Introduction à la GÉOMÉTRIE PROJECTIVE Hyperspatiale

par

Lucien GODEAUX

Membre de l'Académie royale de Belgique,
Professeur à l'Université de Liége.

Liége,
Librairie BOURGUIGNON,
16, rue des Dominicains,
1939.

Du même auteur

Leçons élémentaires sur les équations différentielles et le calcul des variations. Bruxelles, Ecole Militaire, 1926.

Les transformations birationnelles du plan. Paris, Gauthier-Villars, 1926.

La géométrie. Liège, Thone et Paris, Hermann, 1931.

Leçons de Géométrie projective. Liège, Thone et Paris, Hermann, 1933.

Leçons de Géométrie supérieure. Liège, Bourguignon, 1933.

Questions non résolues de Géométrie algébrique. Les involutions de l'espace et les variétés algébriques à trois dimensions. Paris, Hermann, 1933.

Leçons de Géométrie infinitésimale. Liège, Tholien, 1933.

La théorie des surfaces et l'espace réglé. Paris, Hermann, 1934.

Les transformations birationnelles de l'espace. Paris, Gauthier-Villars, 1934.

Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls. Paris, Hermann, 1934.

Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Paris, Hermann, 1935.

Les Géométries. Paris, Colin, 1937.

Cours de Géométrie analytique à trois dimensions (3e édition). Liège, Tholien, 1937.

Cours de Géométrie supérieure. Fasc. I. Points singuliers des courbes et des surfaces algébriques. Fasc. II. Correspondances rationnelles. Liège, Bourguignon, 1937.

Table des matières

Errata

Pages	Lignes	Lire	au lieu de
4	6	$\omega_i \omega_K (O_i O_K O y)$	$\omega_i \omega_K (O_i O_K O_y)$
8	10 au bas	K_1	K_ν
10	5 au bas	$\rho x'_0 = \rho_1 x_0 + a x_1$	$\rho x'_0 = \rho_1 x_0 + a x$
14	1	$\dfrac{a_{r-h}\, x}{\xi'_{r-h}}$	$\dfrac{a_{r-h-x}}{\xi'_{r-h}}$
24	7 au bas	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{K}$
27	11	S_{r-K-2}	S_{r-K-r}
31	14	$\binom{r+1}{K+2}$	$\binom{r+1}{K+r}$
32	9	un	son
35	12	respectives de	respectives
37	5	$\varphi_{k+1+j}\circ(x_0, x_1, \ldots x_{k+1})$	$\varphi_{k+1+j}(x_0, x_1, \ldots x_{k+i})$
40	9 au bas	$\dfrac{\varphi_i(u)}{\varphi_0(u)} = \dfrac{\varphi_i(u_1)}{\varphi_0(u_1)}$	$\dfrac{\varphi_i(u)}{\varphi_0(u)} = \dfrac{\varphi_1(u_1)}{\varphi_0(u_0)}$
41	2 au bas	$\varphi_i(y_0, y_1)$	$\varphi_i(y_0, y_i)$
56	10 au bas	$a_n P_0$	$a_m P_0$
68	21	$\frac{1}{2} m'(2m - m' + 3) - 1$	$\frac{1}{4} m'(rm - m' + 3) - 1$
70	16	$A' A'_i$	$A' A'_2$
88	3	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$
93	10	tangentielle de	tangentielle
99	1 au bas	Σ'	Σ

Chapitre I

L'espace projectif et le groupe des projectivités.

§1. — L'espace projectif.

1. Définitions. L'ensemble de $r+1$ nombres $x_0, x_1, \ldots, x_r$, réels ou complexes, finis, non tous nuls, est appelé point et les $r+1$ nombres donnés sont les coordonnées projectives de ce point x. Deux points dont les coordonnées projectives de mêmes indices sont proportionnelles, sont considérés comme identiques.

L'ensemble des points x est appelé espace projectif S_r à r dimensions ou espace linéaire.

Soient $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r$ $r+1$ nombres, réels ou complexes, finis, non tous nuls. L'ensemble des points de S_r dont les coordonnées satisfont à l'équation

$$\xi_x = \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \ldots\ldots + \xi_r x_r = 0, \qquad (1)$$

est appelé hyperplan ξ de S_r. L'hyperplan ξ est complètement déterminé si l'on se donne $r+1$ nombres proportionnels à $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r$. Ces $r+1$ nombres sont appelés coordonnées de l'hyperplan ξ. Deux hyperplans dont les coordonnées sont proportionnelles, coïncident.

Les hyperplans dont les coordonnées vérifient l'équation (1), où les x sont donnés, sont en nombre ∞^{r-1}; ils forment ce que l'on appelle une gerbe G_{r-1} de sommet x.

2. Principe de dualité. Il est bien clair que nous eussions pu commencer par définir les hyperplans et en déduire la définition des points par l'équation (1). D'une manière précise, définissons un hyperplan ξ comme l'ensemble de $r+1$ nombres $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r$ non tous nuls, donnés à un facteur de proportionnalité près. L'ensemble de ces hyperplans constitue ce que nous appellerons l'espace projectif tangentiel Σ_r à r dimensions. L'équation (1) permet alors d'introduire les points x définis par $r+1$ nombres non tous nuls $x_0, x_1, \ldots, x_r$, donnés à un

facteur de proportionnalité près.

Nous pouvons intervertir les notations et appeler point, ce que nous avons appelé hyperplan et hyperplan ce que nous avons appelé point. De cette remarque découle la loi de dualité de l'espace projectif. D'une proposition établie, nous pouvons en déduire une seconde en intervertissant les mots point et hyperplan.

3. Espaces linéaires appartenant à S_r. Considérons p hyperplans ($p < r$) $\xi, \eta, \ldots, \varsigma$ d'équations

$$\xi_x = 0, \; \eta_x = 0, \ldots \varsigma_x = 0 \qquad (2)$$

Nous supposerons que ces équations sont linéairement indépendantes et nous dirons que les hyperplans $\xi, \eta, \ldots \varsigma$ sont indépendants. De même, nous dirons que q points $x, y, \ldots z$ sont indépendants s'il n'existe pas une relation linéaire homogène, à coefficients constants non tous nuls, satisfaite par toutes les coordonnées de même indice de ces points.

Il est possible de trouver, d'une infinité de manières, $q = r-p+1$ points $x, y, \ldots z$, indépendants, appartenant aux hyperplans $\xi, \eta, \ldots, \varsigma$. Tout point

$$m_1 x + m_2 y + \cdots + m_q z \qquad (3)$$

dont les coordonnées sont

$$m_1 x_i + m_2 y_i + \cdots + m_q z_i, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, r)$$

appartient aux hyperplans (2) Réciproquement, tout point appartenant à ces hyperplans à des coordonnées de la forme précédente pour des valeurs réelles ou complexes, finies, non toutes nulles, de $m_1, m_2, \ldots, m_q$. L'ensemble des points de S_r communs aux p hyperplans (2) constitue donc un espace linéaire S_{r-p} à $r-p$ dimensions.

Tout hyperplan passant par cet espace S_{r-p} a des coordonnées de la forme

$$\mu_1 \xi_i + \mu_2 \eta_i + \cdots + \mu_p \varsigma_i, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, r)$$

et peut être représenté par

$$\mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \cdots + \mu_p \varsigma,$$

les μ étant des nombres réels ou complexes, finis, non tous nuls. L'ensemble de ces ∞^{p-1} hyperplans constitue une gerbe G_{p-1} de support S_{r-p}.

4. Remarque. Les p quantités $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ sont les coordonnées projectives des hyperplans de la gerbe G_{p-1} de support S_{r-p}. Cette gerbe peut donc être considérée comme un espace linéaire dont l'élément serait un hyperplan μ. La loi de dualité appliquée à cet espace conduit à considérer l'espace linéaire à $p-1$ dimensions dont l'élément générateur est l'espace S_{r-p+1} passant par S_{r-p}. En d'autres termes, l'ensemble des espaces S_{r-p+1} passant par un espace S_{r-p} est un espace projectif.

5. Théorème. Si deux espaces linéaires S_p, S_q ont en commun un espace S_s (et non un espace de dimension supérieure) et appartiennent à un espace S_r (et non à un espace de dimension inférieure), on a

$$p + q = r + s.$$

En effet, dans l'espace S_s, on peut prendre $s+1$ points indépendants : $x^0, x^1, \ldots, x^s$. Dans S_p, on peut prendre $p+1$ points indépendants dont $s+1$ sont les points choisis dans S_s. Soient $x^0, x^1, \ldots, x^s, x^{s+1}, \ldots, x^p$ ces points. De même, dans S_q, on peut prendre $q+1$ points indépendants $x^0, x^1, \ldots, x^s, x^{p+1}, \ldots, x^{p+q-s}$. Les $p+q-s+1$ points

$$x^0, x^1, \ldots, x^s, x^{s+1}, \ldots, x^p, x^{p+1}, \ldots, x^{p+q-s}$$

sont indépendants et définissent complètement S_r, d'où l'énoncé.

6. Interprétation des coordonnées projectives. Les $r+1$ points

$$O_i \ (x_0 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_r = 0, \ x_i \neq 0)$$

sont indépendants, de même que les hyperplans

$$\omega_i \ (\xi_0 = \cdots = \xi_{i-1} = \xi_{i+1} = \ldots = \xi_r = 0, \ \xi_i \neq 0).$$

L'hyperplan ω_i contient tous les points O sauf le point O_i. Les $r+1$ points $O_0, O_1, \ldots, O_r$ et les $r+1$ hyperplans $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r$ sont les sommets et les faces d'un $(r+1)$-èdre appelé $(r+1)$-èdre fondamental.

Introduisons encore un point $O\,(x_0 = x_1 = \ldots = x_r)$ appelé point unitaire et un hyperplan $\omega\,(\xi_0 = \xi_1 = \ldots = \xi_r)$, appelé hyperplan unitaire. Le $(r+1)$-èdre fondamental, joint à O et à ω, constitue la figure de référence.

Les hyperplans passant par les sommets du $(r+1)$-èdre fondamental distincts de O_i, O_k, ont pour équation

$$\mu_i x_i + \mu_k x_k = 0.$$

Ceux des hyperplans passant par O_i, O_k, O et par un point y sont donnés respectivement par

$$(\mu_i = 0, \mu_k = 1), (\mu_i = 1, \mu_k = 0), (\mu_i = 1, \mu_k = -1), (\mu_i = y_k, \mu_k = -y_i).$$

Le rapport enharmonique de ces hyperplans est donné par

$$\omega_i \omega_k (O_i O_k O y) = \left(0, \infty, -1, -\frac{y_k}{y_i}\right) = \frac{y_i}{y_k}. \qquad (1)$$

De même, le rapport enharmonique des points de rencontre de la droite $O_i O_k$ ~~aura~~ ω_i, ω_k, ω et un hyperplan quelconque η, est donné par

$$O_i O_k (\omega_i \omega_k \omega \eta) = \frac{\eta_i}{\eta_k} \qquad (2)$$

L'hyperplan unitaire ω a pour équation

$$x_0 + x_1 + \cdots\cdots + x_r = 0$$

et le point unitaire O a pour équation tangentielle

$$\xi_0 + \xi_1 + \cdots\cdots + \xi_r = 0.$$

Les points de rencontre de $O_i O_k$ avec l'hyperplan unitaire ω et avec l'hyperplan passant par O et par l'intersection de ω_i, ω_k, partagent harmoniquement le couple O_i, O_k. Il en résulte que des éléments unitaires O, ω, un seul peut être choisi arbitrairement.

Inversement, si l'on se donne un $(r+1)$-èdre fondamental et l'un des éléments unitaires O ou ω, les relations (1) et (2) définissent les coordonnées projectives des points et des hyperplans de S_r.

7. <u>Transformation des coordonnées</u>. Considérons un $(r+1)$-èdre de sommets O'_i et de face ω'_i. Soit

$$a_{ix} = a_{i0} x_0 + a_{i1} x_1 + \cdots\cdots + a_{ir} x_r = 0 \qquad (1)$$

l'équation de ω'_i. On a

$$\Delta = |a_{ik}| \neq 0.$$

Soit O' un point n'appartenant à aucun des hyperplans ω'_0, ω'_1, ..., ω'_r. On peut s'arranger de telle sorte que les coordonnées de O' satisfassent aux équations

$$a_{0x} = a_{1x} = \cdots\cdots = a_{rx},$$

en multipliant éventuellement les deux membres des équations (1) par des facteurs convenablement choisis.

Les coordonnées d'un point y par rapport au $(r+1)$-èdre fondamental $O'_0 O'_1 \dots O'_r$, le point unitaire étant O', sont

$$\frac{y'_i}{y'_k} = \omega'_i \, \omega'_k \, (O'_i \, O'_k \, O'y) = \frac{a_{iy}}{a_{ky}} .$$

Il en résulte que les formules de transformation de coordonnées sont

$$\rho x'_i = a_{i0} x_0 + a_{i1} x_1 + \dots + a_{ir} x_r . \qquad (2)$$

Si A_{ik} est le mineur algébrique de a_{ik} dans Δ, on a

$$\rho' \xi'_i = A_{i0} \xi_0 + A_{i1} \xi_1 + \dots + A_{ir} \xi_r . \qquad (3)$$

8. **<u>Les espaces S_k de S_r</u>**. Un espace S_k de S_r est complètement déterminé soit par $k+1$ points indépendants qui lui appartiennent, soit par $r-k$ hyperplans indépendants qui le contiennent. Il en résulte que passer par un point pour un espace S_k équivaut à $r-k$ conditions. D'autre part, les espaces S_k passant par un espace S_h $(h<k)$ ne passent pas en conséquence par un point n'appartenant pas à S_h, par conséquent les espaces S_k de S_r sont en nombre $\infty^{(r-k)(k+1)}$.

Il en est de même des espaces S_{r-k-1}.

Considérons un espace S_h fixe et proposons-nous de rechercher le nombre de conditions imposées à un espace S_k devant rencontrer S_h suivant un espace S_p.

Un espace S_k rencontrant S_h suivant un espace S_p, appartient à un espace S_q, où $q = h+k-p$, contenant S_h. Les espaces S_q passant par S_h dépendent de

$$(r-q)(q+1)-(r-q)(h-1) = (r-q)(q-h).$$

paramètres. D'autre part, les espaces S_k situés dans un espace S_q, dépendent de $(q-k)(k+1)$ paramètres. Donc les espaces S_k rencontrant S_h suivant un espace S_p dépendent de

$$(r-q)(q-h)+(q-k)(k+1) = (r-k)(k-p)+(h-p)(p+1).$$

paramètres.

Le nombre de conditions imposées aux espaces S_k qui doivent rencontrer S_h suivant un espace S_p est donc égal à $(p+1)(r-h-k+p)$

En particulier, les droites de l'espace S_r sont en nombre $\infty^{2(r-1)}$ et le nombre de conditions imposées aux droites de l'espace S_r qui doivent rencontrer un espace S_h (suivant un point ou S_0) est égal à $r-h-1$.

9. Interprétation des équations. Soit $F(x_0, x_1, \dots, x_r)$ un polynome entier, rationnel et homogène de degré m. L'ensemble des points satisfaisant à l'équation

$$F(x_0, x_1, \dots, x_r) = 0$$

est appelé hypersurface (algébrique) d'ordre m.

De même, si $\Phi(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r)$ est un polynome entier, rationnel et homogène de degré n, l'ensemble des hyperplans satisfaisant à l'équation

$$\Phi(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r) = 0$$

est appelé hypersurface-enveloppe (algébrique) de classe n.

Ces définitions sont indépendantes du choix de la figure de référence.

Une hypersurface d'ordre un est un hyperplan ; une hypersurface d'ordre deux est appelée hyperquadrique.

§ 2. Homographies

10. Définitions. On appelle homographie de l'espace S_r une correspondance représentée par les équations

$$(1) \qquad \rho x'_i = a_{i0} x_0 + a_{i1} x_1 + \dots + a_{ir} x_r, \qquad (i = 0, 1, \dots, r)$$

où les coefficients a_{ik} sont réels ou complexes, finis, non tous nuls.

A un espace linéaire, une homographie fait correspondre un espace linéaire.

Le déterminant

$$\Delta = |a_{ik}|$$

est appelé déterminant de l'homographie (1).

Si $\Delta = 0$, l'homographie (1) est dite singulière. D'une manière précise, si Δ est de caractéristique $r-h+1$, c'est-à-dire si tous les déterminants d'ordre $r-h+2$ tirés de Δ sont nuls sans que tous les déterminants d'ordre $r-h+1$ le soient, l'homographie (1) est appelée homographie singulière d'espèce h.

11. Homographies singulières. Si l'homographie (1) est singulière d'espèce h, il n'y a que $r-h+1$ des équations

$$a_{0x} = 0, \quad a_{1x} = 0, \dots, a_{rx} = 0$$

qui soient linéairement indépendantes. Supposons que ce soient les $r-h+1$ premières. On a

$$a_{r-h+i\,x} = \lambda_{i0}\, a_{0x} + \lambda_{i1}\, a_{1x} + \dots\dots + \lambda_{i,r-h}\, a_{r-h\,x}\,, \quad (i = 1, 2, \dots, h)$$

A un point x appartenant à l'espace S_{h-1} représenté par les équations

$$a_{0x} = a_{1x} = \dots\dots = a_{r-h\,x} = 0 \qquad (2)$$

correspond un point x' indéterminé. L'espace S_{h-1} représenté par (2) est appelé espace singulier de l'homographie.

A un point x n'appartenant pas à S_{h-1} correspond un point x' appartenant à l'espace linéaire S_{r-h} d'équations

$$\left.\begin{aligned} x'_{r-h+1} &= \lambda_{10} x'_0 + \lambda_{11} x'_1 + \dots\dots + \lambda_{1\,r-h}\, x'_{r-h}, \\ x'_{r-h+2} &= \lambda_{20} x'_0 + \dots\dots\dots + \lambda_{2\,r-h}\, x'_{r-h}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'_r &= \lambda_{h0} x'_0 + \dots\dots\dots\dots + \lambda_{h\,r-h}\, x'_{r-h} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Un point x' de l'espace S_{r-h} correspond à tous les points x satisfaisant aux équations

$$\frac{a_{0x}}{x'_0} = \frac{a_{1x}}{x'_1} = \dots\dots = \frac{a_{r-h\,x}}{x'_{r-h}}\,.$$

Ces points forment un espace S_h passant par l'espace singulier S_{h-1}.

Une homographie singulière d'espèce h est une homographie entre les espaces à h dimensions passant par un espace fixe à $h-1$ dimensions, et les points d'un espace à $r-h$ dimensions.

12. __Homographies non singulières__. Supposons $\Delta \neq 0$ et les espaces (x), (x') rapportés à la même figure de référence. En désignant par A_{ik} le mineur de a_{ik} dans Δ, nous avons

$$\begin{aligned} \rho x'_i &= a_{i0}\, x_0 + a_{i1}\, x_1 + \dots\dots + a_{ir}\, x_r\,, & (1)\\ \rho x_k &= A_{0k}\, x'_0 + A_{1k}\, x'_1 + \dots\dots + A_{rk}\, x'_r\,, & (2)\\ \rho \xi'_k &= A_{k0}\, \xi_0 + A_{k1}\, \xi_1 + \dots\dots + A_{kr}\, \xi_r\,, & (3)\\ \rho \xi_i &= a_{0i}\, \xi'_0 + a_{1i}\, \xi'_1 + \dots\dots + a_{ri}\, \xi'_r & (4) \end{aligned}$$

entre les coordonnées des points homologues x, x' et des hyperplans homologues ξ, ξ'.

Les points unis de l'homographie, c'est-à-dire les points qui sont leurs propres homologues, satisfont aux équations

$$a_{i0}\, x_0 + a_{i1}\, x_1 + \dots\dots + (a_{ii} - \rho) x_i + \dots\dots + a_{ir}\, x_r = 0, \qquad (5)$$

ρ satisfaisant à son tour à l'équation caractéristique de l'homographie

$$\Delta(\rho) \equiv \begin{vmatrix} a_{00}-\rho & a_{01} & \cdots & a_{0r} \\ a_{10} & a_{11}-\rho & \cdots & a_{1r} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot \\ a_{r0} & \cdot & \cdots & a_{rr}-\rho \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

Les hyperplans unis satisfont aux équations

$$a_{0i}\xi_0 + a_{1i}\xi_1 + \cdots + (a_{ii}-\rho)\xi_i + \cdots + a_{ri}\xi_r = 0, \quad (7)$$

ρ satisfaisant à son tour à l'équation (6).

Si ρ_1 est une racine multiple d'ordre h de l'équation caractéristique (6) et si $\Delta(\rho_1)$ est de caractéristique $r-k+1$, il y a $r-k+1$ des équations (5) qui, pour $\rho=\rho_1$, sont linéairement indépendantes ; elles représentent un espace S_{k-1} dont tous les points sont unis. Cet espace est appelé axe ponctuel de l'homographie.

Pour $\rho=\rho_1$, les équations (7) définissent une gerbe g_{k-1} d'hyperplans unis, ayant comme support un espace S_{r-k}. Celui-ci est appelé axe tangentiel de l'homographie, conjugué à l'axe ponctuel S_{k-1}. La gerbe g_{k-1} et l'axe S_{k-1} sont dits conjugués.

13. __Classification des homographies.__ Soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ les racines de l'équation caractéristique $\Delta(\rho)=0$, $r-k_i+1$ la caractéristique de $\Delta(\rho_i)$.

Pour $\rho=\rho_i$, les déterminants d'ordre $r-k_i+2$ tirés de $\Delta(\rho_i)$ sont nuls, donc ρ_i est racine d'ordre k_i au moins de l'équation (6). On a par conséquent

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n \leqslant r+1 .$$

Lorsque l'égalité a lieu, l'homographie est dite générale; elle est dite spéciale dans le cas de l'inégalité.

Soit S_q l'espace de dimension minimum contenant les axes ponctuels $S_{k_1-1}, S_{k_2-1}, \ldots, S_{k_n-1}$ de l'homographie. Cet espace est uni pour l'homographie et celle-ci détermine dans cet espace une homographie ayant les mêmes axes ponctuels que l'homographie primitive. On a donc

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n \leqslant q+1 .$$

D'autre part, les axes ponctuels de l'homographie n'appartenant pas à un espace ayant moins de q dimensions, on a

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n \geqslant q+1 .$$

Par conséquent

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = q+1$$

et les axes ponctuels d'une homographie n'ont aucun point commun deux à deux.

14. Théorème sur les axes et les gerbes conjugués. Considérons l'homographie

$$\rho y_k = a_{kx} - \rho_i x_k , \qquad (8)$$

entre les espaces (x) et (y). Son déterminant $\Delta(\rho_i)$ est de caractéristique $r - k_i + 1$, elle est donc singulière d'espèce k_i. L'espace singulier de l'homographie (8) est l'axe ponctuel $S_{k_i - 1}$ de l'homographie (1) et le point y appartenant à l'espace S_{r-k_i}, axe tangentiel conjugué de S_{k_i-1}.

Considérons un espace S_{k_i} passant par S_{k_i-1} ; l'homographie (8) lui fait correspondre un point y de S_{r-k_i} et l'homographie (1) un espace S'_{k_i} passant par S_{k_i-1}. La relation (8) pouvant s'écrire

$$\rho y_k = x'_k - \rho_i x_k ,$$

un point x de S_{k_i}, son homologue x' de S'_{k_i} et le point y sont en ligne droite. Lorsque x varie dans S_{k_i}, le point y reste fixe et les espaces S_{k_i}, S'_{k_i} sont donc perspectifs.

Cela étant, soit M un point uni de l'homographie (1) n'appartenant pas à S_{k_i-1}. Prenons pour S_{k_i} l'espace passant par S_{k_i-1} et par M. L'espace S'_{k_i} coïncide avec S_{k_i} et dans cet espace, les points x, x' sont d'une part alignés sur M et d'autre part sur y. Il faut donc que M et y coïncident. Par conséquent, les points unis d'une homographie n'appartenant pas à un axe ponctuel, appartiennent au support de la gerbe conjuguée.

15. Homographies générales. Supposons que l'homographie (1) soit générale. Les racines $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ de l'équation caractéristique sont multiples d'ordres $k_1, k_2, \dots, k_n$. L'axe ponctuel S_{k_i-1} a pour conjuguée une gerbe G_{k_i-1} dont le support S_{r-k_i} contient les autres axes ponctuels de l'homographie.

Par conséquent, un axe ponctuel et l'axe tangentiel conjugué ne peuvent se rencontrer.

Déplaçons la figure de référence de manière à faire coïncider $O_0 O_1 \dots O_{k_1-1}$ avec S_{k_1-1}, $O_{k_1} O_{k_1+1} \dots O_{k_1+k_2-1}$ avec $S_{k_2-1}, \dots, O_{k_1+k_2+\dots+k_{n-1}} \dots O_r$ avec S_{k_n-1}. Les équations de l'homographie s'écrivent alors

$$\rho x_0' = \rho_1 x_0, \quad \rho x_1' = \rho_1 x_1, \dots\dots, \rho x_{k_1-1}' = \rho_1 x_{k_1-1},$$

$$\rho x_{k_1}' = \rho_2 x_{k_1}, \quad \dots\dots \quad \rho x_{k_1+k_2-1}' = \rho_2 x_{k_1+k_2-1}.$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\rho x_{k_1+k_2+\dots+k_n}' = \rho_n x_{k_1+k_2+\dots+k_n}, \dots, \rho x_r' = \rho_n x_r.$$

Lorsque $n = 2$, $k_1 = 1$, $k_2 = n-1$, l'homographie est appelée homologie de centre O_0 et d'hyperplan $O_1 O_2 \dots O_r = \omega_0$.

16. __Homologie spéciale__. L'homologie spéciale est une homographie dont l'équation caractéristique possède une seule racine ρ_1, multiple d'ordre $r+1$, telle que $\Delta(\rho_1)$ soit de caractéristique un.

Dans cette hypothèse, pour $\rho = \rho_1$, les équations (5) se réduisent à une seule que l'on peut supposer, par un choix convenable de la figure de référence, être $x_0 = 0$. On a donc

$$a_{11} = a_{22} = \dots = a_{rr} = \rho_1; \quad a_{ki} = 0 \ (i > 0, k \neq i).$$

En exprimant que ρ_1 est racine multiple d'ordre $r+1$ de $\Delta(\rho) = 0$, on a $a_{00} = \rho_1$.

Pour $\rho = \rho_1$, les équations (7) se réduisent à une seule,

$$a_{10} \xi_1 + a_{20} \xi_2 + \dots\dots + a_{r0} \xi_r = 0.$$

On peut supposer que le point représenté par cette équation est O_1; on a alors $a_{20} = 0, \dots, a_{r0} = 0$, $a_{10} \neq 0$. L'homologie spéciale considérée est représentée par

$$\rho x_0' = \rho_1 x_0 + a x, \quad \rho x_1' = \rho_1 x_1, \quad \rho x_2' = \rho_1 x_2, \dots\dots, \rho x_r' = \rho_1 x_r.$$

17. __Homographies cycliques.__ Une homographie Ω est dite cyclique de période p si p est le plus petit entier tel que Ω^p soit l'identité.

Commençons par considérer le cas $r = 1$ et supposons que

Ω puisse être une homologie spéciale (c'est-à-dire actuellement une homographie parabolique). Ω peut s'écrire

$$x'_0 : x'_1 = \rho_1 x_0 + a x_1 : \rho_1 x_1 \qquad (a \neq 0)$$

et Ω^p prend la forme

$$x'_0 : x'_1 = \rho_1 x_0 + p a x_1 : \rho_1 x_1 .$$

On en conclut qu'une homographie parabolique ne peut être cyclique.

Par contre, si Ω n'est pas parabolique, ses équations peuvent s'écrire

$$x'_0 : x'_1 = \rho_1^p x_0 : \rho_2^p x_1$$

et pour avoir $\Omega^p = 1$, il suffit que ρ_1, ρ_2 soient des racines d'ordre p de l'unité, distinctes.

Retournons au cas où r est quelconque et considérons une homographie Ω cyclique de période p. Tout d'abord, Ω ne peut être une homologie spéciale. Supposons que Ω puisse être une homographie (non homologique) spéciale. Alors, il existe au moins un axe ponctuel S_{k-1} ayant au moins un point P commun avec l'axe tangentiel conjugué S_{r-k}.

Reprenons l'homographie

$$\rho y_k = a_{kx} - \rho_1 x_k = x'_k - \rho_1 x_k ,$$

ρ_1 étant la racine de $\Delta(\rho) = 0$ à laquelle correspondent S_{k-1} et S_{r-k}. Lorsque le point x décrit un espace S_k passant par S_{k-1}, x' décrit un espace S'_k passant par S_{k-1} et le point y reste fixe dans S_{r-k}. D'autre part, lorsque S_k varie en passant toujours par S_{k-1}, le point y décrit S_{r-k}. Pour une certaine position de S_k, y coïncidera avec P. Soient x un point de cet espace S_k, x' le point correspond de S'_k. La droite xx' passe par P et est donc unie pour Ω, par conséquent les espaces S_k, S'_k qui passent par P, coïncident. Dans cet espace, Ω détermine une homologie spéciale de centre P et d'hyperplan S_{k-1}. Cette homologie ne peut être cyclique, donc une homographie cyclique est générale.

Les racines $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ de $\Delta(\rho) = 0$ sont des racines d'ordre p de l'unité, distinctes.

18. Homographies spéciales. Supposons que l'homographie Ω d'équations (1) soit spéciale. Il existe au moins une racine ρ_1 de l'équation $\Delta(\rho) = 0$ telle que $\Delta(\rho_1)$ soit de caractéristique

$r-k+1$ et dont la multiplicité soit $h > k$.

Déplaçons la figure de référence de manière à faire coïncider $O_0 O_1 \ldots O_{r-k}$ avec l'axe tangentiel S_{r-k} correspondant à la racine ρ_1. Les équations (1) de Ω deviennent

$$\rho x'_0 = a_{0x}\ , \ \rho x'_1 = a_{1x}\ , \ldots, \rho x'_{r-k} = a_{r-kx}\ , \qquad (9)$$
$$\rho x'_{r-k+1} = \rho_1 x_{r-k+1}\ , \ \ldots, \rho x'_r = \rho_1 x_r .$$

Les équations (9) représentent une homographie Ω' dans S_{r-k}. Soit $\Delta'(\rho)$ le déterminant de Ω', on a

$$\Delta(\rho) = (\rho - \rho_1)^k \Delta'(\rho).$$

$\Delta'(\rho) = 0$ admet la racine ρ_1 avec la multiplicité $h-k$. Si nous désignons par $r-k-k'+1$ la caractéristique de $\Delta'(\rho_1)$, Ω' possède un axe ponctuel $S_{k'-1}$ qui forme l'intersection de S_{r-k} et de S_{k-1}. Dans S_{r-k}, Ω' possède un axe tangentiel $S_{r-k-k'}$. Disposons de la figure de référence de telle sorte que cet axe coïncide avec l'espace $O_0 O_1 \ldots O_{r-k-k'}$. Les équations de Ω s'écrivent

$$\rho x'_0 = a_{0x}\ , \ldots\ldots, \rho x'_{r-k-k'} = a_{r-k-k'x}\ ,$$

$$\rho x'_{r-k-k'+1} = \rho_1 x_{r-k-k'+1} + a_{r-k-k'+1,r-k+1} x_{r-k+1} + \ldots + a_{r-k-k'+1,r} x_r\ ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\rho x'_{r-k} = \rho_1 x_{r-k} + a_{r-k,r-k+1} x_{r-k+1} + \ldots\ldots + a_{r-k,r} x_r\ ,$$

$$\rho x'_{r-k+1} = \rho_1 x_{r-k+1}\ , \ \ldots\ldots, \rho x'_r = \rho_1 x_r .$$

Si $h-k$ est supérieur à k', on continuera la réduction par le même procédé. Et ainsi de suite.

La réduction des équations des homographies hyperspatiales et leur étude est due à C. Segre et à P. Predella ; elles sont exposées dans le Geometria proiettiva degli iperspazi de Bertini. Un autre procédé pour l'étude de ces homographies, dû à M. F. Enriques, est exposé dans le tome II de la Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche de MM. Enriques et Chisini.

§ 3. Réciprocités

19. Définitions. On appelle réciprocité de S_r une correspondance entre les points x et les hyperplans ξ' représentée par les équations

$$(1) \quad \rho\xi'_i = a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ir}x_r, \quad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

où les coefficients a_{ik} sont réels ou complexes, finis, non tous nuls.

Le déterminant

$$\Delta = |a_{ik}|$$

est le déterminant de la réciprocité. Si Δ a la caractéristique $r-h+1$, la réciprocité est appelée singulière d'espèce h.

20. Réciprocités singulières. Si la réciprocité (1) est singulière d'espèce h, il y a $r-h+1$ des seconds membres des équations (1) qui soient linéairement indépendants. Supposons que ce soient les $r-h+1$ premiers et écrivons

$$a_{r-h+1\,x} = \lambda_{r-h+1,0}\, a_{0x} + \cdots + \lambda_{r-h+1,r-h}\, a_{r-h\,x},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_r = \lambda_{r0}\, a_{0x} + \cdots\cdots + \lambda_{r,r-h}\, a_{r-h\,x}.$$

Les équations

$$a_{0x} = 0, \; a_{1x} = 0, \ldots, a_{r-h,x} = 0,$$

représentent un espace S_{h-1} appelé espace singulier de la réciprocité. L'hyperplan que (1) fait correspondre à un point de cet espace est indéterminé.

