LUCIEN GODEAUX

LES MATHÉMATIQUES AU DÉBUT DU XX^{e} SIÈCLE

Introduction : de l'algèbre aux groupes

Algèbre. — Dès l'an 2000 avant J.-C., les hommes eurent à résoudre des problèmes conduisant à des équations du second degré à une inconnue. Cette résolution est aujourd'hui classique. Celle des équations du troisième et du quatrième degrés fut l'œuvre des algébristes italiens du XVI^{e} siècle (Tartaglia, Cardan, Bombelli). Les racines de ces équations s'expriment au moyen de radicaux portant sur des expressions des coefficients. Dès que l'on passe aux équations de degré supérieur à quatre, il n'en est plus de même. Abel et Ruffini ont montré qu'il n'était pas possible de résoudre par radicaux l'équation générale du cinquième degré ou, en d'autres termes, pour qu'une équation du cinquième degré soit résoluble par radicaux, il doit exister certaines relations entre ses coefficients. Il appartenait à Galois de montrer la raison profonde de ce fait. En même temps, Galois introduisait la notion de groupe, qui allait peu à peu pénétrer dans tous les domaines des mathématiques.

Des groupes a la géométrie (1)

Le concept de groupe continu de transformations a conduit F. Klein et H. Poincaré à une interprétation féconde de la géométrie. Considérons un plan et le groupe G des mouvements de ce plan. Tout mouvement conserve les distances et les angles ; de plus, deux figures égales sont des figures telles que l'une puisse être amenée en coïncidence avec l'autre en soumettant la première à un mouvement. C'est au fond la définition même de l'égalité donnée par Euclide. La géométrie euclidienne peut donc être considérée comme l'étude des propriétés du plan qui ne sont pas altérées par les mouvements, c'est-à-dire qui sont

(1) Ce paragraphe constitue un prolongement des articles de M. M. A. Lentin et E. Cartan. (Note de F. LL.)

invariantes par rapport au groupe des mouvements. D'une manière générale, la géométrie d'une variété V par rapport à un groupe continu G est l'étude des propriétés qui restent invariantes lorsqu'on applique aux figures tracées sur la variété les transformations du groupe G.

Cependant, on peut concevoir des géométries qui ne rentrent pas dans ce cadre. Imaginons une variété V, continue, dont les points sont déterminés par n coordonnées. Nous pouvons définir la distance de deux points de la variété de la manière suivante : soient x_1, x_2, ..., x_n les coordonnées d'un point, $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$, ..., $x + dx_n$ celles d'un point infiniment voisin du premier. Par définition, la distance de ces deux points sera une certaine expression :

$$ds = \mathrm{E}\ (dx_1,\ dx_2,\ ,\ldots,\ dx_n),$$

où E est une fonction donnée, homogène et du premier degré par rapport à dx_1, dx_2, ..., dx_n, dont les coefficients sont des fonctions des coordonnées du premier point. Considérons ensuite deux points A, B et une certaine courbe, tracée sur V, partant de A et aboutissant à B. La distance de A à B, le long de cette courbe, sera exprimée par $\int_a^b ds$ prise le long de cette courbe, de A à B. Cette distance dépendra évidemment de la courbe choisie et un des problèmes à résoudre sera de déterminer la courbe donnant la distance minimum de A à B. On obtiendra ainsi les géodésiques de la variété V. Habituellement, on prend pour E la racine carrée d'un polynome homogène du second degré en dx_1, dx_2, ..., dx_n ; c'est ce que fit Riemann. Le cas où E est quelconque a été étudié par M. Finsler.

