ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

138

EXPOSES SUR L'ANALYSE MATHEMATIQUE
ET SES APPLICATIONS

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE

M. J. HADAMARD

Membre de l'Institut

II

LA THÉORIE DES SURFACES
ET
L'ESPACE RÉGLÉ

(Géométrie projective différentielle)

PAR

Lucien GODEAUX

Professeur à l'Université de Liège
Correspondant de l'Académie Royale de Belgique

PARIS
HERMANN & C^IE^, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6

—

1934

A la mémoire de mon Père.

Une surface peut être considérée soit comme lieu de ses points, soit comme lieu de ses plans tangents, soit enfin comme lieu de ses tangentes. Sous cette dernière forme, elle constitue un complexe de droites. Dans une série de notes publiées depuis 1927, nous avons systématiquement utilisé le complexe des tangentes à une surface pour obtenir des propriétés de celle-ci. Notre point de départ est d'une part les profondes recherches de M. Demoulin sur la quadrique de Lie, d'autre part un théorème obtenu par MM. Bompiani et Tzitzeica, à savoir que les tangentes en un point aux asymptotiques d'une surface se correspondent dans une transformation de Laplace. Une invitation bienveillante de M. Hadamard nous a permis d'exposer nos recherches dans la séance du 6 décembre 1932 de son Séminaire du Collège de France ; c'est le développement de cet exposé qui fait l'objet de ce travail.

C'est Darboux qui, dans ses magistrales *Leçons sur la théorie des surfaces*, a, le premier, mis en lumière le caractère projectif de la transformation de Laplace. Basées sur cette transformation, nos recherches appartiennent donc à la géométrie projective différentielle. Le lecteur trouvera les propriétés des suites de Laplace dont nous faisons usage soit dans les *Leçons* de Darboux, soit dans la *Géométrie des réseaux* de M. Tzitzeica.

Nous avons d'autre part utilisé les propriétés de l'espace réglé et la représentation de cet espace sur une hyperquadrique appartenant à un espace linéaire à cinq dimensions. On trouvera, dans le bel ouvrage que G. Koenigs a consacré à ces questions (1), toutes les indications nécessaires. Il est juste d'ajouter ici que, par son mémoire *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace*

(1) G. Koenigs, *La géométrie réglée et ses applications*, Paris, 1895.

réglé [1], G. Koenigs a fait, en Géométrie projective différentielle, œuvre de précurseur.

A la fin de ce travail, nous avons donné la liste des mémoires dans lesquels les surfaces sont envisagées comme lieux de leurs tangentes ; nous avons joint à cette liste les titres de certains mémoires où ce concept n'est pas utilisé, mais dont les résultats sont nécessaires à notre exposé [2]. Signalons que l'*Introduction à la Géométrie projective différentielle* de MM. Fubini et Cech, contient une liste très complète, arrêtée à 1929, des publications relatives à la Géométrie projective différentielle.

Il nous reste à dire quelques mots de nos notations. Nous avons représenté par f^{ik} la dérivée partielle d'une fonction $f(u, v)$ prise i fois par rapport à u et k fois par rapport à v. Nous indiquons par x^{ik} un point dont les coordonnées projectives homogènes sont les dérivées, d'après la notation précédente, de celles d'un point x dépendant de u, v. Ces notations ont été utilisées il y a plus de vingt ans par C. Segre ; elles ne sont pas conformes à celles du Calcul différentiel absolu qui, depuis, a pris un développement considérable. Nous demandons cependant au lecteur la permission de les utiliser, aucune confusion n'étant possible.

1. — Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v, dans un espace projectif ordinaire S_3. Wilczynski a montré (**72**) que l'on peut choisir le facteur de proportionnalité des coordonnées projectives homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 de manière à ce que ces coordonnées satisfassent au système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles

$$\left.\begin{aligned} x^{20} + 2\,bx^{01} + c_1x = 0\,, \\ x^{02} + 2\,ax^{10} + c_2x = 0\,, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

où a, b, c_1, c_2 sont des fonctions régulières de u, v, au sens de M. Hadamard [3]. Nous admettons donc que ces fonctions ont des

(1) *Annales de l'Ecole norm. sup.*, 1882, pp. 219-338.

(2) Les nombres en caractères gras, placés entre parenthèses dans le texte, renvoient à l'index bibliographique.

(3) *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. Leçons professées à l'Université Yale (Paris, Hermann, 1932). Voir p. 13, n° 9.

dérivées continues jusqu'à un certain ordre, d'ailleurs variable suivant les problèmes que nous considérons.

Les conditions d'intégrabilité sont

$$\left.\begin{aligned} a^{20} + c_2{}^{10} + 2\,ba^{01} + 4\,ab^{01} &= 0\,, \\ b^{02} + c_1{}^{01} + 2\,ab^{10} + 4\,ba^{10} &= 0\,, \\ c_1{}^{02} + 2\,ac_1{}^{10} + 4\,a^{10}c_1 &= c_2{}^{20} + 2\,bc_2{}^{01} + 4\,b^{01}c_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

A un point x non parabolique de la surface (x), attachons le tétraèdre ayant pour sommets les points

$$\begin{aligned} &x\,, \quad m = x\,(\log a)^{10} - 2\,x^{10}\,, \quad n = x\,(\log b)^{01} - 2\,x^{01}\,, \\ &y = [8\,ab - (\log a)^{10}\,(\log b)^{01}]\,x + 2\,x^{10}\,(\log b)^{01} \\ &\qquad + 2\,x^{01}\,(\log a)^{10} - 4\,x^{11}\,. \end{aligned}$$

Tout point de l'espace a des coordonnées de la forme

$$z_1x + z_2m + z_3n + z_4y$$

et nous dirons que les quantités z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales de ce point.

