \alpha'_{n-2} - \beta'_{n-1}] ,$$
$$\rho' x_2 = x_2' [x_3' \alpha'_{n-2} - \beta'_{n-1}] ,$$
$$\rho' x_3 = x_3' \alpha'_{n-1} + \alpha_n' ,$$

où α'_{n-2}, α'_{n-1}, β'_{n-1}, α'_n représentent les formes α_{n-2}, α_{n-1}, β_{n-1}, α_n où l'on a remplacé x_1, x_2 par x_1', x_2'. Ces équations doivent coïncider avec les premières, ce qui exige $\beta_{n-1} \equiv \alpha_{n-1}$. La transformation a alors pour équations

$$\rho x_1' = x_1 [x_3 \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}] ,$$
$$\rho x_2' = x_2 [x_3 \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}] ,$$
$$\rho x_3' = x_3 \alpha_{n-1} + \alpha_n .$$

Elle possède une courbe unie

$$x_3^2 \alpha_{n-2} - 2 x_3 \alpha_{n-1} - \alpha_n = 0 .$$

Envisageons la seconde hypothèse. Les équations de T peuvent s'écrire

$$\rho x_1' = x_2 [x_3 \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}] ,$$
$$\rho x_2' = x_1 [x_3 \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}] ,$$
$$\rho x_3' = x_3 \beta_{n-1} + \alpha_n .$$

Les équations de la transformation inverse sont

$$\rho' x_1 = x_2' [x_3' \alpha'_{n-2} - \beta'_{n-1}] ,$$
$$\rho' x_2 = x_1' [x_3' \alpha'_{n-2} - \beta'_{n-1}] ,$$
$$\rho' x_3 = x_3' \alpha'_{n-1} + \alpha'_n ,$$

mais où l'on a posé cette fois

$$\alpha'_{n-2} \equiv \alpha_{n-2} (x_2, x_1) , \ldots , \qquad \alpha_n' = \alpha_n (x_2, x_1) .$$

On obtient l'identité des deux groupes de formules précédentes en supposant

$$\alpha_{n-2} (x_2, x_1) \equiv \alpha_{n-2} (x_1, x_2) , \qquad \alpha_n (x_2, x_1) \equiv \alpha_n (x_1, x_2) ,$$
$$\beta_{n-1} (x_2, x_1) \equiv \alpha_{n-1} (x_1, x_2) .$$

Les points unis de la transformation sont situés sur les droites

$$x_1 - x_2 = 0\,, \qquad x_1 + x_2 = 0\,.$$

Observons que si n est impair, on a

$$\alpha_{n-2}(x_1,\ -x_1) = 0\,, \qquad \alpha_n(x_1,\ -x_1) = 0$$

et, sur la droite $x_1 + x_2 = 0$, la transformation donne l'identité.

Si n est pair, la transformation détermine sur chacune des droites $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ une involution du second ordre possédant deux points unis, dont l'un peut d'ailleurs être infiniment voisin de O. La transformation possède donc quatre points unis.

Observons que dans le cas où n est impair, la transformation possède deux points unis sur la droite $x_1 - x_2 = 0$.

§ 2. *Les transformations birationnelles ayant une courbe unie*

465. Préliminaires. — Considérons une transformation birationnelle T ayant une courbe unie D, c'est-à-dire une courbe dont tous les points sont unis pour la transformation. Doehlemann a montré que les équations de la transformation peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= x_1 \varphi_{n-1} + \Phi_m \alpha_{n-m}\,, \\ \rho x_2' &= x_2 \varphi_{n-1} + \Phi_m \beta_{n-m}\,, \\ \rho x_3' &= x_3 \varphi_{n-1} + \Phi_m \gamma_{n-m}\,, \end{aligned}$$

où φ_{n-1}, α_{n-m}, β_{n-m}, γ_{n-m}, Φ_m sont des formes en x_1, x_2, x_3 dont le degré est indiqué par l'indice, $\Phi_m = 0$ étant l'équation de la courbe unie (1).

Le problème de la détermination des transformations ayant une courbe unie a été placé sous son vrai jour par M. Castelnuovo, dans le champ de la Géométrie algébrique (2). Ce géomètre a classé les transformations dont la courbe unie possède une partie irréductible de genre supérieur à l'unité, en utilisant la méthode des adjointes. La méthode de M. Castelnuovo, que nous allons exposer, ne s'applique pas aux cas où les parties irréductibles de la courbe unie sont rationnelles ou ellip-

(1) *Ueber Cremona-Transformationen in der Ebene...* (*Math. Annalen*, 1890, t. XXXIX).

(2) *Sulle transformazioni cremoniane del piano che ammettono una curva fisse* (*Rend. Accad. Lincei*, 1892 ; *Memorie scelte*, Bologne, Zanichelli, 1937).

tiques ; ces hypothèses ont été envisagées par MM. Pompilj (1) et Derwidué (2).

466. Systèmes adjoints à la courbe unie. — Désignons maintenant par D une partie irréductible de la courbe unie de T qui soit de genre $p > 1$. Soit $|D'|$ l'adjoint pur à la courbe D. Deux cas peuvent se présenter.

1° Le système $|D'|$ est irréductible ;

2° Le système $|D'|$ est composé au moyen d'un faisceau $|C|$.

Dans les deux cas, $|D'|$ est transformé en lui-même par T.

Plaçons-nous dans le premier cas et supposons qu'il soit possible de trouver une courbe D' qui ne soit pas transformée en soi par T. Soit D_1' la courbe de $|D'|$ qui lui correspond. La courbe D' rencontre D en $2p-2$ points qui sont unis pour T et qui par conséquent appartiennent à D_1'. Les courbes D_1, D_1' déterminent un faisceau dont la courbe générale ne rencontre pas D en des points variables ; il existe donc une courbe du faisceau qui contient D comme partie. Mais cela est absurde, car les courbes D' sont d'ordre inférieur de trois unités au moins à l'ordre de D. Par conséquent, chaque courbe D' est transformée en soi par T.

Dans le second cas, une courbe D' est formée de $p-1$ courbes de $|C|$, la courbe D est hyperelliptique et les courbes $|C|$ la rencontrent en deux points variables. Le raisonnement précédent peut être repris et on en conclut que chaque courbe C est transformée en soi par T.

Le même raisonnement est applicable aux adjoints successifs de la courbe D lorsqu'ils existent. Par conséquent :

Les courbes adjointes successives à la courbe unie D *sont transformées en elles-mêmes par la transformation* T. *Si un adjoint est composé au moyen d'un faisceau, les courbes de celui-ci sont transformées en elles-mêmes par* T.

On en conclut que :

Il existe un faisceau de courbes rationnelles ou elliptiques transformées en elles-mêmes par la transformation T.

467. Classification des transformations. — Désignons par $|C|$ le faisceau de courbes rationnelles ou elliptiques dont chaque courbe est transformée en soi par T.

Si les courbes C sont rationnelles, on peut, par une trans-

(1) *Sulle transformazioni cremoniane del piano che posseggono una curva di punti uniti* (*Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università di Roma*, 1937).

(2) *Recherches sur les transformations birationnelles* (*Mémoires de la Société des Sciences de Liège*, 1946).

formation birationnelle, ramener $|C|$ à un faisceau de droites. La transformation est alors une transformation de Jonquières dont les équations peuvent s'écrire

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 A : x_2 A : B \,,$$

en posant, avec les notations habituelles,

$$A \equiv x_3 \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} \,, \qquad B \equiv x_3 \beta_{n-1} + \beta_n \,.$$

Supposons maintenant que les courbes C soient elliptiques. Sur une courbe C, T détermine une transformation biunivoque qui possède certainement des points unis, car les courbes C rencontrent certainement la courbe D en des points variables. Nous distinguerons trois cas :

1° La courbe C est à module général. Alors la transformation déterminée par T sur cette courbe est de seconde espèce et par suite involutive. Les courbes C rencontrent la courbe unie D en quatre points variables ;

2° La courbe C est harmonique. La transformation déterminée par T peut être involutive comme dans le cas précédent ou avoir la période quatre et posséder deux points unis. Les courbes C rencontrent alors D en deux points variables et cette courbe est hyperelliptique ;

3° La courbe C est équianharmonique. La transformation déterminée par T est involutive comme dans le cas général, ou a la période trois. Il y a trois points unis sur la courbe C et deux de ceux-ci se trouvent sur D, qui est hyperelliptique.

En résumé :

Théorème de Castelnuovo. — *Si une transformation birationnelle possède une courbe unie irréductible (ou une partie irréductible de la courbe unie) de genre supérieur à l'unité, elle peut se ramener, par une transformation birationnelle, à une transformation de Jonquières, ou c'est une transformation cyclique de période deux, trois ou quatre.*

468. Remarques. — Lorsque le second adjoint pur $|D''|$ à D existe, la transformation est involutive. En effet, les courbes D' et D'' étant transformées chacune en soi par T, les courbes D'' passent par un point P d'une courbe D' passant en conséquence par le point P' de cette courbe que T fait correspondre à P. Il en résulte que les courbes D' sont hyperelliptiques et que T fait correspondre P à P' (cf. Castelnuovo, *loc. cit.*).

§ 3. *Les groupes continus de transformations birationnelles*

469. Propriété fondamentale. — Un groupe continu G de transformations birationnelles est un ensemble de transformations, dépendant d'un certain nombre de paramètres variant d'une manière continue, tel que :

1° Le produit de deux transformations de l'ensemble appartient à l'ensemble ;

2° L'inverse d'une transformation de l'ensemble appartient à l'ensemble.

Les transformations du groupe G sont donc d'un certain ordre n qui ne peut s'abaisser que pour des transformations particulières du groupe.

Considérons un système linéaire de courbes, ∞^1 au moins, et appliquons à ce système une transformation générale T de l'ensemble ; nous obtenons ainsi un système linéaire de courbes d'un certain ordre m. Lorsque la transformation T varie dans le groupe G, nous obtenons une série continue Σ de systèmes linéaires de courbes d'ordre m, série qui est transformée en soi par toutes les transformations du groupe G.

Les courbes d'ordre m appartenant à la série Σ sont comprises dans le système linéaire des courbes d'ordre m du plan. Désignons par $|C|$ le système linéaire de courbes d'ordre m, de dimension minimum, comprenant toutes les courbes de la série Σ. Ce système est transformé en lui-même par toutes les transformations du groupe G, car s'il était transformé en un autre système linéaire $|C_1|$, nécessairement de courbes d'ordre m, $|C|$ et $|C_1|$ auraient en commun un système linéaire contenant les courbes de la série Σ et par conséquent $|C|$ ne serait pas le système de dimension minimum contenant cette série.