M. Elie Cartan est parvenu à faire rentrer la géométrie de la variété V basée sur la notion de distance, dans le cadre de Klein et Poincaré, en élargissant toutefois quelque peu ce cadre. Pour plus de simplicité, supposons que V soit une surface. A chaque point de cette surface, attachons le plan tangent en ce point et fixons, dans ce plan, une géométrie de groupe G. Nous supposerons, pour fixer les idées, que G est le groupe des mouvements. Cela conduit à fixer, dans le plan tangent α au point A, deux axes de référence Ax, Ay, par exemple rectangulaires ; on sait que les mouvements s'expriment, par rapport à ces axes, par des formules analogues aux transformations de coordonnées. Traçons sur la surface un chemin partant de A et aboutissant à un point B. Dans le plan tangent β en ce point, se trouvent fixés des axes Bx, By. Faisons rouler le plan α sur la surface de manière qu'il reste constamment tangent à celle-ci, le point de contact parcourant le chemin fixé AB. Lorsque α sera venu coïncider avec β, les axes Ax, Ay seront venus occuper une certaine position A$'$ x', A$'$ y', distincte en général de Bx, By. On conçoit que la position de A$'$ x', A$'$ y' dépende du choix du chemin AB. Imaginons maintenant que le point B coïncide avec A ; nous revenons donc à A après avoir parcouru un certain chemin fermé et les axes A$'$ x', A$'$ y' sont cette fois situés dans le plan α. On passe de $A'\, x'\, y'$ à Axy au moyen d'une transformation de coordonnées, c'est-à-dire par un certain mouvement T. Répétons l'opération pour tous les chemins fermés possibles, tracés sur la surface, partant de A et y revenant ; nous obtiendrons une famille de mouvements analogues à T et formant un groupe G'. Toutes les transformations de G' font partie de G, mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai. G' est appelé groupe d'holonomie de la géométrie considérée. On conçoit que l'on peut former des géométries en partant d'une variété V, d'un groupe continu G fixé dans un espace attaché à chaque point de V, et d'une loi de raccordement entre les groupes G des espaces attachés à deux points voisins de V. (Dans l'exemple précédent, cette loi était déterminée par le roulement du plan tangent sur la surface.) On obtient ainsi les géométries non holonomes d'Elie Cartan. Celui-ci y a été conduit par l'étude des problèmes posés aux géomètres par la théorie de la relativité.

Revenons au concept de Klein-Poincaré. Nous avons supposé que le groupe G est continu, mais la géométrie algébrique conduit à considérer des groupes dont les transformations ne peuvent être déterminées que si l'on se donne un certain nombre de quantités susceptibles de varier d'une manière continue, et certains nombres entiers. On obtient ainsi un groupe G discontinu et ceci montre que les géomètres ont été conduits à une double étude : 1° celles des variétés V, qui relève de la topologie ; 2° celle des groupes continus et discontinus les plus généraux.

Il reste là matière à de nombreuses recherches.

Uniformisation des fonctions algébriques et géométrie algébrique (1)

Considérons une courbe, par exemple une ellipse d'équation :

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Si l'on pose $x = a \cos u$, $y = b \sin u$, on obtiendra, quel que soit u, un point de l'ellipse. On a ainsi une représentation paramétrique de l'ellipse.

Peut-on obtenir quelque chose d'analogue lorsque l'on a affaire à une courbe algébrique quelconque $f(x, y) = 0$? Il s'agit donc de trouver deux fonctions $x = x(u)$, $y = y(u)$ telles qu'en les portant dans l'équation $f = 0$, on obtienne une identité. Il faut tout d'abord définir exactement la nature des fonctions de u considérées. On supposera que ce sont des fonctions uniformes de la variable complexe $\xi + i\eta$ c'est-à-dire telles qu'à un point ξ, η du plan (ξ, η), corresponde une et une seule valeur de chacune des fonctions $x(u)$, $y(u)$. Le problème, banal pour les courbes rationnelles, fut d'abord résolu pour certaines courbes dites elliptiques

(1) A ce paragraphe correspond la fin de l'article de M. Valiron, qu'il complète et prolonge. (Note de F. LL.)

et parmi lesquelles se trouvent par exemple les cubiques planes sans point double. On obtient, pour $x(u)$, $y(u)$ des fonctions doublement périodiques. A vrai dire, ces dernières ne furent pas rencontrées à l'occasion de la résolution du problème en question. Lorsque l'on cherche à exprimer la longueur d'un arc d'ellipse, on est conduit à l'intégration d'une fonction où figure la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré ; cette intégrale ne peut être calculée par des moyens élémentaires. Écrivons-la sous la forme $u = \int F(x)\, dx$. Abel et Jacobi ont considéré cette équation comme définissant x en fonction de u. On trouve alors que x est une fonction doublement périodique de u, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres ω, ω', dont le rapport est d'ailleurs imaginaire, appelés périodes de la fonction, tels que :

$$x(u + \omega) = x(u), x(u + \omega') = x(u).$$

Ces fonctions doublement périodiques furent appelées, pour la raison qui vient d'être indiquée, fonctions elliptiques, d'où le nom de courbes elliptiques donné aux courbes dont les coordonnées des points s'expriment en fonctions doublement périodiques d'un paramètre, les périodes étant les mêmes pour les deux fonctions.