Nous avons

$$\left.\begin{aligned} 2\,x^{10} &= x\,(\log a)^{10} - m\,, \quad 2\,x^{01} = x\,(\log b)^{01} - n\,, \\ 2\,m^{10} &= \alpha x - m\,(\log a)^{10} - 4\,bn\,, \\ 2\,m^{01} &= -\,2\,k_1x + m\,(\log b)^{01} + y\,, \\ 2\,n^{10} &= -\,2\,h_1x + n\,(\log a)^{10} + y\,, \\ 2\,n^{01} &= \beta x - 4\,am - n\,(\log b)^{01}\,, \\ 2\,y^{10} &= -\,4\,b\beta x + 2\,h_1m - \alpha n - y\,(\log a)^{10}\,, \\ 2\,y^{01} &= -\,4\,a\alpha x - \beta m + 2\,k_1n - y\,(\log b)^{01}\,, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} h_1 &= -\,(\log b)^{11} + 4\,ab\,, \quad k_1 = -\,(\log a)^{11} + 4\,ab\,, \\ \alpha &= 2\,(\log a)^{20} + \overline{(\log a)}^{2\,10} + 4\,(b^{01} + c_1)\,, \\ \beta &= 2\,(\log b)^{02} + \overline{(\log b)}^{2\,01} + 4\,(a^{10} + c_2)\,. \end{aligned}$$

On en déduit les formules

$$\begin{aligned} 2\,z_1{}^{10} &= -\,z_1\,(\log a)^{10} - \alpha z_2 + 2\,h_1z_3 + 4\,b\beta z_4\,, \\ 2\,z_2{}^{10} &= z_1 + z_2\,(\log a)^{10} - 2\,h_1z_4\,, \\ 2\,z_3{}^{10} &= 4\,bz_2 - z_3\,(\log a)^{10} + \alpha z_4\,, \\ 2\,z_4{}^{10} &= -\,z_3 + z_4\,(\log a)^{10} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 2\,z_1{}^{01} &= -\,z_1\,(\log b)^{01} + 2\,k_1z_2 - \beta z_3 + 4\,a\alpha z_4\,, \\ 2\,z_2{}^{01} &= -\,z_2\,(\log b)^{01} + 4\,az_3 + \beta z_4\,, \\ 2\,z_3{}^{01} &= z_1 + z_3\,(\log b)^{01} - 2\,k_1z_4\,, \\ 2\,z_4{}^{01} &= -\,z_2 + z_4\,(\log b)^{01}\,. \end{aligned}$$

2. — Désignons par Q l'hyperquadrique d'un espace linéaire S_5 à cinq dimensions dont les points représentent les droites de l'espace S_3. Aux tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} de la surface (x) au point x correspondent des points U, V dont les coordonnées radiales sont respectivement

$$U_{ik} = x_i x_k^{10} - x_k x_i^{10}, \quad V_{ik} = x_i x_k^{01} - x_k x_i^{01} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Nous écrirons en abrégé

$$U = |x \quad x^{10}|, \quad V = |x \quad x^{01}|.$$

En tenant compte des relations (1), on a

$$U^{10} + 2\,bV = 0, \quad V^{01} + 2\,aU = 0. \tag{4}$$

La droite UV appartient à l'hyperquadrique Q et représente le faisceau des tangentes à la surface (x) au point x. Lorsque u, v varient, la droite UV engendre une variété à trois dimensions, image du complexe des tangentes à la surface (x).

Observons que si b est nul, les coordonnées du point U ne dépendent que de v. Par suite, sur la surface (x), les lignes u (sur lesquelles u varie seule) sont des droites et la surface (x) est réglée. De même, si a est nul, les lignes v de la surface (x) sont des droites. En particulier, si a et b sont nuls, la surface (x) est doublement réglée et est donc une quadrique.

Nous supposerons à l'avenir, sauf avis contraire, que les fonctions a et b ne sont pas identiquement nulles.

3. — Les points U, V sont consécutifs dans une suite de Laplace (Bompiani, **1**, Tzitzeica, II). Représentons cette suite de Laplace L par

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots, \tag{L}$$

chaque terme étant le transformé du précédent dans le sens des u. Nous avons (**17**)

$$\begin{aligned} U_n^{01} &= U_{n+1} + U_n (\log bh_1 \ldots h_n)^{01}, \\ U_n^{10} &= h_n U_{n-1}, \\ U_n^{11} &- U_n^{10} (\log bh_1 \ldots h_n)^{01} - h_n U_n = 0, \end{aligned}$$

où les quantités h sont définies par la relation

$$h_n = -(\log bh_1 \ldots h_{n-1})^{11} + h_{n-1} = -(\log b^n h_1^{n-1} \ldots h_{n-2}^2 h_{n-1})^{11} + 4\,ab$$

Ces quantités sont les invariants des équations de Laplace vérifiées par les coordonnées des points U, U_1, ... Précisément, les invariants de l'équation

$$U^{11} - U^{10} (\log b)^{01} - 4\, ab\, U = 0$$

sont $4\, ab$ et h_1. Les invariants de l'équation de Laplace vérifiée par U_n sont h_n, h_{n+1}.