A un point x n'appartenant pas à S_{h-1}, la réciprocité fait correspondre un hyperplan satisfaisant aux équations

$$\xi'_{r-h+1} = \lambda_{r-h+1,0}\,\xi'_0 + \cdots + \lambda_{r-h+1,r-h}\,\xi'_{r-h}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi'_r = \lambda_{r0}\,\xi'_0 + \cdots\cdots + \lambda_{r,r-h}\,\xi'_{r-h}.$$

Ces hyperplans forment une gerbe G_{r-h}. Un hyperplan de cette gerbe correspond à tous les points x appartenant à l'espace S_h d'équations

$$\frac{a_{0x}}{\xi'_0} = \frac{a_{1x}}{\xi'_1} = \cdots\cdots = \frac{a_{r-h-x}}{\xi'_{r-h}}.$$

Cet espace S_h passe par l'espace singulier S_{h-1}.

La réciprocité équivaut à une homographie entre l'ensemble des espaces S_h passant par S_{h-1} et l'ensemble des espaces S_h passant par S_{h-1} et l'ensemble des hyperplans de $\mathcal{J}_{r-h}$.

21. Réciprocités non singulières. Soit Θ la réciprocité non singulière représentée par les équations (1). Entre les points x et les hyperplans ξ', Θ détermine une correspondance biunivoque ; aux points x d'un hyperplan ξ, correspondent les hyperplans ξ' passant par un point x'. En désignant par A_{ik} le mineur algébrique de a_{ik} dans Δ, on a

$$\rho\,\xi'_i = a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + \cdots\cdots + a_{ir}x_r \quad , \qquad (1)$$

$$\rho\,\xi_i = a_{0i}x'_0 + a_{1i}x'_1 + \cdots\cdots + a_{ri}x'_r \quad , \qquad (2)$$

$$\rho\,x'_i = A_{i0}\xi_0 + A_{i1}\xi_1 + \cdots\cdots + A_{ir}\xi_r \quad , \qquad (3)$$

$$\rho\,x_i = A_{0i}\xi'_0 + A_{1i}\xi'_1 + \cdots + A_{ri}\xi'_r \quad . \qquad (4)$$

On en déduit

$$\sum a_{ik}x'_i x_k = 0 \;, \qquad (5)$$

$$\sum A_{ik}\xi'_i \xi_k = 0. \qquad (6)$$

Le lieu des points appartenant à leurs hyperplans homologues a pour équation

$$\sum a_{ik}x_i x_k = 0.$$

C'est donc une hyperquadrique F_2 appelée hyperquadrique d'incidence.

Le lieu des hyperplans contenant leurs points homologues est

$$\sum A_{ik}\xi_i \xi_k = 0 \;;$$

c'est une hyperquadrique-enveloppe Φ appelée seconde hyperquadrique d'incidence.

22. Homographie associée à une réciprocité. A la réciprocité non singulière Θ, on associe l'homographie $\Omega = \Theta^2$, dont les équations sont

$$\rho\,(a_{0i}x'_0 + a_{1i}x'_1 + \cdots\cdots + a_{ri}x'_r) = a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + \cdots\cdots + a_{ir}x_r.$$

Les points unis de Ω satisfont aux équations

$$(a_{i0}-\rho a_{0i})x_0+(a_{i1}-\rho a_{1i})x_1+\dots\dots+(a_{ir}-\rho a_{ri})x_r=0, \qquad (7)$$

ρ étant racine de l'équation caractéristique

$$\Delta(\rho)\equiv|a_{ik}-\rho a_{ki}|=0. \qquad (8)$$

A un point uni de Ω, Θ fait correspondre un hyperplan uni de Ω.

L'équation (8) est réciproque et on peut associer les axes ponctuels de Ω correspondant aux racines ρ, $\frac{1}{\rho}$ $(\rho\neq\pm1)$ de cette équation.

Multiplions les deux membres de l'équation (7) par x_i et ajoutons membre à membre les équations obtenues en faisant $i=0,1,2,\dots.r$. Nous obtenons

$$(1-\rho)\sum a_{ik}x_i x_k=0. \qquad (9)$$

Si ρ est racine de l'équation (8), les points x satisfaisant aux équations (7) et (8) sont unis. Si $\rho\neq1$, ces points appartiennent à la première hyperquadrique d'incidence. De même, les hyperplans unis correspondant à des racines de (8) distinctes de l'unité, appartiennent à la seconde hyperquadrique d'incidence.

Supposons que $\Delta(-1)$ ait la caractéristique $r-h+1$. En posant $\rho=-1$ dans (7), on obtient des équations dont $r-h+1$ sont linéairement indépendantes ; on peut supposer que ce sont les $r-h+1$ premières et déplacer la figure de référence de manière qu'elles se réduisent à $x_0=0$, $x_1=0$, $\dots$, $x_{r-h}=0$. Ces équations représentent un espace S_{h-1}. Sous ces conditions, on a

$$a_{i,r-h+j}+a_{r-h+j,i}=0, \qquad (i=0,1,\dots,r;\ j=1,\dots,h)$$

L'hyperquadrique d'incidence F_2 a une équation

$$\sum a_{ik}x_i x_k=0, \qquad (i,k=0,1,\dots,r-h) \qquad (10)$$

dans laquelle manquent les variables $x_{r-h+1},\dots,x_r$. Dans l'espace S_{r-h} d'équations

$$x_{r-h}=\dots.=x_r=0,$$

l'équation (10) représente une hyperquadrique F_2'. L'hyperquadrique F_2 est le lieu des espaces S_h passant par S_{h-1} et par les différents points de F_2' ; c'est un cône du second ordre, de sommet S_{h-1}.

On trouvera la théorie des réciprocités dans la Geometria proiettiva de E. Bertini.

23. Réciprocités involutives. Une réciprocité est appelée involutive si son homographie associée $\Omega = \Theta^2$ est l'identité. Dans ces conditions, les équations

$$\Sigma a_{ik} x'_i x_k = 0 , \Sigma a_{ki} x_k x'_i = 0$$

doivent être conséquence l'une de l'autre; on a donc

$$a_{ik} = \rho a_{ki} ,$$

d'où $\rho^2 = 1$.

Dans le cas $\rho = 1$, Θ est appelée polarité, dans le cas $\rho = -1$, système-nul.

24. Polarités. Supposons que Θ soit une polarité non singulière. A un point x, Θ fait correspondre un hyperplan ξ et aux points de ξ, les hyperplans passent par x. Le point x est le pôle de ξ et ξ est l'hyperplan polaire de x.

Un $(r+1)$-èdre dont chaque sommet est le pôle de la face opposée, est appelée autopolaire par rapport à Θ. Si le $(r+1)$-èdre fondamental est auto-polaire, l'équation de Θ se réduit à

$$\Sigma a_{ii} x'_i x_i = 0 ;$$

les deux hyperquadriques d'incidence coïncident en une hyper-quadrique

$$a_{00} x_0^2 + a_{11} x_1^2 + \dots\dots + a_{rr} x_r^2 = 0 .$$

Les propriétés de Θ s'obtiennent par généralisation immédiate de celles des cas $r = 1, 2, 3$.

Supposons maintenant que Θ soit singulière d'espèce h. On peut supposer que les $r-h+1$ seconds membres des équations (1) sont les premiers et se réduisent respectivement à $a_{00} x_0, a_{11} x_1, \dots\dots, a_{r-h,r-h} x_{r-h}$. La condition $a_{ik} = a_{ki}$ montre que l'on a

$$a_{r-h+i,k} = a_{k,r-h+i} = 0 , \qquad (i > 0 , k = 0,1,\dots\dots,r-h).$$

L'équation de Θ s'écrit

$$a_{00} x_0 x'_0 + a_{11} x_1 x'_1 + \dots\dots + a_{r-h,r-h} x_{r-h} x'_{r-h} = 0 .$$

C'est l'équation d'une polarité non singulière dans l'espace S_{r-h} d'équations

$$x_{r-h+1} = x_{r-h+r} = \dots\dots = x_r = 0 .$$

La question revient à la polarité dans la gerbe G_{r-h} ayant pour support l'espace singulier S_{h-1} de Θ, par rapport au cône

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + \dots\dots + a_{r-h,r-h}x_{r-h}^2 = 0,$$

ayant pour sommet S_{h-1}.

25. <u>Systèmes-nuls.</u> Supposons que Θ soit un système-nul. On a $a_{ik} + a_{ki} = 0$ et le déterminant Δ est symétrique gauche. Il en résulte que Θ ne peut être non singulier que si r est impair.

Dans tous les cas, on a

$$\xi'_0 x_0 + \xi'_1 x_1 + \dots\dots + \xi'_r x_r = 0;$$

tout point appartient à son hyperplan homologue ou hyperplan polaire et tout hyperplan contient son point homologue ou pôle.

Si Θ est non singulier, on a $r = 2n+1$. Disposons de la figure de référence de telle sorte que les points $O_0, O_1, \dots\dots$ aient respectivement pour hyperplans polaires $\omega_{2n+1}, \omega_{2n}, \dots$ Les équations de Θ sont

$$\xi_0 : \xi_1 : \dots\dots : \xi_n : \xi_{n+1} : \dots\dots : \xi_{2n} : \xi_{2n+1} =$$

$$= a_0 x_{2n+1} : a_1 x_{2n} : \dots\dots : a_n x_n : -a_n x_{n+1} : \dots\dots : -a_1 x_1 : -a_0 x_0 .$$

Supposons maintenant que Θ soit singulier d'espèce h. Nous supposerons que l'espace singulier S_{h-1} a pour équations

$$x_0 = x_1 = \dots\dots = x_{r-h} = 0.$$

Le système-nul a pour équations

$$\rho\xi_0 = a_{01}x_1 + \dots\dots + a_{0,r-h}x_{r-h},$$

$$\rho\xi_1 = -a_{01}x_0 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1,r-h}x_{r-h},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\rho\xi_{r-h} = -a_{0,r-h}x_0 + \dots\dots + a_{r-h,r-h-1}x_{r-h-1}.$$

C'est un système-nul de l'espace S_{r-h},

$$x_{r-h+1} = \dots\dots = x_r = 0$$

et $r-h$ doit être impair.

Θ est un système-nul dans la gerbe de sommet S_{h-1}.

§4.– La géométrie projective hyperspatiale.

26. Le groupe projectif. Considérons les homographies non singulières ; elles possèdent les propriétés suivantes :
a) Le produit de deux homographies est une homographie ;
b) L'inverse d'une homographie est une homographie.

Les homographies de S_r forment donc un groupe G_h.

Considérons en outre les réciprocités non singulières. Le produit de deux d'entre elles est une homographie, le produit d'une homographie par une réciprocité est une réciprocité et l'inverse d'une réciprocité est une réciprocité. Les réciprocités de S_r ne forment pas un groupe, mais l'ensemble des homographies et des réciprocités, c'est-à-dire des projectivités, est un groupe G_p, appelé groupe projectif.

27. La géométrie projective. Suivant le concept de F. Klein et de H. Poincaré, la géométrie projective de l'espace S_r est l'étude des propriétés des figures qui sont invariantes vis-à-vis des opérations (homographies et réciprocités) du groupe projectif G_p.

On peut également considérer une géométrie projective dont le groupe fondamental est le groupe G_h des homographies. Nous nous en tiendrons, en général, à la première conception.

Chapitre II

Variétés algébriques

§ 1. Hypersurfaces algébriques

28. Définitions. Nous avons appelé hypersurface algébrique l'ensemble des points de S_r dont les coordonnées satisfont à une équation

$$F(x_0, x_1, \dots, x_r) = 0, \qquad (1)$$

le premier membre étant un polynôme entier, rationnel et homogène (c'est-à-dire, comme nous le dirons dans la suite, une forme algébrique ou plus simplement une forme). Le degré n de ce polynôme F est appelé ordre de l'hypersurface ; nous avons fait observer que c'était un caractère projectif en ce sens que l'ordre d'une hypersurface est indépendant du choix de la figure de référence.

Le terme général de la forme F est

$$a_{i_0 i_1 \dots i_r} x_{i_0} x_{i_1} \dots x_{i_r},$$

$i_0, i_1, \dots, i_r$ étant une des combinaisons avec répétition des $r+1$ nombres $0, 1, \dots, r$ pris à n à n. Le nombre des coefficients de la forme F est donc égal à

$$\binom{r+1+n-1}{n} = \binom{r+n}{n} = \binom{r+n}{r} = N+1.$$

Il faut donc N conditions pour déterminer une hypersurface V^n_{r-1} d'ordre n. En particulier, par N points de S_r passe en général une et une seule hypersurface d'ordre n.

L'hypersurface (1) est dite irréductible si la forme F n'est pas le produit de plusieurs formes. Dans le cas contraire, l'hypersurface est dite réductible ; elle est alors la réunion d'un nombre fini d'hypersurfaces irréductibles.

Une hypersurface-enveloppe

$$\Phi(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r) = 0$$

est dite irréductible ou réductible dans les mêmes conditions ;

si elle est de classe n, il faut N conditions pour la déterminer.

29. <u>Intersection d'une droite et d'une hypersurface algébrique.</u> Les points d'intersection $\lambda y + \mu z$ d'une droite yz avec l'hypersurface (1) sont donnés par les racines $\lambda : \mu$ de l'équation

$$\lambda^n F(y_0, y_1, \dots, y_r) + \frac{1}{1}\lambda^{n-1}\mu D_z F(y) + \dots + \frac{1}{i!}\lambda^{n-i}\mu^i D_z^i F(y) + \dots + \frac{1}{n!}\mu^n D_z^n F(y) = 0, \qquad (2)$$

où D_z est le symbole opératoire

$$D_z = z_0 \frac{\partial}{\partial y_0} + z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + z_r \frac{\partial}{\partial y_r}.$$

Si l'équation (2) est satisfaite identiquement quels que soient λ, μ, la droite yz appartient tout entière à l'hypersurface (1). Dans le cas contraire, on voit qu'une <u>hypersurface d'ordre n est rencontrée par une droite en n points</u> (distincts ou confondus).

30. <u>Points ordinaires et points multiples.</u> Supposons que le point y appartienne à l'hypersurface V_{r-1}^n représentée par l'équation (1). On a $F(y) = 0$ et l'équation (2) admet la racine $\mu = 0$. Supposons d'une manière précise que, quel que soit le point z, l'équation (2) admette la racine $\mu = 0$ avec la multiplicité $\nu \geqslant 1$ (la multiplicité de cette racine pouvant d'ailleurs être supérieure à ν pour des positions particulières du point z).

Dans ces conditions, les droites passant par le point y de V_{r-1}^n rencontrent cette hypersurface en ν points au moins confondus en y et en général en $n-\nu$ points distincts de y. Le point y est appelé <u>point multiple d'ordre ν</u> de l'hypersurface. En particulier, si $\nu = 1$, le point y est un <u>point simple</u> ou <u>point ordinaire</u> de l'hypersurface.

31. <u>Hyperplan tangent en un point ordinaire.</u> Supposons que y soit un point ordinaire de V_{r-1}^n. On appelle tangente à V_{r-1}^n au point y une droite rencontrant l'hypersurface en deux points au moins confondus en y.

Le lieu des tangentes au point y à V_{r-1}^n est l'hyperplan

$$x_0 \frac{\partial F}{\partial y_0} + x_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + \dots + x_r \frac{\partial F}{\partial y_r} = 0, \qquad (3)$$

appelé <u>hyperplan tangent</u> à l'hypersurface V_{r-1} au point y.

Parmi les tangentes au point y à V^n_{r-1}, il peut en exister qui rencontrent l'hypersurface en trois points au moins confondus en y. Le lieu de ces droites est représenté par l'équation (3) jointe à l'équation

$$D_x^2 F(y) = x_0^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} + x_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} + \dots + 2x_{r-1} x_r \frac{\partial^2 F}{\partial y_{r-1} \partial y_r} = 0 . \quad (4)$$

L'équation (4) représente un cône de sommet y, du second ordre, coupé par l'hyperplan (3) suivant un cône à $r-2$ dimensions.

Pour certaines positions particulières du point y, le cône (4) peut être réductible et comprendre comme partie l'hyperplan (3).

En changeant éventuellement de figure de référence, on peut supposer que le point y coïncide avec O_0. L'équation de V^n_{r-1} s'écrit alors

$$x_0^{n-1} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_r) + x_0^{n-2} \varphi_2 + \dots + \varphi_n = 0,$$

où φ_i est une forme de degré i. L'hyperplan tangent en O_0 à l'hypersurface a pour équation

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0 ,$$

et le lieu des tangentes rencontrant V^n_{r-1} en trois points au moins confondus avec O_0 a pour équations

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0 , \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0 .$$

On peut de même considérer les tangentes à V^n_{r-1} au point y rencontrant cette hypersurface en quatre, cinq, ... points confondus en y.

32. <u>Points multiples</u>. Supposons que le point y soit multiple d'ordre $\nu > 1$ pour V^n_{r-1}. Quel que soit le point z, on doit avoir

$$D_z F(y) \equiv 0 , D_z^2 F(y) \equiv 0 , \dots D_z^{\nu-1} F(y) \equiv 0,$$

c'est-à-dire que toutes les dérivées partielles de $F(y)$ jusqu'à l'ordre $\nu-1$ doivent être identiquement nulles. Il suffit pour cela que les dérivées partielles d'ordre $\nu-1$ le soient. D'une manière précise, <u>pour qu'un point soit multiple d'ordre ν pour une hypersurface (1)</u>, <u>il faut et il suffit que toutes les dérivées partielles d'ordre $\nu-1$ de F soient nulles en ce point, une</u>

au moins des dérivées partielles d'ordre ν étant différente de zéro.

Le nombre des dérivées partielles d'ordre $\nu-1$ de F est égal à $\binom{r+\nu-1}{r}$, donc l'imposition d'un point multiple d'ordre ν à une hypersurface équivaut à $\binom{r+\nu-1}{r}$ conditions. Ces conditions s'expriment par des relations linéaires entre les coefficients de l'équation de l'hypersurface.

On appelle tangente à V^n_{r-1} en un point y multiple d'ordre ν une droite rencontrant V^n_{r-1} en $\nu+1$ points au moins confondus en y. Le lieu des tangentes au point y a pour équation

$$D^\nu_x F(y_0, y_1, \dots, y_r) = 0 ;$$

c'est un cône d'ordre ν.

Si le point y coïncide avec O_0, l'équation de V^n_{r-1} s'écrit

$$x_0^{n-\nu} \varphi_\nu (x_1, x_2, \dots, x_r) + x_0^{n-\nu-1} \varphi_{\nu+1} + \dots + \varphi_n = 0 .$$

Le cône tangent à V^n_{r-1} au point y a pour équation

$$\varphi_\nu (x_1, x_2, \dots, x_r) = 0$$

33. Intersection d'une hypersurface et d'un espace linéaire.

Soient $y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(p)}$ $p+1$ points indépendants de S_r ; ils déterminent un espace S_p engendré par le point

$$m_0 y^{(0)} + m_1 y^{(1)} + \dots + m_p y^{(p)} .$$

Les points de V^n_{r-1} appartenant à S_p sont donnés par

$$F(m_0 y_0^{(0)} + \dots + m_p y_0^{(p)}, \dots, m_0 y_r^{(0)} + \dots + m_p y_r^{(p)}) = 0 .$$

Dans S_p, où les coordonnées projectives sont $m_0, m_1, \dots, m_p$, cette équation représente une hypersurface V^n_{p-1} ou est satisfaite identiquement. Dans ce dernier cas, S_p appartient tout entier à V^n_{r-1}. L'intersection d'une hypersurface V^n_{r-1} et d'un espace S_p n'appartenant pas à V^n_{r-1} est une hypersurface V^n_{p-1}.

Si l'espace S_p coïncide avec l'espace $O_0 O_1 \dots O_p$, l'équation de la section est

$$F(x_0, x_1, \dots, x_p, 0, 0, \dots, 0) = 0 .$$

Il convient de remarquer que la section d'une hypersurface irréductible V^n_{r-1} par un espace S_p peut être une hypersurface V^n_{p-1} réductible.

34. <u>Hypersurfaces ayant un espace linéaire multiple</u>.

On appelle espace linéaire multiple d'ordre ν pour une hypersurface V^n_{r-1} un espace linéaire dont tous les points sont multiples d'ordre ν pour cette hypersurface.

Recherchons quelles sont les conditions pour que l'espace S_p déterminé par les $p+1$ points $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}$ soit multiple d'ordre ν pour l'hypersurface (1). Posons

$$y = m_0 y^{(0)} + m_1 y^{(1)} + \cdots\cdots + m_p y^{(p)}$$

et soit z un point n'appartenant pas à S_p. Les intersections de V^n_{r-1} et de la droite yz sont données par l'équation (2) et on doit avoir

$$F(y) \equiv 0\,, \quad D_z F(y) \equiv 0, \ldots\ldots, D_z^{\nu-1} F(y) \equiv 0\,. \qquad (5)$$

$D_z^i F(y)$ est une forme de degré i en $z_0, z_1, \ldots, z_r$ dont les coefficients sont des formes de degré $n-i$ en $y_0, \ldots, y_r$. Ces dernières formes sont à leur tour des formes de degré $n-i$ en $m_0, m_1, \ldots, m_p$ dont les coefficients sont les dérivées partielles d'ordre i de F par rapport à $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}$.

Cela étant, supposons que toutes les dérivées partielles d'ordre $\nu-1$ de $F(y_0, y_1, \ldots, y_r)$ soient nulles aux points $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}$. Il en est alors de même de F et de toutes ses dérivées partielles d'ordre $1, 2, \ldots, \nu-2$ aux mêmes points et par conséquent les équations (5) sont satisfaites identiquement.

Pour que l'espace S_p soit multiple d'ordre ν pour V^n_{r-1}, il suffit donc que $p+1$ points indépendants de cet espace aient cette multiplicité pour cette hypersurface. Ces conditions sont évidemment nécessaires.

Appliquons ce résultat à la recherche de l'équation d'une hypersurface V^n_{r-1} ayant l'espace $O_0 O_1 \ldots O_p$ multiple d'ordre ν. Il suffit pour cela que dans cette équation $x_0, x_1, \ldots, x_p$ figurent avec le degré $n-\nu$ au plus. L'équation s'écrira

$$\varphi_{n-\nu}(x_0, x_1, \ldots, x_p) + \varphi_{n-\nu-1} + \cdots + \varphi_0 = 0,$$

où φ_i est une forme de degré i en $x_0, x_1, \ldots, x_p$ dont les coefficients sont des formes de degré $n-i$ en $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_r$.

35. <u>Hypersurfaces spécialisées ou cônes</u>. Une hypersurface d'ordre n possédant un espace S_p multiple d'ordre n, est appelée hypersurface $p+1$ fois spécialisée ou cône. L'espace

S_p est appelé sommet de cette hypersurface.

Une hypersurface $p+1$ fois spécialisée dont le sommet est l'espace $O_0 O_1 \dots O_p$ a pour équation

$$\varphi(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_r) = 0,$$

φ étant une une forme de degré n. Dans l'espace S_{r-p-1} d'équations

$$x_0 = x_1 = \dots\dots = x_p = 0,$$

cette équation représente une hypersurface V^n_{r-p-2}. L'hypersurface spécialisée V^n_{r-1} est le lieu des espaces S_{p+1} passant par S_p et par les différents points de V^n_{r-p-3}.

En particulier, une hypersurface $r-2$ fois spécialisée de S_r est l'ensemble de n hyperplans passant par le sommet.

36. __Monoïdes__. Une hypersurface V^n_{r-1} ayant un espace S_p multiple d'ordre $n-1$, est appelée __monoïde__ de sommet S_p.

Un monoïde d'ordre n et de sommet $O_0 O_1 \dots O_p$ a pour équations

$$x_0 \psi_0(x_{p+1}, \dots, x_r) + x_1 \psi_1 + \dots\dots + x_p \psi_p + \psi = 0,$$

où $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_p$ sont des formes de degré $n-1$ et ψ une forme de degré n.

En particulier, l'équation

$$x_p \psi_p(x_{p+1}, \dots, x_r) + \psi = 0$$

représente une hypersurface p fois spécialisée de sommet $O_0 O_1 \dots$ $\dots O_{p-1}$ et un monoïde de sommet $O_0 O_1 \dots O_p$.

37. __Polarité.__ Reprenons l'équation (2) donnant les intersections de V^n_{r-1} et de la droite yz. Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme

$$\mu^n F(z_0, z_1, \dots, z_r) + \frac{1}{1}\mu^{n-1}\lambda D_y F(z) + \dots + \frac{1}{i!}\mu^{n-i}\lambda^i D^i_y F(z) + \dots$$
$$+ \dots + \frac{1}{n!} D^n_y F(z) = 0 \qquad (2')$$

L'hypersurface

$$D^i_y F(x) = 0,$$

d'ordre $n-i$, est appelée i-ième polaire du point y par rapport à V^n_{r-1}.

En comparant les équations (2) et (2'), on voit qu'elle a

également pour équation
$$D_x^{n-i} F(y) = 0.$$
Les équations
$$D_y^i F(z) = 0 \quad , \quad D_z^{n-i} F(y) = 0$$
étant équivalentes, on voit que si un point z appartient à la i-ième polaire de y par rapport à V_{r-1}^n, le point y appartient à la $(n-i)$-ième polaire de z par rapport à V_{r-1}^n.

§2... Variétés algébriques de dimension inférieure à $r-1$.

38. Variétés algébriques à k dimensions. On appelle variété algébrique V_k à k dimensions l'ensemble des points de S_r dont les coordonnées sont données par
$$\rho x_i = f_i(t_1, t_2, \dots, t_{k+1}) \quad , \quad (i = 0, 1, \dots, r)$$
les seconds membres étant des fonctions rationnelles de $t_1, t_2, \dots, t_{k+1}$, sans facteur commun, les variables $t_1, t_2, \dots, t_{k+1}$ étant liées par une relation
$$f(t_1, t_2, \dots, t_{k+1}) = 0,$$
dont le premier membre est une fonction rationnelle et entière de ses arguments.

Passons aux variables homogènes en posant
$$t_1 = \frac{y_1}{y_0} \;,\quad t_2 = \frac{y_2}{y_0} \;,\quad \dots\dots \;,\quad t_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{y_0}.$$
Les équations définissant V_k prennent la forme
$$\left.\begin{array}{lr} \rho x_i = \varphi_i(y_0, y_1, \dots, y_{k+1}) \quad , \quad (i = 0, 1, \dots, r) & (1) \\ \varphi(y_0, y_1, \dots, y_{k+1}) = 0, & (2) \end{array}\right\} (\mathrm{I})$$
$\varphi, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_r$ étant des formes, les $r+1$ premières de même degré et sans facteur commun.

En particulier, pour $k = 0$, les équations (I) représentent un nombre fini de points qui doivent être considérés comme constituant une variété algébrique V_0.

Observons qu'une hypersurface algébrique
$$F(x_0, x_1, \dots, x_r) = 0$$
est une variété algébrique, car elle peut être représentée par les équations
$$\rho x_i = y_i \quad , \qquad F(y_0, y_1, \dots, y_r) = 0,$$
du type I. Nous admettrons qu'inversement, <u>une variété algébrique à $r-1$ dimensions est une hypersurface.</u>

39. <u>Variétés algébriques irréductibles.</u> Interprétons $y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}$ comme coordonnées des points d'un espace S_{k+1} que nous désignerons par espace (y). Dans cet espace, l'équation (2) représente une hypersurface Φ_k. A un point de Φ_k, les équations (1) font correspondre un point V_k, mais inversement, chaque point de V_k peut provenir d'un certain nombre fini $\nu\,(\geq 1)$ de points de Φ_k. Entre la variété V_k et l'hypersurface Φ_k, nous avons une correspondance $(1, \nu)$.

Sur l'hypersurface Φ_k, il y a ∞^k groupes de ν points, correspondants aux points de V_k. Un point de Φ_k appartient en général à un seul groupe de ν points. L'ensemble de ces groupes est appelé involution I_ν, d'ordre ν.

Supposons que l'hypersurface Φ_k soit réductible ; elle est alors formée de la réunion d'un certain nombre, fini, d'hypersurfaces irréductibles. Deux hypothèses peuvent être faites:

1°) Tout groupe de l'involution I_ν ayant un point sur une partie irréductible de Φ_k a au moins un point sur chacune des autres parties irréductibles de Φ_k.

2°) Le contraire a lieu.

Dans la première hypothèse, nous dirons que la variété V_k est <u>irréductible</u>. En particulier, si l'hypersurface Φ_k est irréductible, il en est de même de V_k.

Observons d'ailleurs que si V_k est irréductible et Φ_k réductible, on peut, dans les équations (I), remplacer l'équation (2) par celle d'une partie irréductible de Φ_k.

Dans la seconde hypothèse, la variété V_k est réductible ; elle se compose alors d'un nombre fini de variétés V_k irréductibles.

40. <u>Forme plus générale des équations d'une variété algébrique.</u>

Considérons les équations

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_i(x_0, x_i\,;\, t_1, t_2, \ldots, t_{k+1}) = 0 & (i = 1, 2, \ldots, r) \\ \varphi(t_1, t_2, \ldots\ldots t_{k+1}) = 0 & \end{array}\right\} (1)$$

où les φ_i sont des formes en x_0, x_i dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de $t_1, t_2, \ldots, t_{k+1}$ et φ une fonction rationnelle et entière de ses arguments. Nous allons démontrer que l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient les équations (1) constitue une variété algébrique V_k à k dimensions, sous l'hypothèse que les espaces S_{r-k-1} ne rencontrent pas en général cet ensemble.

Considérons un espace S_{r-k-2} ne rencontrant pas l'ensemble (1). Soit y un point de cet ensemble ; il détermine un espace S_{r-k-1} passant par S_{r-k-2}. Supposons que, quel que soit y, cet espace S_{r-k-1} rencontre l'ensemble (1) en un second point y' au moins. Alors, la droite yy' rencontre S_{r-k-2} en un point et comme le point y peut être choisi de ∞^k manières, il y a ∞^k cordes de l'ensemble (1) rencontrant S_{r-k-2}.

Les cordes de l'ensemble (1) sont en nombre ∞^{2k}. D'autre part, s'appuyer sur un espace S_{r-k-2} pour les droites de S_r équivaut à $k+1$ conditions. Il y a donc en général ∞^{k-1} cordes de l'ensemble (1) qui rencontrent S_{r-k-r} ; par conséquent, les espaces S_{r-k-1} passant par S_{r-k-2} et par les différents points de l'ensemble (1) ne rencontrent en général cet ensemble qu'en un point.

Disposons de la figure de référence de telle sorte que l'espace S_{r-k-2} choisi coïncide avec l'espace $O_{k+2}\,O_{k+3}\,\dots\,O_r$. L'équation du lieu des espaces S_{r-k-1} passant par S_{r-k-2} et par les points de l'ensemble (1) s'obtiendra par des éliminations portant sur les équations (1), c'est-à-dire par des opérations rationnelles, par conséquent l'équation de ce lieu sera une hypersurface algébrique $r-k-1$ fois spécialisée, d'équation

$$\varphi(x'_0, x'_1, \dots, x'_{k+1}) = 0, \qquad (2)$$

les x' étant les nouvelles coordonnées. Dans l'espace S_{k+1} d'équations

$$x'_{k+2} = x'_{k+3} = \dots = x'_r = 0,$$

l'équation (2) représente une hypersurface Φ_k.

Un point $\bar{x}'$ de Φ_k détermine un espace S_{r-k-1} passant par S_{r-k-2} et coupant l'ensemble (1) en un seul point x' dont les coordonnées $x'_{k+2}, x'_{k+3}, \dots, x'_r$ sont des fonctions rationnelles des coordonnées de $\bar{x}'$. Les équations de l'ensemble (1) peuvent donc s'écrire

$$\rho x'_{k+1+i} = \varphi_i(x'_0, x'_1, \dots, x'_{k+1}), \quad (i = 1, 2, \dots, r-k-1)$$

$$\varphi(x'_0, x'_1, \dots, x'_{k+1}) = 0.$$

Ces équations sont bien de la forme (I), ce qui démontre la propriété énoncée.

41. <u>Intersection de plusieurs hypersurfaces algébriques</u>. Considérons p hypersurfaces algébriques

$$F_1(x_0, x_1, \dots, x_r) = 0 \quad , F_2 = 0, \dots, F_p = 0 \quad , (1)$$

respectivement d'ordre $n_1, n_2, \dots, n_p$, rangées de telle sorte que la suite de ces nombres soit non croissante. Pour obtenir l'intersection de ces hypersurfaces, nous utiliserons l'interprétation géométrique de la méthode d'élimination de Kronecker telle qu'elle a été exposée par M. F. Severi dans ses Lezioni di Analisi.

Nous ferons les hypothèses suivantes :

1°) Les hypersurfaces (1) n'ont aucune hypersurface commune. En d'autres termes, les polynomes $F_1, F_2, \dots, F_p$ n'ont pas un diviseur commun de degré supérieur à zéro. S'il en était autrement, on déterminerait, par des opérations rationnelles, le plus grand commun diviseur de ces polynômes. On suppose donc, si cette opération est possible, qu'elle a été faite au préalable.