Il appartenait à Poincaré de donner, dans le cas général, la solution du problème posé, en démontrant que les coordonnées des points d'une courbe algébrique s'expriment en fonctions fuchsiennes d'une variable, ces fonctions correspondant à un même groupe de substitutions. On dit que la courbe est uniformisée au moyen des fonctions fuchsiennes.

Supposons que l'on ait uniformisé une courbe algébrique C donnée. Dans quelles conditions l'uniformisation d'une autre courbe algébrique C′ se ramène-t-elle à celle de C? La solution de cette question conduit à répartir les courbes algébriques en classes, deux courbes appartenant à une même classe s'il est possible de passer des points de l'une à ceux de l'autre par une transformation biunivoque et algébrique. D'une manière précise, les coordonnées x, y des points de la courbe C s'expriment en fonctions rationnelles des coordonnées x', y' des points de la courbe C′, compte tenu des équations de la courbe, et vice-versa. On dit que les courbes sont liées par une transformation birationnelle. Il s'agit de trouver des critères permettant de reconnaître si deux courbes appartiennent à une même classe, c'est-à-dire de rechercher les caractères d'une courbe qui sont invariants vis-à-vis des transformations birationnelles. Ce problème a été abordé par différentes méthodes, et les résultats obtenus sont importants. L'une des méthodes utilisées consiste dans l'étude des systèmes de groupes de points appartenant à une courbe algébrique ; on applique à ces systèmes des opérations qui ne sont pas altérées par les transformations birationnelles de la courbe.

L'extension des considérations précédentes aux surfaces algébriques pose des problèmes très difficiles et qui sont loin d'être résolus.

Répartissons les surfaces algébriques en classes analogues aux classes de courbes. Deux surfaces appartiennent à une même classe si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle, c'est-à-dire s'il existe une correspondance biunivoque et algébrique entre les points de ces surfaces. Il s'agit, comme pour les courbes, de déterminer quand deux surfaces appartiennent ou non à une même classe. Ce problème a été abordé par voie transcendante — et les travaux d'E. Picard sont ici d'une extrême importance — et par voie géométrique. Ce furent surtout les géomètres italiens, MM. Castelnuovo, Enriques et Severi, qui utilisèrent cette voie. C'est par la considération des systèmes de courbes tracées sur les surfaces algébriques et des opérations invariantes par rapport aux transformations birationnelles appliquées à ces systèmes, que ces géomètres purent édifier une théorie extrêmement élégante. Récemment, M. Severi a également introduit la considération de systèmes de groupes de points. On peut ainsi introduire certains nombres entiers (les genres et les plurigenres d'une surface) qui sont les mêmes pour deux surfaces appartenant à une même classe, mais il reste d'autres conditions à découvrir pour pouvoir caractériser les surfaces d'une classe.

Il s'agit ensuite d'uniformiser une surface algébrique représentative d'une classe, c'est-à-dire de trouver l'expression des coordonnées d'un point d'une surface algébrique $f(x, y, z) = 0$, en fonctions uniformes de deux paramètres. On ne connaît la solution de ce problème que dans des cas simples (surfaces rationnelles, surfaces réglées, surfaces hyperelliptiques). Picard a construit des fonctions (fonctions hyperabéliennes, fonctions hyperfuchsiennes) qui conduisent à des surfaces algébriques particulières dont l'étude reste d'ailleurs à faire. Le problème de l'uniformisation des surfaces algébriques semble encore très loin d'une solution définitive.

Fonctions d'une variable réelle (1)

C'est probablement la représentation d'une courbe par une équation, en géométrie cartésienne, qui a fait naître la notion générale de fonction. Cette notion repose sur celle de correspondance. Si à chaque valeur d'une variable x (ou à chaque système de valeurs de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$) correspond une valeur d'une variable y, on dit que y est fonction de x (ou de $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Dès le début de l'étude des fonctions, on est d'ailleurs conduit à séparer les fonctions de variables réelles des fonctions de variables complexes.