On a de même

$$\begin{aligned} V_n^{10} &= V_{n+1} + V_n (\log ak_1 \ldots k_n)^{10} , \\ V_n^{01} &= k_n V_{n-1} , \\ V_n^{11} &- V_n^{01} (\log ak_1 \ldots k_n)^{10} - k_n V_n = 0 . \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} k_n = - (\log a\, k_1 \ldots k_{n-1})^{11} + k_{n-1} = \\ - (\log a^n\, k_1^{\,n-1} \ldots k^2_{\,n-2}\, k_{n-1})^{11} + 4\, ab. \end{aligned}$$

Les invariants de l'équation de Laplace

$$V^{11} - V^{01} (\log a)^{10} - 4\, ab\, V = 0$$

sont k_1 et $4\, ab$. Ceux de l'équation vérifiée par V_n sont k_n et k_{n+1}.

Dans la suite, lorsque le contraire ne sera pas spécifié, nous supposerons que la suite de Laplace L est illimitée dans les deux sens.

Observons que la suite L ne peut appartenir à un hyperplan, car alors les tangentes à la surface (x) appartiendraient à un complexe linéaire, ce qui n'est possible que si la surface est un plan, cas que nous excluons.

4. — Représentons par

$$\Omega\, (p, q) = 0$$

la condition pour que deux points p, q de S_5 soient conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q. L'équation de celle-ci est alors

$$\Omega\, (p, p) = 0.$$

Nous avons

$$\Omega\, (U, U) = 0, \quad \Omega\, (U, V) = 0, \quad \Omega\, (V, V) = 0.$$

En dérivant ces relations par rapport à v et à u, on en déduit

$$\begin{aligned} \Omega\, (U, U_1) = 0 , \quad \Omega\, (U_1, V) = 0 , \quad \Omega\, (U, V_1) = 0, \quad \Omega\, (V, V_1) = 0 , \\ \Omega\, (U_2, V) = 0 , \quad \Omega\, (U, V_2) = 0 . \end{aligned}$$

Les points images des arêtes du tétraèdre $xmny$ sur l'hyperquadrique Q sont donnés par les formules

$$
\begin{gathered}
| x \quad m | + 2\,U = 0\,, \qquad | x \quad n | + 2\,V = 0\,, \\
| x \quad y | + 2\,(U_1 + V_1) = 0\,, \\
| m \quad n | + 2\,(U_1 - V_1) = 0\,, \\
| m \quad y | - 4\,V_2 - 4\,V_1\,(\log a k_1)^{10} - 2\,\alpha V = 0\,, \\
| n \quad y | - 4\,U_2 - 4\,U_1\,(\log b h_1)^{01} - 2\,\beta U = 0\,.
\end{gathered}
$$

Les points $U_1 + V_1$, $U_1 - V_1$ appartiennent donc à Q et on a

$$\Omega\,(U_1,\ V_1) = 0.$$

En dérivant cette relation successivement deux fois par rapport à u, on a

$$\Omega\,(U_1,\ V_2) = 0, \quad \Omega\,(U_1,\ V_3) = 0.$$

Il en résulte que le pôle de l'hyperplan $UVV_1V_2V_3$ par rapport à Q est le point U_1. Par suite *La suite de Laplace* L *est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique* Q (**17**).

L'hyperplan polaire de U_n est $V_{n-2}\ V_{n-1}\ V_n\ V_{n+1}\ V_{n+2}$ et celui de V_n, $V_{n-2}\ U_{n-1}\ U_n\ U_{n+1}\ U_{n+2}$. En particulier, l'hyperplan polaire de U est $U_1UVV_1V_2$ et celui de V est $V_1VUU_1U_2$.

5. — Posons

$$\Delta = |\ x\ x^{10}\ x^{01}\ x^{11}\ | = -\frac{1}{16}\ |\ x\ m\ n\ y\ |\,,$$

où les seconds membres désignent les déterminants obtenus en affectant successivement des indices 1, 2, 3, 4 les termes écrits. Le déterminant Δ ne peut être nul puisque x n'est pas un point parabolique. On a d'autre part

$$\Delta^{10} = 0, \quad \Delta^{01} = 0,$$

donc Δ est une constante.

De la relation

$$4\,U_1 + |x \quad y| + |m \quad n| = 0,$$

on déduit

$$\Omega\,(U_1,\ U_1) = -2\,\Delta.$$

On trouve de même

$$\Omega\,(V_1,\ V_1) = 2\,\Delta.$$

Les points U_1, V_1 ne peuvent donc appartenir à l'hyperquadrique Q.