2°) La figure de référence est choisie de telle manière que le point O_1 n'appartient à aucune des hypersurfaces $F_1, F_2, \dots, F_p$ et que l'hyperplan $x_0 = 0$ ne fait partie d'aucune de ces hypersurfaces.

Considérons les hypersurfaces

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 F_1 + \lambda_2 x_0^{n_1 - n_2} F_2 + \dots + \lambda_p x_0^{n_1 - n_p} F_p = 0, \\ \mu_1 F_1 + \mu_2 x_0^{n_1 - n_2} F_2 + \dots + \mu_p x_0^{n_1 - n_p} F_p = 0. \end{aligned}\right\} (2)$$

Cherchons l'équation du cône projetant de O_1 l'intersection de ces deux hypersurfaces. Cela revient à éliminer x_1 entre les équations (2). Cette élimination se fait par des opérations rationnelles et le résultant est un polynôme entier, rationnel et homogène en $x_0, x_2, \dots, x_r$. En égalant ce polynôme à zéro, on obtient l'équation du cône cherché.

Le résultant de l'élimination est également un polynôme entier, rationnel et homogène par rapport à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ et par rapport à $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$. Désignons par

$$G_1(x_0, x_2, \dots, x_r) \quad , G_2, \dots, G_q$$

les coefficients des combinaisons des λ, μ figurent dans le résultant. Ce sont donc des formes en $x_0, x_2, \dots, x_r$. Plaçons-nous dans l'hyperplan $x_1 = 0$. Tout point commun aux hypersurfaces algébriques

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \dots, G_q = 0 \qquad (3)$$

de cet espace S_{r-1} $(x_1=0)$ provient d'un point commun aux hyper-surfaces (1) et inversement.

Si les équations (3) n'ont aucune solution, les hypersurfaces (1) n'ont aucun point commun. Admettons qu'il en soit autrement.

Supposons en premier lieu que l'on ne puisse mettre x_0 en évidence dans tous les polynômes $G_1, G_2, \ldots, G_q$. Par des opérations rationnelles, nous pouvons déterminer le plus grand commun diviseur de ces polynômes. Supposons qu'il soit de degré supérieur à zéro. Celà signifie que dans l'espace S_{r-1} d'équation $x_1 = 0$, les hypersurfaces (3') ont une hypersurface en commun. Soit

$$\varphi(x_0, x_2, \ldots, x_r) = 0 \qquad (4)$$

l'équation d'une partie irréductible de cette hypersurface, comptée une fois si φ intervient avec un exposant supérieur à l'unité dans le plus grand commun diviseur des polynômes G. φ est une forme et l'équation (4) représente une hypersurface algébrique dans $x_1 = 0$.

La droite joignant un point de l'hypersurface (4) au point O_1 rencontre les hypersurfaces (1) en un certain nombre de points, au moins égal à un, communs à toutes ces hypersurfaces; ce nombre est fini, car autrement le point O_1 appartiendrait à toutes les hypersurfaces (1) contrairement à l'hypothèse. Le rapport $x_1 : x_0$ des coordonnées x_0, x_1 de ce point dépend algébriquement des coordonnées du point considéré sur (4). En d'autres termes, ce rapport est solution d'une équation algébrique dont les coefficients sont des formes en $x_0, x_2, \ldots, x_r$. Soit

$$x_1^{\rho}\varphi_0(x_0, x_2, \ldots, x_r) + x_1^{\rho-1} x_0 \varphi_1 + \ldots + x_0^{\rho}\varphi_\rho = 0 \qquad (5)$$

cette équation ou, si elle est réductible, une partie irréductible de cette équation.

L'ensemble des points satisfaisant aux équations (4), (5) appartient à l'intersection des surfaces (1). Observons que les droites passant par O_1 et par des points de $x_1 = 0$ n'appartenant pas à toutes les hypersurfaces (3), ne rencontrent pas l'ensemble en question, par conséquent celui-ci est une variété algébrique V_{r-2} à $r-2$ dimensions.

Si les polynômes $G_1, G_2, \ldots, G_q$ ont un plus grand commun diviseur de degré supérieur à zéro, les hypersurfaces (1) ont donc en commun un nombre fini de variétés algébriques à $r-2$ dimensions.

Une fois les hypersurfaces (3) de $x_1 = 0$ débarrassées des hypersurfaces qu'elles ont en commun, ou si elles n'ont pas de telles hypersurfaces, on reprendra le raisonnement précédent pour étudier leur intersection. Et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à des équations incompatibles ou à des hypersurfaces n'ayant en commun qu'une variété V_0, c'est-à-dire formée d'un nombre fini de points.

Supposons qu'après $r-k-1$ opérations, on soit arrivé aux équations

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{r-k-1} = 0,$$
$$H_1(x_0, x_{r-k}, \ldots, x_r) = 0, \quad H_2 = 0, \ldots, H_t = 0, \qquad (6)$$

les hypersurfaces (6) ayant en commun l'hypersurface irréductible (dans l'espace S_{k+1})

$$\varphi(x_0, x_{r-k}, \ldots, x_r) = 0 \qquad (7)$$

et la figure de référence dans $x_1 = 0$, puis dans $x_1 = x_2 = 0, \ldots$ ayant été chaque fois convenablement choisie.

L'espace S_{r-k-1} déterminée par un point de l'hypersurface (7) et par l'espace $O_1 O_2 \ldots O_{r-k-1}$ à $r-k-2$ dimensions rencontre les hypersurfaces (1) en un certain nombre fini de points communs à toutes ces hypersurfaces. Les rapports $x_1 : x_0$, $x_2 : x_0, \ldots, x_{r-k-1} : x_0$ des coordonnées de ces points seront solutions d'équations algébriques

$$\varphi_1\left(\frac{x_1}{x_0}\right) = 0, \ \varphi_2\left(\frac{x_2}{x_0}\right) = 0, \ldots, \varphi_{r-k-1}\left(\frac{x_{r-k-1}}{x_0}\right) = 0 \qquad (8)$$

dont les coefficients seront des formes en $x_0, x_{r-k}, \ldots, x_r$.

Un espace S_{r-k-1} passant par $O_1 O_2 \ldots O_{r-k-1}$ et par un point de $O_0 O_{r-k} \ldots O_r$ n'appartenant pas à toutes les hypersurfaces (6), ne contiendra aucun point satisfaisant aux équations (7) et (8), par conséquent l'ensemble de ces points est une variété algébrique V_k à k dimensions.

Il nous reste à examiner le cas où tous les polynômes $G_1, G_2, \ldots, G_q$ contiendraient x_0 en facteur. Mais dans ce cas, on est ramené à l'étude de l'intersection des hypersurfaces

$$F_1(0, x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0, \ F_2 = 0, \ldots, F_p = 0$$

de l'espace S_{r-1} d'équation $x_0 = 0$, c'est-à-dire au même problème.

Par conséquent, l'ensemble des points de S_r communs à plusieurs hypersurfaces algébriques n'ayant aucune partie commune, se compose d'un nombre fini de variétés algébriques à $r-2, r-3, \ldots, 1$ ou 0 dimensions.

42. Les variétés algébriques comme intersections d'hypersurfaces algébriques.

Soient

$$\rho x_i = \varphi_i(y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}), \quad (i = 0, 1, \ldots, r) \qquad (1)$$
$$\varphi(y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}) = 0 \qquad (2)$$

les équations d'une variété algébrique V_k.

En éliminant $\rho, y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}$ entre $k+2$ des équations (1) et l'équation (2), on obtient l'équation d'une hypersurface algébrique contenant la variété V_k. Le choix de $k+2$ des équations (1) peut se faire de $\binom{r+1}{k+2}$ manières, par conséquent

V_k fait partie de l'intersection de $\binom{r+1}{k+2}$ hypersurfaces algébriques.

Il en résulte que les S_{r-k-1} ne rencontrent pas en général V_k.

Nous allons rechercher le nombre minimum d'hypersurfaces algébriques n'ayant en commun que la variété V_k.

Soit V_k une variété irréductible. Projetons cette variété d'un espace S_{r-k-2}, c'est-à-dire cherchons le lieu des espaces S_{r-k-1} passant par S_{r-k-2} et par les différents points de V_k. Nous obtenons ainsi une hypersurface algébrique V_{r-1}. Projetons V_k d'un second espace S'_{r-k-2} et soit V'_{r-1} l'hypersurface obtenue. L'intersection de V_{r-1}, V'_{r-1} est une variété à $r-2$ dimensions éventuellement réductible en plusieurs parties. Prenons un point sur chacune des parties irréductibles de cette variété en dehors de V_k et choisissons, ce qui est toujours possible, un espace S''_{r-k-2} tel que les espaces S_{r-k-1} qui le joignent aux points choisis ne rencontrent pas V_k. Projetons V_k de cet espace S''_{r-k-2} et soit V''_{r-1} l'hypersurface obtenue. Les hypersurfaces $V_{r-1}, V'_{r-1}, V''_{r-1}$ ont en commun une variété à $r-3$ dimensions. Recommençons la construction précédente en choisissant un quatrième espace S'''_{r-k-2} et ainsi de suite.

Dans le cas le plus défavorable, on parviendra à $r+1$ hypersurfaces, projections de V_k de $r+1$ espaces S_{r-k-2}

convenablement choisis, n'ayant que V_k en commun.

Une variété algébrique est l'intersection complète de $r+1$ hypersurfaces algébriques au plus.

43. **Représentation de Cayley-Halphen.** Considérons une variété algébrique V_k. Un espace S_{r-k-1} ne rencontre pas en général V_k ; par conséquent il est possible de trouver un espace S_{r-k-2} tel que les espaces S_{r-k-1} passant par cet espace et par les différents points de V_k ne rencontrent plus en général V_k en son second point. Il en résulte que S_{r-k-2} n'a aucun point commun avec V_k.

Disposons de la figure de référence de manière que l'espace S_{r-k-2} choisi coïncide avec $O_{k+2}\, O_{k+3} \dots O_r$. Soit

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}) = 0 \qquad (1)$$

l'équation du cône projetant V_k de cet espace. Dans l'espace $O_0\, O_1 \dots O_{k+1}$, l'équation (1) représente une hypersurface $\bar{V}_k$.

L'espace S_{r-k-1} déterminé par S_{r-k-2} et par un point $\bar{x}$ de $\bar{V}_k$ rencontre en général V_k en un seul point x. Les coordonnées $x_{k+2}, x_{k+3}, \dots, x_r$ de ce point sont donc des fonctions rationnelles des coordonnées de $\bar{x}$ et on a

$$x_{k+1+i} = \frac{\varphi_{k+1+i}(x_0, x_1, \dots, x_{k+1})}{\varphi(x_0, x_1, \dots, x_{k+1})}, \quad (i = 1, 2, \dots, r-k-1) \quad (2)$$

$\varphi_{k+2}, \varphi_{k+3}, \dots, \varphi_r$ étant des formes d'un même degré m sans facteur commun et φ une forme de degré $m-1$, sans facteur commun avec les précédentes.

Les équations (1), (2) constituent la représentation de Cayley-Halphen de la variété V_k. On peut la mettre sous la forme I en posant

$$\rho x_i = y_i\, \varphi(y_0, y_1, \dots, y_{k+1}), \qquad (i = 0, 1, \dots, k+1)$$
$$\rho x_{k+1+i} = \varphi_{k+1}(y_0, y_1, \dots, y_{k+1}), \qquad (i = 1, 2, \dots, r-k-1)$$
$$f(y_0, y_1, \dots, y_{k+1}) = 0.$$

Actuellement, il y a une correspondance biunivoque entre la variété V_k et l'hypersurface $\bar{V}_k$. La variété V_k est donc irréductible si $\bar{V}_k$ est irréductible et inversement.

L'équation (1) représente, dans S_r, une hypersurface $r-k-1$ fois spécialisée. L'équation

$$x_{k+1+i}\, \varphi(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}) - \varphi_{k+1+i}(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}) = 0$$

représente une hypersurface $r-k$ fois spécialisée qui est en même temps un monoïde de sommet $O_{k+2}\,O_{k+3}\ldots O_r$.

44. __Ordre d'une variété algébrique__. Reprenons la variété algébrique V_k représentée par les équations (1) et (2). Considérons un espace S_{r-k} passant par l'espace à $r-k-2$ dimensions $O_{k+2}\,O_{k+3}\ldots O_r$. Cet espace coupe $O_0\,O_1\ldots O_{k+1}$ suivant une droite s qui en général n'appartient pas à l'hypersurface $\overline{V}_k$. La droite s rencontre alors $\overline{V}_k$ en n points, n étant l'ordre de cette hypersurface. Les espaces S_{r-k-1} passant chacun par un de ces points et par $O_{k+2}\,O_{k+3}\ldots O_r$ coupent V_k chacun en un point. L'espace S_{r-k} coupe donc V_k en n points.

__Un espace S_{r-k} rencontre en général une variété algébrique V_k en un nombre fini de points__. Ce nombre est appelé __ordre__ de la variété et celle-ci est représentée par V_k^n.

L'hypersurface $r-k-1$ fois spécialisée projetant V_k^n d'un espace S_{r-k-2} est en général d'ordre n.

Il convient d'observer que certains espaces S_{r-k} occupant des positions particulières, peuvent contenir une infinité de points d'une variété V_k^n.

45. __Points simples et multiples d'une variété__. Les espaces S_{r-k} passant par un point y d'une variété V_k^n coupent celle-ci en n points dont l'un est y. Si ces espaces ne rencontrent plus V_k^n qu'en $n-\nu$ points distincts de y (ce nombre pouvant être réduit pour certaines positions particulières des espaces S_{r-k}), le point y est dit multiple d'ordre ν pour V_k^n.

En particulier, si $\nu=1$, le point y est un point simple ou ordinaire de V_k^n.

46. __Intersection d'une variété algébrique et d'un espace linéaire__. Considérons un espace S_{r-k+l} donné par les équations

$$\xi_x^{(1)}=0\ ,\ \xi_x^{(2)}=0,\ \ldots,\ \xi_{(x)}^{(k-l)}=0. \qquad (1)$$

Une variété V_k^n étant l'intersection complète de $r+1$ hypersurfaces algébriques, la section de V_k^n par l'espace S_{r-k+l} sera l'intersection de ces hypersurfaces et des hyperplans (1), qui sont également des hypersurfaces algébriques. Cette section se compose donc d'un nombre fini de variétés algébriques irré-ductibles.

En général, cette section est une variété V_l, mais pour certaines positions particulières de l'espace S_{r-k+l}, ce peut être une variété de dimension supérieure à l.

Si l'intersection est une variété V_l, c'est une variété d'ordre n, V_l^n, car un espace S_{r-k} de S_{r-k+l} rencontre la variété en général en n points.

47. Relation entre r, k et n. Soit V_k^n une variété algébrique irréductible de S_r, n'appartenant pas à un espace linéaire de dimension inférieure à r.

On peut toujours trouver, sur V_k^n, $r+1$ points indépendants, car si on n'en pouvait trouver que $q+1$ $(q<r)$, V_k^n appartiendrait à un espace S_q.

Coupons V_k^n par un hyperplan S_{r-1}; la section est une variété V_{k-1}^n qui ne peut appartenir à un espace ayant moins de $r-1$ dimensions, car alors V_k^n appartiendrait à un espace de dimension inférieure à r.

De même, la section de V_k^n par un S_{r-k+l} est en général une variété V_l^n qui ne peut appartenir à un espace de dimension inférieure à $r-k+l$.

Les n points communs à V_k^n et à un espace S_{r-k} général doivent déterminer complètement cet espace; on a donc $n \geqslant r-k+1$, c'est-à-dire

$$r \leqslant n+k-1.$$

Par exemple, une V_k^2 appartient toujours à un S_{k+1}. Une courbe V_1^n appartient à un espace ayant au plus n dimensions.

48. Variétés rationnelles. Considérons les équations

$$\rho x_i = f_i(y_0, y_1, \ldots, y_k), \quad (i=0,1,\ldots,r)$$

où les f_i sont des formes de même degré, sans facteur commun.

En adjoignant l'équation $y_{k+1}=0$, on voit que les équations précédentes représentent une variété V_k, algébrique. Cette variété V_k particulière est appelée variété rationnelle.

§ 3. Intersection des variétés algébriques

19. Intersection de deux courbes algébriques planes.

Considérons dans un plan S_2 deux courbes algébriques C_m d'ordre m, C_n d'ordre n, n'ayant aucune partie commune. Ces deux courbes se rencontrent en un nombre fini de points. Joignons ces points deux-à-deux et choisissons le triangle de référence $O_0 O_1 O_2$ de manière que O_2 ne soit sur aucune des droites obtenues ni sur aucune des deux courbes. Soient alors

$$x_2^m \alpha_0 + x_2^{m-1} \alpha_1(x_0, x_1) + \cdots\cdots + \alpha_m(x_0, x_1) = 0 \,, \qquad (1)$$

$$x_2^n \beta_0 + x_2^{n-1} \beta_1(x_0, x_1) + \cdots\cdot + \beta_m(x_0, x_1) = 0 \,, \qquad (2)$$

les équations respectives C_m, C_n, α_i, β_k étant des formes dont le degré est indiqué par l'indice.

Formons l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_m & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \ldots & \alpha_{m-1} & \alpha_m & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \alpha_m \\ \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \beta_0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \beta_n \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

L'équation (3) exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (1) et (2) aient au moins une solution x_2 commune. Par suite, à chaque solution x_0, x_1 de (3), formée de nombres non tous deux nuls, correspondra un point d'intersection des courbes C_m, C_n (avec le même degré de multiplicité).

Supposons, pour fixer les idées, $n \geqslant m$; la diagonale principale du déterminant de l'équation (3) ne contient pas de zéro et le produit de ses éléments sera $\alpha_0^n \beta_n^m$. Le déterminant est donc de degré mn et par suite

<u>Deux courbes planes d'ordres m, n, sans partie commune, se rencontrent en mn points.</u>

On en déduit que <u>deux hypersurfaces V_{r-1}^m, V_{r-1}^n d'ordres m, n, sans partie commune, de S_r, ont en commun une variété V_{r-2}^{mn}</u>

d'ordre mn.

50. Étude de la représentation de Cayley-Halphen.

Considérons la variété algébrique irréductible V_k^n dont les équations de Cayley-Halphen sont

$$(1) \qquad x_{k+1+i} = \frac{f_{k+1+i}(x_0, x_1, \ldots, x_{k+1})}{f(x_0, x_1, \ldots, x_{k+1})}, \quad (i = 1, 2, \ldots, r-k-1)$$

$$(2) \qquad F(x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}) = 0,$$

où F est de degré n, f de degré $p-1$, les f_{k+1+i} de degré p, ces dernières formes et la forme f n'ayant aucun facteur commun.

L'espace $O_{k+2} \ldots O_r$ (S_{r-k-2}) n'a aucun point commun avec V_k^n.

Désignons par Ω_{k-1} la variété algébrique d'équations

$$x_{k+2} = \ldots = x_r = 0, \quad F = 0, \quad f(x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}) = 0.$$

Écrivons les équations (1) et (2) sous la forme

$$\rho x_i = y_i f(y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}), \quad (i = 0, 1, \ldots, k+1)$$

$$\rho x_{k+1+i} = f_{k+1+i}(y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}), \quad (i = 1, 2, \ldots, r-k-1)$$

$$F(y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}) = 0.$$

Prenons pour y un point de la variété Ω_{k-1}. Si pour ce point y, toutes les formes f_{k+1+i} ne sont pas nulles, la variété V_k possède un point appartenant à l'espace $O_{k+2} \ldots O_r$ (S_{r-k-2}), contrairement à l'hypothèse. Par conséquent, dans l'espace $O_0 O_1 \ldots O_{k+1}$ (S_{k+1}), les hyper-surfaces

$$f_{k+1+i}(y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r-k-1)$$

contiennent toutes la variété Ω_{k-1}. Les points de l'espace à $r-k-1$ dimensions $y O_{k+2} \ldots O_r$ satisfont donc tous aux équations (1) et (2) et par conséquent ces équations représentent l'ensemble de V_k^n et de la variété lieu des S_{r-k-1} passant par $O_{k+2} \ldots O_r$ et par les points de Ω_{k-1}. Cette variété a $r-2$ dimensions, nous la représenterons par W_{r-2}.

51. Intersection de deux variétés algébriques.

Soient V_k^n, V_h^m

deux variétés algébriques dont les équations de Cayley-Halphen sont respectivement

$$(1)\quad \begin{cases} f(x_0, x_1, \dots, x_{k+1})\, x_{k+1+i} = f_{k+1+i}(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}), \ (i = 1, 2, \dots, r-k-1) \\ F(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}) = 0, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi(x_0, x_1, \dots, x_{h+1})\, x_{h+1+j} = \varphi_{h+1+j}(x_0, x_1, \dots, x_{h+1}), \ (j = 1, 2, \dots, r-h-1) \\ \Phi(x_0, x_1, \dots, x_{h+1}) = 0 \end{cases}$$

Nous supposerons que l'on a
$$h + k \geq r$$

et que les variétés V_k^n, V_h^m n'ont pas en commun une variété de dimension supérieure à $h+k-r$. Pour fixer les idées, on supposera $h \geq k$. Enfin, on supposera que le point O_0 a été choisi en dehors des hypersurfaces $F=0$, $\Phi=0$, dans une position tout à fait générale par rapport à ces hypersurfaces.

Les hypersurfaces (1) ont en commun V_k^n et une variété W_{r-2} ; les hypersurfaces (2), la variété V_h^m et une variété W'_{r-2}.

Considérons un espace $S_{3r-h-k-2}$ dont les coordonnées ponctuelles sont

$$x_0, x_1, \dots, x_r, y_{k+2}, \dots, y_r, z_{h+2}, \dots, z_r.$$

Les équations

$$F(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}) = 0, \quad y_{k+1+i}\, f - f_{k+1+i} = 0, \ (i = 1, 2, \dots, r-k-1) \quad (3)$$

représentent une variété V^n_{2r-h-2} et une variété $W_{3r-h-k-4}$.

La section de (3) par les hyperplans

$$y_{k+1+i} = x_{k+1+i}, \ (i = 1, 2, \dots, r-k-1), \quad z_{h+1+j} = 0, \ (j = 1, 2, \dots, r-h-1)$$

est précisément l'ensemble des variétés V_k^n, W_{r-2}.

De même, les équations

$$\Phi(x_0, x_1, \dots, x_{h+1}) = 0, \quad z_{h+1+j}\, \varphi - \varphi_{h+1+j} = 0, \ (j = 1, 2, \dots, r-h-1), \quad (4)$$

représentent l'ensemble de deux variétés V^m_{2r-h-2}, $W'_{3r-h-k-4}$.

Les sections de ces variétés par les hyperplans

$$z_{h+1+i} = x_{h+1+i} \ (i = 1, 2, \dots, r-h-1), \quad y_{k+1+j} = 0 \ (j = 1, 2, \dots, r-k-1).$$

sont respectivement V_h^m et W'_{r-2}.

Considérons la variété représentée par les équations simultanées (3) et (4).

Nous avons supposé que le point O_0 avait été choisi en dehors des hypersurfaces $F=0$, $\Phi=0$ et dans une position tout à fait générale par rapport à ces variétés. Par conséquent les

les droites passant par O_0 et par un point de la variété

$$F = 0, \quad \Phi = 0 \tag{5}$$

ne rencontreront plus en général cette variété en un second point. Il en résulte que la variété (5) peut être représentée par les équations

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_{h+1}) = 0, \quad \psi(x_1, x_2, \dots, x_{h+1})x_0 = \psi_0(x_1, x_2, \dots, x_{h+1}). \tag{6}$$

Observons que F étant de degré n, Φ de degré m, Ψ est de degré mn. La variété (5), ou (6), est d'ordre mn.

En portant la valeur de x_0, dans les équations (3), (5), on aura

$$\Psi(x_1, x_2, \dots x_{h+1}) = 0, \quad x_0\psi'(x_1, x_2, \dots, x_{h+1}) = \psi'_0(x_1, x_2, \dots x_{h+1}), \tag{6'}$$

$$y_{k+1+i}\,\psi'(x_1, x_2, \dots, x_{h+1}) = \psi_{k+1+i}(x_1, x_2, \dots, x_{h+1}), \quad (i = 1, 2, \dots, r-k-1), \tag{7}$$

$$z_{h+1+i}\,\psi'(x_1, x_2, \dots, x_{h+1}) = \psi'_{h+1+j}(x_1, x_2, \dots, x_{h+1}), \quad (j = 1, 2, \dots, r-h-1), \tag{8}$$

les formes ψ', ψ'_0, ψ_{k+1+i}, ψ'_{h+1+j} n'ayant aucun facteur commun.

Ces équations (6'), (7) et (8) représentent l'ensemble d'une variété V^{mn}_{r-2} et d'une variété $W''_{3r-h-k-4}$.

Un point de V^{mn}_{r-2} sera obtenu en prenant arbitrairement les rapports de $r-2$ des r nombres $x_1, x_2, \dots, x_r$ à un $(r-1)$-ième (en tenant compte de $\Psi = 0$).

Un point de la variété $W_{3r-h-k-4}$ satisfaisant à l'équation $\Phi = 0$ sera obtenu en prenant des valeurs de $x_0, x_1, \dots, x_r$ satisfaisant aux équations

$$F = 0, \quad \Phi = 0, \quad f = 0.$$

Il y a ∞^{r-3} de ces systèmes de valeurs et par conséquent les points de la variété envisagée ne coïncideront certainement pas tous avec les points de V^{mn}_{r-2}.

De même, les points de la variété $W'_{3r-h-k-4}$ satisfaisant à $F = 0$ ne coïncideront pas tous avec les points de V^{mn}_{r-2}.

L'espace S_r d'équations

$$y_{k+1+i} = x_{k+1+i}, \quad (i = 1, 2, \dots, r-k-1), \quad z_{h+1+j} = x_{h+1+j}, \quad (j = 1, 2, \dots, r-h-1)$$

coupe V^{mn}_{r-2} suivant une variété V^{mn}_{h+k-r}, car l'espace

$$x_0 = x_1 = \dots = x_{h+1} = 0$$

ne rencontre pas la variété (5) considérée dans l'espace $O_0O_1\dots O_{h+1}$. Les points de la variété V^{mn}_{h+k-r} forment l'intersection des variétés données V^n_k, V^m_h.

Deux variétés algébriques V_k^n, V_l^m de S_r, telles que $h+k \geqslant r$, n'ayant pas en commun une variété de dimension supérieure à $h+k-r$, ont en commun une variété V_{h+k-r}^{mn} d'ordre mn.

Cette démonstration est due à Halphen (Recherches de Géométrie à n dimensions, Bulletin de la Société Math. de France, 1873, t. II, p. 34; Oeuvres complètes, t. I); elle a été reprise par Max Noether (Zur Eliminationstheorie, Mathem. Annalen, 1877, t. XI, pp. 571-374).

Un problème plus général consiste dans l'étude de l'intersection de variétés algébriques appartenant à une variété algébrique; ce problème a été résolu par M. F. Severi dans son mémoire Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità proiettive (Memorie della R. Accademia di Torino, 1902.)

Chapitre II.

Les courbes rationnelles de l'espace à r dimensions

§ 1. Propriétés des courbes rationnelles.

52. **Préliminaires.** Une courbe rationnelle C ou variété rationnelle V_1 est l'ensemble des points donnés par

$$x_0 : x_1 : \ldots\ldots : x_r = \varphi_0(u) : \varphi_1(u) : \ldots\ldots : \varphi_r(u), \qquad (1)$$

où $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ sont des fonctions rationnelles et entières de u, sans facteur commun.

En posant $u = y_1 : y_0$, on en déduit

$$x_0 : x_1 : \ldots\ldots : x_r = \psi_0(y_0, y_1) : \psi_1(y_0, y_1) : \ldots\ldots : \psi_r(y_0, y_1), \qquad (2)$$

où les ψ sont des formes sans facteur commun, dont le degré est le degré maximum des fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_2$.

Interprétons y_0, y_1 comme coordonnées projectives des points y d'une ponctuelle s. alors, à un point de s correspond un point et un seul de C, mais un point de C peut provenir d'un ou de plusieurs points de s.

53. **Théorème de Lüroth.** Supposons qu'à un point de C correspondent $\nu\,(>1)$ points de s, formant une involution I_ν d'ordre ν. Un point x de C est donc donné par ν valeurs $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ du paramètre u. Cela signifie que les r équations

$$\frac{\varphi_i(u)}{\varphi_0(u)} = \frac{\varphi_i(u_1)}{\varphi_0(u_0)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

ont ν racines communes $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$.

Observons tout d'abord que les ν racines $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ sont en général distinctes, car si u_j par exemple était toujours double lorsque le point x décrit C, on aurait constamment, quel que soit u_1,

$$\varphi_i(u_1)\,\varphi_0(u_j) - \varphi_0(u_1)\,\varphi_i(u_j) = 0,$$
$$\varphi_i(u_1)\,\varphi_0'(u_j) - \varphi_0(u_1)\,\varphi_i'(u_j) = 0,$$

d'où

$$\varphi_i'(u_j)\,\varphi_0(u_j) - \varphi_0'(u_j)\,\varphi_i(u_j) = 0 .$$

Le rapport $\varphi_i(u_j) : \varphi_0(u_j)$ serait constant quel que soit i, ce qui est absurde.

Cela étant, le plus grand commun diviseur des premiers membres des équations

$$\varphi_i(u)\,\varphi_0(u_1) - \varphi_0(u)\,\varphi_i(u_1) = 0 \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \qquad (3)$$

sera un certain polynome d'ordre ν en u,

$$\Phi(u, u_1) = k\,(u - u_1)(u - u_2) \ldots (u - u_\nu),$$

k étant une constante. Les équations (3) étant symétriques en u, u_1, Φ doit être de degré ν en u_1 également et on peut écrire

$$\Phi(u, u_1) = u^\nu X_0(u_1) + u^{\nu-1} X_1(u_1) + \ldots + X_\nu(u_1),$$

les coefficients $X_0(u_1)$, $X_1(u_1)$, …, $X_\nu(u_1)$ étant des fonctions rationnelles et entières dont l'une au moins est de degré ν en u_1.

Les équations

$$\Phi(u, u_1) = 0,\ \Phi(u, u_2) = 0, \ldots, \Phi(u, u_\nu) = 0,$$

ayant les mêmes racines, on a

$$\frac{X_i(u_1)}{X_0(u_1)} = \frac{X_i(u_2)}{X_0(u_2)} = \ldots = \frac{X_i(u_\nu)}{X_0(u_\nu)} . \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Supposons que $X_i(u)$ ne se réduise pas à une constante et posons

$$v = \frac{X_i(u)}{X_0(u)} . \qquad (4)$$

A un point x de C correspond une valeur de v et à une valeur de v correspondent ν valeurs de u donnent un seul point x de C. Par suite, les coordonnées des points x de C s'expriment en fonctions rationnelles de v par la substitution (4) de telle sorte qu'un point x de C corresponde à une seule valeur de v. On obtient ainsi le

Théorème de Lüroth. Les coordonnées des points d'une courbe rationnelle s'expriment en fonctions rationnelles d'un paramètre, un point de la courbe correspondant en général à une seule valeur du paramètre.

54. **Courbe rationnelle normale.** Soit C une courbe rationnelle donnée par les équations (2), où nous supposons qu'un point x de C provienne d'un seul point y de la ponctuelle s. Soit n le degré des formes $\varphi_i(y_0, y_i)$.

Les points de rencontre de C avec l'hyperplan ξ sont des paramètres racines de

$$\xi_0 \psi_0(y_0, y_1) + \xi_1 \psi_1(y_0, y_1) + \cdots\cdots + \xi_r \psi_r(y_0, y_1) = 0$$

et ces points sont donc au nombre de n. La courbe C est d'ordre n et on a $r \leqslant n$.

La courbe C est appelée <u>courbe rationnelle normale</u> si $r = n$.

Une courbe <u>rationnelle</u> normale ne peut avoir de points multiples, car si C possédait un point double P par exemple, par ce point et par $r-1 = n-1$ points quelconques de C passerait un hyperplan rencontrant la courbe en $n+1$ points, ce qui est absurde.

55. <u>Théorème</u>. <u>Une courbe rationnelle est normale ou est la projection d'une courbe normale.</u>

Ecrivons les équations de la courbe C, d'ordre n, de S_r, sous la forme

$$\rho x_i = a_{i0} u^n + a_{i1} u^{n-1} + \cdots\cdots + a_{in}, \quad (i = 0, 1, \ldots, r) \qquad (1)$$

et supposons $n > r$.

L'un au moins des coefficients a_{i0} n'est pas nul et les seconds membres des équations (1) sont linéairement indépendants, car autrement il existerait une ou plusieurs relations à coefficients constants entre les coordonnées des points de la courbe C et celle-ci appartiendrait à un espace linéaire de dimension inférieure à r.

Cela étant, il est possible de trouver $n - r$ polynômes de degré n.

$$a_{i0} u^n + a_{i1} u^{n-1} + \cdots\cdots + a_{in}, \quad (i = r+1, \ldots, n)$$

linéairement indépendants et linéairement indépendants des seconds membres des équations (1). Considérons alors, dans l'espace S_n, la courbe C' d'équations

$$\rho x_i = a_{i0} u^n + a_{i1} u^{n-1} + \cdots + a_{in}, \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Cette courbe C' est rationnelle normale. En la projetant de l'espace $O_{r+1} \ldots O_n$ sur l'espace $O_0 O_1 \ldots O_r$, on retrouve la courbe C.