La théorie moderne des fonctions d'une variable réelle a pris naissance dans les travaux de Baire, de M. Borel et de Lebesgue ; elle repose essentiellement sur la notion d'ensemble, due à G. Cantor. On peut se représenter une fonction d'une variable réelle en considérant, dans un

(1) Ce paragraphe reprend certaines notions déjà explicitées dans les articles de M. M. J. T. Desanti et L. Perrin. (Note de F. L. L.)

plan rapporté à deux axes Ox, Oy, un trait continu rencontré en un point par toute parallèle à Oy ; en supposant que cette courbe ait une tangente en chaque point, la fonction $y = f(x)$ que représente la courbe est continue et admet une dérivée en chaque point. D'une manière précise, on dit qu'une fonction $f(x)$ est : 1° définie dans un intervalle (a, b) lorsqu'à toute valeur de x comprise entre a et b, correspond une valeur de la fonction ; 2° continue en un point x si à tout nombre positif k arbitrairement choisi, aussi petit qu'on le veut, correspond un nombre h tel que si $x' - x$ est compris entre $-h$ et $+h$, $f(x') - f(x)$ est compris entre $-k$ et $+k$, x' étant un point voisin de x ; 3° différentiable en un point x si, lorsque x' tend vers x, le rapport de $f(x') - f(x)$ à $x' - x$ tend vers une limite bien déterminée, appelée dérivée de $f(x)$ au point x.

Si la fonction $f(x)$ est continue en chaque point de l'intervalle (a, b), elle est dite continue dans cet intervalle. Elle est dite différentiable dans (a, b) si elle est différentiable en chaque point. Une fonction continue n'est pas nécessairement différentiable et il existe des courbes continues sans tangentes. Par contre, une fonction différentiable est continue.

La notion d'intégrale a joué un grand rôle dans le développement de la théorie des fonctions. Riemann définit l'intégrale de la manière suivante : Considérons une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle $a \leq x \leq b$. Partageons cet intervalle (a, b) en petits intervalles par des points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rangés dans l'ordre croissant et soit ξ_i une valeur de x comprise entre x_i et x_{i+1}. Formons la somme $\Sigma\, (x_{i+1} - x_i)\, f(\xi_i)$ étendue à tous les intervalles. Si, lorsque le nombre des intervalles croît indéfiniment, chaque intervalle tendant vers zéro, cette somme a une limite, celle-ci est l'intégrale, au sens de Riemann de la fonction $f(x)$ dans (a, b). On la représente par $\int_a^b f(x)\, dx$.

Lebesgue a donné une autre définition de l'intégrale. Supposons que, dans l'intervalle (a, b), les valeurs de la fonction soient comprises entre les nombres m et M. Partageons l'intervalle (m, M) en un certain nombre d'intervalles par des nombres $m_1, m_2, \ldots, m_n$, rangés par exemple dans l'ordre croissant. Les points x qui donnent à $f(x)$ des valeurs comprises entre m_i et m_{i+1}, forment un certain ensemble. Supposons, pour plus de simplicité, que cet ensemble soit formé des points d'un nombre fini d'intervalles et soit e_i la somme des longueurs de ces intervalles. Soit en outre μ_i un nombre compris entre m_i et m_{i+1}. Formons la somme $\Sigma\, e_i\, \mu_i$ étendue à tous les intervalles. Si cette somme tend vers une limite lorsque le nombre des intervalles croît indéfiniment, chaque intervalle tendant vers zéro, la limite est l'intégrale au sens de Lebesgue de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b). On la représente également par le symbole $\int_b^a f(x)\, dx$. En réalité, la définition de l'intégrale de Lebesgue est beaucoup plus générale, l'ensemble des valeurs de x donnant à $f(x)$

des valeurs comprises entre m_i et m_{i+1} n'est pas en général formé des points d'un nombre fini d'intervalles et il faut introduire la notion de mesure des ensembles, due à M. Borel. Cela nous entraînerait trop loin.