Un calcul analogue au précédent montre que l'on a

$$
\begin{gathered}
\Omega\,(U_2,\ U_2) = -2\,[\beta + \overline{(\log b h_1)^{01}}^{\,2}]\,\Delta\,, \\
\Omega\,(U_2,\ U_1) = +2\,\Delta\,(\log b h_1)^{01}, \quad \Omega\,(U_2,\ U) = 2\,\Delta\,,
\end{gathered}
$$

$$\Omega(V_2, V_2) = 2[\alpha + \overline{(\log ak_1)^{10}}^2]\Delta,$$
$$\Omega(V_2, V_1) = -2\Delta(\log ak_1)^{10}, \quad \Omega(V_2, V) = -2\Delta.$$

Ces relations permettent de trouver la liaison entre sept points consécutifs de la suite L. On a par exemple (**34**)

$$\left.\begin{aligned} &2U_3 + 2U_2(\log b^3h_1^2h_2)^{01} + 2\beta_1 U_1 + \beta(\log b^2\beta)^{01}U \\ &\qquad + 4a[\alpha V + V_1(\log ak_1)^{10} + V_2] = 0, \\ &2V_3 + 2V_2(\log a^3k_1^2k_2)^{10} + 2\alpha_1 V_1 + \alpha(\log a^2\alpha)^{10}V \\ &\qquad + 4b[\beta U + U_1(\log bh_1)^{01} + U_2] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

où l'on a posé

$$\beta_1 = \beta + (\log bh_1)^{02} + (\log bh_1)^{01}(\log b^2h_1)^{01},$$
$$\alpha_1 = \alpha + (\log ak_1)^{20} + (\log ak_1)^{10}(\log a^2k_1)^{10}.$$

La seconde des relations (5) se déduit de la première en dérivant celle-ci par rapport à u et en tenant compte de l'identité

$$a\alpha^{10} + 2\alpha a^{10} = b\beta^{01} + 2\beta b^{01},$$

conséquence des conditions d'intégrabilité (2).

6. — Tout point G de l'espace S_5 peut être représenté par

$$G = \eta_2 U_2 + \eta_1 U_1 + \eta U + \xi V + \xi_1 V_1 + \xi_2 V_2.$$

Pour que le point G appartienne à l'hyperquadrique Q, on doit avoir

$$\Omega(G, G) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\beta\eta_2^2 + [\eta_1 + \eta_2(\log bh_1)^{01}]^2 - 2\eta\eta_2 - \alpha\xi_2^2 - \\ &\qquad [\xi_1 + \xi_2(\log a k_1)^{10}]^2 + 2\xi\xi_2 = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Les quantités η, ξ peuvent être considérées comme les coordonnées locales du point G et l'équation (6) est celle de l'hyperquadrique Q.

Lorsque la relation (6) est vérifiée, le point G est l'image d'une droite g de S_3, intersection des quatre plans

$$\begin{aligned} &\eta_2[z_1(\log bh_1)^{01} + 2\beta z_3] - \eta_1 z_1 - 2\eta z_3 + 2\xi z_2 + \xi_1 z_1 \\ &\qquad - \xi_2[z_1(\log ak_1)^{10} + 2\alpha z_2] = 0, \\ &\eta_2[z_3(\log bh_1)^{01} - z_1] - \eta_1 z_3 + 2\xi z_4 - \xi_1 z_3 \\ &\qquad + \xi_2[z_3(\log ak_1)^{10} - 2\alpha z_4] = 0, \\ &\eta_2[z_2(\log bh_1)^{01} - 2\beta z_4] - \eta_1 z_2 + 2\eta z_4 - \xi_1 z_2 \\ &\qquad + \xi_2[(z_2 \log ak_1)^{10} - z_1] = 0, \\ &\eta_2[z_2 + z_4(\log bh_1)^{01}] - \eta_1 z_4 + \xi_1 z_4 - \xi_2[z_3 + z_4(\log ak_1)^{10}] = 0. \end{aligned}$$

Supposons que les quantités η, ξ dépendent de u, v mais satisfassent à l'équation (6). Le point G décrit une surface (G) appartenant à Q et la droite g décrit une congruence (g). Le plan tangent en un point G à la surface (G) est tangent à l'hyperquadrique Q et coupe donc celle-ci suivant deux droites g_1, g_2 passant par G. Les courbes de la surface (G) enveloppées par ces droites représentent les développables de la congruence (g). L'équation différentielle de ces développables est donc

$$\Omega(G^{10}, G^{10})\, du^2 + 2\,\Omega(G^{10}, G^{01})\, dudv + \Omega(G^{01}, G^{01})\, dv^2 = 0. \quad (7)$$

Les droites g_1, g_2 représentent deux faisceaux de rayons ayant en commun la droite g et dont les sommets G_1, G_2 sont les foyers de la droite g, leurs plans γ_1, γ_2 étant les plans focaux de cette droite.