Réciproque

Une courbe normale (d'ordre n dans S_n) est nécessairement rationnelle, de même que la projection d'une courbe normale.

56. <u>Equations réduites d'une courbe normale</u>. Soit C une courbe rationnelle normale de S_n définie par les équations

$$\rho x_i = a_{i0} u^n + a_{i1} u^{n-1} + \cdots\cdots + a_{in} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n) \quad (1)$$

Les seconds membres de ces équations étant linéairement indépendants, on a

$$|a_{ik}| \neq 0 .$$

Effectuons la transformation de coordonnées

$$\rho x_i = a_{i0} x'_0 + a_{i1} x'_1 + \dots\dots + a_{in} x'_n . \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (2)$$

Les équations de la courbe C deviennent

$$x'_0 : x'_1 : \dots : x'_n = u^n : u^{n-1} : \dots : 1. \quad (3)$$

Les équations d'une courbe normale C peuvent toujours se ramener à la forme réduite (3) par une homographie (2), donc <u>deux courbes rationnelles normales du même ordre sont projectivement identiques</u>, c'est-à-dire que l'on peut passer de l'une à l'autre par une homographie.

57. <u>Projections d'une courbe rationnelle.</u> Considérons la courbe rationnelle d'ordre n

$$\rho x_i = a_{i0} u^n + a_{i1} u^{n-1} + \dots + a_{in} , \quad (i = 0, 1, \dots, r) \quad (1)$$

et supposons qu'elle ne passe pas par le point O_r. Il en résulte que les équations

$$a_{i0} u^n + a_{i1} u^{n-1} + \dots\dots + a_{in} = 0 , \quad (i = 0, 1, \dots, r-1)$$

n'ont aucune solution commune et que l'un au moins des nombres $a_{00}, a_{10}, \dots, a_{r-10}$ n'est pas nul.

La projection de la courbe (1) sur l'hyperplan $x_r = 0$ du point O_r a pour équations

$$x_r = 0 , \quad \rho x_i = a_{i0} u^n + a_{i1} u^{n-1} + \dots + a_{in} , \quad (i = 0, 1, \dots, r-1).$$

c'est donc une courbe d'ordre n.

<u>La projection d'une courbe rationnelle d'ordre n sur un hyperplan à partir d'un point n'appartenant pas à la courbe, est une courbe rationnelle d'ordre n.</u>

Supposons actuellement que le point O_r soit multiple d'ordre ν pour la courbe C. On peut supposer que ce point correspond à la valeur $u = 0$ du paramètre et écrire les équations (1) sous la forme

$$\begin{aligned} \rho x_i &= u^\nu (a_{i0} u^{n-\nu} + \dots + a_{in-\nu}), \quad (i = 0, 1, \dots, r-1) \\ \rho x_r &= a_{r0} u^n + a_{r1} u^{n-1} + \dots + a_{rn}, \end{aligned} \quad (2)$$

l'un au moins des nombres $a_{00}, a_{10}, \dots, a_{r-10}$ n'étant pas nul.

La projection de cette courbe sur l'hyperplan $x_r = 0$ à partir de O_r a pour équations

$$x_r = 0 \ , \quad \rho x_i = a_{i0} u^{n-\nu} + \dots + a_{i\,n-\nu} \ , \qquad (i = 0, 1, \dots, r-1)$$

c'est donc une courbe rationnelle d'ordre $n-\nu$.

<u>La projection d'une courbe rationnelle d'ordre n sur un hyperplan à partir d'un point multiple d'ordre ν de la courbe, est une courbe rationnelle d'ordre $n-\nu$.</u>

On observera que la courbe (2) appartient nécessairement à un espace S_r tel que $r \leqslant n-\nu+1$.

58. <u>Espaces sécants d'une courbe rationnelle normale.</u>

Soit C une courbe rationnelle normale d'ordre n, d'équations

$$x_0 : x_1 : \dots : x_n = u^n : u^{n-1} : \dots : 1 \ . \qquad (1)$$

Un espace S_k ne peut rencontrer la courbe C en plus de $k+1$ points, car autrement, par cet espace et par $n-k-1$ points de C n'appartenant pas à cet espace, on pourrait mener un hyperplan coupant C en plus de n points.

Un espace S_k contenant $k+1$ points de C est déterminé par ces points et est appelé espace S_k $(k+1)$-sécant de C.

Soient $u_0, u_1, \dots, u_k$ les paramètres de $k+1$ points de C. L'espace S_k déterminé par ces points a pour équations

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ u_0^n & u_0^{n-1} & \dots & 1 \\ u_1^n & u_1^{n-1} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_k^n & u_k^{n-1} & \dots & 1 \end{matrix} \right\| = 0 \ . \qquad (2)$$

Considérons celle de ces équations qui ne contiennent pas $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{k+i+2}, \dots, x_r$. après division des deux membres par $u_0^{n-k-i}, u_1^{n-k-1}, \dots, u_k^{n-k-i}$, elle s'écrit

$$\begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} & \dots & x_{k+i+1} \\ u_0^{k+1} & u_0^k & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_k^{k+1} & u_k^k & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0 \ . \qquad (3)$$

Dans cette équation, remplaçons $x_i, \dots, x_{k+i+1}$ par leurs valeurs tirées de (1), divisées par u^{n-k-i} ; nous obtenons une équation de degré $k+1$ en u, dont les racines sont $u_0, u_1, \dots, u_{k+1}$; l'équation (3) peut donc s'écrire

$$x_i - x_{i+1}\sigma_1 + x_{i+2}\sigma_2 - \dots + (-1)^{k+1}\sigma_{k+1}x_{k+i+1} = 0,$$

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ désignant les fonctions symétriques des racines,

$$\sigma_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_k, \quad \sigma_2 = u_0 u_1 + \dots + u_{k-1}u_k, \dots, \sigma_{k+1} = u_0 u_1 \dots u_k.$$

Les équations (2) d'un espace S_k $(k+1)$-sécant de la courbe C peuvent donc s'écrire

$$\left.\begin{array}{l} x_0 - x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 - \dots + (-1)^{k+1}x_{k+1}\sigma_{k+1} = 0, \\ x_1 - x_2\sigma_1 + x_3\sigma_2 - \dots + (-1)^{k+1}x_{k+2}\sigma_{k+1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-k-1} - x_{n-k}\sigma_1 + \dots + (-1)^{k+1}x_n\sigma_{k+1} = 0. \end{array}\right\} \quad (4)$$

59 <u>**Espaces tangents, osculateurs, à une courbe rationnelle normale**</u>. La limite d'un espace S_k $(k+1)$-sécant de C, lorsque k des points d'appui tendent simultanément vers le dernier supposé fixe, est appelé espace S_k k-osculateur à la courbe C en ce dernier point (point de contact).

Les équations de l'espace S_k k-osculateur à la courbe C au point de paramètre u_0 sont

$$\left.\begin{array}{l} x_0 - (k+1)u_0 x_1 + \binom{k+1}{2}u_0^2 x_2 - \dots + (-1)^{k+1}u_0^{k+1}x_{k+1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-k-1} - (k+1)u_0 x_{n-k} + \dots + (-1)^{k+1}u_0^{k+1}x_n = 0. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Pour $k=1$, les équations (5) représentent la tangente à C au point u_0 ; pour $k=2$, le plan osculateur, ..., pour $k=n-1$, l'hyperplan $(n-1)$-osculateur, appelé plus simplement hyperplan osculateur.

Les espaces linéaires passant par la tangente au point u_0 sont dits tangents à la courbe C en ce point. Plus généralement, les espaces linéaires passant par un espace S_k k-osculateur au point u_0, sont dits k-osculateurs en ce point à la courbe C.

60. <u>Réciprocité involutive associée à une courbe rationnelle normale.</u> L'équation de l'hyperplan osculateur à la courbe C au point u_0 est

$$x_0 - \binom{n}{1} u_0 x_1 + \binom{n}{2} u_0^2 x_2 + \cdots + (-1)^i \binom{n}{i} u_0^i x_i + \cdots\cdots + (-1)^n \binom{n}{n} u_0^n x_n = 0. \quad (1)$$

Cette équation étant de degré n en u_0, <u>par un point de l'espace S_n passent n hyperplans osculateurs à la courbe C.</u>

Si nous désignons par y le point de C de paramètre u_0, l'équation (1) s'écrit

$$x_0 y_n - \binom{n}{1} x_1 y_{n-1} + \cdots + (-1)^i \binom{n}{i} x_i y_{n-i} + \cdots\cdots + (-1)^n \binom{n}{n} x_n y_0 = 0. \quad (2)$$

L'équation (2) est symétrique en x, y et représente soit l'hyperplan osculateur à la courbe C en point y de cette courbe, soit l'hyperplan passant par les points de contact des n hyperplans osculateurs à la courbe C menés par un point y n'appartenant pas à la courbe.

Considérons l'équation (2) indépendamment de la courbe C. Elle représente une réciprocité involutive Θ. Les coefficients de $x_i y_{n-i}$, $x_{n-i} y_i$ sont respectivement

$$(-1)^i \binom{n}{i} \quad , \quad (-1)^{n-i} \binom{n}{n-i} = (-1)^{n-i} \binom{n}{i} .$$

Le rapport de ces coefficients est égal à $(-1)^{n-2i}$ ou $(-1)^n$. Par conséquent, si n est pair, Θ est une polarité, si n est impair, c'est un système nul.

<u>Les points d'une courbe rationnelle normale d'ordre n et les hyperplans osculateurs à cette courbe en ces points se correspondent dans une réciprocité qui est une polarité si n est pair, un système-nul si n est impair.</u>

61. <u>Hyperquadriques contenant une courbe rationnelle normale.</u> Des équations réduites d'une courbe rationnelle normale C, d'ordre n, on déduit qu'elle peut être représentée par

$$\left\| \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots\cdots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots\cdots & x_{n-1} & x_n \end{matrix} \right\| = 0. \quad (1)$$

On en conclut que la courbe C est l'intersection complète de $\binom{n}{2}$ hyperquadriques, dont les équations s'obtiennent en égalant à zéro les déterminants tirés de la matrice précédente. Ces hyperquadriques sont linéairement indépendantes.

Les hyperquadriques de S_n dépendent de $\frac{1}{2}n(n+3)$ paramètres ; celles qui passent par $2n+1$ points de la courbe C contiennent cette courbe et forment un système linéaire de dimension $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)$. Ce système linéaire est donc complètement déterminé par les hyperquadriques obtenues en partant des équations (1).

62. Générations de la courbe rationnelle normale.

Les équations (dans S_n)

$$\left\| \begin{matrix} a_{1x} & a_{2x} & \dots & a_{nx} \\ b_{1x} & b_{2x} & \dots & b_{nx} \end{matrix} \right\| = 0 \qquad (1)$$

proviennent de l'élimination de u entre les équations

$$a_{1x} - ub_{1x} = 0, \quad a_{2x} - ub_{2x} = 0, \dots, a_{nx} - ub_{nx} = 0. \qquad (2)$$

Supposons ces équations linéairement indépendantes. En les résolvant par rapport aux x, on obtient les équations paramétriques d'une courbe rationnelle normale. Les équations (1) représentent donc une courbe rationnelle normale et il résulte de ce qui précède que toute courbe rationnelle normale peut être représentée de cette manière.

Les équations (2) montrent qu'une courbe rationnelle normale d'ordre n est le lieu des points communs aux hyperplans homologues de n faisceaux deux-à-deux projectifs.

Considérons les équations

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 a_{1x} + \lambda_2 a_{2x} + \dots + \lambda_n a_{nx} &= 0, \\ \lambda_1 b_{1x} + \lambda_2 b_{2x} + \dots + \lambda_n b_{nx} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

La première représente une gerbe G_{n-1} de sommet A et la seconde une gerbe G_{n-1} de sommet B, les hyperplans de ces gerbes étant liés par une homographie H.

Les points A et B appartiennent à la courbe (1) et en utilisant les équations (2), on voit que les équations (3) représentent un espace S_{n-2} $(n-1)$ sécant de la courbe.

Les équations (1) expriment la condition pour que deux droites passant l'une par A, l'autre par B, homologues dans l'homographie H, se rencontrent.

Une courbe rationnelle normale d'ordre n est le lieu des points communs aux droites homologues de deux gerbes homographiques d'hyperplans.

Au lieu des équations (1), reprenons les équations de la courbe normale C du n° 61. Les équations (3) deviennent

$$\lambda_1 x_0 + \lambda_2 x_1 + \dots + \lambda_n x_{n-1} = 0, \quad \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0.$$

Dans l'homographie ainsi déterminée entre les gerbes de sommets O_n, O_0, aucun élément commun aux gerbes n'est uni. Cette condition est nécessaire et suffisante pour que la courbe représentée par les équations (1) soit irréductible.

63. Homographies transformant une courbe normale en elle-même. Reprenons la courbe normale C d'équations

$$x_0 : x_1 : \dots : x_n = u^n : u^{n-1} : \dots : 1.$$

S'il existe une homographie Ω de S_n transformant C en elle-même, les paramètres u de deux points homologues de C se correspondent dans une transformation biunivoque, c'est-à-dire dans une homographie

$$u' = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0).$$

Appelons x, x' les points de C de paramètres u, u'. Nous avons

$$\rho x'_i = u'^{\,n-i} = \left(\frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}\right)^{n-i}$$

d'où

$$\rho x'_i = (\alpha u + \beta)^{n-i} (\gamma u + \delta)^i.$$

En tenant compte des équations de la courbe C, on en déduit

$$\rho x'_i = \alpha^{n-i}\gamma^i x_0 + \left[(n-i-1)\alpha^{n-i-1}\beta\gamma^i + (i-1)\alpha^{n-i}\gamma^{i-1}\delta\right] x_1 + \\ + \dots + \beta^{n-i}\delta^i x_m,$$

qui sont les équations de l'homographie Ω.

Il existe ∞^3 homographies de S_n transformant en elle-même une courbe rationnelle normale.

64. Courbes rationnelles quelconques. Soit C une courbe rationnelle d'ordre n de S_r ($r < n$) ; elle est la projection d'une courbe rationnelle normale C' d'ordre n de S_n, à partir d'un espace S_{n-r-1} ne rencontrant pas C'.

Supposons que la courbe C possède un point P multiple d'ordre ν. L'espace S_{n-r}, déterminé par P et S_{n-r-1}, doit rencontrer C' en ν points. L'espace $S_{\nu-1}$ déterminé par ces ν points doit rencontrer S_{n-r-1} suivant un espace $S_{\nu-2}$. Inversement, si un espace $S_{\nu-1}$ ν-sécant de C' rencontre S_{n-r-1} suivant un espace $S_{\nu-2}$, la courbe C possède un point multiple d'ordre ν. On a d'ailleurs $\nu \leq n-r+1$, comme on l'a observé plus haut.

Supposons que la courbe C' ait pour équations
$$x_0 : x_1 : \ldots : x_n = u^n : u^{n-1} : \ldots : 1$$
et soient $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n-r)}$ $n-r$ points déterminant S_{n-r-1}.

Un espace $S_{\nu-1}$ ν sécant de C' a pour équations
$$\lambda_0 x_i + \lambda_1 x_{i+1} + \cdots + \lambda_\nu x_{\nu+i} = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-\nu)$$

Posons, dans ces équations
$$x = m_1 y^{(1)} + m_2 y^{(2)} + \cdots + m_{n-r} y^{(n-r)}.$$

Nous obtenons, dans S_{n-r-1}, les équations, en coordonnées m, de l'intersection de $S_{\nu-1}$ et de cet espace. Pour que cette intersection soit un espace $S_{\nu-2}$, ces équations doivent se réduire à $n-r-\nu+1$ équations linéairement indépendantes. Cela donne $r(\nu-1)$ relations entre les λ. Pour que, quelque soit l'espace S_{n-r-1} choisi, le problème soit possible, on doit avoir $r(\nu-1) \leq \nu$. Cela exige $r = 2$, $\nu = 2$. On en conclut que (d'abord que par tout espace S_{n-r-1} de S_n passe un espace [illegible] bisécant de C)

<u>Une courbe plane rationnelle d'ordre $n > 2$ possède toujours des points multiples.</u>

<u>Une courbe rationnelle non plane est en général dépourvue de points multiples.</u>

Supposons $r > 2$, $n > 3$. Considérons un espace S_k $(k+1)$-sécant de C', rencontrant S_{n-r-1} suivant un espace S_p. Les espaces S_{n-r-1}, S_k appartiennent à un espace $S_{n+k-r-p-1}$ rencontrant l'espace S_r contenant C suivant un espace S_{k-p-1} s'appuyant en $k+1$ points sur C.

En particulier, si $p = k-2$, on obtient une droite s'appuyant en $k+1$ points sur C.

Ce procédé permet l'étude des espaces sécants des courbes rationnelles.

§2. Courbes rationnelles des premiers ordres

65. <u>Courbes rationnelles normales du quatrième ordre.</u> La courbe rationnelle C du quatrième ordre appartient à S_4 et ses équations

peuvent prendre la forme

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = u^4 : u^3 : u^2 : u : 1 . \qquad (1)$$

Les bisécantes de C sont données par

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0 , \ \lambda_0 x_1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 = 0 , \ \lambda_0 x_2 + \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 = 0 .$$

Le lieu de ces droites est l'hypersurface cubique

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

La tangente à C au point de paramètre u_0 a pour équations

$$x_0 - 2u_0 x_1 + u_0^2 x_2 = 0, \ x_1 - 2u_0 x_2 + u_0^2 x_3 = 0, \ x_2 - 2u_0 x_3 + u_0^2 x_4 = 0.$$

Le lieu de cette droite est une surface appartenant à l'hypersurface (2). Cette surface est du sixième ordre, car les hyperplans d'un faisceau découpent sur la courbe C les groupes d'une série g_4^1 dont le groupe jacobien comprend six points. Il y a donc six tangentes à C rencontrant le plan axe du faisceau.

Les plans osculateurs à la courbe C ont pour équations

$$x_0 - 3u_0 x_1 + 3u_0^2 x_2 - u_0^3 x_3 = 0, \ x_1 - 3u_0 x_2 + 3u_0^2 x_3 - u_0^3 x_4 = 0.$$

Le lieu de ces plans est une hypersurface du sixième ordre, d'équation

$$81(x_1^2 - x_0 x_2)(x_2^2 - x_1 x_3)(x_3^2 - x_2 x_4) - 27(x_1^2 - x_0 x_2)(x_1 x_4 - x_2 x_3)^2$$
$$- 27(x_3^2 - x_2 x_4)(x_1 x_2 - x_0 x_3)^2 - 18(x_1^2 - x_0 x_2)(x_3^2 - x_2 x_4)(x_0 x_4 - x_1 x_3)$$
$$+ 9(x_0 x_4 - x_1 x_3)(x_1 x_2 - x_0 x_3)(x_1 x_4 - x_2 x_3) + (x_0 x_4 - x_1 x_3)^3 = 0.$$

66. Courbes rationnelles du quatrième ordre de S_3.

Projetons la courbe C d'un point A sur un hyperplan S_3 ; nous obtenons une courbe C'. Nous supposerons que le point A n'appartient pas à C ; la courbe C' est alors du quatrième ordre.

La courbe C' possèdera un point double s'il y a une bisécante passant par A, c'est-à-dire si ce point appartient à l'hypersurface (2), et seulement dans ce cas.

Supposons que A n'appartienne pas à l'hypersurface (2). Par le point A passent ∞^1 plans trisécants de C, par conséquent la courbe C' possède ∞^1 trisécantes.

Par neuf points de C' passe une quadrique Q qui contient la courbe et par suite ses trisécantes. Il ne peut donc exister qu'une quadrique passant par C'.

Les surfaces cubiques S_3 sont en nombre ∞^{19} et coupent C' en des groupes de 12 points. Les ∞^6 surfaces cubiques F passant par 13 points de C' contiennent cette courbe. Parmi ces surfaces, il y en a ∞^3 formées de la quadrique Q et d'un plan.

Une surface cubique irréductible F passant par C' coupe Q suivant une courbe du sixième ordre formée de C' et d'une courbe γ du second ordre. Par un point P de γ n'appartenant pas à C' passe une trisécante t de cette courbe. La droite t rencontre F en quatre points donc appartient à cette surface. La courbe γ se compose donc de deux trisécantes de C'. Inversement, une surface cubique passant par deux génératrices de même mode d'une quadrique rencontre encore celle-ci suivant une courbe du quatrième ordre rencontrant en trois points les génératrices rectilignes de la quadrique du même mode que les génératrices appartenant à la surface cubique. Cette courbe est donc rationnelle et du même type que C'.

Par le point A passent quatre hyperplans osculateurs de C coupant S_3 suivant quatre plans $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rencontrant chacun C' en quatre points confondus. Soient respectivement A_0, A_1, A_2, A_3 les points de contact de ces plans avec C'.

Trois hyperplans osculateurs à la courbe C ne peuvent passer par un même plan, ni par une même droite, donc les plans $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ forment un tétraèdre proprement dit. Si dans S_3 on prend ce tétraèdre comme tétraèdre de référence et si l'on choisit convenablement le point unitaire, les équations de la courbe C' peuvent s'écrire

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = (u-u_0)^4 : (u-u_1)^4 : (u-u_2)^4 : (u-u_3)^4.$$

Les points A_0, A_1, A_2, A_3 ont respectivement pour paramètres u_0, u_1, u_2, u_3.

En général, il n'existe aucun plan osculateur C passant par le point A. S'il en existe un, il correspond au point de contact, sur la courbe C', un point d'inflexion de celle-ci.

Si le point A est l'intersection de deux plans osculateurs à la courbe C, la courbe C' possède deux points d'inflexion.

Prenons par exemple pour A le point O_2, commun aux plans osculateurs $x_0 = x_1 = 0$ au point O_4 et $x_3 = x_4 = 0$ au point O_0. La projection de C sur l'hyperplan $x_2 = 0$ a pour équations

$$x_0 : x_1 : x_3 : x_4 = u^4 : u^3 : u : 1.$$

Les points d'inflexion de cette courbe sont O_0 et O_4, les tangentes d'inflexion étant respectivement $x_3 = x_4 = 0$ et $x_0 = x_1 = 0$.

67. __Courbe rationnelle du cinquième ordre.__ Considérons, dans S_5, la courbe rationnelle normale C d'équations

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = u^5 : u^4 : u^3 : u^2 : u : 1.$$

En projetant cette courbe d'une droite yz qui ne la rencontre pas sur un espace S_3, on obtient une courbe gauche C' du cinquième ordre.

Les bisécantes de C forment une variété à trois dimensions qui, en général, n'est pas rencontrée par la droite yz, par conséquent C' est en général dépourvue de point double. Il n'existe en général aucun plan trisécant de C passant par la droite yz, donc la courbe C' est en général dépourvue de point triple.

Il existe une infinité de plans trisécants de C s'appuyant en un point sur la droite yz ; ces plans, projetés de yz, donnent les trisécantes de la courbe C'.

Un S_3 4-sécant de C a pour équations

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0, \quad \lambda_0 x_1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 x_4 + \lambda_4 x_5 = 0.$$

Si l'on exprime que ce plan passe par la droite yz, on obtient quatre équations linéaires en général indépendantes et qui admettent une solution $\lambda_0, \ldots, \lambda_4$. Donc la courbe C' possède en général une seule quadrisécante.

Considérons deux espaces S_3 4 sécants de C. Ils ont en commun une droite qui, en général, ne rencontre pas C. En projetant cette courbe de cette droite sur un espace S_3, on obtient une quintique C' possédant deux quadrisécantes et par suite une infinité. Ces quadrisécantes sont deux à deux gauches. Trois de ces quadrisécantes déterminent une quadrique qui rencontrent C' en 12 points et par conséquent la contient tout entière. Il en résulte que les quadrisécantes de

C' sont les génératrices d'un mode d'une quadrique Q.

68. <u>Courbe rationnelle du sixième ordre</u>. Considérons la courbe rationnelle normale C du sixième ordre de S_6, d'équations

$$x_0 : x_1 : \ldots\ldots : x_6 = u^6 : u^5 : \ldots\ldots : 1 .$$

La projection de cette courbe, à partir d'un plan α ne la rencontrant pas, sur un espace S_3, est une sextique rationnelle C'.

La courbe C' est en général dépourvue de points multiples, c'est-à-dire qu'en général, il n'y a pas de bisécante de C rencontrant α en un point, ni de plan trisécant de C rencontrant α suivant une droite, ni d'espace S_3 quartisécant de C contenant α.

Une quadrisécante de C' provient d'un S_3 quartisécant de C rencontrant α suivant une droite. Nous allons rechercher le nombre de ces quadrisécantes.

Un espace S_3 4-sécant de C a pour équations

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0 \quad , \lambda_0 x_1 + \ldots + \lambda_4 x_5 = 0 \, , \lambda_0 x_2 + \ldots + \lambda_4 x_6 = 0 . \quad (1)$$

Supposons le plan α soit déterminé par trois points $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}$. En posant

$$x = \mu_0 y^{(0)} + \mu_1 y^{(1)} + \mu_2 y^{(2)}$$

dans les équations (1), nous obtenons, en coordonnées μ_0, μ_1, μ_2, les équations de trois droites qui, pour notre objet, doivent coïncider.

Posons

$$f_{ik} = \lambda_0 y_i^{(k)} + \ldots\ldots + \lambda_4 y_{i+4}^{(k)} \quad ; \; (i = 0,1,2 \; ; \; k = 0,1,2)$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} f_{00} & f_{01} & f_{02} \\ f_{10} & f_{11} & f_{12} \\ f_{20} & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = 0 . \qquad (2)$$

doit être de caractéristique un

Interprétons les λ comme coordonnées projectives des points d'un espace S_4. En égalant à zéro les déterminants tirés des deux premières lignes de (2), on obtient les équations d'une variété V_2^3. L'hyperquadrique

$$f_{10}f_{21}-f_{11}f_{20}=0$$

coupe V_2^3 suivant une courbe V_1^6. Cette hyperquadrique contient le plan $f_{10}=0$, $f_{11}=0$, qui coupe V_2^3 suivant la droite $f_{10}=f_{11}=f_{12}=0$, donc la courbe V_1^6 se compose de cette droite et d'une courbe V_1^5. Observons que la droite en question n'appartient pas à l'hyperquadrique,

$$f_{00}f_{11}-f_{01}f_{10}=0$$

et ne donne par suite pas de solution annulant tous les mineurs de (2).

Le plan $f_{11}=0$, $f_{12}=0$ coupe V_1^5 suivant les points

$$f_{10}=0,\ f_{11}=0,\ f_{12}=0,\ f_{00}f_{21}-f_{01}f_{20}=0, \qquad (3)$$

et le plan $f_{11}=0$, $f_{21}=0$ coupe de même V_1^5 suivant deux points

$$f_{01}=0,\ f_{11}=0,\ f_{12}=0,\ f_{00}f_{12}-f_{02}f_{10}=0. \qquad (4)$$

L'hyperquadrique

$$f_{11}f_{22}-f_{12}f_{21}=0$$

coupe V_1^5 en dix points parmi lesquels les points (3) et (4), qui n'annulent pas tous les mineurs du déterminant (2). Il reste donc six points annulant tous ces mineurs.

La sextique gauche rationnelle C' possède donc six quadrisécantes.

Pour que la courbe C' possède une quintisécante, il faut qu'il existe un S_4 5-sécant de C contenant α, ce qui n'a pas lieu en général.

Si l'on choisit le plan α dans un S_4 5-sécant de C, la courbe C' possède une quintisécante et une quadrisécante.

Deux espaces S_4 5-sécants se rencontrent suivant un plan. Si l'on prend ce plan pour α, la courbe C' possède une infinité de quintisécantes. Il est facile de voir que celles-ci sont les génératrices d'un mode d'une quadrique Q' circonscrite à la courbe.

§ 3. Les involutions unicursales.

69. Définitions. Considérons une relation

$$F(x_0^{(1)}, x_1^{(1)}; x_0^{(2)}, x_1^{(2)}; \ldots ; x_0^{(n)}, x_1^{(n)}) = 0 , \qquad (1)$$

linéaire et homogène séparément par rapport à chacun des couples de variables $x_0^{(1)}, x_1^{(1)}; \ldots ; x_0^{(n)}, x_1^{(n)}$. Interprétons $x_0^{(i)}$, $x_1^{(i)}$ comme coordonnées homogènes des points $x^{(i)}$ d'une ponctuelle s_i, les ponctuelles $s_1, s_2, \ldots, s_n$ étant distinctes ou non. Si nous prenons un point sur $n-1$ de ces ponctuelles, l'équation (1) détermine un point en général unique sur la ponctuelle restante. Cette relation entre les n ponctuelles est appelée homographie d'ordre n et de rang $n-1$ et représentée par H_n^{n-1}.

Considérons plus généralement p relations

$$F_1 = 0 \ , \ F_2 = 0, \ \ldots \ , F_p = 0 \qquad (2)$$

analogues à la relation (1) Si l'on choisit un point sur $n-p$ des ponctuelles $s_1, s_2, \ldots s_n$, les équations (2) déterminent un point sur chacune des p ponctuelles restantes. Cette relation entre les n ponctuelles est appelée homographie d'ordre n et de rang $n-p$ et représentée par H_n^{n-p}.

Supposons les n ponctuelles superposées et revenons à la relation (1). Si cette relation est symétrique par rapport à ses n séries de variables, l'homographie H_n^{n-1} est appelée involution d'ordre n et de rang $n-1$; elle est représentée par I_n^{n-1}. Appelons s le support commun des ponctuelles $s_1, s_2, \ldots, s_n$ et prenons $n-1$ points de s, dans $n-1$ quelconques des n ponctuelles. L'involution I_n^{n-1} leur fait correspondre un point de s appartenant à la ponctuelle restante. Ce point reste fixe quel que soit le choix des $n-1$ premières ponctuelles. On a donc sur s un ensemble de ∞^{n-1} groupes de n points tel que $n-1$ points de s appartiennent à un de ces groupes. On donne aussi le nom d'involution I_n^{n-1} à cet ensemble de groupes de n points.

Posons, dans l'équation d'une involution, $u_i = x_0^{(i)} : x_1^{(i)}$ et représentons par P_k la somme des produits k à k des variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$. L'équation de l'involution s'écrit

$$a_0 P_n + a_1 P_{n-1} + \cdots + a_n P_0 = 0 . \qquad (3)$$

Observons que l'ensemble des groupes de n points de s formés d'un point fixe et de $n-1$ points quelconques constitue une involution I_n^{n-1}. Cette involution particulière est appelée involution dégénérée et a pour équation

$$(u_1-\alpha)(u_2-\alpha)\dots(u_n-\alpha) = P_n - \alpha P_{n-1} + \dots + (-1)^n \alpha^n P_0 = 0. \quad (4).$$

L'ensemble des ∞^{n-p} groupes de n points communs à p involutions I_n^{n-1} données sur une ponctuelle s'est appelé involution I_n^{n-p} d'ordre n et de rang $n-p$. Un groupe de cet ensemble est déterminé par $n-p$ de ses points.

70. Représentation d'une involution d'ordre n et de rang $n-1$.

A l'involution I_n^{n-1} représentée par l'équation (3) faisons correspondre le point $A(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de S_n. Ce point est appelé point principal de l'involution.

Les coordonnées du point principal d'une involution dégénérée (4) satisfont aux équations

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \dots\dots = \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Le lieu de ce point, lorsque l'involution dégénérée varie, est la courbe rationnelle C de S_n,

$$x_0 : x_1 : \dots\dots : x_n = 1 : -u : \dots\dots : (-1)^n u^n.$$

Considérons un hyperplan ξ passant par le point principal A de l'involution (3). Si nous désignons par $u_1, u_2, \dots, u_n$ les paramètres de ses n points d'intersection avec C, nous avons

$$\xi_0 : \xi_1 : \dots\dots : \xi_n = P_n : P_{n-1} : \dots\dots : P_0.$$

En exprimant que ξ contient A, on a

$$a_0 P_n + a_1 P_{n-1} + \dots + a_n P_0 = 0,$$

c'est-à-dire précisément l'équation (3). Donc <u>les hyperplans passant par le point principal d'une involution découpent, sur la courbe normale C, les groupes de cette involution</u>.

71. Représentations d'une involution d'ordre n et de rang $n-p$.

Une involution I_n^{n-p} est l'ensemble des groupes communs à p involutions I_n^{n-1}. Soient $A_1, A_2, \dots, A_p$ les points principaux de ces p involutions ; ils déterminent un espace S_{p-1}, appelé espace principal de I_n^{n-p}. <u>Les hyperplans passant par l'espace principal S_{p-1} d'une involution I_n^{n-p} découpent</u>

sur la courbe normale C de S_n, les groupes de cette involution.

En général, les groupes d'une involution I_n^{n-p} n'ont pas de points fixes communs et l'espace principal S_{p-1} ne rencontre pas la courbe C. Projetons la courbe C de l'espace principal S_{p-1} sur un espace S_{n-p} ne rencontrant pas S_{p-1}. A la courbe C correspond dans S_{n-p} une courbe rationnelle C' d'ordre n.