Une fonction, intégrable au sens de Riemann, est intégrable au sens de Lebesgue, mais l'inverse n'est pas vrai. Le procédé de Lebesgue est donc plus général.

Fonctions d'une variable complexe (1)

Cauchy, Riemann, Weierstrass et Méray ont créé la théorie des fonctions d'une variable complexe. Considérons une fonction uniforme $Z = f(z)$ d'une variable complexe $z = x + iy$. Si l'on veut définir la dérivée d'une telle fonction en un point z_0, il faut considérer la limite du rapport de $f(z) - f(z_0)$ à $z - z_0$ lorsque z tend vers z_0. Or, dans le plan des x, y, le point z peut tendre vers z_0 en suivant un chemin déterminé et la limite cherchée (si elle existe) dépend en général du chemin choisi. On appelle fonction monogène une fonction telle que la limite en question ne dépende pas du chemin choisi et cette limite est appelée dérivée $f'(z)$ de $f(z)$ au point z_0.

Un exemple de fonction monogène est donné par un polynôme entier en z, ce point z appartenant à une certaine aire située à distance finie. Une telle fonction reste toujours finie et donne en outre un exemple d'une fonction holomorphe, c'est-à-dire d'une fonction qui reste toujours finie dans l'aire où elle est définie. Une fonction holomorphe est développable en série de Taylor, procédant suivant les puissances entières de $z - z_0$, convergente dans le voisinage de z_0.

Au lieu d'un polynôme, considérons une fonction rationnelle de z, c'est-à-dire le quotient de deux polynômes en z, dans une certaine aire A. La fonction est en général monogène, mais il se présente ici un fait nouveau ; il existe des points z en lesquels le dénominateur s'annule et où la fonction devient donc infinie ; ce sont les pôles de la fonction. D'une manière générale, on appelle pôle de la fonction $f(z)$ un point z_0 tel que, lorsque z s'approche de z_0, $f(z)$ croît au delà de toute limite, mais que $(z - z_0)^m f(z)$ reste finie, m étant un entier positif (ordre du pôle). Un point en lequel $f(z)$ est infinie et qui n'est pas un pôle, est appelé point singulier essentiel ; tel est par exemple le point $z = 0$ pour la fonction Log z. Une fonction qui, dans une certaine aire, ne possède que des pôles, est dite méromorphe.

Les points singuliers (pôles, points essentiels) d'une fonction peuvent former des ensembles de natures très diverses ; ils peuvent même former des lignes continues. Une des questions qui se posent est l'étude des valeurs d'une fonction dans le voisinage d'un de ses points singuliers, question dominée par les célèbres théorèmes de Picard.

(1) Ce paragraphe reprend et prolonge quelques-unes des questions traitées dans l'article de M. Valiron. (Note de F. LL.)

On peut définir une fonction holomorphe par son développement de Taylor en un point z_0, développement convergent dans un certain cercle de centre z_0, et rechercher ensuite dans quelle région du plan cette fonction reste holomorphe. C'est ce que l'on appelle rechercher le prolongement analytique de la fonction ; c'est le point de vue de Weierstrass et Méray, qui conduit à la notion de fonction analytique.

Si $Z = f(z)$ est une fonction analytique de z définie dans un certain domaine A, à tout point $x + iy$ de ce domaine correspond un point $Z = X + iY$ d'un certain domaine A′. On obtient ainsi une correspondance entre les aires A et A′, qui conserve les angles et que l'on appelle représentation conforme. L'étude de ces représentations forme un chapitre extrêmement fécond de la théorie des fonctions.

M. Montel a considéré des familles de fonctions satisfaisant à certaines conditions et qu'il a appelées familles normales de fonctions. C'est là un instrument d'une très grande portée dans l'étude des fonctions analytiques.

A côté des fonctions analytiques, on a récemment considéré des fonctions que l'on a appelées fonctions quasi-analytiques. Une fonction est définie dans une aire par les valeurs de ses dérivées en chaque point ; on peut donc écrire le développement de Taylor de la fonction. Si ce développement est convergent, la fonction est analytique ; s'il en est autrement, la fonction est quasi-analytique. Ces fonctions ont été étudiées par MM. Borel, Carleman, de La Vallée Poussin et Denjoy.