Soit C une courbe tracée sur la surface (G), passant par un point G déterminé, mais sans y toucher les droites g_1, g_2 correspondantes. Aux points de C correspondent les droites d'une réglée gauche R appartenant à la congruence (g) et contenant la génératrice g homologue du point G considéré. Les tangentes à la surface R le long de g forment une congruence linéaire représentée par la section de Q par l'espace à trois dimensions conjugué, relativement à Q, de la tangente r à C en G. Cet espace est l'intersection de l'hyperplan ξ tangent à Q en G et de l'hyperplan ξ' polaire par rapport à Q d'un point P de r, distinct de G. Désignons par ρ_{11}, ρ_{12} les plans de Q images des gerbes réglées de sommets G_1, G_2 et par ρ_{21}, ρ_{22} les plans de Q images des plans réglés γ_1, γ_2. Les plans ρ_{11}, ρ_{21} se coupent suivant g_1, les plans ρ_{12}, ρ_{22} suivant g_2. Les plans ρ_{11}, ρ_{22} ayant en commun le point G, se coupent suivant une droite et appartiennent à un espace linéaire à trois dimensions. Cet espace coupe l'hyperplan ξ' suivant le plan polaire de P par rapport à la quadrique formée des plans ρ_{11}, ρ_{22}. L'hyperplan ξ' passe donc par la droite $\rho_{11}\rho_{22}$. Pour la même raison, il passe par la droite $\rho_{12}\rho_{21}$. D'autre part, l'hyperplan ξ contient les plans ρ_{11}, …, ρ_{22}. Il en résulte que la réglée R touche le plan γ_1 au point G_2 et le plan γ_2 au point G_1. Les plans tangents aux surfaces focales (G_1), (G_2) de la congruence (g) sont donc respectivement γ_2, γ_1.

Lorsque le premier membre de l'équation (7) est un carré parfait, les droites g_1, g_2 sont confondues et la droite g est la tangente asymptotique d'une surface. Cette condition est nécessaire et suffisante. Le plan tangent à la surface (G) en un point G touche l'hyperquadrique Q le long d'une droite, qui représente le faisceau des tangentes à la surface dont g est une asymptotique, au point de contact de celle-ci avec cette surface.

C'est ce qui a lieu pour les point U, V. Le plan tangent en un point U à la surface (U), par exemple, c'est-à-dire le plan U_1UV, touche l'hyperquadrique Q le long de la droite UV.

7. — Représentons par S_u, S_v les développables ayant pour arêtes de rebroussement respectivement les lignes u, v de la surface (x) ; nous les appellerons développables asymptotiques de cette surface. Les surfaces S_u sont représentées, sur Q, par les lignes u de la surface (U) et les surfaces S_v, par les lignes v de la surface (V).

Nous désignerons par R_u une surface réglée engendrée par les tangentes aux lignes u aux différents points d'une courbe v de la surface (x), par R_v une surface lieu des tangentes aux lignes v aux points d'une ligne u. Nous appellerons ces surfaces les réglées gauches asymptotiques de la surface (x). Les surfaces R_u sont représentées, sur Q, par les lignes v tracées sur la surface (U), les surfaces R_v, par les lignes u tracées sur la surface (V).

Cela étant, fixons l'attention sur un point x de la surface (x) et sur les réglées S_u, S_v, R_u, R_v relatives aux lignes u, v passant par ce point. Le complexe linéaire osculateur à la réglée S_u, le long de la droite xx^{10}, a pour image la section de Q par l'hyperplan osculateur à la ligne u de la surface (U), au point U correspondant au point x considéré. Cet hyperplan est $UVV_1V_2V_3$; il a pour pôle U_1. De même, la section de Q par l'hyperplan $VUU_1U_2U_3$ représente le complexe linéaire osculateur à S_v, le long de xx^{01}. Ces deux complexes ont en commun une congruence dont les directrices ont pour image, sur Q, les points d'intersection de cette hyperquadrique avec la droite U_1V_1, c'est-à-dire les points $|x\ y|$, $|m\ n|$. Les directrices en question sont donc les arêtes xy, mn du tétraèdre que nous avons attaché au point x. Ce sont les directrices de Wilczynski de la surface (x).

La demi-quadrique osculatrice à la réglée R_u le long de la droite xx^{10} a pour image, sur Q, la section de cette hyperquadrique par le plan osculateur UU_1U_2 au point U homologue de x, à la ligne v passant par ce point et tracée sur la surface (U). De même, la demi-quadrique osculatrice à la surface R_v le long de la droite xx^{01} a pour image la section de Q par le plan VV_1V_2. Mais les plans UU_1U_2, VV_1V_2 sont conjugués par rapport à Q, donc ces deux quadriques ont même support Φ. C'est là un théorème énoncé sans démonstration par Lie ; M. Demoulin en a donné deux démonstrations (**6**) ; celle qui précède coïncide en substance avec l'une de ces démonstrations.

Le quadrique Φ est la quadrique de Lie attachée au point x. Elle a pour équation, en coordonnées locales,

$$z_1z_4 + z_2z_3 = 0. \qquad (\Phi)$$

Les sommets du tétraèdre $xmny$ sont les points d'intersection de la quadrique de Lie avec les directrices de Wilczynski xy, mn. Ce tétraèdre est inscrit dans la quadrique.

8. — Nous allons maintenant indiquer une propriété de certaines séries de quadriques (**31**).