Les hyperplans d'un espace S_{n-p} découpent, sur une courbe rationnelle d'ordre n de cet espace, les groupes d'une involution I_n^{n-p}.

72. Représentation analytique d'une involution. Considérons une involution I_n^{n-p}; son espace principal S_{p-1} est l'intersection de $n-p+1$ hyperplans $\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n-p)}$. Tout hyperplan passant par S_{p-1} a une équation de la forme

$$\lambda_0 \xi_x^{(0)} + \lambda_1 \xi_x^{(1)} + \cdots + \lambda_{n-p} \xi_x^{(n-p)} = 0.$$

Représentons par $\varphi_i(u) = 0$ l'équation de degré n donnant les paramètres des points d'intersection de la courbe C avec l'hyperplan $\xi^{(i)}$. L'équation précédente donne

$$\lambda_0 \varphi_0(u) + \lambda_1 \varphi_1(u) + \cdots + \lambda_{n-p} \varphi_{n-p}(u) = 0.$$

Cette équation représente, lorsque $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-p}$ varient, tous les groupes de l'involution I_n^{n-p} que u soit interprété comme paramètre d'un point de la courbe C ou comme abscisse d'un point d'une ponctuelle s.

Considérons en particulier une involution I_n^{n-1}. Par le point principal A passent n hyperplans osculateurs à la courbe C. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ les paramètres des points de contact. L'involution peut être représentée par l'équation

$$\lambda_0 (u-\alpha_0)^n + \lambda_1 (u-\alpha_1)^n + \cdots + \lambda_{n-1}(u-\alpha_{n-1})^n = 0.$$

73. Groupes neutres d'une involution. Un groupe de q points est appelé groupe neutre d'une involution I_n^{n-p} s'il impose moins de q conditions aux groupes de l'involution qui doivent contenir les q points de ce groupe.

Interprétons I_n^{n-p} sur la courbe normale C de S_n. Un groupe de q points de C détermine un espace S_{q-1}. Pour que le groupe soit neutre, il faut évidemment que cet espace S_{q-1} s'appuie sur l'espace principal S_{p-1} de l'involution.

Si nous interprétons I_n^{n-p} sur la courbe rationnelle C' de S_{n-p}, un groupe de q points de cette courbe sera neutre s'il détermine un espace de dimension inférieure à $q-1$.

Ainsi, une involution I_6^3 possède en général six groupes de quatre points neutres.

74. Note. La théorie des homographies et des involutions a été l'objet de travaux importants de deux géomètres de l'École Liégeoise de Géométrie : C. le Paige et Fr. Deruyts. L'interprétation hyperspatiale des involutions a été obtenue, à la même époque et d'une manière indépendante, par Fr. Deruyts et par M. G. Castelnuovo.

On trouvera un exposé étendu des théories dont il vient d'être question dans le Mémoire sur la théorie de l'involution et de l'homographie unicursale de Fr. Deruyts. (Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège, 2e série, t XVII, 1890)

Au sujet des travaux de C. le Paige et de Fr. Deruyts, on pourra consulter les notices biographiques que nous leur avons consacrées dans l'Annuaire de l'Académie royale de Belgique, 1938 et 1939.

75. Remarques. Considérons, sur une ponctuelle s, les groupes de n points représentés par

$$\lambda_0 \varphi_0(u) + \lambda_1 \varphi_1(u) + \dots + \lambda_r \varphi_r(u) = 0, \qquad (1)$$

où $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_r$ sont des fonctions rationnelles et entières de u, de degré n, linéairement indépendantes. Considérons d'autre part la courbe rationnelle C de S_r, d'équations

$$x_0 : x_1 : \dots : x_r = \varphi_0 : \varphi_1 : \dots : \varphi_r .$$

A un point de la droite s correspond un point de C et réciproquement. A un groupe de n points de l'ensemble (1) correspond la section de C par un hyperplan, c'est-à-dire un hyperplan, et réciproquement. Aux groupes de l'ensemble (1) dépendant linéairement de p paramètres, correspondent les hyperplans passant par un espace S_{r-p-1} et formant une gerbe G_p. Nous dirons qu'il existe une projectivité entre les groupes de l'ensemble (1), c'est-à-dire d'une involution I_n^r, et les hyperplans de S_r. Observons qu'aux groupes de l'ensemble (1) contenant un point fixe, correspondent dans S_r les hyperplans passant par le point correspondant de C.

Partons maintenant de l'involution I_n^r donnée par l'équation (1) et rapportons projectivement les groupes de cette involution aux hyperplans de S_r en posant

$$\rho \xi_i = a_{i0}\lambda_0 + a_{i1}\lambda_1 + \dots + a_{ir}\lambda_r, \qquad (2)$$

$$|a_{ik}| \neq 0; \quad (i = 0, 1, \dots, r).$$

Les paramètres λ donnant les groupes de I_n^r passant par le point u_1 satisfont à l'équation

$$\lambda_0 \varphi_0(u_1) + \lambda_1 \varphi_1(u_1) + \dots + \lambda_r \varphi_r(u_1) = 0.$$

Eliminons les λ et ρ entre cette équation et les équations (2); nous obtenons

$$\begin{vmatrix} 0 & \varphi_0(u_1) & \varphi_1(u_1) & \dots & \varphi_r(u_1) \\ \xi_0 & a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \xi_r & a_{r0} & a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = 0.$$

Les hyperplans qui correspondent aux groupes de I_n^r passant par le point u_1 de s passent donc par le point de coordonnées

$$\rho x_i = A_{i0}\varphi_0(u_1) + A_{i1}\varphi_1(u_1) + \dots + A_{ir}\varphi_r(u_1), \quad (i = 0, 1, \dots, r)$$

A_{ik} désignant le mineur algébrique de a_{ik} dans le déterminant $|a_{ik}|$.

Le lieu de ce point est une courbe rationnelle C d'ordre n et par conséquent, <u>en rapportant projectivement les groupes d'une involution I_n^r donnée sur une ponctuelle s, les hyperplans d'un espace S_r, aux points de s correspondent les points d'une courbe rationnelle C d'ordre n. Les sections hyperplanes de cette courbe correspondent aux groupes de I_n^r.</u>

On retrouve ainsi la représentation donnée plus haut.

Opérons sur s l'homographie

$$u = \frac{\alpha v + \beta}{\gamma v + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

et soit

$$\lambda_0 \psi_0(v) + \lambda_1 \psi_1(v) + \dots + \lambda_r \psi_r(v) = 0, \qquad (2)$$

la transformée de l'involution I_n^r. Il est clair qu'il existe une projectivité entre les groupes de cette nouvelle involution et les hyperplans ξ de S_r.

Les involutions (1) et (2) seront appelées projectivement identiques. La propriété précédente peut se traduire de la manière suivante : Si l'on rapporte projectivement les groupes de deux involutions I_n^r aux hyperplans de deux espaces S_r, les courbes rationnelles d'ordre n qui correspondent dans ces espaces aux ponctuelles supports des involutions, sont projectivement identiques. Réciproquement, si ces deux courbes sont projectivement identiques, il en est de même des involutions.

76. Application aux courbes rationnelles du quatrième ordre.

D'après ce que nous avons vu, une involution I_4^3 sur une ponctuelle s est complètement déterminée par ses quatre points quadruples et son équation peut s'écrire

$$\lambda_0(u-u_0)^4 + \lambda_1(u-u_1)^4 + \lambda_2(u-u_2)^4 + \lambda_3(u-u_3)^4 = 0 .$$

Pour que deux involutions I_4^3 soient projectivement identiques, il faut et il suffit que les quaternes formés par les points quadruples de ces involutions aient même rapport anharmonique.

En rapportant projectivement les groupes d'une involution I_4^3 aux plans d'un espace S_3, il correspond à s une courbe rationnelle du quatrième ordre C et aux points quadruples de I_4^r correspondent les points de contact des quatre plans 4-osculateurs à C. Ces points et ces plans sont appelés stationnaires.

Pour que deux courbes rationnelles du quatrième ordre de S_3 soient projectivement identiques, il faut et il suffit que les rapports anharmoniques de leurs quaternes de points stationnaires soient égaux.

Le rapport anharmonique des quatre points stationnaires d'une courbe gauche rationnelle du quatrième ordre est l'invariant projectif de cette courbe.

Chapitre IV.

Les surfaces rationnelles de l'espace à r dimensions.

§ 1. Propriété des surfaces rationnelles.

77. **Préliminaires.** Nous avons appelé surface rationnelle de S_r l'ensemble F des points dont les coordonnées sont données par

$$\rho x_i = \varphi_i(u_0, u_1, u_2), \qquad (i = 0, 1, \dots, r),$$

$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_r$ étant des formes de même degré m, sans facteur commun.

Interprétons u_0, u_1, u_2 comme coordonnées d'un point d'un plan ϖ. A un point u de ϖ correspond un point x de F en général bien déterminé, mais chaque point x de F peut provenir d'un certain nombre ν de points du plan ϖ. L'ensemble des groupes de ν points de ϖ qui correspondent aux différents points de F est une involution I_ν d'ordre ν.

Par analogie avec le théorème de Lüroth, on s'est posé la question de savoir si l'on pouvait substituer aux variables u_0, u_1, u_2 d'autres variables v_0, v_1, v_2 telles qu'il y ait une correspondance biunivoque entre les points x de F et les points v. La réponse est affirmative et a été donnée par M. G. Castelnuovo (Mathematische Annalen, 1893, t XLIV), mais la démonstration est basée sur des concepts tout à fait différents ; elle ne peut être exposée ici.

78. **Relation avec les systèmes linéaires de courbes planes.** Un hyperplan ξ coupe F suivant une courbe C dont les points correspondent aux points u satisfaisant à l'équation

$$\xi_0 \varphi_0(u_0, u_1, u_2) + \xi_1 \varphi_1 + \dots + \xi_r \varphi_r = 0 \qquad (1)$$

Dans le plan ϖ, l'équation (1) représente une courbe Γ qui, lorsque l'hyperplan ξ varie, engendre un système linéaire $|\Gamma|$.

Supposons que la surface F n'appartienne pas à un espace linéaire de dimension inférieure à r; on peut alors toujours trouver r points indépendants de F, déterminant un seul hyperplan ; par suite r points de ϖ déterminent en général une seule courbe de $|\Gamma|$ et ce système a la dimension r. En d'autres termes, les courbes

$$\varphi_0 = 0, \ \varphi_1 = 0, \ \ldots, \ \varphi_r = 0 \qquad (2)$$

sont linéairement indépendantes.

Le système $|\Gamma|$ est irréductible. En effet, s'il était réductible, il posséderait une partie fixe ou serait composé au moyen d'un faisceau. Si $|\Gamma|$ possédait une partie fixe, les formes $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ auraient un facteur commun, contrairement à l'hypothèse. Si $|\Gamma|$ était composé au moyen d'un faisceau, aux points u d'une courbe de celui-ci correspondrait un seul point x et la surface F se réduirait à une courbe.

Inversement, donnons-nous dans le plan ϖ un système linéaire irréductible de dimension $r \geqslant 3$ et supposons qu'il soit composé au moyen d'une involution I_ν d'ordre ν, c'est-à-dire que les courbes Γ passant par un point du plan ϖ passent en conséquence par les $\nu-1$ points qui, avec le précédent, forment le groupe de I_ν contenant ce point.

Rapportons projectivement les courbes de $|\Gamma|$ aux hyperplans d'un espace S_r c'est-à-dire établissons une correspondance telle qu'à une courbe Γ corresponde un hyperplan de S_r et qu'aux courbes Γ d'un système linéaire contenu dans $|\Gamma|$ correspondent les hyperplans d'une gerbe de même dimension.

Les courbes Γ passant par un point u (et par suite par $\nu-1$ autres points) forment un système linéaire de dimension $r-1$; il leur correspond les hyperplans passant par un point x. Lorsque le point u décrit le plan ϖ, le point x décrit une surface F dont les points correspondent aux groupes de l'involution I_ν.

L'interprétation analytique de ces opérations conduit à l'expression des coordonnées du point x sous formes de combinaisons linéaires des premiers membres des équations des courbes Γ. Si le système $|\Gamma|$ est représenté par l'équation (1), on aura

$$\rho x_i = a_{i0}\varphi_0 + a_{i1}\varphi_1 + \cdots + a_{ir}\varphi_r \, , \quad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

$$|a_{ik}| \neq 0.$$

La surface F est donc rationnelle et par une homographie de S_r, on peut la ramener à

$$\rho x_i = \varphi_i(u_0, u_1, u_2) . \qquad (i = 0, 1, \dots, r).$$

79. <u>Caractères d'un système linéaire.</u> Rappelons que si $|\Gamma|$ est un système linéaire irréductible, il possède les caractères suivants :

1°) La dimension r, que nous supposerons ici au moins égale à trois.

2°) Le degré, nombre de points communs à deux courbes générales du système, en dehors des points-base.

3°) Le genre, égal au genre d'une courbe générale.

Ces caractères sont invariants vis-à-vis des transformations birationnelles du plan. Si deux systèmes linéaires de courbes planes peuvent être déduits l'un de l'autre par une transformation birationnelle du plan, c'est-à-dire s'ils sont birationnellement équivalents, ils ont même dimension, même degré et même genre. Par contre, l'ordre des courbes d'un système est en général modifié par une transformation birationnelle.

Si un système linéaire est composé au moyen d'une involution, ses transformés birationnels sont également composés au moyen d'une involution du même ordre.

Un point-base d'un système linéaire $|\Gamma|$ est un point fixe commun à toutes les courbes du système. Une courbe fondamentale d'un système linéaire est une courbe qui n'est rencontrée en aucun point en dehors des points-base par les courbes du système.

Si Δ est une courbe fondamentale d'un système linéaire $|\Gamma|$, les courbes Γ passant par un point de Δ pris en dehors des points-base de $|\Gamma|$ contiennent la courbe Δ comme partie. Ces courbes Γ forment un système linéaire de dimension $r-1$ dont Δ est une partie fixe.

80. <u>Ordre d'une surface rationnelle.</u> Considérons une surface rationnelle F de S_r dont les sections hyperplanes sont représentées, dans un plan ϖ, par les courbes d'un système linéaire $|\Gamma|$ de dimension r, composé au moyen d'une involution I_ν. Nous dirons pour abréger que F représente le système linéaire $|\Gamma|$ et que celui-ci est associé à la

surface F.

Soit n l'ordre de F, c'est-à-dire le nombre de points communs à F et à un espace S_{r-2}. Deux courbes Γ se rencontrent par conséquent en $n\nu$ points en dehors des points-base. En effet, aux hyperplans passant par un point de F correspondent ∞^{r-1} courbes Γ passant par un point nécessairement distinct des points-base de $|\Gamma|$.

Le système $|\Gamma|$ est donc de degré $n\nu$.

81. Projection d'une surface rationnelle. Soit F une surface rationnelle de S_r, n'appartenant pas à un espace de dimension inférieure et soit $|\Gamma|$ le système linéaire de courbes du plan ϖ qui lui est associé. Désignons par n l'ordre de F.

Considérons un espace S_{r-k-1} ($k \geqslant 3$) tel que les hyperplans passant par cet espace ne rencontrent plus F qu'en n' points en dehors de cet espace ($n' \leqslant n$). Soit S_k un espace ne rencontrant pas S_{r-k-1}. La projection de F sur S_k à partir de S_{r-k-1} est une surface rationnelle F', d'ordre n'. Aux sections hyperplanes de F' dans S_k, c'est-à-dire aux sections de F par des hyperplans passant par S_{r-k-1}, correspondent dans ϖ des courbes Γ appartenant au système $|\Gamma|$.

Deux cas peuvent se présenter:

1°) Le système linéaire $|\Gamma'|$ n'a pas de composante fixe. Supposons pour plus de généralité que le système $|\Gamma|$ soit composé au moyen d'une involution I_ν; il en est alors de même du système $|\Gamma'|$. Ces systèmes ont respectivement les degrés $n\nu$, $n'\nu$ et $|\Gamma'|$ est formé des courbes Γ passant par $n-n'$ groupes de I_ν. A ceux-ci correspondent des points de F appartenant à l'espace S_{r-k-1} qui rencontre donc la surface en un nombre fini de points.

2°) Le système $|\Gamma'|$ possède une composante fixe. Supposons que S_k coïncide avec l'espace $O_0 O_1 \dots O_k$ et S_{r-k-1} avec $O_{k+1} \dots O_r$. L'équation du système $|\Gamma|$ s'écrit

$$\psi(u_0, u_1, u_2)\left[\lambda_0 \psi_0(u_0,u_1,u_2) + \dots + \lambda_k \psi_k(u_0,u_1,u_2)\right] + \lambda_{k+1}\varphi_{k+1} + \dots + \lambda_r \varphi_r = 0.$$

Les équations de la surface F' sont

$$\rho x_i = \psi_i(u_0, u_1, u_2), \qquad (i = 0, 1, \dots, k)$$

Si la courbe $\psi = 0$ n'est pas une courbe fondamentale du système $|\Gamma|$, il lui correspond une courbe de la surface F appartenant à l'espace S_{r-k-1}. Si au contraire la courbe $\psi = 0$ est fondamentale, on a $k = r-1$, l'espace S_{r-k-1} se réduit au point O_r qui est nécessairement multiple pour la surface F.

82. <u>Surfaces rationnelles normales.</u> Une surface rationnelle F de S_r, d'ordre n, est appelée surface normale si elle n'est pas la projection d'une surface de même ordre, appartenant à un espace de dimension supérieure à r.

Supposons que F soit normale et représente un système linéaire $|\Gamma|$ composé au moyen d'une involution I_ν d'ordre ν. Il ne peut exister dans le plan ϖ une courbe de même ordre que les courbes Γ, se comportant aux points-base de $|\Gamma|$ comme la courbe Γ générale, contenant ∞^1 groupes de l'involution I_ν.

Si $\nu = 1$, le système $|\Gamma|$ est complet.

Si ν est supérieur à l'unité, le système $|\Gamma|$ peut ne pas être complet, mais dans le système complété, les courbes contenant ∞^1 groupes de I_ν, distinctes des courbes Γ, forment des systèmes linéaires (partiels) n'ayant aucune courbe commune avec $|\Gamma|$.

83. <u>Théorème</u>. <u>Les surfaces représentant deux systèmes linéaires birationnellement identiques, sont projectivement identiques.</u>

Soient, dans des plans ϖ, ϖ', $|\Gamma|, |\Gamma'|$ deux systèmes de dimension r birationnellement identiques, F et F' les surfaces qui les représentent dans S_r.

Observons que dans la transformation birationnelle entre ϖ, ϖ' qui fait passer de $|\Gamma|$ à $|\Gamma'|$, à une courbe Γ correspond une courbe Γ' et à un système linéaire partiel de $|\Gamma|$ correspond un système linéaire partiel de même dimension de $|\Gamma'|$. En d'autres termes, il existe une projectivité entre les éléments de $|\Gamma|, |\Gamma'|$.

Supposons que $|\Gamma|$ soit composé au moyen d'une involution I_ν d'ordre ν. Alors, $|\Gamma'|$ est composé au moyen d'une involution I'_ν d'ordre ν.

Soit P un point de S_r. Aux hyperplans passant par P correspondent des courbes Γ formant un système linéaire ∞^{r-1} ; à ce système correspond dans $|\Gamma|$ un système linéaire ∞^{r-1} et à celui-ci, une gerbe G_{r-1} d'hyperplans de S_r de sommet P'.

Si P décrit un hyperplan, il en est de même de P' et P, P' se correspondent dans une homographie Ω.

Si P appartient à F, il lui correspond un groupe de I_ν ; à celui-ci correspond un groupe de I'_ν et à ce dernier un point P' de F'. Ω transforme donc F en F'.

Inversement, si les surfaces F, F' de S_r sont projectivement identiques, il existe une correspondance birationnelle entre les groupes des involutions I_ν, I'_ν, mais on ne peut conclure que $|\Gamma|$ et $|\Gamma'|$ sont birationnellement identiques.

Du théorème précédent, on déduit que dans l'étude projective d'une surface rationnelle F, on peut remplacer le système linéaire associé par un système birationnellement équivalent.

84. <u>Surface représentant un système linéaire simple.</u> Soient $|\Gamma|$ un système linéaire simple (c'est-à-dire non composé au moyen d'une involution) de dimension r et de degré n ; F la surface qui le représente dans S_r. Nous pouvons supposer que $|\Gamma|$ n'a que des points-base ordinaire, c'est-à-dire des points-base en chacun desquels les courbes Γ ont des tangentes variables. La surface F, de S_r, a l'ordre n.

Soit P un point-base multiple d'ordre s de $|\Gamma|$. Il existe ∞^{r-1} courbes Γ tangentes en P à une droite p et ces courbes forment un système linéaire de degré $n-1$. A ces courbes correspondent dans S_r ∞^{r-1} hyperplans passant par un point P_1. Un espace S_{r-2} commun à deux de ces hyperplans ne rencontre plus F qu'en $n-1$ points, donc P_1 est un point simple de F. Lorsque la droite p décrit le faisceau de sommet P, le point P_1 varie et décrit une courbe rationnelle γ. Cette courbe est rencontrée en s points par les hyperplans de S_r et est donc d'ordre s. Par suite, <u>aux points infiniment voisins d'un point-base multiple d'ordre s, ordinaire, de $|\Gamma|$ correspondent les points d'une courbe rationnelle d'ordre s de F.</u>

Soient Δ une courbe fondamentale de $|\Gamma|$. Il y a ∞^{r-1} courbes Γ contenant Δ comme partie. Soient Γ_1 les courbes qui, jointes à Δ, forment des courbes Γ, n_1 le degré du système linéaire $|\Gamma_1|$. Aux ∞^{r-1} courbes $\Delta + \Gamma_1$ correspondent ∞^{r-1} hyperplans de S_r passant par un point D. Un espace S_{r-2} commun à deux de ces hyperplans ne rencontre plus F, en dehors de D, qu'en n_1 points, donc D est multiple d'ordre $n - n_1$ pour F.

Les courbes Γ_1 passant par un point P de Δ forment un système linéaire ∞^{r-2}, de degré $n_1 - 1$; il leur correspond ∞^{r-2} hyperplans de S_r passant par une droite p contenant D. Ces hyperplans ne rencontrant plus F qu'en $n_1 - 1$ points variables, la droite p est tangente en D à la surface F.

<u>A une courbe fondamentale correspond un point multiple de la surface F et aux points de cette courbe correspondent sur F les points infiniment voisins de ce point multiple.</u>

En général, les courbes Γ_1 rencontrent Δ en $n - n_1$ points variables, mais ceci peut être inexact si, par exemple, $|\Gamma_1|$ possède à son tour des courbes fondamentales.

Supposons qu'il existe un point A_1' tel que les courbes Γ passant par ce point passent en conséquence par $p-1$ autres points A_2', A_3', ..., A_p'. Il existe au plus ∞^1 points tels que A_1'. Les courbes Γ passant par A_1' forment un système linéaire ∞^{r-1} de degré $n - p$; il leur correspond des hyperplans passant par un point A de F multiple d'ordre p pour cette surface.

Pour $r = 3$, il existe en général ∞^1 couples de points $A_1' A_2'$, imposant une condition aux courbes Γ qui doivent les contenir. A ces couples de points correspondent des points doubles de F, formant une courbe double de cette surface. Il existe un nombre fini de groupes de trois points A_1', A_2', A_3' imposant une condition aux courbes Γ qui doivent les contenir ; à ces groupes correspondent des points triples de la surface F qui sont également triples pour la courbe double de cette surface.

85. <u>Courbes tracées sur la surface F</u>. A une courbe algébrique L tracée sur la surface F correspond une courbe Λ tracée dans le plan ϖ.

L'ordre de la courbe L est égal au nombre de points de rencontre variables de la courbe Λ avec les courbes Γ.

Si la courbe Λ passe λ fois par un point-base de $|\Gamma|$, la courbe L rencontre en λ points la courbe de F correspondant à ce point-base.

Si la courbe Λ rencontre une courbe fondamentale en λ' points en dehors des points-base de $|\Gamma|$, la courbe L passe λ' fois par le point multiple de F correspondant à la courbe fondamentale.

86. Surface représentant le système des courbes planes d'ordre m. Le système complet $|\Gamma|$ comprenant toutes les courbes planes d'ordre m a le degré $n = m^2$ et la dimension $r = \frac{1}{2} m(m+3)$. La surface rationnelle F d'ordre $n = m^2$, de S_r, qui représente le système $|\Gamma|$, est normale.

Aux droites du plan ϖ correspondent sur F des courbes rationnelles C_m d'ordre m. Ces courbes sont normales. Soit en effet k la dimension de l'espace contenant une courbe C_m. Les hyperplans de S_r contenant une courbe C sont en nombre ∞^{r-k-1}. Les courbes Γ contenant une droite, c'est-à-dire les courbes d'ordre $m-1$, doivent aussi être en nombre ∞^{r-k-1}. On en déduit $k = m$.

D'une manière générale, aux courbes d'ordre m' du plan ϖ correspondent sur F des courbes d'ordre mm', appartenant à des espaces linéaires à $\frac{1}{2} m'(2m - m' + 3) - 1$ dimensions.

Pour $m = 2$, la surface F est une surface du quatrième ordre appelée surface de Veronese ; elle sera étudiée en détail plus loin.

Pour $m = 3$, on obtient une surface F d'ordre neuf de S_9. Aux droites du plan ϖ correspondent des cubiques gauches et aux coniques, des sextiques rationnelles normales, rencontrant les cubiques gauches en des couples de points.

La projection de cette surface F sur un espace S_3 à partir d'un espace S_5 rencontrant la surface en six points, est une surface cubique représentant le système linéaire des cubiques planes passant par six points.

§ 2. Les surfaces réglées rationnelles.

§87. Préliminaires. Soit F une surface réglée non conique, d'ordre n, de S_r. En posant $k = 2$ dans la relation $r \leq n+k-1$, on trouve $r \leq n+1$. Nous prendrons la valeur maximum pour r et nous supposerons que l'ordre de F est $n = r-1$.

La section de F par un hyperplan ξ est une courbe d'ordre $r-1$. Projetons cette courbe à partir d'un espace S_{r-3} déterminé par $r-2$ de ses points, sur une droite s. Tout espace S_{r-2} de ξ passant par S_{r-3} coupe la courbe en un point (en dehors de S_{r-3}) et la droite s en un point. La courbe est donc rationnelle et normale.

<u>Une surface réglée non conique d'ordre $r-1$ de S_r est rencontrée par les hyperplans suivant des courbes rationnelles normales.</u>

88. <u>Système linéaire de courbes planes associé à F.</u> Considérons un espace S_{r-3} déterminé par $r-2$ points de F, mais ne contenant aucune génératrice de cette surface. Soit ϖ un plan ne rencontrant pas S_{r-3}.

Un point P de F détermine un espace S_{r-2} passant par S_{r-3} et coupant ϖ en un point P'. Inversement, l'espace S_{r-2} déterminé par un point P' de ϖ et S_{r-3}, coupe F en un point P en dehors de S_{r-3}. La surface F est donc rationnelle et normale.

Aux points P d'une section de F par un hyperplan passant par S_{r-3} correspondent les points P' d'une droite de ϖ. Aux points d'une section de F par un hyperplan ne passant pas par S_{r-3} correspondent les points d'une courbe Γ d'ordre $r-1$ de ϖ. Cette courbe engendre un système linéaire complet $|\Gamma|$ dont F est l'image.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_{r-2}$ les points de F déterminant S_{r-3} et $a_1, a_2, \ldots, a_{r-2}$ les droites de F passant respectivement par ces points. L'espace S_{r-2} passant par S_{r-3} et par a_i coupe ϖ en un point A'_i qui appartient à toutes les courbes Γ. Le système $|\Gamma|$ possède donc $r-2$ points-base simples $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{r-2}$.

Soient a une génératrice de F ne rencontrant pas S_{r-3}, ξ l'hyperplan passant par a et par S_{r-3}, a' l'intersection de ϖ et de ξ. La droite a' correspond à a. L'hyperplan ξ coupe F suivant a et une courbe C_1 d'ordre $r-2$. Cette courbe C_1 est rationnelle puisqu'elle rencontre les génératrices de F en un point; elle appartient donc à un espace S_{r-2} passant par S_{r-3}. Cet espace S_{r-2} coupe ϖ en un point A'. La section de F par un hyperplan ne contenant pas S_{r-3} coupe C_1 en $r-2$ points, donc le point A' est multiple d'ordre $r-2$ pour les courbes Γ. La droite a' passe également par A'.

Lorsque la droite a varie, la courbe C_1 reste fixe, car les courbes irréductibles Γ ne peuvent avoir plus d'un point multiple d'ordre $r-2$, sauf pour $r=3$. Mais alors, les courbes Γ sont des coniques formant un système linéaire ∞^3 et ce système a deux points-base : A'_1 et A'.

<u>La surface F est rationnelle et normale ; elle représente le système linéaire de courbes planes Γ d'ordre $r-1$, ayant un point-base multiple d'ordre $r-2$ et $r-2$ points-base simples.</u>

Le système $|\Gamma|$ a la dimension r et le degré $r-1$.

Aux points infiniment voisins de A' correspondent les points de C_1 ; aux points infiniment voisins de A'_i, les points de la droite a_i ; à la droite fondamentale $A'A'_2$ correspond le point A_i.

89. <u>Théorème</u>. – <u>Une surface réglée d'ordre $r-1$ de S_r possédant un point multiple est un cône.</u>

Soit V_2^{r-1} une surface d'ordre $r-1$ de S_r possédant un point P multiple d'ordre ν. Un hyperplan ξ passant par P coupe V_2^{r-1} suivant une courbe d'ordre $r-1$ possédant la multiplicité ν en P. Si $\nu>1$ et si la courbe en question était irréductible, par P et par $r-2$ autres de ces points passerait un espace S_{r-2} de ξ rencontrant la courbe en $r+\nu-2>r-1$ points et la contenant par suite en entier, ce qui est absurde. Les sections de F par les hyperplans passant par P sont donc des courbes réductibles.

Si un hyperplan passant par P contenait au moins deux courbes d'ordres supérieurs à l'unité appartenant à V_2^{r-1}, les génératrices de cette surface rencontreraient l'une ou l'autre de ces courbes et la surface serait réductible. Tout hyperplan passant par P contient donc une génératrice au moins de la surface et comme celles-ci sont en nombre ∞^1, elles passent nécessairement par P et V_2^{r-1} est un cône de sommet P.

90. <u>Directrices d'une surface réglée non conique</u>. Soit F une surface réglée non conique, d'ordre $r-1$, de S_r. Un

hyperplan ξ coupe F suivant une courbe rationnelle normale d'ordre $r-1$, en général irréductible, mais cette courbe peut être réductible pour certaines positions particulières de ξ.

Supposons que ξ coupe F suivant une courbe C_1 d'ordre $n < r-1$. Le restant de l'intersection de F et de ξ se compose de génératrices de F, sans quoi celle-ci serait réductible. D'autre part, la courbe C_1 est rencontrée en un point par les génératrices de F, donc elle est rationnelle.

Supposons que C_1 appartienne à un espace S_k ($k \leq n$). Par S_k et par $r-k-1$ points de F dont deux quelconques n'appartiennent pas à une même génératrice, passe un hyperplan coupant F suivant C_1 et les $r-k-1$ génératrices passant par les points choisis. On doit avoir $n+r-k-1 \leq r-1$, d'où $k \geq n$ et $k = n$. La courbe C_1 est normale.

D'autre part, une courbe d'ordre $n < r-1$ appartient à un espace ayant au plus n dimensions et par conséquent à un hyperplan.

Une courbe d'ordre inférieur à $r-1$, tracée sur F, est une courbe rationnelle normale.

Les courbes d'ordres inférieurs à $r-1$, tracée sur F, sont appelées directrices de cette surface.

Supposons que F possède deux directrices C_1, C_2, d'ordres n, m, tels que $m+n < r-1$. Alors par les espaces S_n, S_m contenant respectement C_1, C_2, on peut certainement mener un espace S_{m+n+1} contenant toutes les génératrices de F et par conséquent cette surface appartient à un espace de dimension inférieure à r, contrairement à l'hypothèse.

Si la surface F possède deux directrices d'ordres m, n, on a $m+n \geq r-1$.

Supposons $r = 2p$. Par p génératrices de F passe un hyperplan ξ rencontrant encore F suivant une courbe formée éventuellement d'un certain nombre de génératrices et d'une courbe C_1 d'ordre n, tel que $n \leq r-p-1$. La courbe C_1 est une directrice, unique en vertu du théorème précédent.

Dans le cas $r = 2p+1$, le même raisonnement conduit à une directrice d'ordre $n \leq r-p-1$, unique si $n < r-p-1$.

Une surface F possède une directrice unique d'ordre au plus égal à $\frac{1}{2}(r-2)$ si r est pair, une directrice d'ordre au plus égal à $\frac{1}{2}(r-1)$ si r est impair. Dans ce dernier cas,

<u>la directrice est unique si son ordre est inférieur à $\frac{1}{2}(r-1)$.</u>

91. <u>Représentation plane de la surface.</u> Nous avons obtenu une première représentation plane de la surface F en la projetant sur un plan à partir d'un espace S_{r-3} la rencontrant en $r-2$ points. On obtenait ainsi un système linéaire associé de courbes d'ordre $r-1$. On peut obtenir une représentation plane par des courbes d'ordre inférieur à $r-1$.