L'étude des fonctions multiformes, c'est-à-dire des fonctions $f(z)$ telles qu'à une valeur de z correspondent plusieurs valeurs de la fonction, comme c'est le cas par exemple pour la fonction u de z définie par un polynôme $F(u, z) = 0$ de degré au moins égal à 2 en u, peut se ramener à l'étude des fonctions uniformes par l'introduction des surfaces de Riemann. Ce procédé consiste à remplacer le plan (x, y) par des feuillets superposés, en nombre égal à celui des valeurs de la fonction en un point z, ces feuillets étant soudés deux à deux entre eux, en croix, le long de certaines lignes, de manière à permettre le passage d'un feuillet à un autre.

Toutes ces questions ont été, dans une certaine mesure, étendues aux fonctions de plusieurs variables.

Équations différentielles

Les applications des mathématiques conduisent aux équations différentielles, c'est-à-dire à des relations entre une ou plusieurs fonctions d'une variable et leurs dérivées par rapport à la variable. Il s'agit alors de déterminer cette ou ces fonctions.

Analytiquement, on obtiendra une équation différentielle en partant d'une relation $F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ et en éliminant les constantes C entre cette relation et celles que l'on en déduit par dérivation par rapport à x. On obtient ainsi une relation entre x, y et les n premières dérivées de y par rapport à x. Ceci montre que si l'on part inversement de cette dernière relation, l'intégrale de l'équation différentielle, c'est-à-dire la fonction $y(x)$ qui y satisfait, dépendra en général de n constantes arbitraires.

Les premières recherches des géomètres ont eu pour but de ramener l'intégration des équations différentielles à des quadratures et, en somme, à exprimer les solutions au moyen de fonctions connues. Il est bien évident que l'on ne pouvait atteindre ainsi que des équations différentielles très particulières.

Avec Cauchy, la question change d'aspect. Cauchy considère une équation différentielle par exemple du premier ordre, $y' = f(x, y)$, et pose deux problèmes :

1° Existence d'une solution ;

2° Unicité de la solution.

Comme dans la théorie des fonctions, il convient de traiter séparément les cas où les variables sont réelles ou imaginaires. Dans le second cas, Cauchy démontre que si $f(x, y)$ est holomorphe dans un certain domaine, il existe une et une seule fonction holomorphe $y(x)$ satisfaisant à l'équation et se réduisant à y_o pour $x = x_o$, le point x_o, y_o appartenant au domaine considéré. Le procédé de démonstration est intéressant. Cauchy commence par construire une série de puissances de $x - x_o$ qui satisfait formellement à l'équation. Il construit ensuite une seconde série dont la convergence entraîne celle de la première. Or, cette nouvelle série satisfait à une équation différentielle que l'on peut intégrer par quadratures. La solution obtenue par ce procédé est holomorphe dans des conditions faciles à déterminer, elle coïncide avec la seconde série, donc celle-ci est convergente et il en est de même de la première série. Le théorème en résulte. Pour construire la seconde série, on utilise ce que l'on appelle une « fonction majorante » ; c'est une fonction de x, y qui est supérieure, au point x_o, y_o, au module de $f(x, y)$ et dont toutes les dérivées sont supérieures, au même point, aux modules des dérivées correspondantes de $f(x, y)$. Cette méthode « par comparaison » a été appelée par Cauchy « méthode des limites » ; elle s'étend sans difficultés aux systèmes différentiels et, d'une manière générale, aux équations aux dérivées partielles.

Lorsque les variables sont réelles, la continuité de $f(x, y)$ entraîne l'existence d'une infinité de solutions $y(x)$ se réduisant à y_o pour $x = x_o$. Pour que la solution soit unique, il faut que la fonction f satisfasse en outre à une autre condition. On suppose généralement que f satisfait à la condition de Lipschitz, c'est-à-dire que la valeur absolue de la différence $f(x, y_1) - f(x, y_2)$ soit inférieure à la valeur absolue de la différence $y_1 - y_2$, multipliée par un facteur constant, appelé constante de Lipschitz. Cette condition est suffisante pour l'unicité de la solution, mais elle n'est pas nécessaire. Si la fonction f est différentiable par rapport à y, elle satisfait d'ailleurs à la condition de Lipschitz, mais l'inverse n'est pas vrai. Cauchy a démontré l'existence et l'unicité de l'intégrale par un procédé qui rappelle celui qui est utilisé pour arriver au concept d'intégrale au sens de Riemann. Plus tard, E. Picard est arrivé au même résultat en utilisant une méthode d'approximations successives. Par des quadratures, il construit une suite de fonctions s'approchant de plus en plus de la solution cherchée, celle-ci est la limite de la suite. Ce procédé s'étend également aux systèmes d'équations différentielles.