Observons que l'on peut supposer, par sa construction, que le genre du système $|C|$ est arbitrairement grand.

Le système linéaire $|C|$ étant invariant pour les transformations du groupe G, il en est de même de ses adjoints successifs et en particulier de son dernier adjoint, constitué par des courbes rationnelles ou elliptiques, de dimension au moins égale à un.

Tout groupe continu de transformations birationnelles laisse invariant un système linéaire, ∞^1 au moins, de courbes rationnelles ou elliptiques.

470. Classification des groupes. — Par une transformation birationnelle, on peut, d'après le théorème précédent, ramener un groupe à un autre laissant invariant :

Soit le système de droites, ou celui des coniques, ou un faisceau de droites, ou un système linéaire de courbes d'ordre n ayant un point-base O multiple d'ordre $n-1$ et un point-base simple à distance finie de O, ou un certain nombre de points-base simples infiniment voisins de O dans des directions différentes ;

Soit un système de cubiques, ou le système des quartiques ayant deux points-base doubles, ou un faisceau de Halphen de courbes du sixième ordre.

Observons que le faisceau de Halphen ne peut être le dernier adjoint d'un système linéaire de genre arbitrairement élevé. D'autre part, si les transformations de G laissent invariant un système linéaire sans points-base, ce sont nécessairement des homographies.

En négligeant le groupe ∞^8 des homographies planes, nous aurons donc à examiner les types suivants :

1° Groupes laissant invariant un système de cubiques ;

2° Groupe laissant invariant le système des quartiques ayant deux points-base doubles ;

3° Groupe laissant invariant un faisceau de droites ou un système de courbes d'ordre n ayant un point-base multiple d'ordre $n-1$.

471. Groupes du premier type. — Soit $|C|$ le système linéaire de cubiques ayant ν points base O_1, O_2, ..., O_ν laissé invariant par les transformations du groupe G.

Si $\nu=1$, les transformations de G sont nécessairement des homographies, car toute autre transformation élève l'ordre des courbes C.

Supposons $\nu \geqslant 2$. Considérons les coniques γ passant par O_1, O_2. La transformation générale de G leur fait correspondre des courbes γ' d'un certain ordre n ayant les multiplicités s_1, s_2, ..., s_ν en O_1, O_2, ..., O_ν et les multiplicités σ_1, σ_2, ..., σ_h en d'autres points fixes éventuels. Les courbes γ' coupent les courbes C en quatre points variables, comme les coniques γ, donc

$$3n=\Sigma s+4\,.$$

Les courbes γ' étant rationnelles, on a

$$(n-1)(n-2)-\Sigma s(s-1)-\Sigma\sigma(\sigma-1)=0\,.$$

Enfin, le système $|\gamma'|$ étant de degré deux comme $|\gamma|$, on a

$$n^2-\Sigma s^2-\Sigma\sigma^2=2\,;$$

On déduit de ces relations $\Sigma\sigma=0$ et par suite, le système $|\gamma'|$ n'a pas de points-base en dehors de O_1, O_2, ..., O_ν.

Le système $|\gamma'|$ a la dimension trois ; et est déterminé par son groupe-base ; il ne varie donc pas quand T varie dans G.

En particulier, si T se réduit à l'identité, $|\gamma'|$ coïncide avec $|\gamma|$. On en conclut que le système des coniques passant par des points-base est transformé en soi par les transformations de G.

Les transformations du groupe G sont par conséquent des homographies ou des transformations quadratiques ayant pour points fondamentaux O_1, O_2. Mais dans ce dernier cas, les cubiques C ne peuvent être transformées en des cubiques C et par conséquent, les groupes du premier type sont des groupes d'homographies.

472. Groupes du second type. — Soit $|C|$ le système de quartiques ayant deux points-base doubles O_1, O_2, transformé en soi par les transformations du groupe G.

Le système linéaire $|\gamma|$ des coniques passant par O_1, O_2 est également transformé en soi par le groupe G. Celui-ci est par conséquent formé par les transformations quadratiques ayant pour points fondamentaux O_1, O_2.

Rapportons projectivement les coniques γ aux plans de l'espace ; nous obtenons une quadrique Q et cette quadrique est générale si O_1 et O_2 sont distincts, est un cône si O_2 est infiniment voisin de O_1. Aux transformations du groupe G correspondent des homographies de l'espace transformant la quadrique Q en soi. On sait que les homographies de l'espace conservant une quadrique sont en nombre ∞^6 si cette quadrique est non conique et en nombre ∞^7 si c'est un cône.

Nous obtenons donc deux groupes continus de transformations quadratiques : Un groupe ∞^6 de transformations quadratiques de premières espèce, ayant deux points fondamentaux fixes et un groupe ∞^7 de transformations quadratiques de seconde espèce ayant les deux points fondamentaux infiniment voisins fixes.

473. Groupes du troisième type. — Désignons par $|C|$ le système des courbes d'ordre n ayant un point-base O multiple d'ordre $n-1$ et un point-base simple O_1 à distance finie de O. Les transformations du groupe G pour lequel le système $|C|$ est invariant, transforment en soi le faisceau de droites du sommet O et sont donc des transformations de Jonquières. Elles transforment également en soi le faisceau de droites de sommet O_1. Par conséquent, ces transformations sont des transformations quadratiques de première espèce ayant comme points fondamentaux O et O_1 ; on retrouve le groupe ∞^6 déjà rencontré.

Appelons maintenant $|C|$ le système linéaire des courbes d'ordre m ayant un point-base O multiple d'ordre $m-1$ auquel sont infiniment voisins $n-1$ points-base simples, dans des directions différentes ($n \leqslant m$). Les courbes C ont donc $n-1$ tangentes fixes en O. Considérons le groupe G laissant invariant le système $|C|$.

Les transformations de G transforment en soi le faisceau de droites de sommet O : ce sont donc des transformations de Jonquières si $m > n$; considérons en particulier les courbes C formées d'une droite variable passant par O et des courbes C_1 d'ordre $m-1$ ayant en O la multiplicité $m-2$ et les mêmes tangentes fixes que les courbes C. Les transformations du groupe G transforment le système $|C_1|$ en soi.

Si $m > n+1$, le raisonnement précédent peut être repris et ainsi de suite, jusqu'au moment où l'on parviendra à un système linéaire $|C_0|$ formé de courbes d'ordre n ayant en O la multiplicité $n-1$ et $n-1$ tangentes fixes .

Le système $|C_0|$ a la dimension $n+1$ et le degré n. Rapportons projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire S_{n+1} ; aux points du plan correspondent ceux d'un cône Q d'ordre n, projetant d'un point O_0 une courbe rationnelle normale d'ordre n située dans un hyperplan ne passant pas par O_0. Aux droites passant par O correspondent les génératrices du cône. Aux transformations du groupe G correspondent les homographies de S_{n+1} conservant le cône Q.

Pour compter le nombre de paramètres dont dépend le groupe G, observons que si H est une homographie de S_{n+1} transformant le cône Q en soi, le sommet O_0 du cône est certainement un point uni de H. Pour déterminer cette homographie, il faudra choisir l'hyperplan uni associé à O_0 ($n+1$ conditions), puis fixer l'homographie déterminée par H sur la section de Q par cet hyperplan (3 conditions), enfin fixer l'homographie entre deux génératrices homologues du cône (une condition). On en conclut que le groupe G dépend de $n+5$ paramètres.

Observons que le groupe ∞^7 de transformations quadratiques rencontré plus haut rentre dans le groupe étudié ici ($n=2$).

Il nous reste à examiner le cas où le groupe G laisse invariant un faisceau de droites de sommet O. Alors, les transformations du groupe G sont des transformations de Jonquières et en appliquant ces transformations aux droites du plan, on construit un système linéaire de courbes d'un certain ordre n, ayant la multiplicité $n-1$ en O, invariant pour le groupe G. On est ainsi ramené à l'étude précédente.

Les groupes continus de transformations birationnelles sont donc complètement déterminés.

474. Théorème d'Enriques. — *Les groupes continus de transformations birationnelles du plan peuvent se ramener,* *par des transformations birationnelles, à l'un des types suivants :*

1° *Groupe* ∞^8 *des homographies ;*

2° *Groupe* ∞^6 *des transformations quadratiques de première espèce ayant deux points fondamentaux fixes ;*

3° *Groupe* ∞^{n+5} *des transformations de Jonquières d'ordre* n *ayant un point multiple d'ordre* $n-1$ *et des tangentes fixes en ce point ;*

Ou à un sous-groupe des groupes précédents.

Ce théorème résume la recherche précédente ; il est dû à F. Enriques [1], qui l'a établi par la méthode utilisée ici. Enriques a poursuivi l'étude du troisième groupe [2], qui fut également étudié plus tard par Morhmann [3].

Le théorème d'Enriques a été retrouvé, par une autre méthode, par M. Fano [4]. Cette méthode présente l'avantage de pouvoir être étendue à l'espace et elle fut utilisée, pour la détermination des groupes continus de transformations birationnelles de l'espace, par Enriques et M. Fano [5].

Observons que le second groupe, celui des transformations quadratiques ayant deux points fondamentaux (distincts) fixes, peut être ramené, par une homographie, au groupe des inversions par rapport aux différents cercles du plan. Les points fondamentaux sont alors les points cycliques.

(1) *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane del piano* (*Rend. Accad. Lincei*, mai 1898).

(2) *Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di Jonquières del piano* (*Rend. Accad. Lincei*, juin 1893).

(3) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1911, t. XXXI et t. XXXII.

(4) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1895, t. X.

(5) *Annali de Matematica*, 1897.

CHAPITRE IX

LES INVOLUTIONS PLANES DU SECOND ORDRE

§ 1. *Correspondances* (1,2) *entre deux plans*

475. Définition. — Considérons deux plans σ, σ' et supposons qu'il existe entre ces plans une correspondance algébrique faisant correspondre à un point de σ un point de σ' et à un point de σ', deux points de σ.

Aux points d'une droite de σ' correspondent les points d'une courbe algébrique C engendrant, lorsque la droite varie, un réseau $|C|$ de degré deux. Le groupe de deux points, communs à deux courbes C en dehors de la base de $|C|$, correspond au point d'intersection des deux droites de σ' homologues de ces courbes. Ces couples de points engendrent une involution I_2 du second ordre et les couples de points des groupes se correspondent dans une transformation birationnelle involutive T, génératrice de l'involution.