Soit X_0 un point de S_5 dont les coordonnées dépendent de deux paramètres u, v et satisfont à une équation de Laplace. Il appartient à une suite de Laplace que nous écrirons

$$\ldots,\ X_{-n},\ \ldots,\ X_{-1},\ X_0,\ X_1,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots, \qquad \text{(I)}$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des v. On sait que le point Y_0, pôle de l'hyperplan $X_{-2}X_{-1}X_0X_1X_2$ par rapport à Q, décrit un réseau conjugué ; il appartient à une suite de Laplace.

$$\ldots,\ Y_{-n},\ \ldots,\ Y_{-1},\ Y_0,\ Y_1,\ \ldots,\ Y_n, \qquad \text{(II)}$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des v. La suite (II) est la polaire de la suite (I) par rapport à Q ; le point Y_n est le pôle de l'hyperplan $X_{-n-2}\ X_{-n-1}\ X_{-n}\ X_{-n+1}\ X_{-n+2}$ (n positif ou négatif).

Les plans $X_{n-1}\ X_n\ X_{n+1}$ et $Y_{-n-1}\ Y_{-n}\ Y_{-n+1}$ étant conjugués par rapport à Q, coupent cette hyperquadrique suivant deux coniques représentant dans S_3 deux demi-quadriques ayant même support Θ_n. On obtient ainsi une suite de quadriques dépendant de deux paramètres u, v, n prenant toutes les valeurs entières.

Deux quadriques consécutives de la suite, par exemple Θ_n,

Θ_{n-1}, ont en commun les quatre droites représentées, sur Q, par les intersections de cette hyperquadrique avec les droites $X_{n-1}\, X_n$, $Y_{-n+1}\, Y_{-n}$. Par suite, deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points.

Dans l'espace S_3, l'équation de la quadrique Θ_n aura pour coefficients les déterminants à neuf éléments tirés de la matrice à six lignes et trois colonnes formée avec les coordonnées des points X_{n-1}, X_n, X_{n+1}. Nous représenterons l'un de ces déterminants par $|X_{n-1}\, X_n\, X_{n+1}|$ et nous écrirons l'équation de Θ_n dans la forme

$$\Sigma x_i x_k |X_{n-1}\ X_n\ X_{n+1}| = 0. \tag{8}$$

Mais on parviendra à la même équation en partant des points Y_{-n-1}, Y_{-n}, Y_{-n+1} et l'équation de Θ_n pourra également s'écrire

$$\Sigma x_i x_k |Y_{-n+1}\ Y_{-n}\ Y_{-n-1}| = 0. \tag{9}$$

Pour avoir les points caractéristiques de la quadrique Θ_n lorsque u, v varient, dérivons (8) et (9) en premier lieu par rapport à v. Nous obtenons, en tenant compte de ces équations :

$$\Sigma\, x_i x_k \,|\, X_{n-1}\, X_n\, \overset{01}{X}_{n+1} \,| = 0\,, \quad \Sigma\, x_i x_k \,|\, \overset{01}{Y}_{-n+1}\, Y_{-n}\, Y_{-n-1} \,| = 0.$$

Ceci montre qu'en dérivant l'équation de Θ_n par rapport à v, on obtient une quadrique représentée, dans l'espace S_5, par deux plans conjugués par rapport à Q et passant l'un par $X_{n-1}\, X_n$, l'autre par $Y_{-n}\, Y_{-n-1}$. De même, en dérivant l'équation de Θ_n par rapport à u, on obtiendra une quadrique représentée, dans S_5, par deux plans conjugués par rapport à Q, passant l'un par $X_n\, X_{n+1}$, l'autre par $Y_{-n+1}\, Y_{-n}$. Par suite, les huit points caractéristiques de la quadrique Θ_n sont ses points de contact avec les quadriques Θ_{n-1}, Θ_{n+1}.

On observera que ce raisonnement est toujours applicable, même si la quadrique Θ_n était dégénérée.

A une suite de Laplace de l'espace S_5 (et à sa polaire par rapport à l'hyperquadrique Q) correspond dans S_3 une suite de quadriques telle que deux quadriques consécutives se touchent en quatre points, caractéristiques pour les deux quadriques.

9. — Appliquons ce théorème à la suite L. Les plans $U_n\, U_{n+1}\, U_{n+2}$, $V_n\, V_{n+1}\, V_{n+2}$, conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q, représentent une quadrique Φ_n de S_3. *Au point* x *de la surface* (x) *est attachée une suite de quadriques Φ, Φ_1, ... dont la première est la quadrique de Lie, telle que deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points, caractéristiques pour ces deux quadriques.*

Examinons l'enveloppe de la quadrique de Lie Φ lorsque u, v varient. Les droites UU_1, VV_1 étant tangentes à Q respectivement en U, V, le point x absorbe quatre points caractéristiques de la quadrique de Lie. La quadrique de Lie a donc au plus cinq points caractéristiques distincts, déterminés sur cette quadrique par les couples de plans.

$$z_3^2 + \alpha z_4^2 = 0, \; z_2^2 + \beta z_4^2 = 0,$$

passant respectivement par les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} de la surface (x). Ces couples de plans découpent sur Φ, en dehors des tangentes asymptotiques, les côtés du quadrilatère gauche commun aux quadriques Φ, Φ_1 ; ces côtés sont les tangentes flecnodales des réglées gauches asymptotiques R_u, R_v relatives au point x. Ce quadrilatère ayant pour sommets les quatre points caractéristiques de la quadrique de Lie distincts du point x, est appelé quadrilatère de Demoulin ; c'est ce géomètre qui a le premier étudié l'enveloppe de la quadrique de Lie et établi les propriétés précédentes (**5**). Nous avons introduit la considération des quadriques Φ_1, Φ_2, ... (**17**). L'équation locale de la quadrique Φ_1 est

$$z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2 - \frac{1}{2a}\beta(\log b^2\beta)^{01}(z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0 .$$

En vertu de la relation

$$a\alpha(\log a^2\alpha)^{10} = b\beta(\log b^2\beta)^{01}, \tag{10}$$

l'équation de Φ_1 est symétrique en α, β.