Les recherches précédentes conduisent à l'étude des solutions des équations différentielles dans le voisinage d'un point ordinaire (ou d'holomorphie) x_0, y_0 ; elles devaient être suivies de l'étude des solutions dans le voisinage d'un point singulier. Cette étude, très difficile, n'est pas très avancée ; les travaux de Poincaré, de Picard et de Painlevé sont fondamentaux dans ce genre de questions.

Poincaré a considéré l'intégration des équations différentielles à un autre point de vue ; il s'est proposé de construire les courbes définies par une équation différentielle :

$$\mathrm{P}\,(x, y)\, dx + \mathrm{Q}\,(x, y)\, dy = 0$$

dans le plan (x, y). Ce n'est donc plus l'étude de la solution dans le voisinage d'un point, mais dans tout le plan. Cette manière de voir suppose en premier lieu l'étude qualitative de la solution, c'est-à-dire la recherche de la forme géométrique de la courbe ; elle doit être suivie de la détermination numérique des valeurs de la solution.

Équations différentielles et aux dérivées partielles

Considérons une équation aux dérivées partielles $\mathrm{F}\,(x, y, z, p, q) = 0$, dans laquelle z est la fonction de x, y à déterminer, p et q étant les dérivées de z par rapport à x, y. Interprétons x, y, z comme coordonnées des points de l'espace. Une solution de l'équation, c'est-à-dire une fonction z de x, y qui, portée dans l'équation, la réduit à une identité, sera représentée par une surface, appelée surface intégrale. Le problème de Cauchy consiste à construire une surface intégrale passant par une courbe donnée *a priori*. Il admet une solution unique sous certaines conditions très larges imposées aux données de la question.

Si l'équation considérée contient en outre les dérivées secondes de z par rapport à x, y, le problème de Cauchy consistera à déterminer une surface intégrale passant par une courbe donnée *a priori* et touchant, le long de cette courbe, une surface donnée. Le problème admet une solution unique sous certaines conditions imposées aux données. Cependant, le problème peut être impossible pour certaines courbes appelées courbes caractéristiques ; on démontre que toute surface intégrale est en général engendrée de deux manières par des caractéristiques.

Ces deux exemples montrent quelle est la direction des recherches sur les équations aux dérivées partielles.

Analyse fonctionnelle

Nous avons rencontré plus haut la notion de géodésique d'une surface, c'est-à-dire de courbe de longueur minimum tracée sur une surface. Les droites sont les géodésiques du plan, les grands cercles celles de la sphère. La détermination des géodésiques relève du calcul des variations, qui a été créé par Lagrange. Pour faire comprendre la nature des questions qui se posent dans ce chapitre des mathématiques, nous citerons deux exemples.

Considérons une courbe L tracée dans un plan vertical et un mobile allant d'un point A à un point B en suivant cette courbe, sous l'influence de la pesanteur. Quelle doit être la forme de la courbe L pour que le trajet du mobile ait lieu dans le temps minimum ? Ce problème conduit à déterminer une fonction y de x telle qu'une certaine intégrale $I = \int_a^b f(x, y, y')\, dx$ soit minimum, y' étant la dérivée de y par rapport à x. Ce problème est appelé problème des brachistochrones ; la courbe L doit être une cycloïde.

Voici le second exemple. Si l'on plonge un contour en fil de fer dans un liquide glycériné, on constate, lorsqu'on l'en retire, qu'une mince pellicule de liquide reste tendue à l'intérieur du contour. Plateau, qui fit cette expérience, montra que l'aire de la surface dont cette pellicule est l'image, doit être minimum. Le problème de Plateau consiste dans la détermination des surfaces d'aire minimum limitées par un contour donné ; il revient à la recherche du minimum d'une intégrale double et est très difficile. D'une manière générale, le calcul des variations se propose de déterminer une fonction d'une ou de plusieurs variables rendant extremum une intégrale portant sur une fonction des variables indépendantes de la fonction inconnue et de certaines dérivées de celle-ci.