Par construction, il existe une projectivité entre les droites de σ' et les courbes du réseau $|C|$.

Nous supposerons que le réseau $|C|$ ne possède que des points-base ordinaires, à tangentes variables. S'il en était autrement, on pourrait toujours ramener $|C|$, par un certain nombre de transformations quadratiques, à un système possédant cette propriété.

476. Eléments fondamentaux de la correspondance. — Soit O un point-base du réseau $|C|$, multiple d'ordre s pour les courbes C. Reprenons rapidement un raisonnement fait antérieurement (n° 37).

Les courbes C touchant en O une droite p forment un faisceau et il leur correspond dans σ' les droites passant par un point P'. Le point P' est l'homologue du point de σ infiniment voisin de O sur la droite p. Lorsque la droite p tourne autour de O, le point P devient une courbe Ω' appelée courbe fondamentale associée au point O.

En général, à un point de Ω' correspond un groupe de l'involution I_2 dont un seul point est infiniment voisin de O. L'autre point du groupe appartient à une courbe Ω qui est la courbe fondamentale associée à O dans la transformation T. Une droite de σ' coupe Ω' en s points et Ω' est donc d'ordre s. La courbe Ω est rencontrée en s points, en dehors de O, par une courbe C. Les courbes Ω et Ω' sont rationnelles.

Considérons maintenant un point O' de σ'. En général, le groupe de I_2 qui correspond au point O' est bien déterminé, mais, pour certaines positions du point O', il peut être indéterminé. Supposons que cette circonstance se présente pour O'. A ce point correspondent ∞^1 groupes de l'involution I_2, engendrant une courbe ω. A une droite passant par O', correspond une courbe C contenant la courbe ω comme partie. Lorsque la droite tourne autour du point O', la partie variable C_1 de C décrit un faisceau.

Soit p' une droite de σ' passant par O' ; à un point P' de p' correspond un groupe de I_2 formé de deux points P_1, P_2. Lorsque le point P' tend vers O', deux cas peuvent se présenter :

1° L'un des points P_1, P_2 tend vers un point de la courbe ω et l'autre vers un point fixe P, appartenant à la base du faisceau $|C_1|$, en dehors de la base de $|C|$. Le premier point doit évidemment se trouver à la fois sur ω et sur la courbe C_1 homologue de p' ;

2° Les deux points P_1, P_2 tendent vers deux points de la courbe ω. Mais alors, $|C_1|$ ne peut avoir de point-base en dehors des points-base de $|C|$. Les positions limites des points P_1, P_2 forment l'intersection de ω et de la courbe C_1 homologue de la droite p'.

Une courbe C ne rencontre pas en général la courbe ω, car autrement, toutes les droites de σ' passeraient par O', donc la courbe ω est fondamentale pour le réseau $|C|$.

Inversement, soit ω une courbe fondamentale du réseau $|C|$. Les courbes C contenant ω sont complétées par des courbes C_1 formant un faisceau. Aux courbes $\omega + C_1$ correspondent dans σ' les droites passant par un point O'. Au point O' correspondent une infinité de couples de points de I_2.

Le point O' est dit *fondamental* pour la transformation et ω est la *courbe fondamentale* qui lui est associée.

477. Points unis et points de diramation. — Un point P de σ est appelé *point uni* de l'involution I_2 si, compté deux fois, il forme un groupe de cette involution. Le point P' qui lui correspond dans σ' est appelé *point de diramation* ou *point de ramification.*

Les courbes C passant par un point uni P ont deux de leurs intersections absorbées en ce point, donc elles se touchent en ce point. Par conséquent, les points unis de I_2 appartiennent à la jacobienne J du réseau $|C|$.

Inversement, si P est un point de la jacobienne J de $|C|$ n'appartenant pas à une courbe fondamentale de ce réseau, les courbes C passant par P sont en général irréductibles et se touchent en ce point, qui est donc un point uni de I_2.

S'il existe une infinité de points unis, ceux-ci forment une courbe appelée *courbe unie* de l'involution.

La jacobienne du réseau $|C|$ *est formée de la courbe unie et des courbes fondamentales du réseau.*

Observons qu'une involution peut ne posséder qu'un nombre fini de points unis, la jacobienne de $|C|$ étant alors formée des courbes fondamentales du réseau.

478. Propriétés de la courbe de diramation. — Nous supposerons que l'involution I_2 possède une courbe unie D et nous désignerons par D′ la courbe de diramation, lieu des points de diramation, dans σ'. Les courbes D et D′ sont en correspondance birationnelle.

Soient P′ un point simple de la courbe de diramation D′ et P le point qui lui correspond sur D. Aux droites passant par P′ correspondent les courbes C passant par P et ayant même tangente en ce point. Cette tangente est en général distincte de la tangente à la courbe D. Il existe une courbe C ayant un point double en P ; il lui correspond une droite de σ' rencontrant D′ en deux points confondus en P′. Cette droite est donc la tangente à D′ en P′.

Aux courbes C *ayant un point double correspondent les tangentes à la courbe de diramation.*

Observons que si la tangente commune aux courbes C passant par P coïncidait avec la tangente en ce point à la courbe D (partie de la jacobienne), cette droite serait une des tangentes en P à la courbe C ayant un point double en P (I, n° 72). Mais alors, cette courbe C rencontrerait les autres courbes C passant par P en trois points confondus en P. Il en résulte qu'un point P possédant cette propriété ne peut appartenir à D. Un tel point doit appartenir à une courbe fondamentale de $|C|$.

Considérons dans σ une courbe H_1 et soit H_2 la courbe, supposée distincte de H_1, que la transformation T génératrice de I_2 lui fait correspondre. Aux couples de I_2 situés sur les courbes H_1, H_2 correspondent dans σ' les points d'une courbe H′. En d'autres termes, à la courbe H′ correspond dans σ la courbe $H_1 + H_2$. L'ordre de la courbe H′ est égal au nombre de points de rencontre d'une courbe C avec chacune des courbes H_1, H_2, en dehors des points-base de $|C|$.

Si R_1 est un point commun à H_1, H_2 non située sur D, son conjugué R_2 appartient aussi à H_1, H_2. Les droites homologues des courbes C passant par R_1, R_2 rencontrent H' en deux points confondus au point R', homologue du couple R_1, R_2. Par conséquent, R' est double pour H'.

Soit maintenant P un point de D appartenant aux courbes H_1, H_2. La courbe H' passe par le point P' de D' homologue de P et le point P' est simple pour H'. A la tangente à D' en P' correspond la courbe C ayant un point double en P, donc cette tangente rencontre H' en deux points confondus en P' et est tangente à H'. La courbe H' touche donc D' en P'. D'une manière plus précise, H' touche D' en chacun de ses points d'intersection.

Partons maintenant de la courbe H' tracée dans σ' et soit m son ordre. Désignons par H la courbe qui lui correspond dans σ ; elle est rencontrée par une courbe C en $2m$ points, en dehors des points-base de $|C|$. Soient P' un point d'intersection de H' et de D', en lequel ces courbes ont des tangentes distinctes et P l'homologue de P' sur D. Une droite passant par P' ne rencontre plus H' qu'en $m-1$ autres points, donc la courbe C correspondante coupe H en deux points confondus en P. En particulier, la courbe C qui a un point double en P rencontre H en deux points confondus en P, donc H a en P même tangente que les courbes C passant par ce point.

Supposons maintenant que H' soit tangente à D' en P'. Les courbes C passant par P rencontrent encore la courbe H en deux points confondus en P, mais la courbe C qui correspond à la tangente à H' et à D' en P', et qui a un point double en P, coupe H' en quatre points confondus en P. Il en résulte que H a un point double en P.

A une courbe de σ' tangente à la courbe de diramation correspond dans σ une courbe ayant un point double au point de la courbe unie homologue du point de contact.

§ 2. *La transformation quadratique involutive*

479. Préliminaires. — Les équations

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2x_3 : x_3x_1 : x_1x_2$$

définissent une transformation quadratique involutive T ayant comme points fondamentaux les sommets $O_1(1, 0, 0)$, $O_2(0, 1, 0)$, $O_3(0, 0, 1)$ du triangle de référence. Aux points infiniment voisins de O_i correspondent les points de la droite $x_i = 0$.

L'involution I_2, engendrée par T, possède quatre points unis $J(1,1,1)$, $J_1(-1,1,1,)$, $J_2(1,-1,1)$, $J_3(1,1,-1)$.

480. Systèmes linéaires de cubiques composées au moyen de l'involution. — Aux droites du plan correspondent les coniques passant par O_1, O_2, O_3. La somme du réseau des droites et de celui des coniques correspondantes est le système $|C|$ des cubiques planes passant par O_1, O_2, O_3 ; ce système est transformé en lui-même par T. Posons

$$X_0 = (x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2),$$
$$X_1 = (x_2+x_3)(x_3-x_1)(x_1-x_2), \qquad Y_1 = (x_2-x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2),$$
$$X_2 = (x_2-x_3)(x_3+x_1)(x_1-x_2), \qquad Y_2 = (x_2+x_3)(x_3-x_1)(x_1+x_2),$$
$$X_3 = (x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_1+x_2), \qquad Y_3 = (x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1-x_2).$$

L'équation du système linéaire $|C|$ peut s'écrire

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2 + \mu_3 Y_3 = 0.$$

Ce système contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I_2, à savoir :

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0,$$
$$\mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2 + \mu_3 Y_3 = 0.$$

Le premier, que nous désignerons par $|C_0|$ a pour points-base O_1, O_2, O_3 et a le degré six. Les six points communs à deux de ces courbes forment trois groupes de I_2.

Le second, qui sera désigné par $|C_1|$, est un réseau ayant pour points-base O_1, O_2, O_3, J, J_1, J_2, J_3 ; il a le degré deux et les points communs à deux de ses courbes forment un groupe de I_2.

481. Représentation de l'involution sur un plan. — Rapportons projectivement les courbes C_1 aux droites d'un plan σ', ce qui revient à interpréter Y_1, Y_2, Y_3 comme coordonnées des points de ce plan.

Considérons le point O_1. Les courbes C_1 tangentes en O_1 à la droite $x_3 = \lambda x_2$ sont données par

$$\mu_1(1-\lambda) - (1+\lambda)(\mu_2 - \mu_3) = 0.$$

Par conséquent, au point infiniment voisin de O_1 situé sur la droite $x_3 = \lambda x_2$ (et au point de la droite $x_1 = 0$ que T lui fait correspondre) correspond dans σ' le point

$$\frac{Y_1}{1-\lambda} = \frac{Y_2}{-(1+\lambda)} = \frac{Y_3}{1+\lambda}.$$

Le lieu de ce point, lorsque λ varie, est la droite $Y_2 + Y_3 = 0$, droite fondamentale associée au point O_1.