10. — M. Demoulin a étudié les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques (**5**, **12**), étude que nous avons poursuivie en utilisant la suite L (**18**, **34**, **40**) et que nous allons résumer.

Supposons que les quadriques de Lie de la surface (x) n'aient que deux points caractéristiques. Les droites U_1U_2, V_1V_2 doivent être tangentes à l'hyperquadrique Q et, puisque les points U_1, V_1 ne peuvent appartenir à Q, les points de contact ne peuvent être que U_2, V_2. Ces points ne peuvent coïncider, car alors la suite L aurait la période cinq et l'hyperplan polaire de U_1 par rapport à Q contiendrait ce point, ce qui est impossible. Pour la même raison, les points U_1, U_2, V_1, V_2 ne peuvent être situés dans un même plan.

Le plan $U_1U_2U_3$, tangent à la surface (U_2) en U_2 et le plan $V_1V_2V_3$, tangent à (V_2) au point V_2, sont tangents à Q et coupent cette hyperquadrique suivant deux droites distinctes ou coïncidentes. L'espace linéaire à trois dimensions $U_1U_2V_1V_2$ coupe Q suivant une quadrique. Le plan polaire de U_1 par rapport à cette quadrique passe par U_2, V_2, V_1 et le plan polaire de V_1 passe par V_2, U_2, U_1. Or, la droite U_2V_2 appartient à Q et la quadrique considérée est donc formée de deux plans passant par U_2V_2. Par suite, les plans $U_1U_2V_2$, $V_1V_2U_2$ touchent Q le long de cette droite. Il en résulte que les points U_2, V_2 représentent les tangentes asymptotiques de l'enveloppe de la quadrique de Lie Φ, au second point caractéristique de celle-ci. De plus, le point U_3 coïncide avec V_2 et le point V_3 avec U_2 ; la suite L a la période six.

Les équations (5) doivent être identiques, ce qui entraîne

$$\begin{gathered}\alpha = 0, \ \beta = 0, \\ U_3 + 2\,a\,V_2 = 0, \ \ V_3 + 2\,b\,U_2 = 0.\end{gathered} \tag{11}$$

Des relations (11), on déduit

$$(\log bh_1)^{01} = 0, \ (\log ak_1)^{10} = 0, \ h_2 = h_1, \ k_2 = k_1.$$

De plus, on a

$$U_2^{01} + U_2(\log b)^{01} + 2a\,V_2 = 0, \ V_2^{10} + V_2(\log a)^{10} + 2b\,U_2 = 0.$$

Si y' est le second point caractéristique de Φ, les surfaces (x), (y') ont même quadrique de Lie Φ et mêmes directrices de Wilczynski xy, mn. Il en résulte que le point y' coïncide avec y. La surface (y) a pour asymptotiques les lignes u, v ; les tangentes aux lignes u sont représentées par les points V_2, les tangentes aux lignes v par les points U_2. On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} y^{20} + y^{10}\left(\log\frac{a}{h_1}\right)^{10} + 2\,b\,\frac{h_1}{k_1}\,y^{01} + \Big[\frac{1}{2}\,(\log a)^{20} + \frac{1}{4}\,\overline{(\log a)^{10}}^{2} \\ - \frac{1}{2}\,(\log a)^{10}\,(\log h_1)^{10} + b\,\frac{h_1}{k_1}\,(\log b)^{01}\Big]\, y = 0\,, \end{aligned}$$

$$y^{02}+y^{01}\left(\log\frac{b}{k_1}\right)^{01}+2a\frac{k_1}{h_1}y^{10}+\left[\frac{1}{2}(\log b)^{02}+\frac{1}{4}\overline{(\log b)^{01}}^{2}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}(\log b)^{01}(\log k_1)^{01}+a\frac{k_1}{h_1}(\log a)^{10}\right]y=0\,.$$

La quadrique Φ_1 se réduit au plan ymn, tangent à la surface (y) en y, compté deux fois.

Une surface dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques donne lieu, dans l'espace S_5, à une suite de Laplace L *de période six, si par hypothèse cette suite est illimitée dans les deux sens. La surface et la seconde nappe de l'enveloppe ont mêmes quadriques de Lie et mêmes directrices de Wilczynski. Les asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces.*

Au point U_2 correspond la droite yn et au point V_2 la droite ym.

11. — Les directrices de Wilczynski xy, mn des surfaces (x), (y) donnent lieu à une configuration intéressante.

Supposons en premier lieu que $(\log a)^{11}$ et $(\log b)^{11}$ ne soient pas égales. Les développables des congruences (xy), (mn) sont données par $u=c^{te}$, $v=c^{te}$.