Dans l'intégration des équations différentielles et aux dérivées partielles, dans le calcul des variations, il s'agit de déterminer des fonctions d'une ou de plusieurs variables satisfaisant à des conditions déterminées. Ce sont des problèmes qui rentrent dans ce que l'on a appelé l'analyse fonctionnelle qui, sous l'influence de MM. Volterra et Hadamard, a pris une grande extension. Il existe de nombreuses espèces d'équations fonctionnelles ; nous nous bornerons à en citer un exemple. On a constaté expérimentalement que l'état d'un ressort ne dépend pas seulement de la tension qu'il subit, mais aussi des différentes tensions qu'il a subies antérieurement ; il y a en quelque sorte une espèce d'hérédité dont il faut tenir compte. Les problèmes de cette nature conduisent à des équations intégrales (ou à des équations intégro-différentielles) de la forme :

$$\varphi(x) + \int_a^x K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = F(x),$$

où il s'agit de déterminer la fonction $\varphi(x)$, les fonctions $K(x, s)$ et $F(x)$ étant données.

Remarque finale

Nous avons essayé de faire comprendre la nature des préoccupations des mathématiciens ; notre exposé est fort incomplet et nous eussions dû faire allusion à de nombreux problèmes, à des questions importantes telles que la théorie des nombres (1), la topologie (2), etc. Nous ne pouvions songer à être complet. Avant de terminer, qu'il nous soit permis d'ajouter quelques mots sur une tendance actuelle de la recherche mathématique. Lorsque les géomètres abordent pour la première fois une question, ils introduisent des hypothèses qui leur permettent d'arriver au but qu'ils se proposent avec les moyens dont ils disposent. Plus tard, la question peut être reprise et l'on s'aperçoit que certaines hypothèses sont superflues, ce sont en quelque sorte des hypothèses de commodité. On est ainsi conduit, étant donné un théorème relatif à un certain être mathématique, à rechercher le minimum d'hypothèses à introduire. Nous nous ferons comprendre sur un exemple.

On sait que l'on appelle point d'inflexion d'une courbe plane un point où la tangente à la courbe traverse celle-ci. Considérons une courbe algébrique plane réelle du troisième ordre, c'est-à-dire le lieu des points réels x, y du plan satisfaisant à une équation $f(x, y) = 0$, où f est un polynôme du troisième degré, à coefficients réels. Une droite du plan coupe cette courbe en trois points réels au plus. La courbe admet une tangente en chaque point et possède neuf points d'inflexion dont trois seulement sont réels. En se bornant aux points réels, on peut donc dire que la courbe possède trois points d'inflexion.

Supposons maintenant tracée dans le plan une courbe continue, ayant une tangente en chaque point, rencontrée en trois points au plus par une droite du plan. Le géomètre danois Juel a démontré que cette courbe possède trois points d'inflexion. Cette courbe n'est pas algébrique et l'on voit que l'hypothèse de l'algébricité était superflue ; c'était simplement une hypothèse de commodité. Ce qui importe, c'est le fait que la courbe est rencontrée en trois points au plus par une droite (3).

Les exemples analogues sont nombreux ; c'est le perfectionnement des méthodes d'investigation qui permet de les déceler.

Lucien Godeaux.
Membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université de Liège.

(1) Celle-ci a pris récemment un nouvel essor avec l'École russe de M. Vinogradov, qui a étudié notamment l'hypothèse de Goldbach.

(2) Sous l'impulsion surtout de M. Fréchet, la notion d'espace abstrait a reçu récemment une grande extension. (Voir l'article de M. Fréchet : « De l'espace à trois dimensions aux espaces abstraits. » Note de F. LL.).

(3) De telles propositions relèvent d'un chapitre des Mathématiques de création récente, que l'on nomme la *Géométrie finie*. Il a été illustré en France par MM. Bouligand, Marchaud, Montel, etc. (Note de F. LL.)