De même, aux points O_2, O_3 sont associées les droites fondamentales $Y_3+Y_1=0$, $Y_1+Y_2=0$.

Considérons maintenant le point J. Les courbes C_1 touchant en J la droite

$$\lambda_1(x_1-x_3)+\lambda_2(x_2-x_3)=0$$

sont données par

$$\lambda_1(\mu_1-\mu_2)+\lambda_2(\mu_2-\mu_3)=0\,.$$

Au point infiniment voisin de J sur la droite considérée correspond dans σ' le point

$$\frac{Y_1}{\lambda_1}=\frac{Y_2}{\lambda_2}=\frac{Y_3}{-(\lambda_1+\lambda_2)}\,.$$

Le lieu de ce point est la droite

$$Y_1+Y_2+Y_3=0\,. \tag{1}$$

De même, aux points J_1, J_2, J_3 correspondent respectivement les droites

$$Y_1=0\,,\qquad Y_2=0\,,\qquad Y_3=0\,. \tag{2}$$

Observons qu'entre une droite de σ' et la courbe C_1 homologue, qui est elliptique, nous avons une correspondance (1, 2) possédant sur C_1 quatre points unis J, J_1, J_2, J_3. Par conséquent, les quatre droites (1) et (2) constituent la courbe de diramation de σ'.

A la droite $x_2+x_3=0$, contenant les points O_1, J_2, J_3, fondamentale pour le réseau $|C_1|$, correspond dans σ' le point $O_1'(1, 0, 0)$. De même, aux droites $x_3+x_1=0$, contenant O_2, J_3, J_1 et $x_1+x_2=0$, contenant O_3, J_1, J_2, correspondent respectivement les points $O_2'(0, 1, 0)$ et $O_3'(0, 0, 1)$. Aux droites $x_2=x_3$, contenant O_1, J, J_1, $x_3=x_1$, contenant O_2, J, J_2 et $x_1=x_2$, contenant O_3, J, J_3, correspondent respectivement les points $A_1'(0, 1, -1)$, $A_2'(-1, 0, 1)$, $A_3'(1, -1, 0)$.

A une courbe C_0 correspond dans σ' une courbe C_0' d'ordre trois, car une courbe C_0 est rencontrée en trois couples de I_2 par une courbe C_1. Une courbe C_0 coupe la droite $x_2+x_3=0$, en dehors de O_1, en deux points formant un couple de I_2, donc les courbes C_0' passent par le point O_1'. Pour la même raison, elles passent par les points O_2', O_3', A_1', A_2' et A_3'.

482. L'involution sur une surface du sixième ordre. — Rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_6 à six dimensions ; cela revient à interpréter X_0, X_1, X_2, X_3, Y_0, Y_1, Y_2 comme coordonnées d'un point de cet espace. Aux points du plan correspondent ceux d'une surface F du sixième ordre d'équations

$$Y_2Y_3 = X_0X_1 , \qquad Y_3Y_1 = X_0X_2 , \qquad Y_1Y_2 = X_0X_3 ,$$
$$X_1Y_1 = X_2Y_2 = X_3Y_3 = -X_0(Y_1 + Y_2 + Y_3) ,$$
$$Y_1^2 + X_2X_3 + X_0(X_2 + X_3) = 0 ,$$
$$Y_2^2 + X_3X_1 + X_0(X_3 + X_1) = 0 ,$$
$$Y_3^2 + X_1X_2 + X_0(X_1 + X_2) = 0 ,$$
$$X_1X_2X_3 + X_2X_3X_0 + X_3X_0X_1 + X_0X_1X_2 = 0 .$$

A la transformation T correspond sur F une transformation qui échange entre elles les sections hyperplanes de la surface et qui est par conséquent une homographie H. Les équations de celle-ci sont

$$\frac{X_0'}{X_0} = \frac{X_1'}{X_1} = \frac{X_2'}{X_2} = \frac{X_3'}{X_3} = \frac{Y_1'}{-Y_1} = \frac{Y_2'}{-Y_2} = \frac{Y_3'}{-Y_3} .$$

L'homographie harmonique H possède deux axes ponctuels :

1° Le plan σ', d'équations

$$X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = 0 ;$$

2° L'espace à trois dimensions Σ, d'équations

$$Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0 .$$

Le plan σ' ne rencontre pas la surface F, mais l'espace Σ la rencontre en quatre points $O_0'(1, 0, 0, 0)$, $O_1'(0, 1, 0, 0)$, $O_2'(0, 0, 1, 0)$, $O_3'(0, 0, 0, 1)$, qui sont précisément les points unis de l'involution I_2 engendrée par H sur F et qui correspondent aux points J, J_1, J_2, J_3 respectivement.

Aux courbes C_0 correspondent les sections de F par les hyperplans passant par le plan σ' et aux courbes C_1, les sections par les hyperplans passant par Σ. Nous désignerons ces courbes par les mêmes symboles.

Le plan α, tangent à F en O_0', est uni pour l'homographie H. Il a pour équations

$$X_1 = X_2 = X_3 = 0 , \qquad Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0 .$$

Dans ce plan, H détermine une homologie de centre O_0' dont l'axe appartient au plan σ', par conséquent, les points de F infiniment voisins de O_0' sont unis pour I_2. Un hyperplan passant par σ' et par O_0' contient le plan α, donc les courbes C_0 passant par O_0' ont un point double, à tangentes variables, en ce point.

On arrive à des conclusions analogues pour les points unis O_1', O_2', O_3'.

Observons que les hyperplans passant par Σ coupent F en quatre points fixes O_0', O_1', O_2', O_3' et en deux points variables, formant un groupe de l'involution I_2. En projetant F de Σ sur le plan σ', on retrouve la représentation de l'involution sur le plan σ' étudiée précédemment. Aux points de F infiniment voisins de O_0' par exemple, correspondent sur σ' les points de l'intersection $Y_1+Y_2+Y_3=0$ de ce plan avec α.

Au domaine du point O_1 correspond sur F la droite

$$X_0=-X_1=-Y_2=Y_3\,, \qquad X_2=-X_3=Y_1$$

et à la droite $x_1=0$, la droite

$$X_0=-X_1=Y_2=-Y_3\,, \qquad X_2=-X_3=-Y_1\,,$$

transformée de la première par H. Ces deux droites sont projetées sur σ' suivant la droite $Y_2+Y_3=0$.

483. Représentation de l'involution sur une surface cubique. — Un espace à quatre dimensions passant par σ' coupe F en six points formant trois couples de I_2 ; la droite joignant les points d'un couple s'appuie sur σ' et Σ, par conséquent si l'on projette F de σ' sur Σ, on obtient une surface cubique Φ dont les points représentent les groupes de I_2.

L'équation de la surface Φ est

$$X_1X_2X_3+X_2X_3X_0+X_3X_0X_1+X_0X_1X_2=0\,.$$

Puisque les courbes C_0 passant par O_0' ont un point double à tangentes variables en ce point, O_0' est double conique pour la surface Φ. Il en est de même, pour la même raison, des points O_1', O_2', O_3'.

Il est facile de voir que les arêtes du tétraèdre $O_0'O_1'O_2'O_3'$ correspondent aux côtés du quadrangle complet $JJ_1J_2J_3$. Envisageons par exemple le côté JJ_1, qui a pour équation $x_2=x_3$. Il lui correspond sur F la conique

$$X_2=X_3=Y_1=0\,, \qquad X_0X_1=Y_2Y_3\,,$$

qui est projetée sur Σ suivant la droite $X_2=X_3=0$, de la surface Φ.

Aux couples de I_2 formés d'un point infiniment voisin de O_1 et d'un point de $x_1=0$ correspond la droite

$$X_0+X_1=0\,, \qquad X_2+X_3=0$$

de Φ. De même, aux couples de I_2 comprenant un point infiniment voisin de O_2 ou de O_3 et un point de $x_2=0$ ou de $x_3=0$, correspondent respectivement les points des droites

$$X_0+X_2=0\,, \qquad X_3+X_1=0\,,$$

ou

$$X_0+X_3=0\,, \qquad X_1+X_2=0$$

de la surface Φ.

Appelons C_1' les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C_1. Ce sont des cubiques gauches passant par les points O_0', O_1', O_2', O_3'. A une section hyperplane quelconque de F correspond sur Φ une courbe C' possédant trois points doubles variables. Lorsque cette courbe tend vers une courbe C_0, la courbe C' tend vers une courbe C_0' comptée deux fois, donc C' est la section de Φ par une quadrique. Lorsque C tend vers une courbe C_1, C' tend vers une courbe C_1' comptée deux fois, donc le long d'une courbe C_1' il y a une quadrique Q inscrite dans Φ. Cette quadrique est un cône. En effet, soit δ la classe de la développable lieu des plans tangents à Q et par conséquent à Φ aux différents points de C_1'. La première polaire d'un point M par rapport à Φ est une quadrique passant par O_0', O_1', O_2', O_3' et coupant encore C_1' en δ points, donc $\delta = 2$. Le plan polaire de M par rapport à Q coupe C_1' en trois points dont deux sont les points de contact des plans de la développable passant par M. Le plan tangent à Q au troisième point doit être indéterminé, donc ce point est double pour Q, qui est donc un cône.

L'équation du cône Q s'obtient aisément. Partons de l'équation

$$(\mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2 + \mu_3 Y_3)^2 = 0 .$$

En éliminant les Y entre cette équation et celles de F, on obtient

$$\begin{gathered}\mu_1^2 (X_2 X_3 + X_0 X_2 + X_0 X_3) + \mu_2^2 (X_3 X_1 + X_0 X_3 + X_0 X_1) \\ + \mu_3^2 (X_1 X_2 + X_0 X_1 + X_0 X_2) \\ - 2 X_0 (\mu_2 \mu_3 X_1 + \mu_3 \mu_1 X_2 + \mu_1 \mu_2 X_3) = 0 ,\end{gathered}$$

ou encore

$$\begin{gathered}\mu_1^2 X_2 X_3 + \mu_2^2 X_3 X_1 + \mu_3^2 X_1 X_2 \\ + X_0 [(\mu_2 - \mu_3)^2 X_1 + (\mu_3 - \mu_1)^2 X_2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 X_3] = 0 .\end{gathered}$$

Si l'on fait varier μ_1 par exemple, la quadrique précédente a pour enveloppe la surface Φ jointe au plan

$$\mu_3^2 X_2 + \mu_2^2 X_3 + (\mu_2 - \mu_3)^2 X_0 = 0 ,$$

ce qui prouve bien que la quadrique touche Φ le long de C_1'.