Considérons p génératrices $a_1, a_2, \dots, a_p$ de F et, en dehors de ces génératrices, $r-2p-2$ points $A_1, A_2, \dots, A_{r-2p-2}$ de F dont deux ne se trouvent pas sur une même génératrice. Les génératrices a et les points A déterminent un espace S_{r-3}. Un hyperplan passant par S_{r-3} coupe F suivant une courbe formée des p génératrices $a_1, a_2, \dots, a_p$ et d'une courbe d'ordre $r-p-1$ passant par les points $A_1, \dots, A_{r-2p-2}$ et rencontrant en un point chacune des p génératrices $a_1, \dots, a_p$. Par conséquent, un second hyperplan passant par S_{r-3} coupe cette courbe en un seul point variable, donc un espace S_{r-2} passant par S_{r-3} coupe F en un seul point variable. Il en résulte qu'en projetant F de S_{r-3} sur un plan ϖ ne rencontrant pas cet espace, on obtiendra une représentation biunivoque de F sur ce plan.

Une section de F par un hyperplan ne contenant pas S_{r-3} rencontre les p génératrices $a_1, a_2, \dots, a_p$, donc S_{r-3} en p points. A cette section correspond dans ϖ une courbe Γ d'ordre $r-p-1$.

Soient $a'_1, a'_2, \dots, a'_{r-2p-2}$ les génératrices de F, certainement distinctes, passant par les points $A_1, A_2, \dots, A_{r-2p-2}$. Les espaces S_{r-2} passant par S_{r-3} et par une de ces génératrices, coupe ϖ en un point-base simple du système $|\Gamma|$. Celui-ci possède donc $r-2p-1$ points-base simples $A'_1, A'_2, \dots, A'_{r-2p-2}$.

L'hyperplan passant par S_{r-3} et par une génératrice quelconque a de F coupe celle-ci suivant $p+1$ génératrices et une courbe directrice C_1 d'ordre $r-p-2$ passant par les points $A_1, A_2, \dots, A_{r-2p-1}$. La courbe C_1 appartient à un espace S_{r-p-2} qui a en commun avec S_{r-3} $r-p-2$ points: les $r-2p-2$ points $A_1, \dots, A_{r-2p-2}$ et un point sur chacune des génératrices $a_1, a_2, \dots, a_p$. Les espaces S_{r-3}, S_{r-p-2} ont donc en commun un espace S_{r-p-3} et appartiennent à un espace S_{r-2}. Celui-ci rencontre ϖ en un point A', point-base multiple d'ordre $r-p-2$ pour les courbes Γ. Aux génératrices a de F correspondent les droites de ϖ passant par A'. Aux points infiniment voisins de A' correspondent les points de la courbe C_1.

A un point A_i correspond la droite $A'A'_i$ et aux points infiniment voisins de A'_i correspondent les points de a'_i ($i = 1, 2, \dots, r-2p-2$).

Une directrice d'ordre n de F est représentée sur ϖ par une courbe d'ordre $m-p$ ayant la multiplicité $m-p-1$ en A' et passant simplement par les points $A'_1, A'_2, \dots, A'_{r-2p-2}$. L'existence d'une courbe directrice d'ordre inférieur à $r-p-1$ implique donc une relation entre les points-base de $|\Gamma|$.

Inversement, un système linéaire ayant les mêmes caractéristiques que $|\Gamma|$ est représenté dans S_r par une surface réglée d'ordre $r-1$.

92. __Théorème__. __Une surface réglée rationnelle d'ordre $r-1$ de S_ρ ($\rho < r$) est la projection d'une surface réglée d'ordre $r-1$ de S_r.__

Soit F' une surface rationnelle réglée d'ordre $r-1$ de S_ρ; ses sections hyperplanes sont des courbes rationnelles.

Plongeons l'espace S_ρ dans un espace S_r. Considérons deux hyperplans $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ de S_r, coupant S_ρ suivant deux hyperplans distincts $\mathcal{S}'_1, \mathcal{S}'_2$ de cet espace. Soient C'_1, C'_2 les sections de F' par $\mathcal{S}'_1, \mathcal{S}'_2$; ces deux courbes ont en commun $r-1$ points $A'_1, A'_2, \dots A'_{r-1}$. Choisissons dans S_r un espace $S_{r-\rho-1}$ ne rencontrant pas S_ρ et appartenant aux hyperplans $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$.

La courbe C'_1 peut être considérée comme la projection, à partir de $S_{r-\rho-1}$ d'une courbe rationnelle normale C_1 de $\mathcal{S}_1$, d'ordre $r-1$. De même, la courbe C'_2 peut être considérée comme la projection d'une courbe rationnelle normale d'ordre $r-1$, C_2, de $\mathcal{S}_2$, C_2 ayant en commun avec C_1 $r-1$ points $A_1, A_2, \dots, A_{r-1}$ dont les projections, à partir de $S_{r-\rho-1}$ sur S_ρ sont les points $A'_1, A'_2, \dots, A'_{r-1}$.

Soient g' une génératrice de F'; P'_1, P'_2 ses points d'appui sur C'_1, C'_2; P_1, P_2 les points de C_1, C_2 dont P'_1, P'_2 sont les projections; g la droite P_1P_2. La droite g engendre une surface réglée F dont F' est la projection à partir de S_{r-p-1}.

La surface F est d'ordre $r-1$. Projetons en effet les points homologues P, P' d'un espace S_{r-2} quelconque ; nous obtenons, entre les hyperplans passant par cet espace, une correspondance $(r-1, r-1)$ possédant $2(r-1)$ éléments unis. $r-1$ de ceux-ci proviennent des points $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$; les autres des génératrices de F s'appuyant sur S_{r-2}. F est donc bien d'ordre $r-1$.

93. <u>Application aux surfaces réglées cubiques.</u> Une surface réglée cubique rationnelle normale F non conique, appartient à un espace S_4 ; elle possède une directrice d'ordre minimum un que nous désignerons par d. En la projetant d'une de ses génératrices sur un plan, on obtient la représentation plane de la surface par les coniques passant par un point A' (qui correspond à d).

Une surface réglée cubique non conique F' de S_3 est la projection de F à partir d'un point P n'appartenant pas à F. La projection d' de d sur S_3 est une directrice d' de F', droite en général simple de cette surface.

La section de F par un hyperplan passant par P est une cubique gauche C possédant une bisécante passant par P. Soient A_1, A_2 les points d'appui de cette bisécante sur C ; a_1, a_2 les génératrices de F passant par ces points. Le point A' où la droite A_1A_2 coupe S_3 est double pour la surface F'. Par ce point passent les deux génératrices a'_1, a'_2 de F' qui correspondent à a_1, a_2. Lorsque l'hyperplan considéré varie (en passant toujours par P), le point A' varie et décrit nécessairement une droite s', car autrement la surface F' serait réductible. Le lieu des points A_1, A_2 est une conique σ située dans le plan s'P. En général, cette conique est irréductible, ne rencontre pas d et les droites s', d' de F' ne se rencontrent pas. F' est le lieu des droites joignant les points de s', d' homologues dans une correspondance (1,2).

Soit a_0 une génératrice de F et supposons que le point P se trouve dans le plan a_0d. La conique σ est alors formée des droites a_0 et d et elle ne peut évidemment dégénérer que dans ce cas. Les droites s' et d' sont confondues et d'une manière précise, la surface F' possède une droite double qui est à la fois directrice et génératrice.

§3. La surface de Veronese.

94. Définition et équations de la surface. Considérons dans un plan ϖ le système de coniques

$$\lambda_{00}x_0^2+\lambda_{11}x_1^2+\lambda_{22}x_2^2+2\lambda_{12}x_1x_2+2\lambda_{20}x_2x_0+2\lambda_{01}x_0x_1=0.$$

Rapportons projectivement ces coniques aux hyperplans d'un espace S_5 en posant

$$\frac{X_{00}}{x_0^2}=\frac{X_{11}}{x_1^2}=\frac{X_{22}}{x_2^2}=\frac{X_{12}}{x_1x_0}=\frac{X_{20}}{x_2x_0}=\frac{X_{01}}{x_0x_1},$$

$X_{00}, X_{11}, \dots, X_{01}$ étant les coordonnées des points de cet espace. Aux points de ϖ correspondent les points d'une surface F, appelée surface de Veronese, dont les équations sont

$$X_{12}^2=X_{11}X_{22},\quad X_{20}^2=X_{22}X_{00},\quad X_{01}^2=X_{00}X_{11},$$

$$X_{20}X_{01}=X_{00}X_{12},\quad X_{01}X_{12}=X_{11}X_{20},\quad X_{12}X_{20}=X_{22}X_{01},$$

ou encore les équations que l'on obtient en exprimant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_{00} & X_{01} & X_{20} \\ X_{01} & X_{11} & X_{12} \\ X_{20} & X_{12} & X_{22} \end{vmatrix}=0$$

est de caractéristique un.

A une droite

$$a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0$$

de ϖ correspond sur F une conique située dans le plan

$$a_0X_{00}+a_1X_{01}+a_2X_{12}=0,\quad a_0X_{01}+a_1X_{11}+a_{12}X_{12}=0,\quad a_0X_{20}+a_1X_{12}+a_2X_{22}=0.$$

95. Coniques conjuguées. Considérons, dans ϖ, la conique-lieu et la conique-enveloppe

$$\Sigma a_{ik}x_ix_k=0,\qquad \Sigma\alpha_{ik}\xi_i\xi_k=0,\qquad (i,k=0,1,2).$$

Ces deux coniques sont dites conjuguées si l'on a

$$\Sigma a_{ik}\alpha_{ik}=0.$$

Étant données cinq coniques-lieux (ou enveloppes) linéairement indépendantes, il existe une et une seule conique-enveloppe (ou lieu) conjuguée à ces cinq coniques.

96. Relation entre les points de S_5 et les coniques-enveloppes de ϖ. Considérons un point X de S_5. Par ce point passent ∞^4 hyperplans auxquels correspondent, dans ϖ, ∞^4 coniques-lieux formant un système linéaire. Il existe une seule conique-enveloppe conjuguée aux coniques de ce système ; elle correspond au point X.

Inversement, il existe ∞^4 coniques-lieux conjuguées à une conique-enveloppe donnée et à ces coniques correspondent dans S_5 les hyperplans passant par un point X. Il existe donc une correspondance biunivoque entre les points de S_5 et les coniques-enveloppes du plan ϖ.

Considérons une conique-enveloppe

$$\Sigma \alpha_{ik}\, \xi_i \xi_k = 0, \quad (i, k = 0, 1, 2). \qquad (1)$$

Les coefficients des coniques conjuguées sont donnés par

$$\Sigma a_{ik}\, \alpha_{ik} = 0$$

et les hyperplans correspondants de S_5 par

$$\Sigma a_{ik}\, X_{ik} = 0.$$

Par suite, le point de S_5 correspondant à la conique (1) a pour coordonnées $\alpha_{00}, \alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12}, \alpha_{20}, \alpha_{01}$. La correspondance entre les points de S_5 et les coniques-enveloppes de ϖ est une projectivité.

La condition pour qu'un point appartienne à un hyperplan est que les coniques homologues de ϖ soient conjuguées.

97. Coniques-enveloppes correspondant aux points de F.

Considérons un point Y de F et soit y le point qui lui correspond dans ϖ. Aux hyperplans passant par Y correspondent les coniques passant par y. L'équation de ces coniques s'écrit

$$\lambda_{00}(y_0 y_1 x_0^2 - y_0^2 x_0 x_1) + \lambda_{11}(y_0 y_1 x_1^2 - y_1^2 x_0 x_1) + \lambda_{22}(y_0 y_1 x_2^2 - y_2^2 x_0 x_1)$$

$$+ 2\lambda_{12}(y_0 y_1 x_1 x_2 - y_1 y_2 x_0 x_1) + 2\lambda_{20}(y_0 y_1 x_2 x_0 - y_2 y_0 x_0 x_1) = 0.$$

La conique-enveloppe conjuguée à ces coniques a pour équation

$$(y_0 \xi_0 + y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2)^2 = 0.$$

Aux points de F correspondent dans ϖ les coniques-enveloppes dégénérées en deux faisceaux de rayons confondus et, comme on le voit aisément, réciproquement.

98. <u>La variété M_4^3</u>. A la conique-enveloppe (1) correspond le point $A(\alpha_{ik})$. Si cette conique dégénère en deux faisceaux de rayons, on a $|\alpha_{ik}| = 0$. Le lieu des points de S_5 représentent les coniques-enveloppes dégénérées de ϖ est donc l'hypersurface M_4^3 d'équation

$$\begin{vmatrix} X_{00} & X_{01} & X_{20} \\ X_{01} & X_{11} & X_{12} \\ X_{20} & X_{12} & X_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Le système de ∞^1 coniques-enveloppes

$$\Sigma \alpha_{ik} \xi_i \xi_k + \lambda \Sigma \beta_{ik} \xi_i \xi_k = 0 \qquad (2)$$

contient trois courbes dégénérées qui correspondent aux trois points de rencontre avec M_4^3 de la droite lieu des points homologues des coniques (2)

Si le système (2) contient une conique dégénérée en deux faisceaux de droites confondus, il ne contient plus qu'une seconde conique dégénérée. La droite correspondante au faisceau passe par un point de F et ne rencontre plus M_4^3 qu'en un point, donc la <u>surface F est double pour l'hypersurface M_4^3</u>.

Il en résulte que les cordes F appartiennent à M_4^3. <u>La variété M_4^3 est le lieu des cordes de F.</u>

99. <u>Plans tangents à la surface F.</u> On appelle tangente à la surface F en un point Y une corde dont les deux points d'appui sont confondus en Y.

Les points d'une corde YZ de F sont représentés dans ϖ par les coniques-enveloppes

$$(y_0\xi_0 + y_1\xi_1 + y_2\xi_2)^2 + \lambda(z_0\xi_0 + z_1\xi_1 + z_2\xi_2)^2 = 0.$$

Les coniques-enveloppes de ce système sont formées de deux faisceaux de rayons dont les sommets sont des couples de points (formant l'involution ayant pour points doubles y, z) de la droite yz. Une tangente à F en Y sera représentée par un faisceau de coniques-enveloppes ne contenant qu'une courbe dégénérée en deux faisceaux de rayons superposés, les autres courbes étant dégénérées. (Les sommets des faisceaux de rayons formant les coniques forment une involution dégénérée sur une droite). Un tel système est de la forme

$$(y_0\xi_0 + y_1\xi_1 + y_2\xi_2)\left[(y_0\xi_0 + y_1\xi_1 + y_2\xi_2) + \lambda(z_0\xi_0 + z_1\xi_1 + z_2\xi_2)\right] = 0.$$

Le lieu des tangentes à F en un point Y est par suite un plan, appelé plan tangent à la surface au point Y, dont les points sont représentés par les coniques

$$(y_0\xi_0 + y_1\xi_1 + y_2\xi_2)(x_0\xi_0 + x_1\xi_1 + x_2\xi_2) = 0.$$

Un plan tangent à F en un point Y est le lieu des points qui représentent les coniques-enveloppes dégénérées en deux faisceaux de rayons dont l'un a pour sommet le point y homologue de Y.

Le lieu des plans tangents à F est la variété M_4^3.

100. Plans des coniques de la surface F. La surface F contient ∞^2 coniques, correspondants aux droites du plan ϖ et formant donc un réseau. Ces coniques se rencontrent deux-à-deux en un point.

Soient C une conique de F, γ son plan. Celui-ci est le lieu de ∞^2 cordes de F et aux points de γ correspondent donc, dans le plan ϖ, ∞^2 coniques-enveloppes dégénérées formant un système linéaire (deux droites de ϖ déterminent une seule conique).

Un tel système est appelé tissus de coniques. Les tissus de coniques dégénérées sont :

1o) L'ensemble des coniques dégénérées en des couples de faisceaux de rayons dont les sommets appartiennent à une droite.

2o) L'ensemble des coniques dégénérées en deux faisceaux de rayons dont l'un est fixe.

Nous avons vu qu'aux tissus du second type correspondent les plans tangents à F. Aux tissus du premier type correspondent les plans des coniques de F.

Le lieu des plans des ∞^2 coniques de F est la variété M_4^3.

Par un point de M_4^3 passent deux plans tangents à F et le plan d'une conique de F. Les points de contact des plans tangents sont sur la conique située dans ce dernier plan et la déterminent.

101. Sections hyperplanes de F. La section de F par un hyperplan est en général une courbe rationnelle normale du quatrième ordre, représentant une conique-lieu de ϖ.

Considérons la section de F par un hyperplan passant par le plan tangent à cette surface au point Y. Elle est représentée par une conique-lieu conjuguée aux coniques-enveloppes

$$(y_0\xi_0 + y_1\xi_1 + y_2\xi_2)(x_0\xi_0 + x_1\xi_1 + x_2\xi_2) = 0.$$

Si la conique-lieu a pour équation $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$, on doit donc avoir

$$\Sigma a_{ik}(y_i x_k + y_k x_i) = 0$$

pour toutes les valeurs de x_0, x_1, x_2, c'est-à-dire

$$a_{00}y_0 + a_{01}y_1 + a_{02}y_2 = 0,\ a_{10}y_0 + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = 0,\ a_{20}y_0 + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = 0.$$

On a donc $|a_{ik}| = 0$ et la conique est dégénérée. Par conséquent, l'intersection de F et d'un hyperplan passant par un plan tangent à la surface se compose de deux coniques passant par le point de contact du plan tangent.

A une conique-lieu du plan ϖ dégénérée en deux droites distinctes correspond un hyperplan coupant F suivant deux coniques distinctes. A une conique de ϖ dégénérée en deux droites confondues, correspond un hyperplan tangent à la surface F en chaque point d'une conique.

102. Projection de la surface de Veronese sur un espace S_4.

Projetons la surface F d'un point O sur un hyperplan S_4. Trois cas peuvent se présenter:

a) O n'appartient pas à la variété M_4^3;
b) O appartient à la variété M_4^3 mais non à la surface F;
c) O appartient à la surface F.

Soit F' la projection. Dans les deux premiers cas, la surface F' est du quatrième ordre ; dans le troisième, elle est du troisième ordre et est représentée sur le plan ϖ par les coniques passant par un point. C'est donc une surface réglée normale de S_4 et nous laisserons ce cas de côté.

a) Plaçons-nous dans le premier cas. Aucune conique de F n'a son plan passant par O, donc la surface F' contient ∞^2 coniques se rencontrant deux-à-deux en un point. Les sections hyperplanes de F sont des quartiques rationnelles sans point double; par conséquent, si F' appartient à une hyperquadrique, celle-ci est unique.

La surface F' est représentée sur le plan ϖ par les coniques Γ conjuguées à une conique-enveloppe non dégénérée, c'est-à-dire par un système linéaire ∞^4 général.

Si P est un point de S_4 n'appartenant pas à F', la droite PO coupe M_4^3 en trois points; par chacun de ces points passe le plan d'une conique de F et par suite par P passent trois plans contenant des coniques de F'. Supposons que F' appartienne à une hyperquadrique Q et considérons un plan α contenant une conique γ de F'. Un hyperplan ξ passant par α coupe F' suivant une seconde conique γ' de plan α' et Q suivant une quadrique Q' dont γ et γ' sont des sections planes. Si Q'' est irréductible, γ et γ' ont deux points communs, ce qui est impossible. Il faut donc que Q' soit formée des plans α, α'. Mais alors, le lieu des plans des coniques de F' serait l'hyperquadrique Q, ce qui est impossible puisqu'il passe de ces plans par tout point de S_4. La surface F' ne peut donc appartenir à une hyperquadrique.

b) Passons au cas où le point O appartient à l'hypersurface M_4^3. Il existe une conique γ de F dont le plan passe par O et qui est projetée, sur F', suivant une droite double d de cette surface. La surface F' contient ∞^2 coniques dont l'une est formée de la droite d comptée deux fois.

Il y a deux plans tangents à F passant par O; soient P_1, P_2 leurs points de contact, P_1', P_2' leurs projections sur F'. Les points P_1, P_2 appartiennent à γ et P_1', P_2' à la droite d. Considérons un point P de γ et le point Q où la droite OP coupe une seconde fois γ; ces points sont projetés en un même point P' de d. Le plan de γ et le plan tangent à F en P (ou en Q) déterminent un hyperplan coupant F suivant γ et suivant une seconde conique passant par P (ou par Q). Les deux nouvelles coniques qui viennent d'être obtenues sont certainement distinctes si P et Q sont distincts; il leur correspond, sur F', deux coniques distinctes passant par le point P' de d. Les plans tangents à F' en P' sont déterminés par d et les tangentes en P' à ces coniques ; ils sont distincts si P et Q sont distincts. Si P et par suite Q viennent coïncider avec P_1 ou P_2, les deux coniques viennent se confondre et par suite les plans tangents à F' en P'_1 et en P'_2 coïncident.

Le point O est représenté, sur ϖ, par une conique-enveloppe dégénérée, par exemple par $\xi_1 \xi_2 = 0$. Par suite, aux sections hyperplanes de F' correspondent les coniques

$$\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_0 x_1 + \lambda_4 x_0 x_2 = 0,$$

conjuguées à la précédente. Le point O a pour coordonnées $0, 0, 0, 1, 0, 0$.

Les équations de F' sont

$$X_{00} X_{11} = X_{01}^2 \quad , \quad X_{00} X_{22} = X_{20}^2 .$$

F' est donc l'intersection de deux cônes ayant des droites pour sommets. La droite double d a pour équations $X_{00} = X_{01} = X_{20} = 0$. Sur cette droite, les points P'_1, P'_2 sont respectivement donnés par $X_{11} = 0$ et par $X_{22} = 0$.

103. Projection de la surface de Veronese sur un espace S_3.

Projetons F à partir d'une droite S_1 sur un espace S_3 et soit F' la projection. Si la droite S_1 s'appuie en deux points sur la surface F, la surface F' est une quadrique. Si cette droite s'appuie en un point sur F, la surface F' est une réglée cubique. Nous laisserons ces cas de côté et supposerons que la droite S_1 ne rencontre pas F. La surface F' est alors du quatrième ordre et est appelée surface de Steiner.

Supposons en premier lieu que la droite S_1 rencontre M_4^3 en trois points distincts A_1, A_2, A_3. Par chacun de ces points passe un plan contenant une conique de F ; soient respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ces plans, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les coniques de F qu'ils contiennent. Ces coniques se rencontrent deux-à-deux en un point ; soient A'_1, A'_2, A'_3 les points communs respectivement à γ_2 et γ_3, γ_3 et γ_1, γ_1 et γ_2. Soit enfin α le plan passant par la droite S_1 et par A'_1. Les droites $A'_1 A_2$, $A'_1 A_3$ ne peuvent être toutes deux tangentes à F en A'_1, car alors α toucherait F en A'_1 et la droite S_1 appartiendrait à M_4^3. Supposons que la droite $A'_1 A_2$ coupe γ_2 en un second point $\bar{A}'_3$ distinct de A'_1 et que $A'_1 A_3$ coupe γ_3 en un second point $\bar{A}'_2$ distinct de A'_1. La droite $\bar{A}'_2 \bar{A}'_3$ étant une corde de F appartient à M^3_4 et par conséquent doit passer par A_1. Par $\bar{A}'_2$, $\bar{A}'_3$ passe une conique de F qui ne peut être que γ_1. Il en résulte que $\bar{A}'_2$ coïncide avec A'_2 et $\bar{A}'_3$ avec A'_3.

Supposons maintenant que la droite $A'_1 A_3$ coupe γ_3 en un second point $\bar{A}'_2$ distinct de A'_1, mais que la droite $A'_1 A_2$ touche γ_2 en A'_1. Cette dernière droite appartient à M^3_4 comme tangente à F. La droite $A'_1 \bar{A}'_2$ appartient à M^3_4, puisqu'elle s'appuie sur F en $\bar{A}'_2$ et coupe encore l'hypersurface en deux autres points : A_1 et un point situé sur $A'_1 A_2$. Cette droite $A_1 \bar{A}'_2$ est donc une corde de F et appartient au plan α_1 de γ_1 ; elle doit nécessairement toucher cette conique en $\bar{A}'_2$. Le point $\bar{A}'_2$ coïncide avec le point A'_2 et le point A'_3, commun à γ_1 et γ_2, doit se trouver en dehors du plan α. Mais cela est absurde, car on démontrerait de la même manière que l'un au moins des points A'_1, A'_2 se trouve dans le plan déterminé par S_1 et A'_3, plan qui devrait donc coïncider avec α.

On voit donc que les points A_1, A_2, A_3 et A'_1, A'_2, A'_3 sont les sommets d'un quadrilatère complet. Il en résulte que les coniques $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont projetées de S_1 sur S_3 suivant trois droites a'_1, a'_2, a'_3 doubles pour la surface F'. Ces trois droites passent par le point A' où le plan α coupe S_3 ; ce point est triple pour la surface F'. Celle-ci étant du quatrième ordre et irréductible, les droites a'_1, a'_2, a'_3 sont les arêtes d'un trièdre.

Soient P_1, P_2 deux points de γ_1 situés sur une droite passant par A_1 ; P' la projection de la droite $P_1 P_2$ sur S_3. Le point P' appartient à a'_1, et les projections sur S_3 des plans tangents à F en P_1, P_2 sont les plans tangents à F' en P'. Les points P_1, P_2 coïncident pour deux positions de la droite $P_1 P_2$ (tangentes à γ_1 passant par A_1), donc la droite a'_1 possède deux points-pince. Il en est de même de a'_2 et a'_3.

<u>La surface de Steiner, du quatrième ordre, passe doublement par les arêtes d'un trièdre dont le sommet est un point triple de la surface. Sur chacune des droites doubles se trouvent deux points-pince.</u>

104. Représentation plane et équation de la surface de Steiner. Aux points de la droite S_1 correspondent dans le plan ϖ les coniques-enveloppes ayant quatre tangentes fixes d_1, d_2, d_3 et d_4. Aux sections planes de F' correspondent les coniques-lieux conjuguées aux coniques enveloppes précédentes.

Prenons comme triangle de référence dans le plan ϖ le triangle diagonal du quadrilatère complet formé par d_1, d_2, d_3, d_4. En prenant l'une de ces droites comme droite unitaire, l'équation du faisceau de coniques-enveloppes image de S_1 s'écrit

$$\lambda_1(\xi_0^2 - \xi_1^2) + \lambda_2(\xi_0^2 - \xi_2^2) = 0.$$

Les coniques conjuguées sont données par

$$\mu(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) + \mu_0 x_1 x_2 + \mu_1 x_2 x_0 + \mu_2 x_0 x_1 = 0. \quad (1)$$

Rapportons projectivement ces coniques aux plans de S_3 en posant

$$\frac{X_0}{x_1 x_2} = \frac{X_1}{x_2 x_0} = \frac{X_2}{x_0 x_1} = \frac{X_3}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}.$$

L'équation de F' s'écrit

$$X_0 X_1 X_2 X_3 = X_1^2 X_2^2 + X_2^2 X_0^2 + X_0^2 X_1^2.$$

La surface de Steiner admet comme représentation plane le système linéaire ∞^3 déterminé par une conique et par les coniques circonscrites à un triangle conjugué par rapport à cette conique.

Les droites doubles $X_1 = X_2 = 0$, $X_2 = X_0 = 0$, $X_0 = X_1 = 0$ correspondent respectivement aux côtés $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ du triangle de référence. Le point triple correspond aux trois sommets de ce triangle. Les points-pince correspondent aux couples de points à coordonnées égales en valeurs absolues situés sur chacun des côtés du triangle.

105 Propriété des plans tangents à la surface de Steiner.

La surface F' contient ∞^2 coniques dont trois sont formées par les droites a'_1, a'_2, a'_3 comptées chacune deux fois.

Soit ρ un plan tangent à F' en un point R. Une droite r du faisceau (R, ρ) détermine avec S_1 un espace S_3 rencontrant F en quatre points dont deux sont confondus en un point R' situés dans le plan déterminé par R et S_1. L'espace rS_1 coupe le plan ρ' tangent à F en R' suivant une droite r' passant par R'. Les plans ρ, ρ' et la droite S_1 appartiennent à un hyperplan de S_5 ; cet hyperplan coupe F suivant deux coniques passant par R' et par suite le plan ρ coupe F suivant les projections de ces coniques.

Un plan tangent à la surface de Steiner coupe celle-ci suivant deux coniques passant par le point de contact (et par les points où le plan coupe les droites doubles).

On en conclut que les plans coupant a_1', a_2', a_3' en des points-pince touchent la surface chacun suivant une conique.

106. Corrélative de la surface de Steiner. D'après ce qui précède, les plans tangents à la surface de Steiner correspondent aux coniques dégénérées du système (1). Celles-ci sont données par

$$8\mu^3 + 2\mu_0\mu_1\mu_2 - 2\mu(\mu_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2) = 0.$$

En interprétant μ, μ_0, μ_1, μ_2 comme coordonnées des points d'un espace S_3, on voit que la corrélative d'une surface de Steiner est une surface cubique. Celle-ci possède quatre points doubles coniques $(1,2,2,2)$, $(1,2,-2,-2)$, $(1,-2,2,-2)$ et $(1,-2,-2,2)$.

107. Surface de Steiner ayant deux droites doubles. Supposons que la droite S_1 soit tangente à l'hypersurface M_4^3. La surface de Steiner F ne possède plus que deux droites doubles distinctes. Aux points de S_1 correspondent dans ϖ des coniques enveloppes ayant trois tangentes fixes, le point de contact avec l'une d'elles étant fixe. Un tel système peut être représenté par l'équation

$$\lambda_1(\xi_1^2 - \xi_2^2) + \lambda_2 \xi_0 \xi_1 = 0.$$

Les coniques conjuguées sont données par

$$\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_0 x_2 + \lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_3 (x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

En posant

$$\frac{X_0}{x_0^2} = \frac{X_1}{x_0 x_2} = \frac{X_2}{x_1 x_2} = \frac{X_3}{x_1^2 + x_2^2},$$

on obtient pour équation de la surface F',

$$X_0 X_1^2 X_3 = X_1^4 + X_0^2 X_2^2. \qquad (1).$$

Le point $X_0 = X_1 = X_2 = 0$ est triple et les droites doubles sont $X_0 = X_1 = 0$, $X_1 = X_2 = 0$.

Les plans tangents à la surface F en un point de la droite $X_0 = X_1 = 0$ coïncident tous deux avec le plan $X_0 = 0$. En un point $(y_0, 0, 0, y_3)$ de la droite $X_1 = X_2 = 0$, les plans tangents sont

$$y_0(y_3 X_1^2 - y_0 X_2^2) = 0.$$

Ils sont confondus au point $(1, 0, 0, 0)$, seul point-pince de la droite.

La surface (1) est l'enveloppe du système de quadriques

$$\lambda^2 X_1^2 + 2\lambda X_0 X_2 + X_0 X_3 - X_1^2 = 0,$$

qui touchent le plan $X_0 = 0$ le long de la droite $X_0 = X_1 = 0$. Par conséquent, la surface (1) possède une droite double infiniment voisine de la droite $X_0 = X_1 = 0$ dans le plan $X_0 = 0$.

108. __Surface de Steiner ayant une droite double.__ Supposons que la droite s_1 ait un contact du second ordre avec la variété M_4^3. Le système de coniques-enveloppes du plan ϖ qui correspond à la droite s_1 ne contient qu'une courbe dégénérée (en deux faisceaux distincts de droites). Son équation peut s'écrire

$$\lambda_1 \xi_1 \xi_2 + \lambda_2 (\xi_2^2 + \xi_0 \xi_1) = 0.$$

Les coniques conjuguées sont

$$\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 (x_2^2 - x_0 x_1) + \lambda_2 x_0 x_2 + \lambda_3 x_1^2 = 0.$$

En posant

$$\frac{X_0}{x_0^2} = \frac{X_1}{x_2^2 - x_0 x_1} = \frac{X_2}{x_0 x_2} = \frac{X_3}{x_1^2},$$

on obtient l'équation

$$X_0^3 X_3 = (X_2^2 - X_0 X_1)^2 \qquad (1)$$

de la surface F'. Le point $X_0 = X_1 = X_2 = 0$ est triple uniplanaire pour cette surface et la droite $X_0 = X_2 = 0$ en est la seule droite double. Les plans tangents à la surface aux points de cette droite sont confondus avec $X_0 = 0$.

La surface (1) est l'enveloppe du système de quadriques

$$\lambda^2 X_0^2 + 2\lambda (X_2^2 - X_0 X_1) + X_0 X_3 = 0,$$

quadriques qui s'osculent le long de la droite $X_0 = X_2 = 0$. Par conséquent, la surface (1) possède deux droites doubles infiniment voisines successives de la droite $X_0 = X_2 = 0$, la première appartenant au plan $X_0 = 0$.