On vérifie que la quadrique est bien un cône de sommet

$$\begin{aligned}(\mu_2 - \mu_3)^2 X_0 + \mu_3^2 X_2 + \mu_2^2 X_3 &= 0 ,\\ (\mu_3 - \mu_1)^2 X_0 + \mu_3^2 X_1 + \mu_1^2 X_3 &= 0 ,\\ (\mu_1 - \mu_2)^2 X_0 + \mu_2^2 X_1 + \mu_1^2 X_2 &= 0 .\end{aligned}$$

§ 3. *L'involution de Geiser*

484. Préliminaires. — Nous avons appelé involution de Geiser l'ensemble des couples de points communs aux cubiques C passant par sept points $O_1, O_2, \ldots, O_7$. Nous étudierons cette involution dans le cas où six des sept points ne sont jamais sur une même conique ni trois en ligne droite.

Nous désignerons par T la transformation birationnelle génératrice de l'involution I_2 de Geiser.

485. Eléments fondamentaux. — Considérons une droite p passant par O_1 et les cubiques C touchant cette droite en O_1 ; elles forment un faisceau qui comprend la cubique C_1 ayant un point double en O_1. Les courbes C touchant p en O_1 rencontrent encore C_1 en un point qui, avec le point infiniment voisin de O_1 sur p, forme un groupe de l'involution I_2.

Rapportons projectivement les courbes C aux droites d'un plan σ' et appelons σ le plan continuant le réseau $|C|$. Soit r_1' la droite qui correspond à C_1. Le point O_1, la cubique C_1 et la droite r_1' sont des éléments fondamentaux associés.

Nous désignerons par $C_2, C_3, \ldots, C_7$ les cubiques C ayant un point double respectivement en $O_2, O_3, \ldots, O_7$; par r_2', $r_3', \ldots, r_7'$ les droites qui leur correspondent dans σ'.

Considérons les cubiques C_1, C_2. Elles ont en commun un groupe de I_2. Le faisceau déterminé par ces courbes dans $|C|$ est formé de courbes touchant C_2 en O_1 et C_1 en O_2. Par conséquent, le groupe en question est formé du point infiniment voisin de O_1 sur C_2 et du point infiniment voisin de O_2 sur C_1 ; il est représenté dans le plan σ' par le point commun aux droites r_1', r_2'.

486. Courbe unie et courbe de diramation. — Fixons l'attention sur une cubique quelconque C_0. Les couples de I_2 découpés sur cette courbe par les autres courbes C sont, d'après un théorème de Sylvester, situés sur les droites passant par un point P de C_0. Par ce point, on peut mener quatre tangentes à la courbe C_0 et par conséquent il y a quatre points unis sur cette courbe. En d'autres termes, une courbe C rencontre la courbe unie D en quatre points en dehors des points-base de $|C|$; il en résulte que la courbe de diramation D' de σ' est du quatrième ordre.

Le réseau $|C|$ est dépourvu de courbes fondamentales, par conséquent la courbe D coïncide avec la jacobienne ; elle est donc du sixième ordre et a des points doubles en $O_1, O_2, \ldots, O_7$. Ce dernier point se justifie de la manière suivante :

La courbe C_1 possède un point double en O_1 ; les courbes C touchant une des branches de C_1 en O_1 forment un faisceau dont les courbes ne se rencontrent plus en dehors des points-base. Il en résulte que les points infiniment voisins de O_1 situés sur C_1 sont des points unis de I_2 et appartiennent donc à D. La courbe D a donc en O_1 les mêmes tangentes que C_1. De même, elle a en O_2, O_3, ..., O_7 les mêmes tangentes que C_2, C_3, ..., C_7 respectivement.

La droite r_1' représente les couples de I_2 formés d'un point infiniment voisin de O_1 et du point homologue de C_1. Cette droite touche D′ en deux points, homologues des points communs à D et C_1, infiniment voisins de O_1. De même, les droites r_2', r_3', ..., r_7' sont des bitangentes de la courbe D′.

Il existe 21 courbes C dégénérées en une conique passant par cinq des points O_1, O_2, ..., O_7 et en la droite passant par les deux autres de ces points. A ces courbes correspondent 21 bitangentes de la courbe D′, dont on connaît ainsi les 28 bitangentes.

487. La transformation génératrice de l'involution. — Considérons une droite g de σ et soit G la courbe que T lui fait correspondre. Les points communs à g et à G sont ou bien des points unis de I_2 ou des points distincts formant des couples de l'involution. Soit ν le nombre de couples de I_2 se trouvant sur une droite (1), la courbe G est d'ordre $2\nu+6$. Pour déterminer ν, rapportons projectivement les groupes de trois points de la droite g aux plans de l'espace. Aux points de la droite correspondent les points d'une cubique gauche K. Les courbes C découpent sur g une série linéaire g_3^2 représentée sur K par les groupes de trois points découpés par les plans passant par un point M. Les points d'appui sur K de la bisécante de cette courbe passant par M n'imposent qu'une condition aux groupes de la série homologue de g_3^2 qui doivent les contenir. Il existe donc un seul couple de points de la droite g imposant une condition aux courbes C qui doivent le contenir, c'est-à-dire qu'il existe un seul couple de I_2 appartenant à g. Les courbes G sont d'ordre neuf.

Les courbes fondamentales de T associées aux points O_1, O_2, ..., O_7 sont évidemment les courbes C_1, C_2, ..., C_7, par conséquent les courbes G ont des points triples en O_1, O_2, ..., O_7. On retrouve ainsi une transformation birationnelle déjà rencontrée (n° 51). Les courbes G forment bien un réseau homaloïdal ($8\cdot 8 - 7\cdot 3\cdot 3 = 1$).

Observons que l'ensemble d'une droite g et de sa transformée G appartient à un système linéaire $|\Gamma|$ de courbes

(1) Etant donnée une involution I_n d'ordre n du plan, le nombre de groupes de cette involution dont deux points se trouvent sur une droite est appelé *classe* de l'involution. L'involution I_2 est de classe $\nu = 1$.

d'ordre neuf, passant 3 fois par chacun des points O_1, O_2, ..., O_7, composé au moyen de I_2. Aux courbes Γ correspondent dans σ' des cubiques Γ', car une courbe Γ rencontre une courbe C en trois couples de I_2. Il en résulte que le système $|\Gamma|$ a la dimension 9.

A un faisceau de droites g correspond projectivement un faisceau de courbes G ; le lieu des points communs à une droite g et à la courbe G homologues est une courbe du neuvième ordre formée de la courbe D et de la cubique passant par le sommet du faisceau de droites considéré. Cette courbe d'ordre neuf appartient au système complet déterminé par $|\Gamma|$; ce système complet est de dimension 12.

488. L'involution de Geiser et la surface cubique. — On peut étudier l'involution de Geiser en utilisant la surface cubique. Rapportons projectivement les cubiques passant par les six points O_2, O_3, ..., O_7 aux plans de l'espace. Aux points de σ correspondent les points d'une surface cubique F. Soit O_1' le point de F qui correspond à O_1.

A T correspond sur F une transformation birationnelle T' de F en soi. Les sections de F par les plans passant par O_1' sont unies pour T', donc les points homologues dans cette transformation sont les points d'intersection de F et des droites passant par O_1'.

La courbe unie de l'involution I_2' engendrée par T' sur F est l'intersection de cette surface avec le cône de sommet O_1' qui lui est circonscrit. Cette courbe est donc l'intersection de F et de la quadrique polaire Q de O_1' par rapport à cette surface ; c'est une courbe du sixième ordre ayant un point double en O_1'.

En projetant la surface F de O_1' sur un plan, on obtient une représentation de I_2', c'est-à-dire de I_2, sur un plan. La courbe de diramation est du quatrième ordre. Les 28 bitangentes de cette courbe proviennent de l'intersection du plan avec le plan tangent à F en O_1' et avec les plans projetant de O_1' les 27 droites de F.

Si a est une droite passant par O_1', désignons par M_1, M_2, M ses points d'intersection avec F et avec Q. Le quaterne $(O_1'MM_1M_2)$ est harmonique.

Un cas particulier s'obtient en supposant que T' se réduit à une homologie harmonique de centre O_1'. La quadrique Q est alors formée du plan d'homologie et du plan tangent en O_1' à F. Ce dernier plan coupe F suivant trois droites passant par le point de contact.

489. Remarques. — Des cas particuliers de l'involution de Geiser s'obtiennent en disposant les points-base du réseau C de manière que celui-ci possède des courbes fondamentales.

Si les points-base sont les sommets et les points diagonaux d'un quadrangle complet, on retrouve l'involution étudiée dans le paragraphe précédent. La jacobienne se compose de six côtés du quadrangle complet et la courbe unie D est d'ordre zéro. Elle se réduit aux quatre sommets du quadrangle.

Supposons maintenant que les six points $O_2, O_3, \ldots, O_7$ soient situés sur une conique γ, qui est donc fondamentale pour $|C|$. En rapportant projectivement les courbes C aux droites d'un plan σ', il correspond à γ un point fondamental O'. Aux droites passant par O' correspondent les courbes C formées de γ et des droites passant par O_1. A un point infiniment voisin de O' correspondent deux points de γ alignés sur O_1 (cf. n° 476). La courbe unie est du quatrième ordre et la courbe de diramation dans σ' est également du quatrième ordre, mais possède un point double en O'.

§ 4. *L'involution de Bertini*

490. Préliminaires. — Considérons les courbes C_6 du sixième ordre ayant huit points doublés fixes $O_1, O_2, \ldots, O_8$ et soit B le neuvième point commun aux cubiques C_3 passant par ces huit points. L'involution de Bertini est l'ensemble des couples de points n'imposant qu'une condition aux courbes C_6 qui doivent les contenir.

Soit P_1 un point et C_3' la cubique passant par ce point. Les courbes C_6 passant par P_1 rencontrent encore C_3' en un second point qui doit être fixe, sans quoi la courbe C_3' serait rationnelle. Ce second point P_2 appartient donc à toutes les courbes C_6 passant par P_1 et par conséquent P_1, P_2 forment un groupe de l'involution de Bertini I_2.