109. <u>Polarité par rapport à l'hypersurface</u> M_4^3. La polarité par rapport à une courbe du plan, ou à une surface de S_3, s'étend sans difficulté aux hypersurfaces. La s-ième polaire d'un point y par rapport à l'hypersurface

$$F(x_0, x_1, \dots, x_r) = 0$$

est par définition l'hypersurface

$$\left(y_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + y_r \frac{\partial}{\partial x_r}\right)^s F(x_0, x_1, \dots, x_r) = 0.$$

La première polaire d'un point Y par rapport à M_4^3 a donc pour équation

$$Y_{00}(X_{11}X_{22} - X_{12}^2) + Y_{11}(X_{22}X_{00} - X_{20}^2) + Y_{22}(X_{00}X_{11} - X_{01}^2)$$
$$+ 2Y_{12}(X_{20}X_{01} - X_{00}X_{12}) + 2Y_{20}(X_{01}X_{12} - X_{11}X_{20}) + 2Y_{01}(X_{12}X_{20} - X_{22}X_{01}) = 0.$$

C'est une hyperquadrique passant par la surface F. Toute hyperquadrique passant par la surface F est la première polaire d'un point, car ces hyperquadriques ne peuvent former un système linéaire de dimension supérieure à cinq.

La seconde polaire du point Y par rapport à M_4^3 est l'hyperplan

$$X_{00}(Y_{12}^2 - Y_{11}Y_{22}) + X_{11}(Y_{20}^2 - Y_{22}Y_{00}) + X_{22}(Y_{01}^2 - Y_{00}Y_{11})$$
$$+ 2X_{12}(Y_{00}Y_{12} - Y_{20}Y_{01}) + 2X_{20}(Y_{11}Y_{20} - Y_{01}Y_{12}) + 2X_{01}(Y_{22}Y_{01} - Y_{12}Y_{20}) = 0.$$

Cet hyperplan a pour homologue, dans le plan ϖ, la conique

$$(Y_{12}^2 - Y_{11}Y_{22})x_0^2 + \dots + 2(Y_{22}Y_{01} - Y_{12}Y_{20})x_0x_1 = 0.$$

L'équation tangentielle de cette conique est

$$Y_{00}\xi_0^2 + Y_{11}\xi_1^2 + Y_{22}\xi_2^2 + 2Y_{12}\xi_1\xi_2 + 2Y_{20}\xi_2\xi_0 + 2Y_{01}\xi_0\xi_1 = 0.$$

C'est précisément la conique qui correspond au point Y.

On voit donc qu'<u>un point et son hyperplan polaire par rapport à M_4^3 représentent une conique-enveloppe et une conique-lieu ayant même support</u>.

Chapitre V.

Les variétés de Segre.

§1 _ Variétés de Segre en général

110 **Préliminaires**. Considérons deux ponctuelles s_1, s_2 et soient y_1, y_2 les coordonnées des points de s_1, z_1, z_2 celles des points de s_2. A un couple de points y, z des ponctuelles s_1, s_2, faisons correspondre dans l'espace S_3 le point X de coordonnées

$$\frac{X_{11}}{y_1 z_1} = \frac{X_{12}}{y_1 z_2} = \frac{X_{21}}{y_2 z_1} = \frac{X_{22}}{y_2 z_2}.$$

Le lieu de ce point X est la quadrique Q d'équation

$$X_{11} X_{22} - X_{12} X_{21} = 0.$$

La quadrique Q représente les couples de points des ponctuelles s_1, s_2. Aux couples de points de s_1, s_2 contenant un point fixe de s_1 correspondent les points d'une génératrice rectiligne g_1. De même, aux couples de points de s_1, s_2 contenant un point fixe de s_2 correspondent les points d'une génératrice rectiligne g_2 de Q. On obtient ainsi les génératrices rectilignes des deux modes de Q.

Aux sections planes de Q correspondent projectivement les homographies entre les ponctuelles s_1, s_2.

En posant $x_1 = y_1 = z_1$, on obtient la représentation de la quadrique Q sur un plan dont les coordonnées ponctuelles sont x_1, y_2, z_2 ; aux sections planes de Q correspondent dans ce plan les coniques passant par les points $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.

C. Segre (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1891) a généralisé les concepts précédents en considérant la variété représentant les groupes de k points pris dans k espaces linéaires ; cette variété a reçu le nom de variété de Segre.

111.— <u>Définition d'une variété de Segre.</u> Considérons k espaces linéaires $S_{r_1}, S_{r_2}, \dots, S_{r_k}$ respectivement à $r_1, r_2, \dots, r_k$ dimensions. Désignons $x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_{r_i}^{(i)}$ les coordonnées projectives homogènes des points de l'espace S_{r_i} et posons

$$\rho X_{i_1 i_2 \dots i_k} = x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_k}^{(k)}, \qquad (1)$$

$$(i_1 = 0,1,\dots,r_1;\ i_2 = 0,1,\dots,r_2;\ \dots;\ i_k = 0,1,\dots,r_k).$$

Les variables X sont au nombre de

$$(1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_k) = R+1.$$

Interprétons ces variables comme coordonnées d'un point X d'un espace linéaire S_R. A un groupe de k points $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ des espaces linéaires $S_{r_1}, S_{r_2}, \dots, S_{r_k}$ correspond, par les équations (1), un point X de S_R. Le lieu de ce point est une variété V_r à

$$r_1 + r_2 + \dots + r_k = r$$

dimensions, représentant les groupes de k points des espaces linéaires donnés, appelée variété de Segre d'indices $r_1, r_2, \dots, r_k$.

112. <u>Sections hyperplanes de V_r.</u> Un hyperplan de S_R a pour équation

$$\Sigma \xi_{i_1 i_2 \dots i_k} X_{i_1 i_2 \dots i_k} = 0;$$

par les relations (1), il lui correspond une <u>liaison ponctuelle</u>

$$\Sigma \xi_{i_1 i_2 \dots i_k} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_k}^{(k)} = 0 \qquad (2)$$

entre les espaces $S_{r_1}, S_{r_2}, \dots, S_{r_k}$. Il existe une projectivité entre les hyperplans de S_R et les liaisons ponctuelles (2).

Parmi les liaisons ponctuelles (2) se trouvent les liaisons ponctuelles dégénérées d'équation

$$(\Sigma \xi_{i_1}^{(1)} x_{i_1}^{(1)}).(\Sigma \xi_{i_2}^{(2)} x_{i_2}^{(2)})\dots(\Sigma \xi_{i_k}^{(k)} x_{i_k}^{(k)}) = 0. \qquad (3).$$

Chacun des facteurs du premier membre de la relation précédente, égalé à zéro, représente un hyperplan d'un des espaces $S_{r_1}, S_{r_2}, \dots, S_{r_k}$; soient respectivement $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(k)}$ ces hyperplans. Un point de $\xi^{(i)}$ et $k-1$ points choisis arbitrairement un dans chacun des $i-1$ premiers et un dans chacun des $k-i$ derniers des espaces donnés, satisfont à l'équation (3).

113. <u>Ordre de la variété de Segre</u>. L'ordre de la variété V_r est égal au nombre de points de cette variété situés dans un espace S_{R-r}, c'est-à-dire dans l'espace commun à r hyperplans de S_R. En particulier, nous pouvons supposer que ces r hyperplans correspondent à r liaisons ponctuelles dégénérées telles que (3).

Cela revient à se donner r systèmes de k hyperplans, chacun de ces systèmes ayant un hyperplan dans chacun des k espaces donnés. L'ordre de V_r est égal au nombre des groupes de k points situés le premier sur r_1 des r hyperplans appartenant à S_{r_1}, le second sur r_2 hyperplans de S_{r_2}, ..., le dernier sur r_k des r hyperplans de S_{r_k}, deux points d'un même groupe n'appartenant pas à des hyperplans d'un même système. L'ordre de V_r est donc égal à

$$n = \binom{r_1 + r_2 + \dots + r_k}{r_1} \cdot \binom{r_2 + \dots + r_k}{r_2} \dots \binom{r_{k-1} + r_k}{r_{k-1}} \cdot \binom{r_k}{r_k},$$

c'est-à-dire à

$$n = \frac{r!}{r_1!\, r_2! \dots r_k!}$$

114. <u>Variétés tracées sur une variété de Segre</u>. Considérons dans l'espace S_{r_1} un espace $S_{r'_1}$, dans S_{r_2} un espace $S_{r'_2}$, ..., dans S_{r_k} un espace $S_{r'_k}$. Dénotons par $(r'_1, r'_2, \dots, r'_k)$ la variété de Segre représentant les points de ces k espaces. Cette variété est tracée sur V_r.

En particulier, considérons la variété $(0, 0, \dots, 0, r_{p+1}, \dots, r_k)$, de dimension $r_{p+1} + \dots + r_k$. Cette variété varie dans un système de dimension $r_1 + \dots + r_p$, puisqu'elle correspond à p points choisis arbitrairement un dans chacun des p premiers espaces donnés. Par un point de V_r passe une seule de ces variétés et deux variétés du système ne se rencontrent pas. De même, la variété $(r_1, r_2, \dots, r_p, 0, \dots, 0)$, de dimension $r_1 + r_2 + \dots + r_p$, varie dans un système de dimension $r_{p+1} + \dots + r_k$. Deux variétés $(0, \dots, 0, r_{p+1}, \dots, r_k)$ et $(r_1, \dots, r_p, 0, \dots, 0)$ n'ont qu'un point commun.

La variété $(0, \dots, 0, r_i, 0, \dots, 0)$ est un espace linéaire à r_i dimensions tracé sur V_r et variable dans un système de dimensions $r - r_i$. Par un point de V_r passe un seul de ces espaces.

On a donc, sur V_r, ∞^{r-r_1} espaces linéaires à r_1 dimensions, ∞^{r-r_2} espaces linéaires à r_2 dimensions, ..., ∞^{r-r_k} espaces linéaires à r_k dimensions. ~~K espaces pris un dans chacun de ces systèmes, ont un seul point commun;~~ deux espaces d'un même système ne se rencontrant pas. Par un point passe un espace de chaque système

115. <u>Représentation d'une variété de Segre sur un espace linéaire.</u>

En profitant des facteurs de proportionnalité des coordonnées projectives, nous pouvons poser

$$x_0 = x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = \ldots\ldots = x_0^{(k)}.$$

Interprétons $x_0, x_1^{(1)}, \ldots, x_{r_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_{r_k}^{(k)}$ comme coordonnées des points d'un espace S_r. Nous obtenons ainsi une correspondance birationnelle entre les points de la variété V_r et ceux de l'espace S_r. Aux sections hyperplanes de V_r correspondent dans S_r des hypersurfaces d'ordre k rencontrant l'hyperplan $x_0 = 0$ suivant k espaces linéaires à $r-r_1-1$, $r-r_2-1$, ..., $r-r_k-1$ dimensions. Un point commun à deux de ces espaces est double pour les hypersurfaces, un point commun à trois de ces espaces est triple, et ainsi de suite.

Nous allons examiner le cas particulier $k=3$, $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. La variété de Segre V_3^6, de S_7, représentant les points de trois ponctuelles, est d'ordre six. Elle a pour équations

$$\begin{gathered} X_{000}X_{111} = X_{011}X_{100} = X_{101}X_{010} = X_{110}X_{001}, \\ X_{000}X_{011} = X_{001}X_{010}, \quad X_{000}X_{101} = X_{100}X_{001}, \quad X_{000}X_{110} = X_{100}X_{010}, \\ X_{111}X_{100} = X_{110}X_{101}, \quad X_{111}X_{010} = X_{110}X_{011}, \quad X_{111}X_{001} = X_{101}X_{011}. \end{gathered}$$

Posons

$$x_0 = x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = x_0^{(3)}, \quad x_1 = x_1^{(1)}, \quad x_2 = x_1^{(2)}, \quad x_3 = x_1^{(3)}.$$

A une section hyperplane de V_3^6 correspond dans S_3 la surface cubique

$$\xi_0 x_0^3 + x_0^2(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) + x_0(\xi_{23}x_2x_3 + \xi_{31}x_3x_1 + \xi_{12}x_1x_2) + \xi_{123}x_1x_2x_3 = 0,$$

passant simplement par les côtés du triangle

$$x_0 = x_1 = 0, \quad x_0 = x_2 = 0, \quad x_0 = x_3 = 0$$

et doublement par les sommets de ce triangle.

Aux plans

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$$

correspondent dans S_7 les sections de la variété V_3^6 par les hyperplans

$$\lambda_0 X_{000} + \lambda_1 X_{100} + \lambda_2 X_{010} + \lambda_3 X_{001} = 0.$$

Ces hyperplans ont en commun l'espace S_3

$$X_{000} = X_{100} = X_{010} = X_{001} = 0 \qquad (1)$$

coupant V_3^6 suivant les trois droites

$$X_{011} = X_{101} = 0, \quad X_{101} = X_{110} = 0, \quad X_{110} = X_{011} = 0,$$

passant par un même point. On obtient donc la représentation de V_3^6 sur l'espace S_3 en la projetant de l'espace (1) coupant la variété suivant les arêtes d'un trièdre.

§2. La variété de Segre représentant deux plans

116. __Equations de la variété__. Représentons par y_0, y_1, y_2 les coordonnées des points d'un plan (y) et par z_0, z_1, z_2 celles des points d'un plan (z). Les équations paramétriques de la variété de Segre V_4^6 représentant dans S_8 les points de ces plans, sont

$$\rho X_{ik} = y_i z_k, \quad (i, k = 0,1,2).$$

Les équations de V_4^6 s'obtiennent donc en exprimant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_{00} & X_{01} & X_{02} \\ X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ X_{20} & X_{21} & X_{22} \end{vmatrix}$$

est de caractéristique un.

117. __Les deux séries de plans appartenant à V_4^6__. Aux couples de points yz dont le point y est fixe et le point z variable correspondent, sur V_4^6, les points d'un plan η d'équations

$$\frac{X_{00}}{y_0} = \frac{X_{10}}{y_1} = \frac{X_{20}}{y_2}, \quad \frac{X_{01}}{y_0} = \frac{X_{11}}{y_1} = \frac{X_{21}}{y_2}, \quad \frac{X_{02}}{y_0} = \frac{X_{12}}{y_1} = \frac{X_{22}}{y_2}.$$

Lorsque le point y varie, on obtient ∞^2 plans η formant une congruence possédant les propriétés suivantes:

1°) Deux plans η distincts ne se rencontrent pas;

2°) Par un point de V_4^6 passe un plan η et un seul.

Aux couples de points yz dont le point z est fixe correspondent de même les points d'un plan ζ, engendrant une congruence possédant les mêmes propriétés que la congruence des plans η.

Un plan η et un plan ζ se rencontrent en un seul point.

118. <u>Sections hyperplanes de la variété V_4^6.</u> Aux points de la section de V_4^6 par l'hyperplan

$$\sum \xi_{ik} x_{ik} = 0 \qquad (1)$$

correspondent les couples de points y, z conjugués dans la réciprocité

$$\sum \xi_{ik} y_i z_k = 0 . \qquad (2)$$

Supposons que cette réciprocité soit singulière d'espèce un, c'est-à-dire que le déterminant $|\xi_{ik}|$ soit de caractéristique deux. Il existe alors un point M du plan (y) auquel correspond une droite indéterminée du plan (z) et un point N du plan (z) auquel correspond une droite indéterminée du plan (y). Il existe une projectivité entre les faisceaux de rayons de sommets M, N ; à un point z distinct de N correspond la droite du faisceau de sommet M homologue de la droite Nz, et inversement, à un point y correspond la droite passant par N, homologue de la droite My. Soient μ le plan η correspondant à M et ν le plan ζ correspondant à N. L'hyperplan considéré contient les plans μ, ν. Si m, n sont deux droites homologues des faisceaux de sommets M, N, la quadrique représentant les couples de points des droites m, n appartient à la section de V_4^6 par l'hyperplan. Cette quadrique passe par le point commun aux plans μ, ν et coupe chacun de ces plans suivant une droite.

Supposons maintenant que la réciprocité (2) soit singulière d'espèce deux, c'est-à-dire que le déterminant $|\xi_{ik}|$ soit de caractéristique un. A tout point du plan (z) correspond une droite fixe m de (y) et à tout point y, une droite fixe n. La section de V_4^6 par l'hyperplan (1) se compose de deux variétés de Segre V_3^3, l'une représentant les points de la droite m et du plan (z), l'autre représentant les points du plan (y) et de la droite n. Ces deux variétés ont en commun la quadrique représentant les couples de points des droites m, n.

119. <u>Hyperplans tangents à la variété V_4^6.</u> Il existe un espace linéaire S_4 tangent à V_4^6 en un point R de cette variété. Cet espace, que nous désignerons par ρ, doit contenir les droites

issues de R et tracées sur V_4^6. Par le point R passent un plan η et un plan ζ n'ayant que le point R en commun ; ces plans doivent appartenir à ρ et déterminent complètement cet espace.

Un hyperplan tangent à V_4^6 au point R doit contenir ρ. Soient R_y, R_z les points des plans (y), (z) représentés par R. A l'hyperplan considéré doit correspondre une réciprocité entre les plans (y), (z) telle que R_y soit l'homologue de tout point z et R_z l'homologue de tout point y. Cette réciprocité est donc singulière de première espèce.

Il en résulte que l'équation tangentielle V_4^6 est

$$|\xi_{i0} \quad \xi_{i1} \quad \xi_{i2}| = 0. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

120. __Représentation d'une homographie__. Soit Ω une homographie entre les plans (y), (z), d'équations

$$\rho y_i = a_{i0} z_0 + a_{i1} z_1 + a_{i2} z_2, \qquad (i = 0, 1, 2)$$

Aux couples de points y, z homologues dans cette homographie correspondent sur V_4^6 les points d'une surface Ω'. Ses équations paramétriques de Ω' peuvent s'écrire

$$\rho X_{ik} = y_i z_k = a_{i0} z_0 z_k + a_{i1} z_1 z_k + a_{i2} z_2 z_k.$$

On obtient donc Ω' en rapportant projectivement aux hyperplans d'un certain espace à cinq dimensions les coniques du plan (z) ; Ω' est donc une surface de Veronese.

Observons que des équations de Ω, on déduit

$$\rho y_i y_k = a_{i0} X_{k0} + a_{i1} X_{k1} + a_{i2} X_{k2} ;$$

l'espace S_5 contenant Ω' a donc pour équations

$$a_{i0} X_{k0} + a_{i1} X_{k1} + a_{i2} X_{k2} = a_{k0} X_{i0} + a_{k1} X_{i1} + a_{k2} X_{i2},$$
$$(i, k = 0, 1, 2).$$

121. __Intersection d'un espace linéaire à six dimensions et de la variété__ V_4^6. Considérons un espace linéaire S_6 occupant une position générale par rapport à V_4^6 ; il coupe cette variété suivant une surface algébrique F. L'espace S_6 est l'intersection de deux hyperplans, par conséquent les points de F représentent les couples de points y, z conjugués dans deux réciprocités entre les plans (y), (z), c'est-à-dire les couples de points homologues dans une transformation quadratique entre ces plans.

Soient $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$ les points fondamentaux de la transformation T dans le plan (y) ; $z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}$ les points fondamentaux de T dans le plan (z) ; $X^{(ik)}$ le point de V_4^6 représentant le couple $y^{(i)} z^{(k)}$. Supposons qu'aux points infiniment voisins de $y^{(1)}$ correspondent les points de la droite $z^{(2)} z^{(3)}$ et qu'aux points $y^{(2)}, y^{(3)}$ soient de même associées les droites $z^{(3)} z^{(1)}$ et $z^{(1)} z^{(2)}$.

Aux couples de points formés de $y^{(1)}$ et d'un point quelconque de la droite $z^{(2)} z^{(3)}$ correspondent sur V_4^6 les points d'une droite $X^{(12)} X^{(13)}$ qui appartient à F. On voit donc que cette surface contient six droites $X^{(12)} X^{(13)}$, $X^{(13)} X^{(23)}$, $X^{(23)} X^{(21)}$, $X^{(21)} X^{(31)}$, $X^{(31)} X^{(32)}$, $X^{(32)} X^{(12)}$, formant un hexagone gauche.

La transformation T est représentée par des équations

$$y_0 : y_1 : y_2 = \varphi_0 (z_0, z_1, z_2) : \varphi_1 : \varphi_2 ,$$

où $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ sont les équations de trois coniques passant par les points $z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}$ et n'appartenant pas à un même faisceau. Les équations paramétriques de la surface F sont donc

$$\rho X_{ik} = z_k \varphi_i (z_0, z_1, z_2) .$$

La surface F représente donc, dans S_6, les cubiques du plan (z) passant par les points $z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}$.

Supposons maintenant que l'espace S_6, occupant une position particulière, coupe V_4^6 suivant une variété à trois dimensions. Soient θ_1, θ_2 les réciprocités entre les plans (y), (z) qui correspondent à deux hyperplans contenant S_6.

Tout point d'un des plans (y), (z), par exemple du plan (y), doit être associé, dans θ_1, θ_2, à une infinité de points du plan (z). Il faut donc qu'à tout point y, θ_1 et θ_2 fassent correspondre une même droite. Les réciprocités θ_1, θ_2 étant distinctes, cela n'est possible que si cette droite est fixe, θ_1 et θ_2 étant alors singulières de seconde espèce. Soient alors

$$(\eta_0 y_0 + \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2)(\zeta_0 z_0 + \zeta_1 z_1 + \zeta_2 z_2) = 0 ,$$

$$(\eta'_0 y_0 + \eta'_1 y_1 + \eta'_2 y_2)(\zeta_0 z_0 + \zeta_1 z_1 + \zeta_2 z_2) = 0 ,$$

les équations de ces réciprocités. La section de V_4^6 par l'espace S_6 est formée de la variété de Segre V_3^3 représentant les couples de points du plan (y) et de la droite ζ (variété qui appartient à un S_5) et du plan représentant les couples de points yz dont le point y est l'intersection des droites η, η'.

122. <u>Intersection d'un espace linéaire à cinq dimensions et de V_4^6.</u> Aux points de V_4^6 situés dans un espace S_5 correspondent les couples de points y, z conjugués dans trois réciprocités ; ces points engendrent en général respectivement des cubiques planes C_y, C_z et la courbe C^6, du sixième ordre, section de V_4^6 par S_5, est en correspondance birationnelle avec chacune de ces cubiques.

Supposons qu'un espace linéaire S_5 rencontre la variété V_4^6 suivant une surface F. Alors, à tout point du plan (y) doit être associé un point du plan (z), le couple formé par ces points donnant un point de F. Les points y, z homologues d'un point de F ne peuvent se correspondre dans une transformation quadratique, car alors F appartiendrait à un espace linéaire à six dimensions ; ils se correspondent donc dans une homographie et F est une surface de Veronese.

Il existe des espaces S_5 coupant la variété V_4^6 suivant des variétés à trois dimensions. La variété de Segre qui représente les points y d'une droite et les points z du plan z est une variété V_3^3 appartenant à un espace à cinq dimensions. Reprenant les notations définies plus haut (n° 114) la variété V_4^6 contient deux systèmes linéaires ∞^2 de variétés V_3^3, soient les variétés $(1,2)$ et $(2,1)$ appartenant à des espaces linéaires à cinq dimensions.

Une variété $(1,2)$ et une variété $(2,1)$ ont en commun une quadrique $(1,1)$. Il existe ∞^4 quadriques sur V_4^6 et par deux points de cette variété passe une seule de ces quadriques.

123. <u>Relation entre la variété V_4^6 et la surface Veronese.</u>

Considérons entre les plans (y), (z) l'homographie

$$\rho y_i = z_i \ , \quad (i = 0, 1, 2).$$

Il lui correspond, dans l'espace S_8, l'homographie harmonique H,

$$\rho X'_{ik} = X_{ki} \, ,$$

dont les axes ponctuels sont le plan

$$X_{00} = X_{11} = X_{22} = 0 \ , \quad X_{12} + X_{21} = 0 \ , \quad X_{20} + X_{02} = 0, \quad X_{01} + X_{10} = 0 \qquad (1)$$

et l'espace S_5

$$X_{12} = X_{21} \ , \quad X_{20} = X_{02} \ , \quad X_{01} = X_{10} \, . \qquad (2)$$

Le plan (1) ne rencontre pas V_4^6, mais l'espace (2) coupe cette variété suivant une surface de Veronese. La variété V_4^6 est transformée en elle-même par l'homographie H.

Rapportons projectivement les hyperplans passant par le plan (1) aux hyperplans d'un espace linéaire S_5 en posant

$$\frac{Y_{00}}{2X_{00}} = \frac{Y_{11}}{2X_{11}} = \frac{Y_{22}}{2X_{22}} = \frac{Y_{12}}{X_{12}+X_{21}} = \frac{Y_{20}}{X_{20}+X_{02}} = \frac{Y_{01}}{X_{01}+X_{10}} . \qquad (3)$$

A la variété V_4^6 correspond la variété

$$\begin{vmatrix} Y_{00} & Y_{01} & Y_{20} \\ Y_{01} & Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{20} & Y_{12} & Y_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

dont l'équation s'obtient en éliminant les X entre les équations de V_4^6 et les équations (3).

L'équation (4) représente le lieu M_4^3 des cordes d'une surface de Veronese Φ.

Aux hyperplans

$$\lambda_0(X_{12}-X_{21}) + \lambda_1(X_{20}-X_{02}) + \lambda_2(X_{01}-X_{10}) = 0$$

passant par l'espace (2) correspondent, dans l'espace (Y), les hyperquadriques

$$\lambda_0^2(Y_{12}^2 - Y_{11}Y_{22}) + \lambda_1^2(Y_{20}^2 - Y_{22}Y_{00}) + \lambda_2^2(Y_{01}^2 - Y_{00}Y_{11})$$

$$+ 2\lambda_1\lambda_2(Y_{00}Y_{12} - Y_{01}Y_{20}) + 2\lambda_2\lambda_0(Y_{11}Y_{20} - Y_{12}Y_{01}) + 2\lambda_0\lambda_1(Y_{22}Y_{01} - Y_{20}Y_{12}) = 0,$$

passant par la surface Φ.

L'enveloppe de ce système d'hyperquadriques est la variété M_4^3.

124. <u>Représentation de la variété V_4^6 sur un espace S_4.</u>

Posons

$$x_0 = y_0 = z_0 ;$$

aux sections hyperplanes de V_4^6 correspondent, dans l'espace $S_4(x_0, y_1, y_2, z_1, z_2)$, les hyperquadriques

$$\xi_{00}x_0^2 + x_0(\xi_{10}y_1 + \xi_{20}y_2 + \xi_{01}z_1 + \xi_{02}z_2) + \xi_{11}y_1z_1 + \xi_{12}y_1z_2 + \xi_{21}y_2z_1 + \xi_{22}y_2z_2 = 0 . \quad (1)$$

Ces hyperquadriques passent par les droites s_1, s_2 ayant respectivement pour équations

$$x_0 = y_1 = y_2 = 0 \quad ; \quad x_0 = z_1 = z_2 = 0 .$$

La correspondance birationnelle entre V_4^6 et l'espace S_4 est donnée par

$$\frac{X_{00}}{x_0} = \frac{X_{10}}{y_1} = \frac{X_{20}}{y_2} = \frac{X_{01}}{z_1} = \frac{X_{02}}{z_2} .$$

A un hyperplan

$$\lambda_{00} x_0 + \lambda_{10} y_1 + \lambda_{20} y_2 + \lambda_{01} z_1 + \lambda_{02} z_2 = 0$$

de S_4 correspond la section de V_4^6 par l'hyperplan

$$\lambda_{00} X_{00} + \lambda_{10} X_{10} + \lambda_{20} X_{20} + \lambda_{01} X_{01} + \lambda_{02} X_{02} = 0.$$

Ces hyperplans ont en commun l'espace S_3 d'équations

$$X_{00} = X_{10} = X_{20} = X_{01} = X_{02} = 0, \qquad (2)$$

coupant V_4^6 suivant la quadrique

$$X_{11} X_{22} - X_{12} X_{21} = 0 . \qquad (3)$$

La représentation de V_4^6 sur S_4 s'obtient en projetant la variété de l'espace (2).

Considérons les hyperquadriques (1) passant par la droite

$$x_0 = 0 , \quad y_2 = \lambda y_1 , \quad z_2 = \mu z_1 ,$$

s'appuyant sur s_1, s_2. A ces hyperquadriques correspondent les hyperplans

$$\xi_{00} X_{00} + \xi_{10} X_{10} + \xi_{20} X_{20} + \xi_{01} X_{01} + \xi_{02} X_{02}$$
$$+ \xi_{12} (X_{12} - \mu X_{11}) + \xi_{21} (X_{21} - \lambda X_{11}) + \xi_{22} (X_{22} - \lambda\mu X_{11}) = 0,$$

passant par le point $(1, \mu, \lambda, \lambda\mu)$ de la quadrique (3). Donc aux points de V_4^6 infiniment voisins d'un point de cette quadrique correspondent les points d'une droite s'appuyant sur s_1, s_2.

Chapitre VI

La Géométrie réglée

§ 1. Représentation hyperspatiale des droites de l'espace.

125. <u>Préliminaires</u>. Dans le Cours de Géométrie analytique à trois dimensions (troisième édition, 1937, Chap. X, § 4, pp. 265-271), on a montré que l'on peut définir une droite de l'espace ordinaire S_3 par six coordonnées homogènes p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23} liées par une relation quadratique

$$p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23} = 0 . \qquad (1)$$

Si y, z sont deux points de la droite, on a

$$p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i$$

et si η, ζ sont deux plans passant par la droite, on a

$$p_{jh} = \eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i ,$$

i, k, j, h étant, dans un certain ordre, les quatre nombres 1, 2, 3, 4.

La condition d'incidence de deux droites se traduit par la relation polaire de l'équation (1),

$$\Omega(p, p') \equiv p_{12}\,p'_{34} + p_{13}\,p'_{42} + p_{14}\,p'_{23} + p_{34}\,p'_{12} + p_{42}\,p'_{13} + p_{23}\,p'_{14} = 0. \qquad (2)$$

L'équation (1) peut s'écrire

$$\Omega(p, p) = 0 . \qquad (1')$$

Interprétons les quantités $p_{12}, \ldots, p_{23}$ comme coordonnées d'un point de l'espace linéaire S_5. L'équation (1) ou (1') représente une hyperquadrique Q de cet espace et il existe une correspondance biunivoque entre les droites de l'espace réglé S_3 et les points de l'hyperquadrique Q. Celle-ci constitue une représentation hyperspatiale de l'espace réglé.

La relation (2) exprime que deux points de S_5, n'appartenant pas nécessairement à Q, sont conjugués par rapport à cette hyperquadrique.

126. <u>Complexe linéaire</u>. Un complexe linéaire est l'ensemble

des droites satisfaisant à l'équation

$$\Omega\,(a, p) = 0\,,$$

où les a sont des constantes quelconques. Interprétée dans l'espace S_5, cette équation représente un hyperplan α et aux droites du complexe linéaire correspondent les points de la section de Q par α. L'hyperplan α est la première image du complexe linéaire dans S_5.

Dans S_5, le point a est le pôle de α par rapport à Q; c'est la seconde image du complexe linéaire.

1° Lorsque $\Omega\,(a, a)$ n'est pas nul, le complexe est général et le point a n'appartient pas à Q. 2° Lorsque $\Omega\,(a, a) = 0$, le point a appartient à Q et l'hyperplan α est tangent à Q en ce point. Dans l'espace S_3, le complexe est formé des droites p s'appuyant sur une droite fixe a ; c'est un complexe linéaire spécial d'axe a.

127. Séries de plans appartenant à l'hyperquadrique Q.

Considérons dans S_3 un faisceau de rayons (R, ρ) de sommet R et de plan ρ. Un complexe linéaire contient une droite de ce faisceau ou contient toutes les droites de ce faisceau. Par conséquent, aux droites du faisceau correspondent sur Q les points d'une courbe rencontrée en un point par un hyperplan ou contenue dans un hyperplan ; cette courbe est donc une droite r. Un faisceau de droites de S_3 a pour image une droite de Q.

Considérons une gerbe de droites de S_3 ; elle contient ∞^2 faisceaux de rayons ; elle a donc comme image sur Q une surface contenant ∞^2 droites, c'est-à-dire un plan σ.

De même, aux droites d'un plan de S_3 correspondent les points d'un plan σ' de Q.

L'hyperquadrique Q contient deux séries ∞^3 de plans : une série Σ de plans σ images des gerbes de droites ; une série Σ' de plans σ' images des plans réglés.

Deux plans de Σ (ou de Σ') se rencontrent en un point. Un plan de Σ et un plan de Σ' ne se rencontrent pas en général ; s'ils ont un point commun, ils se rencontrent suivant une droite.

Par un point de Q passent ∞^1 plans de Σ et ∞^1 plans de Σ. Par une droite de Q passent un plan de Σ et un

En effet, si p, p' sont deux droites du faisceau, la droite du [illegible] plan contenu dans le faisceau [illegible] vérifie l'équation : $\Omega(a, \lambda p + \lambda' p') = 0$. Si $\Omega(a, p)$ [illegible], cette équation est une identité.

plan de Σ'.

128. <u>Congruences bilinéaires</u>. Une congruence bilinéaire de droites est l'ensemble des droites appartenant à deux complexes linéaires

$$\Omega(a,p) = 0\,,\quad \Omega(b,p) = 0\,. \qquad (1)$$

Dans l'espace S_5, ces deux équations représentent un espace S_3 que nous désignerons par $\alpha\beta$. Aux droites de la congruence correspondent donc les points de la quadrique section de Q par l'espace $\alpha\beta$; celui-ci est la première image de la congruence.