Si r est la dimension de $|C_6|$, il passe ∞^{r-1} courbes C_6 par P_1, P_2. Celles de ces courbes qui passent encore par un point P de C_3' contiennent cette courbe et sont complétées par les courbes du faisceau $|C_3|$. On a donc $r-2=1$, d'où $r=3$. Le système $|C_6|$ est donc de dimension trois, de degré quatre et de genre deux. Il contient ∞^2 courbes dégénérées en des couples de cubiques du faisceau $|C_3|$.

Nous supposerons que six des points $O_1, O_2, \ldots, O_8$ ne sont pas sur une même conique, et que trois d'entre eux ne sont pas en ligne droite. De plus, nous supposerons que le point B est distinct de $O_1, O_2, \ldots, O_8$.

491. L'involution de Bertini sur une surface cubique. — Rapportons projectivement les cubiques planes passant par $O_1, O_2, \ldots, O_6$ aux plans de l'espace ; au plan σ de $|C_6|$ correspond une surface cubique : F. Aux points $O_1, O_2, \ldots, O_6$ correspondent six droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$, deux à deux gauches de F. Aux points O_7, O_8 correspondent deux points O_7', O_8' de F n'appartenant à aucune droite de F. Aux cubiques C_3 correspondent les sections C_3' de F par des plans passant par O_7', O_8', par conséquent au point B correspond le troisième point de rencontre B' de F avec la droite O_7', O_8'.

Aux courbes C_6 correspondent sur F les sections de cette surface par les ∞^3 quadriques Q touchant la surface en O_7', O_8'.

Les courbes C_6' passant par un point P_1' de F sont découpées par les quadriques Q contenant la conique γ passant par P_1', O_7', O_8' et touchant F en ces deux derniers points. Le dernier point d'intersection P_2' de γ et de la section de F par le plan α de γ appartient à toutes les courbes C_6' passant par P_1'. Les points P_1', P_2' forment donc un couple de l'involution I_2' qui correspond sur F à l'involution de Bertini.

Soit β le plan tangent à F au point B'. Dans le plan α, les cubiques touchant F en O_7', O_8', B' et passant par P_1', P_2', forment un faisceau qui comprend la section de F par α et la courbe formée par γ et la droite $\alpha\beta$. Donc le neuvième point-base du faisceau est le tangentiel P' de B' dans le plan α. Le faisceau considéré contient une courbe formée de la droite $O_7'O_8'$ comptée deux fois et de la droite $P_1'P_2'$. Celle-ci passe donc par P'.

La section (F, β) de F par le plan β est une cubique ayant un point double en B'. Les droites s'appuyant sur la droite $a = O_7'O_8'$ et sur la courbe (F, β) forment une congruence linéaire dont les rayons découpent sur F les couples de l'involution I_2' homologue de l'involution de Bertini.

492. Eléments fondamentaux. — Considérons les courbes C_6 tangentes à une droite p en O_1. Il leur correspond les courbes C_6' passant par un point P' de a_1. Le lieu du point homologue de P' dans I_2' lorsque la droite p tourne autour de O_1 est l'intersection de F avec la surface lieu des droites s'appuyant sur a_1, $a = O_7'O_8'$, (F, β). Ce lieu est une surface cubique pour laquelle a est une droite double. La courbe cherchée est donc une courbe φ_1' du cinquième ordre s'appuyant en deux points sur $a_2, a_3, \ldots, a_6$ et ayant des points doubles en O_7', O_8'. De plus, il y a trois droites s'appuyant sur a_1, a (F, β), touchant F en leur point d'appui sur a_1. A la courbe φ_1' correspond donc dans σ une courbe φ_1, du sixième ordre, ayant un point triple en O_1 et des points doubles en $O_2, O_3, \ldots, O_8$. Cette courbe ne passe pas par B et est le lieu des points qui, avec les points infiniment voisins de O_1, forment des couples de I_2.

La courbe φ_1 appartient au système $|C_6|$; c'est la seule courbe de ce système ayant un point triple en O_1.

De même, les points conjugués des points infiniment voisins de $O_2, O_3, \ldots, O_8$ dans I_2 engendrent des courbes $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_8$ appartenant au système $|C_6|$ et ayant des points triples respectivement en $O_2, O_3, \ldots, O_8$.

493. Courbe unie de l'involution. — A la courbe unie D de l'involution I_2 correspond sur F la courbe unie D' de l'involution I_2'. En un point P_1' de D', la tangente à F s'appuyant sur la droite a rencontre la courbe (F, β) en un point P_0' et le point P_1' se trouve donc sur la conique polaire γ' de P_0' par rapport à la cubique, section de F par le plan $a P_0'$. Le lieu de la conique γ', lorsque P_0' décrit la courbe (F, β), en une surface Φ du cinquième ordre, passant trois fois par la droite a et touchant F le long de (F, β).

Dans un plan passant par a se trouve en effet une seule conique γ', puisque ce plan rencontre (F, β) en un seul point en dehors de B'. D'autre part, le nombre de coniques γ' passant par un point de a est égal au nombre d'intersections de la courbe (F, β) et du plan polaire de ce point par rapport à F, c'est-à-dire à trois. La surface Φ est donc bien du cinquième ordre. La conique γ' relative à un point P_0' de (F, β) touche F en ce point, donc Φ touche F le long de (F, β).

A la section de F par Φ correspond dans σ une courbe du quinzième ordre, formée de la cubique homologue de (F, β), comptée deux fois, et de la courbe unie D. Cette dernière est donc une courbe du neuvième ordre. Elle passe trois fois par les points $O_1, O_2, \ldots, O_8$ et y a, d'après l'observation faite plus haut, mêmes tangentes que les courbes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_8$ respectivement.

Les coniques γ' passent toutes par le point B', qui est donc quadruple pour la surface Φ. Observons qu'à la courbe (F, β) correspond dans σ la cubique C_3 ayant un point double en B, par conséquent la courbe D ne passe pas par B.

Les courbes C_6 passant par un point de D forment un réseau et ont même tangentes en ce point. Par conséquent, par un point de D passent ∞^1 courbes C_6 ayant un point double en ce point et formant un faisceau de Halphen.

Les courbes C_6 passant par B forment un réseau et chacune de ces courbes se compose de deux cubiques C_3 (les quadriques Q passant par B' se décomposeront en deux plans passant par la droite a). Le point B, compté deux fois, forme donc un groupe de I_2 ; en d'autres termes, B est un point uni isolé de I_2.

Les éléments unis de l'involution de Bertini sont le point B *et une courbe* D, *d'ordre* 9, *passant trois fois par chacun des points* $O_1, O_2, \ldots, O_8$, *mais ne passant pas par* B.

494. La transformation birationnelle génératrice de I_2. — La transformation birationnelle involutive T, génératrice de I_2, possède comme points fondamentaux les points $O_1, O_2, \ldots, O_8$ et d'après ce qui a été vu plus haut, les courbes fondamentales associées sont respectivement les courbes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_8$.

A une droite g, T fait correspondre une courbe G, d'un certain ordre m, passant six fois par chacun des points O_1, O_2, ..., O_8.

Pour déterminer m, retournons à la surface F. A la droite g correspond une cubique gauche K rencontrant (F, β) en trois points. Les droites qui s'appuient en des points distincts sur a, K et (F, β) forment une surface d'ordre 9, passant 3 fois par a, 3 fois par (F, β) et une fois par K. A la section de F par cette surface correspond une courbe d'ordre 27 formée de la courbe C_3 ayant un point double en B, comptée trois fois, de la droite g et de la courbe G, qui est donc d'ordre $m = 17$.

Les courbes G ne passent pas par B et forment un réseau homaloïdal. On retrouve ainsi une transformation rencontrée précédemment (n° 52).

L'involution I_2 est de classe quatre.

495. Représentation de l'involution sur un cône quadratique. — Rapportons projectivement les courbes C_6 aux plans de l'espace. Puisque $|C_6|$ est de degré quatre, aux couples de I_2 correspondent les points d'une quadrique Q'. Aux courbes C_3 correspondent sur Q' des droites. Observons que deux courbes C_3 formant une courbe C_6, ces droites sont deux à deux dans des plans ; ce sont donc les génératrices rectilignes d'un cône. La quadrique Q' est donc un cône dont le sommet O correspond au point B.

A la courbe unie D correspond sur Q' la courbe de diramation Δ, du sixième ordre, car une courbe C_6 rencontre D en six points. La courbe D est de genre quatre. Il en est de même de la courbe Δ. Les surfaces cubiques ne contenant pas Q' comme partie sont en nomvre ∞^{15} ; elles découpent sur Δ une série d'ordre 18 certainement non spéciale et par conséquent de dimension 14. Il existe donc une surface cubique contenant Δ et cette courbe est l'intersection complète de cette surface et de Q'. La courbe Δ ne passe pas par le sommet O du cône Q'.

Aux courbes φ_1, φ_2, ..., φ_8 correspondent des sections planes de Q', faites par des plans tritangents à la courbe Δ.

Parmi les courbes C_6 se trouvent des courbes dégénérées ; elles sont de deux espèces :

1° Courbes formées de la quintique ayant des points doubles en six des points O_1, O_2, ..., O_8, passant simplement par les deux autres, et de la droite déterminée par ces deux derniers points. Il y a 28 courbes de cette nature ; il leur correspond des sections de Q' par des plans tritangents à la courbe Δ ;

2° Courbes formées de la quartique ayant des points doubles en trois points O_1, O_2, ..., O_8, passant simplement par les cinq autres, et de la conique déterminée par ces derniers points. Il y a 56 courbes de cette nature et il leur correspond les sections de Q' par des plans tritangents à Δ.

On en conclut que Δ possède 92 plans tritangents. Elle possède d'autre part une infinité de plans tritangents : les plans tangents au cône Q'. Pour les 92 premiers, les points de contact ne sont pas en ligne droite.

Aux sections de Q' par les plans tangents à la courbe Δ en un point P', correspondent les courbes C_6 ayant un point double au point P de D homologue de P'. Ces courbes C_6 forment un faisceau de Halphen.

496. Les faisceaux de Halphen comme systèmes adjoints. — Nous avons vu (n° 456) qu'un faisceau de Halphen de courbes du sixième ordre peut être l'adjoint d'un faisceau $|K|$ de courbes d'ordre $6t+3$, passant $2t+1$ fois par les points $O_1, O_2, \ldots, O_8$ et $2t$ fois par le neuvième point-base O_9 du faisceau ; les courbes K ont de plus t points doubles infiniment voisins de O_9, dans des directions différentes. Les adjointes à $|K|$ sont précisément formées de t courbes C_6 du faisceau. Les courbes K sont hyperelliptiques de genre $t+1$. Nous allons reprendre l'étude de cette question en utilisant l'involution de Bertini.

Choisissons le point O_9 sur la courbe D et soit O_9' le point qui lui correspond sur le cône Q'. Nous désignerons par C les courbes C_6 ayant un point double en O_9. Sur une courbe C_6 passant simplement par O_9, les courbes K découpent la série g_2^1 avec laquelle est nécessairement composée la série canonique. Les courbes C découpent également une série g_2^1 qui doit nécessairement coïncider avec la précédente. Or, les couples de cette série g_2^1 appartiennent à l'involution I_2, donc les courbes K appartiennent à cette involution.

Aux courbes K correspondent sur le cône Q' des courbes K' d'ordre $2t+1$. Une courbe C_3 rencontre une courbe K en $2t+1$ points constitués par t couples de I_2 et un point fixe qui ne peut être que B. D'ailleurs, une courbe K rencontre D en un nombre impair de points alors que le nombre de points doubles de la série g_2^1 de cette courbe K doit être pair. Il en résulte que les courbes K' passent par le sommet O de Q'.

D'après ce que nous avons vu, la cubique C_3 passant par O_9 ne rencontre plus une courbe K qu'en un point fixe que nous savons maintenant être B. Il en résulte que la génératrice OO_9' de Q doit rencontrer K' en t points confondus en O_9'.

Aux courbes C correspondent les sections de Q par les plans passant par la tangente r à Δ en O_9'. Ces courbes ne peuvent rencontrer les courbes K' qu'en un point variable. Il en résulte que la tangente r rencontre les courbes K' en rt points confondus avec O_9'. Par conséquent les courbes K' ont en O_9' un point multiple d'ordre t auquel est infiniment voisin, sur la courbe Δ, un point multiple d'ordre t.

Une courbe C dont une tangente en O_9 coïncide avec une tangente aux courbes K, ne rencontre plus ces courbes en dehors des points $O_1, O_2, \ldots, O_9$; il lui correspond sur Q′ la section par un plan ne rencontrant plus les courbes K′ en dehors de O_9'. On en conclut que les courbes K′ ont, en O_9', t plans osculateurs fixes.

Supposons qu'aucun des points doubles des courbes K infiniment voisins de O_9 ne se trouve sur D. Alors, la série g_2^1 appartenant à une courbe K possède $4t+4$ points doubles : $4t+3$ sur la courbe D et le point B. Mais cela est impossible, car les courbes K étant de genre $t+1$, la série g_2^1 doit posséder $2t+4$ points doubles. Il faut donc que l'un des points doubles des courbes K infiniment voisins de O_9 soit situé sur D.

Sur une courbe K′, le point O_9' est l'origine de t branches dont $t-1$ n'ont pas en commun deux points infiniment voisins successifs de O_9' sur Δ. Les courbes K ont donc un point multiple d'ordre $2t$ en O_9, auquel sont infiniment voisins un point double sur D et $2t-2$ points simples. On doit donc avoir $t=1$.

Les courbes K′ sont donc des cubiques gauches. Elles sont découpées sur Q′ par des quadriques passant par une génératrice de ce cône et par O_9'. Elles ne peuvent rencontrer Δ qu'en cinq points variables, donc elles ont avec cette courbe, en O_9', un contact du troisième ordre. Par conséquent :

Un faisceau de Halphen de courbes du sixième ordre est l'adjoint d'un faisceau de courbes du neuvième ordre et de genre deux, ayant huit points triples et un tacnode.

Le faisceau $|K|$ est l'adjoint d'une courbe H isolée d'ordre 12, de genre deux, ayant huit points-base quadruples et un point-base triple auquel sont infiniment voisins successifs deux points-base doubles (n° 257). Cette courbe H appartient à l'involution I_2 et il lui correspond sur le cône Q′, une quartique rationnelle découpée par une quadrique touchant le cône en O_9' et ayant un contact du cinquième ordre avec la courbe Δ en ce point. La série g_2^1 appartenant à la courbe H a un point double en O_9', qui est triple pour H.

§ 5. *Les transformations de Jonquières involutives*

497. Transformations ayant une courbe unie. — Nous avons déterminé (n° 464) les transformations de Jonquières involutives. Considérons la transformation T d'équations

$$\rho x_1' = x_2 \left[x_3 \alpha_{n-2}(x_1, x_2) - \alpha_{n-1}(x_1, x_2)\right],$$
$$\rho x_2' = x_1 \left[x_3 \alpha_{n-2}(x_1, x_2) - \alpha_{n-1}(x_1, x_2)\right],$$
$$\rho x_3' = x_3 \alpha_{n-1}(x_1, x_2) + \alpha_n(x_1, x_2),$$

d'ordre n, ayant la courbe unie D,

$$x_3^2 \alpha_{n-2} - 2\, x_3 \alpha_{n-1} - \alpha_n = 0,$$

d'ordre n, ayant en $O(x_1 = x_2 = 0)$ la multiplicité $n-2$.

Aux droites C_1 du plan correspondent donc des courbes C_2 d'ordre n ayant en O la multiplicité $n-1$ et passant simplement par les $2n-2$ points fondamentaux $O_1, O_2, \ldots, O_{2n-2}$ communs, en dehors de O, aux courbes

$$x_3 \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} = 0, \qquad x_3 \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0.$$

Le système complet

$$|C| = |C_1 + C_2|$$

est transformé en soi par T. Il est formé de courbes d'ordre $n+1$, passant $n-1$ fois par O, une fois par $O_1, O_2, \ldots, O_{2n-2}$; il est de degré $2n+2$, de genre $n-1$ et de dimension $r \geqslant n+4$.

Considérons un faisceau de droites et le faisceau des courbes C_2 correspondantes. Ces deux faisceaux sont projectifs et le lieu des intersections des éléments homologues est une courbe appartenant au système $|C|$. Cette courbe comprend comme partie la courbe unie D et est complétée par une droite passant par O. Il y a donc, dans $|C|$, ∞^1 courbes comprenant D comme partie.

T détermine, dans $|C|$, où les courbes sont considérées comme éléments, une homographie harmonique possédant deux axes ponctuels. Nous venons de voir que l'un a la dimension un, l'autre a donc la dimension $r-2$. Désignons par C_0 les courbes C éléments de cet axe. Rapportons projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace S_{r-2}. Le système partiel $|C_0|$ étant composé au moyen de l'involution I_2 engendrée par T, il correspond aux groupes de cette involution les points d'une surface F, d'ordre $n+1$. On a donc $r-2 \leqslant n+2$, d'où $r = n+4$.

Sur une droite passant par O, T détermine une involution et par conséquent aux droites passant par O correspondent sur F des droites, donc F est une surface réglée rationnelle normale. Au domaine du point O correspond sur F une directrice d'ordre $n-2$.

A la courbe unie D correspond sur F la courbe de diramation D', d'ordre $2n$, rencontrant les génératrices rectilignes en $2n$ points et la directrice en $n-2$ points.

A une courbe C qui n'est pas transformée en soi par T correspond sur F une courbe Γ qui, lorsque C tend vers une courbe C_0, tend vers une section hyperplane de F compté deux fois. La courbe Γ est donc située sur une hyperquadrique. Lorsque C tend vers une courbe formée de D et d'une droite passant par O, Γ tend vers une courbe formée de D' et d'une génératrice de F comptée deux fois. Il y a donc ∞^1 hyperquadriques contenant D' et touchant encore F suivant une génératrice. Ou encore, il y a ∞^2 hyperquadriques passant par D' et coupant encore F suivant deux génératrices.

Observons qu'au domaine de O, T fait correspondre une courbe d'ordre $n-1$ passant $n-2$ fois par O, les tangentes en ce point coïncident avec celles de D. Il en résulte que la directrice d'ordre $n-2$ de F touche D' en $n-2$ points.

498. Transformations ayant une droite et deux points unis. — Nous avons rencontré (n° 464) une transformation de Jonquières involutive possédant une droite et deux points unis ; elle est d'ordre impair que nous désignerons par $2n+1$. Ses équations sont

$$\begin{aligned}\rho x_1' &= x_2\,[x_3\alpha_{2n-1}(x_1, x_2) - \alpha_{2n}(x_1, x_2)]\,,\\ \rho x_2' &= x_1\,[x_3\alpha_{2n-1}(x_1, x_2) - \alpha_{2n}(x_1, x_2)]\,,\\ \rho x_3' &= x_3\alpha_{2n}(x_2, x_1) + \alpha_{2n+1}(x_1, x_2)\,,\end{aligned}$$

où l'on a

$$\alpha_{2n-1}(x_2, x_1) \equiv \alpha_{2n-1}(x_1, x_2)\,, \qquad \alpha_{2n+1}(x_2, x_1) \equiv \alpha_{2n+1}(x_1, x_2)\,.$$

La droite unie a pour équation $x_1+x_2=0$ et les points unis sont donnés par

$$x_1 = x_2\,,$$
$$x_3^2\alpha_{2n-1}(1, 1) - 2\,x_3x_1\alpha_{2n}(1, 1) - x_1^2\alpha_{2n+1}(1, 1) = 0\,.$$

Considérons comme dans le cas précédent le système linéaire $|C|$ contenant les courbes formées d'une droite et de sa transformée. Les courbes C sont d'ordre $2n+2$, passent $2n$ fois par O et une fois par les $4n$ points fondamentaux simples $O_1, O_2, \ldots, O_{4n}$ de la transformation. Le système $|C|$ est de degré $4n+4$ et de genre $2n$. La série caractéristique est non spéciale, donc $|C|$ est régulier et a la dimension $2n+5$.

Le système $|C|$ comprend les courbes engendrées par les intersections des éléments homologues d'un faisceau de droites et de son transformé. Ces courbes comprennent comme partie la droite unie, que nous désignerons par a, et passent simplement par les points unis, que nous désignerons par A_1, A_2. Ces courbes sont complétées par des courbes C_1, d'ordre $2n+1$, ayant un point multiple d'ordre $2n-1$ en O et passant par $O_1, O_2, \ldots, O_{4n}$. Le système $|C_1|$ a le degré $4n-2$ et le genre $2n-1$.

Le système linéaire $|C|$ contient un système partiel $|C_0|$, appartenant à l'involution I_2 engendrée par la transformation T, ne possédant pas de points-base en dehors de ceux de $|C|$ (une courbe formée d'une droite et de sa transformée est une courbe C_0 et il y a ∞^2 courbes analogues, ne formant pas un système linéaire). Soit r_0 la dimension de $|C_0|$. En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace à r_0 dimensions, on obtient une surface F dont les points représentent les groupes de I_2. La surface F est d'ordre $2n+2$. Appelons C_0' ses sections hyperplanes. Entre une courbe C_0' et la courbe C_0 homologue, nous avons une correspondance (1, 2) présentant deux points unis, aux points de rencontre de C_0 et de a. D'après la formule de Zeuthen, les courbes C_0' sont donc de genre n. La série caractéristique de $|C_0'|$ est non spéciale et donc de dimension $n+2$; par conséquent, on a $r_0 \leqslant n+3$ (¹).