La droite ab, conjuguée par rapport à Q de l'espace $\alpha\beta$, est la seconde image de la congruence.

Trois cas peuvent se présenter :

1°) La droite ab coupe Q en deux points distincts a_1, b_1. La congruence est l'ensemble des droites s'appuyant sur deux droites a_1, b_1 non incidentes.

La section de Q par l'espace $\alpha\beta$ est une quadrique générale.

2°) La droite ab n'appartient pas à Q et lui est tangente en un point a_1. Les hyperplans polaires des points de ab par rapport à Q passent par a_1. La congruence est formée des droites s'appuyant sur la droite a_1 et appartenant à un complexe linéaire dont fait partie la droite a_1.

La section de Q par l'espace $\alpha\beta$ est un cône de sommet a_1.

3°) La droite ab appartient à Q. Les hyperplans α, β sont tangents à Q en a, b et contiennent la droite ab. La congruence est formée des droites d'un plan et des droites d'une gerbe dont le sommet appartient au plan.

La section de Q par l'espace $\alpha\beta$ est formée des plans de Σ, Σ' passant par la droite ab.

129. <u>Représentation d'une quadrique</u>. Considérons trois complexes linéaires

$$\Omega(a,p) = 0\,,\ \Omega(b,p) = 0,\ \Omega(c,p) = 0 \qquad (1)$$

n'ayant pas en commun une congruence bilinéaire. Dans S_5, les équations (1) représentent trois hyperplans n'appartenant pas à un même faisceau et ayant donc en commun un plan

ρ_1. Les points a, b, c déterminent un plan ρ_2 conjugué du plan ρ_1 par rapport à Q. Plaçons-nous dans le cas général où les plans ρ_1, ρ_2 ne se rencontrent pas et soient γ_1, γ_2 les coniques sections de Q par ρ_1, ρ_2 respectivement. Soient R_1 un point de γ_1, R_2 un point de γ_2. Les points R_1, R_2 étant conjugués par rapport à Q, la droite R_1R_2 appartient tout entière à cette hyperquadrique ; elle représente un faisceau de rayons de S_3 dont font partie les droites r_1, r_2 ayant pour images les points R_1, R_2. Les droites de S_3 ayant pour images les points de γ_1 rencontrent donc toutes les droites ayant pour images les points de γ_2. Les coniques γ_1, γ_2 représentent donc deux demi-quadriques (r_1), (r_2) ayant même support. Inversement, deux demi-quadriques ayant même support sont représentées par les sections de Q par deux plans conjugués ne se rencontrant pas.

<u>A une quadrique non conique de S_3 correspondent deux plans conjugués par rapport à Q ; les sections de Q par ces plans représentent les deux systèmes de génératrices rectilignes de cette quadrique.</u>

Supposons que les plans ρ_1, ρ_2 se rencontrent en un seul point R. Ce point R étant son propre conjugué appartient à l'hyperquadrique Q. L'hyperplan polaire de R, qui contient ρ_1, ρ_2, coupe Q suivant un cône de sommet R. Le plan ρ_1 coupe donc Q suivant deux droites γ_{11}, γ_{12} passant par R et le plan ρ_2 coupe Q suivant deux droites γ_{21}, γ_{22} passant par R. Les plans $\gamma_{11}\gamma_{21}$, $\gamma_{12}\gamma_{22}$, $\gamma_{11}\gamma_{22}$, $\gamma_{12}\gamma_{21}$ appartiennent à Q et deux d'entre eux ne se rencontrant qu'en un point, par exemple les deux premiers, représentent deux gerbes de droites de sommets A_1, A_2 ; les deux autres représentent deux plans réglés α_1, α_2 passant par la droite A_1A_2. La quadrique représentée par le couple de plans ρ_1, ρ_2 dégénère en deux plans α_1, α_2 considérée comme quadrique-lieu, en deux gerbes de sommets A_1, A_2 considérée comme quadrique-enveloppe. La demi-quadrique représentée par le plan ρ_1 dégénère en deux faisceaux de rayons (A_1, α_1) et (A_2, α_2) ; la demi-quadrique représentée par le plan ρ_2 dégénère en deux faisceaux de rayons (A_1, α_2) et (A_2, α_1).

Si les plans ρ_1, ρ_2 ont en commun une droite r, celle-ci appartient à Q et les plans ρ_1, ρ_2 ne peuvent rencontrer Q en-dehors de r. La quadrique représentée par le couple de plans.

ρ_1, ρ_2 est formée d'un faisceau de rayons compté deux fois.

Si les plans ρ_1, ρ_2 coïncident, c'est en un plan appartenant à Q.

Remarquons qu'un cône de S_3 est représentée par une courbe de même ordre tracée dans le plan σ correspondant au sommet. Une courbe plane enveloppe est représentée par une courbe tracée dans un plan σ' et dont l'ordre est égal à la classe de la courbe-enveloppe.

130. <u>Intersection de quatre complexes linéaires</u>. Considérons quatre complexes linéaires indépendants ; il leur correspond dans S_5 quatre hyperplans ayant en commun une droite r. En général, cette droite n'appartient pas à Q et rencontre cette hyperquadrique en deux points distincts ou confondus. Les quatre complexes ont en commun deux droites distinctes ou confondues.

Si la droite r appartient à Q, les quatre complexes ont en commun un faisceau de rayons.

Soient a_1, a_2, a_3, a_4 les secondes images des quatre complexes ; ces points déterminent un espace S_3 coupant Q suivant une quadrique non conique si r coupe Q en deux points distincts ; conique si r est tangente à Q ; dégénérée en deux plans si r appartient à Q.

Un point de l'espace déterminé par a_1, a_2, a_3, a_4 a des coordonnées de la forme

$$p = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4$$

et en coordonnées λ, la section de Q par cet espace a pour équation

$$\lambda_1^2 \Omega(a_1, a_1) + \lambda_2^2 \Omega(a_2, a_2) + \lambda_3^2 \Omega(a_3, a_3) + \lambda_4^2 \Omega(a_4, a_4)$$
$$+ 2\lambda_1 \lambda_2 \Omega(a_1, a_2) + \cdots\cdots + 2\lambda_3 \lambda_4 \Omega(a_3, a_4) = 0.$$

La condition pour que les quatre complexes aient en commun une seule droite est donc

$$|\Omega(a_i, a_k)| = 0 \quad , \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

La condition pour que les quatre complexes aient en commun un faisceau de rayons est que le déterminant précédent ait la caractéristique deux.

131. <u>Homographies conservant l'hyperquadrique Q</u>. Une projectivité de l'espace S_3 échange entre eux les complexes linéaires, par conséquent il lui correspond dans S_5 une homographie conservant l'hyperquadrique Q.

Inversement, soit H une homographie de S_5 transformant Q en elle-même

Deux cas peuvent se présenter :

1°) H fait correspondre à un plan de Σ un plan de Σ et par conséquent à un plan de Σ' un plan de Σ'. Il correspond à H, dans l'espace S_3, une homographie.

2°) H fait correspondre à un plan de Σ un plan de Σ' et inversement. Il correspond à H, dans S_3, une réciprocité.

Nous allons considérer trois cas particuliers de l'homographie H.

a) Soient A un point n'appartenant pas à Q, α son hyperplan polaire par rapport à Q. L'homologie harmonique H_1 de centre A et d'hyperplan α transforme Q en elle-même.

Un plan σ de Σ coupe α suivant une droite. Il lui correspond un plan coupant α suivant la même droite et appartenant à Q. Ce plan appartient donc à Σ'. Il correspond donc à H_1 dans l'espace S_3 une réciprocité R_1. Cette réciprocité est involutive et a comme éléments unis toutes les droites du complexe linéaire $\mathcal{A}$ dont A et α sont les images. La réciprocité R_1 est donc le système-nul attaché à $\mathcal{A}$.

b) Soient a une droite rencontrant Q en des points distincts A_1, A_2 et α l'espace à trois dimensions conjugué à a par rapport à Q. Considérons l'homographie harmonique H_2 ayant a et α comme axes. H_2 transforme Q en elle-même.

L'espace α coupe Q suivant une quadrique non conique. Soit r une génératrice rectiligne de cette quadrique ; le plan $A_1 r$ appartient à Q et est uni pour H_2. Les plans de Σ et de Σ' passant par A_1, A_2 coupent donc α suivant des droites et sont unis pour H_2. Un plan σ de Σ ne passant ni par A_1, ni par A_2, coupe α en un seul point ; H_2 lui fait correspondre un plan $\bar{\sigma}$ ne pouvant rencontrer σ qu'en ce point. H_2 transforme donc Σ en Σ et Σ' en Σ'.

Dans l'espace réglé S_3, il correspond à H_2 une homographie biaxiale harmonique dont les axes ont pour images les points A_1, A_2.

c) Soient α_1, α_2 deux plans conjugués par rapport à Q et ne se rencontrant pas, H_3 l'homographie harmonique ayant pour axes α_1, α_2. Cette homographie transforme Q en elle-même. Soit Φ la quadrique de l'espace réglé S_3 ayant pour image le couple α_1, α_2.

Considérons une droite de Q s'appuyant en R_1 sur α_1 et en R_2 sur α_2. Cette droite est unie pour H_3 et par cette droite passe un plan σ et un plan σ' qui ne rencontrent pas α_1, α_2 en dehors de R_1, R_2 ; ils sont donc homologues dans H_3. Cette homographie transforme donc Σ en Σ' et dans l'espace réglé S_3 il lui correspond une réciprocité involutive R_3. Les droites de Φ sont unies pour R_3 et cette réciprocité est la polarité par rapport à Φ.

131. __Complexes linéaires en involution.__ – Deux complexes linéaires sont dits en involution si la seconde image de l'un appartient à la première de l'autre. Si

$$\Omega(a, p) = 0 \ , \ \Omega(b, p) = 0$$

sont les équations de ces complexes, la condition pour qu'ils soient en involution s'exprime donc par

$$\Omega(a, b) = 0.$$

Soient α, A la première et la seconde images du premier complexe, β, B celles du second. L'hyperplan β passe par A, donc dans l'homologie harmonique de centre A et d'hyperplan α, β est uni. On en conclut que __si deux complexes linéaires sont en involution, chacun d'eux est transformé en lui-même par le système-nul associé à l'autre.__

§ 2. Complexes de droites

132. __Représentation d'un complexe.__ Un complexe algébrique de droites est l'ensemble des droites de l'espace S_3 dont les coordonnées vérifient une équation

$$F(p_{12}, p_{13}, \ldots\ldots, p_{34}) = 0 \qquad (1)$$

dont le premier membre est une forme algébrique. Le degré n de cette forme s'appelle degré du complexe. Les droites du complexe passant par un point forment un cône d'ordre n et les droites du complexe situées dans un plan enveloppent une courbe de classe n.

Dans l'espace S_5, l'équation (1) représente une hypersurface algébrique V_4^n d'ordre n et le complexe a pour image sur Q la variété V_3^{2n} intersection de V_4^n et de Q.

Les droites de S_3 tangentes à une surface F, ou s'appuyant sur une courbe C, forment des complexes appelés complexes spéciaux.

Le complexe des tangentes à la surface F contient ∞^2 faisceaux de droites ; la variété V_3 qui le représente sur Q contient donc ∞^2 droites.

Le complexe des droites s'appuyant sur une courbe C contient ∞^1 gerbes ; la variété V_3 qui le représente sur Q contient donc ∞^1 plans de Σ. Ce complexe a pour corrélatif celui des tangentes à une surface développable, dont la variété image sur Q contient ∞^1 plans de Σ'.

133. Représentation d'une surface réglée. Aux génératrices g d'une surface réglée (g) de S_3 correspondent les points G d'une courbe (G) tracée sur Q.

Soient g, g' deux génératrices de la réglée (g), G et G' les points qui les représentent sur la courbe (G). La droite GG' est la seconde image de la congruence γ lieu des droites s'appuyant sur g et g'. Lorsque G' tend vers G, la droite GG' a pour limite la tangente t à la courbe (G) en G.

Supposons en premier lieu que la droite t appartienne à Q. La limite γ_0 de la congruence γ lorsque g' tend vers g est l'ensemble des droites d'un plan ρ passant par g et des droites d'une gerbe dont le sommet R appartient à g. La surface (g) touche le plan ρ le long de g et a un point double en R. Si toutes les tangentes t à la courbe (G) appartiennent à Q, la surface (g) est une développable et le lieu du point R est l'arête de rebroussement de cette développable.

Supposons maintenant que la tangente t à la courbe (G) en G n'appartienne pas à Q. La limite γ_0 de la congruence γ lorsque g' tend vers g est l'ensemble des tangentes à (g) le long de g. Le plan tangent à (g) en un point de g varie avec le point de contact et correspond à celui-ci dans une homographie qui est la corrélation de Chasles.

Une surface réglée est représentée par une courbe tracée sur Q. Si les tangentes à cette courbe appartiennent à Q, la réglée est développable ; c'est une réglée gauche dans le cas contraire.

Si n est l'ordre de la surface réglée (g), elle contient n droites d'un complexe linéaire et par conséquent la courbe image (G) est d'ordre n.

134. Surfaces réglées appartenant à un complexe. Soit Γ un complexe non spécial d'ordre n, V_4^n la variété de S_5 représentée

par son équation, V_3^{2n} la variété, image du complexe, qu'elle découpe sur Q. Toute courbe tracée sur la variété V_3^{2n} représente une surface réglée lieu de droites du complexe Γ, c'est-à-dire une surface réglée appartenant au complexe Γ.

Considérons une droite r de Γ et soient R le point qui la représente sur V_3^{2n}, ρ_0 l'hyperplan tangent à Q en R, ρ_1 l'hyperplan tangent à V_4^n en R, ρ l'espace intersection de ρ_0, ρ_1, tangent à V_3^{2n} en R. L'espace ρ coupe Q suivant un cône du second ordre γ dont les génératrices sont tangentes à la variété V_3^{2n} en R. Il existe donc une infinité de courbes tracées sur V_3^{2n} et ayant en R une tangente appartenant à Q. Il existe par suite une infinité de développables appartenant au complexe Γ, contenant la génératrice r et ayant des plans tangents distincts le long de cette droite.

135. __Corrélation de Chasles.__ Conservons les notations précédentes et soit R_1 le pôle, par rapport à Q, de l'hyperplan ρ_1. Le complexe linéaire Γ_1 dont ρ_1 est la première image et R_1 la seconde, peut être appelé complexe linéaire tangent à Γ le long de la droite r ; il contient cette droite.

Supposons en premier lieu que le point R_1 n'appartienne pas à Q. La droite RR_1 est tangente à Q en R et est la seconde image d'une congruence bilinéaire G dont la première image est l'espace ρ. Les droites du complexe Γ_1 passant par un point A de r forment un faisceau de rayons dont le plan α passe par r. Les droites de ce complexe appartenant à un plan α passant par r forment un faisceau dont le sommet A appartient à r. Les points A et les plans α se correspondent dans une projectivité appelée __corrélation de Chasles__.

Les faisceaux (A, α) sont représentés sur Q par les génératrices du cône γ section de Q par l'espace ρ.

Considérons une développable appartenant au complexe Γ et contenant la droite r ; elle est représentée sur Q par une courbe tracée sur la variété V_3^{2n}, passant par R et dont la tangente t en ce point appartient au cône γ. Cette droite représente un faisceau de rayons (A, α) ; le point A est le point de r appartenant à l'arête de rebroussement de la développable, le plan α est le plan tangent à la développable le long de la droite r.

Supposons en second lieu que le point R_1 appartienne à Q mais soit cependant distinct du point R. La droite RR_1 appartient à Q et R_1 est l'image d'une droite r_1 rencontrant r en un point A_0. L'espace ρ coupe Q suivant un plan σ image de la gerbe de sommet A_0 et un plan σ' image du plan réglé $\alpha_0 = rr_1$. Les plans σ, σ' passent par RR_1. La corrélation de Chasles est dégénérée : à un point A de r distinct de A_0 correspond le plan α_0 ; à un plan α passant par r distinct de α_0 correspond le point A_0 ; au point A_0 correspondent tous les plans passant par r et au plan α_0, tous les points de r.

Le cône du complexe de sommet A_0 a la droite r comme droite double et la courbe du complexe située dans le plan α_0 est bitangente à r.

La droite r est appelée <u>droite singulière</u> du complexe ; le point A_0 est le <u>point singulier</u> correspondant et le plan α_0, le <u>plan singulier</u> correspondant.

Le lieu des pôles R_1 par rapport à Q des hyperplans ρ_1 tangents à V_4^n aux points de V_3^{2n}, est une variété à trois dimensions V_3'. Cette variété rencontre l'hyperquadrique Q suivant une surface et par conséquent, le complexe Γ contient ∞^2 droites singulières, formant la <u>congruence singulière</u> du complexe.

136. <u>Equations de la congruence singulière d'un complexe</u>.

Supposons que le complexe Γ ait pour équation

$$F(p_{12}, p_{13}, \ldots\ldots, p_{34}) = 0 ;$$

soient $r_{12}, r_{13}, \ldots, r_{34}$ les coordonnées de la droite r. L'hyperplan ρ_1 a pour équation

$$p_{12}\frac{\partial F}{\partial r_{12}} + p_{13}\frac{\partial F}{\partial r_{13}} + \cdots\cdots + p_{34}\frac{\partial F}{\partial r_{34}} = 0.$$

Le pôle R_1 de ρ_1 par rapport à Q a donc pour coordonnées

$$r'_{12} = \frac{\partial F}{\partial r_{34}}, \quad r'_{13} = \frac{\partial F}{\partial r_{42}}, \ldots\ldots, r'_{34} = \frac{\partial F}{\partial r_{12}} .$$

Pour que R_1 appartienne à Q, c'est-à-dire pour que la droite r soit singulière on doit donc avoir

$$\Omega\left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial r}\right) = 0.$$

Les équations de la congruence singulière sont donc

$$F=0\ ,\ \Omega\left(\frac{\partial F}{\partial p}\ ,\ \frac{\partial F}{\partial p}\right)=0\ .$$

La seconde de ces équations représente un complexe d'ordre $2(n-1)$. Par un point de l'espace passent donc $2n(n-1)$ droites singulières du complexe et un plan contient $2n(n-1)$ de ces droites.

137. Faisceaux de rayons liés au complexe. Etant donnée une hypersurface V_4^n, en un point ordinaire de cette hyper-surface, il y a ∞^3 tangentes ordinaires, formant l'hyperplan tangent ; ∞^2 tangentes d'inflexion, formant un cône du second ordre (à trois dimensions) ; ∞^1 tangentes ayant un contact du troisième ordre avec la variété, formant un cône du sixième ordre.

Reprenons la variété V_3^{2n}, image sur Q du complexe Γ, intersection de Q et de V_4^n. Observons qu'une droite de Q, qui n'est pas tangente à V_3^{2n}, coupe cette variété en n points ; cette droite représente un faisceau de rayons contenant n droites du complexe Γ.

Nous avons vu que par R passent ∞^1 tangentes à V_3^{2n} en ce point, appartenant à Q et formant un cône du second ordre de γ. Une de ces droites a représente un faisceau de rayons (A, α) contenant r. Le cône du complexe de sommet A touche le plan α le long de r et la courbe du complexe du plan α touche la droite r en A.

Les tangentes d'inflexion à la variété V_4^n forment un cône du second ordre qui rencontre γ suivant quatre droites. Soit a une de ces droites ; elle représente un faisceau de rayons contenant r. Le cône du complexe de sommet A possède le plan α comme plan d'inflexion et la courbe du complexe située dans le plan α a un point de rebroussement en A. Le faisceau (A, α) est un faisceau inflexionnel du complexe. Chaque droite de celui-ci appartient à quatre faisceaux inflexionnels.

Pour $n \geqslant 3$, il existe, dans l'hyperplan tangent à Γ, six tangentes à la variété V_4^n ayant en R un contact du troisième ordre avec cette variété. En général, elles n'appartiennent pas à Q.

Supposons qu'une de ces droites a appartienne à Q et soit (A, α) le faisceau, contenant r, qu'elle représente. Le cône du complexe de sommet A a un contact du troisième ordre avec le plan α le long de r. La courbe du complexe située dans le plan α a un tacnode en A. Le faisceau est appelé faisceau d'ondulation du complexe.

Si l'équation du complexe Γ est

$$F(p_{12}, p_{13}, \ldots, p_{34}) = 0$$

et si nous posons

$$\Delta \equiv p_{12}\frac{\partial}{\partial r_{12}} + p_{13}\frac{\partial}{\partial r_{13}} + \cdots + p_{34}\frac{\partial}{\partial r_{34}},$$

la droite r appartiendra à un faisceau d'ondulation si les équations

$$\Omega(r,p) = 0, \quad \Delta F(r) = 0, \quad \Delta^2 F(r) = 0, \quad \Delta^3 F(r) = 0$$

admettent une solution p distincte de $p = r$. Il existera donc en général ∞^2 faisceaux d'ondulation pour un complexe.

138. <u>Complexes contenant des faisceaux de droites</u>. La variété V_3^4 tracée sur Q qui représente un complexe du second degré contient une infinité de droites. Par tout point R de cette variété passent quatre droites (tangentes d'inflexion) qui lui appartiennent. Chaque droite de V_3^4 est donnée par ∞^1 points de la variété, donc celle-ci contient ∞^2 droites.

<u>Un complexe du second degré contient ∞^2 faisceaux de rayons.</u>

Ces faisceaux de rayons sont obtenus en considérant les ∞^2 cônes du complexe dégénérés en deux plans ou les ∞^2 coniques-enveloppes du complexe dégénérées.

La variété V_3^6 représentant sur Q un complexe cubique de droites contient ∞^2 points en lesquels il existe une tangente ayant un contact du troisième ordre avec la variété. Une telle droite appartient nécessairement à la variété et est le lieu de ∞^1 points en lesquels la propriété précédente est vérifiée. La variété V_3^6 contient donc ∞^1 droites.

<u>Un complexe cubique contient ∞^1 faisceaux de rayons.</u>

Ce théorème est dû à Voss (Mathematische Annalen, 1874, t. IX).

139. <u>Complexes du second degré</u>. Soit Γ un complexe du second degré, non spécial d'équation

$$F(p_{12}, p_{13}, \ldots, p_{34}) = 0 \qquad (1)$$

Il est représenté sur Q par l'intersection V_3^4 de cette hyperquadrique et de l'hypersurface V_4^2 représentée par l'équation (1). Les hyperquadriques de S_5 sont en nombre ∞^{20}, donc les complexes du second degré de S_3 sont en nombre ∞^{19}.

Écrivons que l'hyperquadrique

$$F(p_{12}, p_{13}, \dots, p_{34}) + \lambda\,\Omega(p,p) = 0$$

est un cône, c'est-à-dire égalons à zéro le hessien de la forme précédente. Nous obtenons une équation du sixième degré en λ ; il y a donc six cônes passant par la variété V_3^4 image de Γ. Soient $A_0, A_1, \dots, A_5$ les sommets de ces cônes, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_5$ les hyperplans $A_1 A_2 \dots A_5$, $A_0 A_2 \dots A_5$, $A_0 A_1 \dots A_4$. Il est facile de voir que les points $A_0, A_1, \dots, A_5$ sont respectivement les pôles, par rapport à Q et à V_4^2, des hyperplans $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_5$. Par conséquent, si l'on désigne par $a_{i12}, a_{i13}, \dots, a_{i34}$ les coordonnées du point A_i, l'hyperplan α_i a pour équation

$$\Omega(a_i, p) = 0.$$

De plus, les points $A_0, A_1, \dots, A_5$ sont deux à deux conjugués par rapport à Q et on a

$$\Omega(a_0, a_1) = 0, \ \Omega(a_0, a_2) = 0, \dots, \Omega(a_4, a_5) = 0.$$

Les complexes linéaires $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots \Gamma_5$ ayant pour images $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_5$ sont deux-à-deux en involution. L'équation de la variété V_4^2, c'est-à-dire du complexe Γ, peut s'écrire:

$$\lambda_0 \left[\Omega(a_0, p)\right]^2 + \lambda_1 \left[\Omega(a_1, p)\right]^2 + \dots + \lambda_5 \left[\Omega(a_5, p)\right]^2 = 0.$$

Le système-nul associé à l'un quelconque des complexes linéaires $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_5$ transforme ces complexes en eux-mêmes et par conséquent le complexe Γ en lui-même.

<u>Un complexe général du second ordre est transformé en lui-même par six systèmes-nuls.</u>

§3. Congruences de droites.

140. <u>Représentation d'une congruence de droites.</u> — Une congruence algébrique de droites est une variété algébrique à deux dimensions formées de droites de l'espace. Une congruence est représentée sur l'hyperquadrique Q par une surface.

Par un point de l'espace passent en général des droites d'une congruence algébrique G en nombre fini m; le nombre m est l'ordre de la congruence G. Un plan contient en général un nombre fini n de droites de G; ce nombre n est la classe de la congruence. Un point par lequel passent ∞^1 droites de G et un plan contenant ∞^1 droites de G sont appelés singuliers.

La surface F image sur Q de la congruence G rencontre les plans σ de Σ en m points et les plans σ' de Σ en n points; elle est donc d'ordre $m+n$.

<u>La surface image d'une congruence algébrique d'ordre m et de classe n est d'ordre $m+n$.</u>

On appelle rang r d'une congruence G le nombre de couples de droites de cette congruence dont le point d'intersection appartient à une droite a et dont le plan passe par cette droite a. Soit A le point de Q qui représente a. Par A, passent ∞^2 droites appartenant à Q. Le rang r de la congruence G est égal au nombre de cordes de la surface F passant A, cordes qui appartiennent nécessairement à Q.

141. <u>Nappes focales d'une congruence de droites.</u> On sait qu'une congruence de droites est formée des droites tangentes à deux surfaces (ou à deux nappes d'une même surface) appelées nappes focales de la congruence. Une de ces surfaces, ou les deux surfaces peuvent d'ailleurs dégénérer en des courbes (appelées courbes singulières) sur lesquelles les droites de la congruence s'appuient. Les points de contact d'une droite de la congruence avec les surfaces focales de la congruence sont les foyers de cette droite; les plans tangents aux surfaces focales aux foyers d'une droite contiennent celles-ci; ce sont les plans focaux passant par la droite.

Parmi les surfaces réglées appartenant à une congruence c'est-à-dire les surfaces réglées dont les génératrices sont des droites de la congruence, se trouvent ∞^1 développables. Par une droite de la congruence passent deux développables dont les arêtes de rebroussement passent, une par chacun des foyers de la droite, les plans tangents étant les plans focaux.

Aux réglées de la congruence G correspondent des courbes tracées sur la surface F. Soient P un point de F, ϖ le plan tangent à cette surface en ce point. Le plan ϖ étant tangent à Q en P, coupe cette hyperquadrique suivant deux droites p_1, p_2. Les développables de la congruence G sont représentées sur F par les courbes γ tangentes en P à l'une des droites p_1, p_2 (cette propriété ayant évidemment lieu en tout point d'une courbe γ).

La droite p_1 représente un faisceau de rayons de centre P_1 et de plan ϖ_1, la droite p_2 un faisceau de rayons de centre P_2 et de plan ϖ_2. La droite p de la congruence G, ayant P comme image, a pour foyers les points P_1, P_2 et pour plans focaux les plans ϖ_1, ϖ_2.

La développable représentée sur F par la courbe γ tangente à p_1 en P_1 a pour plan tangent le long de p le plan ϖ_1 ; ce plan est donc tangent en P_2 à la surface focale (P_2). De même, le plan ϖ_2 est tangent en P_1 à la surface focale (P_1).

142. Ordre et classe de la surface focale d'une congruence.

Appelons surface focale d'une congruence algébrique G l'ensemble des nappes focales de cette congruence. Nous allons déterminer l'ordre et la classe de cette surface.

Par un point A de l'espace réglé S_3 passent m droites de G. Si le point A tend vers un point P_1 de la surface focale, le plan α de Σ qui correspond au point A sur Q, tend vers le plan de Σ passant par la tangente p_1 à F en P. Le plan α rencontre F en m points ; dans sa position limite, deux de ces points viennent se confondre en P. Il en résulte que la surface focale de G est le lieu des points par lesquels passent deux rayons confondus de la congruence.

De même, les plans tangents à la surface focale de G sont les plans qui contiennent deux rayons confondus de G.

Soit d une droite de l'espace réglé S_3, n'appartenant pas à G. Un plan α passant par d contient n droites de G. Par chacun des n points de rencontre de ces droites avec d passent $m-1$ droites non situées dans α. Au plan α_1 nous ferons correspondre les $n(m-1)$ plans passant par d et par ces droites. Cette correspondance est symétrique et possède $2n(m-1)$ plans unis. Ces plans unis proviennent des μ points de rencontre de d avec la surface focale de G, par lesquels passent deux rayons coïncidents, et des r points de d par lesquels passent deux rayons de G situés dans un plan passant par d. Ces r derniers plans comptent chacun pour deux plans unis. L'ordre de la surface focale de G est donc

$$\mu = 2n(m-1) - 2r.$$

On démontre de même que la classe de cette surface est égale à

$$\nu = 2m(n-1) - 2r.$$

143. <u>Congruence singulière d'un complexe</u>. Soient Γ un complexe non spécial, d'ordre n, V_3^{2n} la variété qui le représente sur Q, V_4^{n} la variété découpant V_3^{2n} sur Q. Considérons une droite singulière r de Γ et le point R qui lui correspond sur Q. Le pôle R_1 par rapport à Q de l'hyperplan ρ_1 tangent à V_4^{n} en R appartient à Q. La droite RR_1 appartient à Q et représente un faisceau de rayons dont le sommet A_0 appartient à r et le plan α_0 passe par r.

La congruence singulière (r) de Γ est représentée sur Q par la surface (R). Le plan tangent ϖ à cette surface au point R ne contient pas en général la droite RR_1; ce plan tangent coupe Q suivant deux droites p_1, p_2 qui représentent deux faisceaux de rayons (P_1, ϖ_1), (P_2, ϖ_2) contenant r.

Désignons par σ le plan de Σ passant par la droite RR_1 et par σ' le plan de Σ' passant par la même droite. Le plan σ représente la gerbe réglée de sommet A_0 et le plan σ' le plan réglé α_0. Comme on l'a vu, les tangentes à la variété V_3^{2n} appartenant à Q au point R sont les droites situées dans σ, σ'. Par conséquent, la droite p_1 appartient à l'un de ces plans, par exemple à σ et la droite p_2 à l'autre plan. Le point P_1 coïncide donc avec A_0 et le plan ϖ_2 avec α_0.

La surface (A_0), lieu du point singulier A_0, est appe-lée <u>surface singulière</u> du complexe Γ. On voit que :

<u>La surface singulière du complexe Γ est une nappe foca-le de la congruence singulière de ce complexe.</u>

<u>Les plans singuliers du complexe Γ sont tangents à la surface singulière du complexe aux points singuliers corres-pondants.</u>

La seconde nappe focale de la congruence singulière (τ) est le lieu du point P_2.

144. <u>Théorème de Halphen.</u> Considérons deux congru-ences de droites G, G' respectivement d'ordres m, m' et de classes n, n' et soient F, F' les surfaces dont les ordres sont respectivement $m+n$, $m'+n'$, qui les représentent sur Q. En général, les congruences G, G' ont en commun un nombre fini de droites ; le théorème de Halphen fixe ce nombre.

<u>Deux congruences de droites d'ordre m ; m' et de clas-ses n, n' ont en commun $mm' + nn'$ droites.</u>

Il revient au même de démontrer que les surfaces F, F' se rencontrent en $mm' + nn'$ points.

Soient A un point de Q n'appartenant ni à F ni à F', α l'hyperplan tangent à Q en A. Projetons Q de A sur un hyperplan S_4. Par le point A passent ∞^1 plans σ de Σ, ap-partenant à α, coupant S_4 suivant ∞^1 droites s. Par A passent de même ∞^1 plans σ' de Σ', appartenant à α, coupant S_4 suivant ∞^1 droites s'. L'hyperplan α coupe Q suivant un cône du second ordre rencontré par S_4 sui-vant une quadrique Q' dont les droites s, s' sont les géné-ratrices rectilignes des deux modes.

Les surfaces F, F' sont projetées de A sur S_4 suivant deux surfaces $\bar{F}$, $\bar{F}'$ respectivement d'ordres $m+n$, $m'+n'$. Ces deux surfaces ont en commun $(m+n)(m'+n')$ points. Ceux de ces points qui n'appartiennent pas à Q' provien-nent des points communs à F, F'. Les points qui appar-tiennent à Q' proviennent des droites passant par A qui s'appuient sur F et F'.

La surface F est rencontrée par un plan σ passant par A en m points qui se projettent sur une droite s de Q'. Un plan σ' passant par A rencontre F en n points qui se projettent sur une droite s'. La section de $\bar{F}$ par Q' est donc une courbe C d'ordre $m+n$ rencontrant les droites s en m points et les droites s' en n points. De même, la section de $\bar{F}'$ par Q' est une courbe C' rencontrant les droites s en m' points et les droites s' en n' points. Les courbes C, C' se rencontrent en $mn' + m'n$ points. Par conséquent, les points communs à F, F' sont au nombre de

$$(m+n)(m'+n') - (mn' + m'n) = mm' + nn',$$

d'où le théorème de Halphen.

Liège, le 11 février 1939.