Aux courbes C_1 correspondent sur F des courbes C_1' formant un système linéaire complet de degré $2n-1$. Une courbe C_1 rencontrant a en deux points et passant par les points unis A_1, A_2, la formule de Zeuthen donne $n-1$ pour le genre des courbes C_1'. On en conclut que la dimension de ce système est $r_1 \leqslant n+1$.

La transformation T agissant sur les courbes de C comme une homographie harmonique, on a

$$r_0+r_1+2=2n+1$$

d'où $r_0=n+3$, $r_1=n+1$.

A une droite passant par O, T fait correspondre une droite passant par O et l'ensemble de ces deux droites coupe une courbe C_0 en quatre points formant deux groupes de I_2, donc à ces droites correspond sur F une conique γ. Ces coniques forment un faisceau $|\gamma|$ et l'une d'elles, correspondant à la droite unie a, est la courbe de diramation de F.

Une courbe C_1 passe par A_1 et est transformée en soi par T, donc à sa tangente en A_1 correspond une courbe d'ordre $2n+1$ ayant également cette droite comme tangente. On en conclut qu'il existe des courbes C_0 passant par A_1 sans passer par A_2 et que, de plus, il existe des courbes C_0 ayant un point double en A_1. Cela étant, une courbe C_0 ne peut avoir un point simple en A_1, car l'involution déterminée par I_2 sur cette courbe aurait un nombre impair de points doubles. Les courbes C_0 passant par A_1 ont donc un point double en ce

(¹) Si l'on avait établi que la surface F est rationnelle, on pourrait écrire $r_0 = n+3$, mais actuellement, on ne peut exclure l'inégalité.

point. On en conclut qu'à A_1 correspond sur F un point A_1' double pour cette surface.

De même à A_2 correspond un point A_2' double pour F. Les points A_1', A_2' sont situés sur une même conique γ, homologue de la droite $x_1 = x_2$. Cette conique est dégénérée en deux droites confondues.

Par un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut, on établirait qu'il existe une hyperquadrique passant par la conique γ de diramation et touchant la surface F le long d'une courbe C_1'.

499. Transformations ayant quatre points unis. — La transformation de Jonquières involutive T n'ayant que quatre points unis est d'ordre pair $2n$ (n° 464); elle est représentée par les équations

$$\begin{aligned} \rho x_1' &= x_2 \left[x_3 \alpha_{2n-2}(x_1, x_2) - \alpha_{2n-1}(x_1, x_2)\right], \\ \rho x_2' &= x_1 \left[x_3 \alpha_{2n-2}(x_1, x_2) - \alpha_{2n-1}(x_1, x_2)\right], \\ \rho x_3' &= x_3 \alpha_{2n-1}(x_2, x_1) + \alpha_{2n}(x_1, x_2), \end{aligned}$$

où l'on a

$$\alpha_{2n-2}(x_2, x_1) \equiv \alpha_{2n-2}(x_1, x_2), \qquad \alpha_{2n}(x_2, x_1) = \alpha_{2n}(x_1, x_2).$$

Les points unis sont donnés par

$$x_1 - x_2 = 0,$$
$$x_3^2 \alpha_{2n-2}(1, 1) - 2 x_1 x_3 \alpha_{2n-1}(1, 1) - x_1^2 \alpha_{2n}(1, 1) = 0,$$
$$x_1 + x_2 = 0,$$
$$x_3^2 \alpha_{2n-2}(1, -1) - 2 x_1 x_3 \alpha_{2n-1}(1, -1) + x_1^2 \alpha_{2n}(1, -1) = 0.$$

Comme dans les cas précédents, on construit un système linéaire $|C|$, de courbes d'ordre $2n+1$, passant $2n-1$ fois par O et une fois par les points fondamentaux $O_1, O_2, \ldots, O_{4n-2}$, transformé en soi par T. Le système $|C|$ a le degré $4n+2$ et le genre $2n-1$. On en conclut que $|C|$ est régulier et a la dimension $2n+4$.

Le système $|C|$ contient un système linéaire partiel $|C_0|$, appartenant à l'involution I_2 engendré par T, n'ayant pas d'autres points-base que $|C|$, et un système linéaire $|C_1|$, appartenant également à I_2, ayant comme points-base les quatre points unis de T.

Soit F une surface dont les sections hyperplanes C_0' correspondent aux courbes C_0. Les courbes C_0' ont, d'après la formule de Zeuthen, le genre n et F a l'ordre $2n+1$. Aux courbes C_1 correspondent sur F des courbes C_1' formant un système linéaire complet de degré $2n-1$ et de genre $n-1$. En raisonnant comme dans le cas précédent, on voit que $|C_0'|$, $|C_1'|$ ont respectivement les dimensions $n+2$, $n+1$. La surface F est donc normale dans un espace linéaire à $n+2$ dimensions.

Les courbes C_0' passant par un point uni de I_2 ont un point double en ce point et par conséquent, les points de diramation sont doubles pour la surface F.

On établit facilement que le long de chaque courbe C_1', il y a une hyperquadrique inscrite dans la surface F.

Aux couples de droites passant par O, homologues dans T, correspondent sur F des coniques γ formant un faisceau. Ce faisceau contient deux coniques dégénérées en des droites comptées deux fois ; elles correspondent aux droites $x_1 + x_2 = 0$ et chacune d'elles contient deux des points de diramation.

Au domaine du point O, T fait correspondre une courbe d'ordre $2n-1$ passant $2n-2$ fois par O. Les tangentes à cette courbe en O forment $n-1$ couples de droites homologues dans T. A l'ensemble de ce domaine et de cette courbe correspond sur F une courbe d'ordre $2n-1$, rationnelle. Les hyperplans passant par cette courbe découpent, sur F, les coniques γ.

500. Rationalité des involutions du second ordre. — L'involution d'ordre deux engendrée par une homologie harmonique peut évidemment être représentée sur un plan et est donc rationnelle. Nous avons représenté l'involution de Geiser sur un plan et celle de Bertini sur un cône quadratique, ensuite l'involution engendrée par une transformation de Jonquières possédant une courbe unie sur une surface réglée rationnelle. Toutes ces involutions sont donc rationnelles.

Nous allons démontrer que les deux involutions de Jonquières étudiées en dernier lieu sont également rationnelles.

Commençons par rappeler que dans les deux cas, nous avons représenté l'involution par une surface F, appartenant à un espace linéaire à r_0 dimensions, contenant un faisceau linéaire $|\gamma|$ de coniques. Supposons que nous puissions établir qu'il existe une courbe Δ, tracée sur F, rencontrant en un point chacune des coniques γ et appartenant à un espace S_ρ à $\rho < r_0 - 1$ dimensions. Etablissons une projectivité entre les coniques du faisceau $|\gamma|$ et les droites s d'un faisceau de sommet S dans un plan τ. Etablissons de même une projectivité entre les hyperplans d'un faisceau dont l'axe contient S_ρ et les droites s' d'un faisceau de sommet S' de τ. Par un point P de F passe une conique γ et un hyperplan du faisceau considéré ; il leur correspond le point P' de τ commun aux rayons s, s' homologues. Il en résulte que la surface F, représentable point par point sur le plan τ, est rationnelle. Tout revient donc à construire sur F une courbe unisécante des coniques γ.

Retournons à la transformation T et désignons par m son ordre. La transformation possède $2m-2$ points fondamentaux simples O_1, O_2, ..., O_{2m-2}. Les droites joignant ces points à O sont échangées entre elles par l'homographie déterminée par T dans le faisceau de sommet O et elles sont toutes distinctes. Il en résulte qu'au domaine du point O_1, T fait correspondre les points d'une des droites OO_2, OO_3, ..., OO_{2m-2}, par exemple de la droite OO_2. Alors, au domaine du point O_2, T fait correspondre les points de la droite OO_1. Nous supposerons qu'aux domaines des points O_3, O_5, ..., O_{2m-3} correspondent respectivement les droites OO_4, OO_6, ..., OO_{2m-2} et que par conséquent les droites OO_3, OO_5, ..., OO_{2m-1} correspondent aux domaines des points O_4, O_6, ..., O_{2m-2}.

Cela étant, considérons la transformation ayant deux points et une droite unis (n° 498). On a $m = 2n + 1$. Il existe une courbe D d'ordre n ayant un point multiple d'ordre $n - 1$ en A et passant par les points O_1, O_3, ..., O_{4n-1}, comme on le voit par un simple compte de constantes. Cette courbe est nécessairement irréductible et est transformée par T en une courbe D′ d'ordre n, passant $n - 1$ fois par O et une fois par O_1, O_3, ..., O_{4n-1}. La courbe D′ coïncide avec la courbe D, car autrement, ces deux courbes se rencontreraient en -1 points, ce qui est absurde. La courbe D est donc transformée en elle-même par T. Deux droites issues de O, homologues dans T, coupent D en un seul couple de points de l'involution I_2, par conséquent il correspond à D, sur F, une courbe Δ unisécante des coniques γ.

La courbe Δ est d'ordre n et est rationnelle ; elle appartient donc à un espace linéaire S_ρ de dimension au plus égale à n. La rationalité de l'involution I_2 en résulte.

Observons que D passe par un des points unis isolés de I_2.

Considérons maintenant la transformation ayant quatre points unis (n° 499). Nous avons $m = 2n$. Il existe au moins ∞^1 courbes D, d'ordre n, passant $n - 1$ fois par O et une fois par O_1, O_3, ..., O_{4n-1}. A une courbe D, T fait correspondre une courbe D. Il existe certainement des courbes D transformées en elles-mêmes par T. Une de ces courbes est irréductible et passe par deux points unis de l'involution, non situés sur une même droite passant par O. Il lui correspond sur F une courbe Δ, rationnelle, d'ordre n, unisécante des coniques γ. On en conclut que la surface F est rationnelle.

En résumé : *Une involution plane du second ordre est rationnelle.*

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème de M. Castelnuovo, suivant lequel toute involution plane est rationnelle [1].

[1] *Math. Annalen*, 1893, t. XLIV; *Memorie Scelte*, Bologne, Zanichelli, 1937.