Les foyers p, q de la droite xy sont donnés par

$$p=y+2\,h_1x,\quad q=y+2\,k_1x$$

et on a

$$2\,(h_1-k_1)\,p^{10}-[(h_1+k_1)\,(\log a)^{10}+2\,h_1{}^{10}]\,p$$
$$+2\,h_1\,(\log ah_1)^{10}\,q=0\,,$$
$$2\,(k_1-h_1)\,q^{01}-[(k_1+h_1)\,(\log b)^{01}+2\,k_1{}^{01}]\,q$$
$$+2\,k_1\,(\log bk_1)^{01}\,p=0\,.$$

Les foyers de la droite mn sont les points m, n et on a

$$2\,m^{10}+m\,(\log a)^{10}+4\,bn=0\,,$$
$$2\,n^{01}+n\,(\log b)^{01}+4\,am=0\,.$$

Les points p, q appartiennent à une suite de Laplace

$$\ldots,\ p_i,\ \ldots,\ p_1,\ p,\ q,\ q_1,\ \ldots,\ q_i,\ \ldots,\qquad\text{(I)}$$

et les points m, n à une suite de Laplace

$$\ldots,\ m_i,\ \ldots,\ m_1,\ m,\ n,\ n_1,\ \ldots,\ n_i,\ \ldots\qquad\text{(II)}$$

Dans chacune de ces suites, un point est le transformé du précédent dans le sens des u.

On trouve aisément les relations

$$m_1 = y - 2\,h_1 x \ , \quad n_1 = y - 2\,k_1 x \ .$$
$$p_1 = p + n\,(\log a h_1)^{10} \ , \quad q_1 = q + m\,(\log b k_1)^{01} \ .$$

Il en résulte que la suite (II) est doublement inscrite dans la suite (I). Le point m appartient aux droites qq_1 et p_1p_2 ; le point m_1 aux droites pq et p_2p_3 ; le point m_i aux droites $p_{i-1}\,p_{i-2}$ et $p_{i+1}\,p_{i+2}$. De même, le point n appartient aux droites pp_1 et q_1q_2 ; le point n_1 aux droites qp et q_2q_3 ; le point n_i aux droites $q_{i-1}\,q_{i-2}$ et $q_{i+1}\,q_{i+2}$.

De plus, on a

$$(x\,y\,p\,m_1) = -1, \quad (x\,y\,q\,n_1) = -1.$$

Si l'on pose

$$\overline{m} = m\sqrt{a} \ , \quad \overline{n} = n\sqrt{b}\,,$$

on trouve

$$\overline{m}^{10} + 2\sqrt{ab}\,\overline{n} = 0\,, \quad \overline{n}^{01} + 2\sqrt{ab}\,\overline{m} = 0$$

et *la congruence (*mn*) est une congruence de Goursat* (**71**).

Inversement (**20**), partons d'une congruence de Goursat (mn) dont les foyers m, n satisfont aux relations

$$m^{10} + \varphi n = 0, \quad n^{01} + \varphi m = 0.$$

Soient

$$m_1 = m^{01} - m\,(\log \varphi)^{01}, \quad n_1 = n^{10} - n\,(\log \varphi)^{10}.$$

Si les développables de la congruence (m_1n_1) sont données par $u = c^{te}$, $v = c^{te}$ et si p, q sont les foyers de la droite m_1n_1, les points doubles x, y de l'involution déterminée sur une droite m_1n_1 par les couples pm_1, qn_1, décrivent deux surfaces (x), (y) ayant mêmes quadriques de Lie, ces quadriques n'ayant pas d'autre point caractéristique que x, y.

Supposons maintenant que l'on ait

$$(\log a)^{11} = (\log b)^{11}.$$

Les surfaces (x), (y) sont isothermo-asymptotiques. La droite xy passe par le point fixe $p = y + h_1 x$ et la droite mn appartient à un plan fixe ϖ. Les surfaces (x), (y) se correspondent dans une homologie harmonique de centre p et de plan ϖ (**45**). C'est le seul cas où deux surfaces ayant mêmes quadriques de Lie sont projectivement applicables.

12. — Certaines des propriétés dont il est question au n° 10 peuvent s'étendre. Bornons-nous à les signaler.

Si la suite de Laplace L est périodique, sa période est paire. Si les droites $U_{n-1}U_n$, $V_{n-1}V_n$ sont tangentes à Q respectivement aux points U_n, V_n (sans appartenir à cette hyperquadrique), U_{n+1} coïncide avec V_n et, par suite, V_{n+1} avec U_n ; la suite L a la période $2n+2$. Les points U_n, V_n représentent les tangentes asymptotiques d'une surface dont les quadriques de Lie sont les quadriques Φ_{n-2} attachées à la surface (x).

Il importe de remarquer que les conditions imposées alors à la surface (x) peuvent être contradictoires. Nous avons pu démontrer (**51**) que l'on ne peut avoir $n=3$ ou, en d'autres termes, qu'il ne peut exister de surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin. Il est probable que l'on ne peut avoir $n>2$.

13. — Proposons-nous d'étudier les surfaces (x) dont les quadriques de Lie Φ n'ont que trois points caractéristiques, étude commencée par M. Demoulin (**5**).

Dans l'hypothèse envisagée, l'une des droites U_1U_2, V_1V_2 est tangente à l'hyperquadrique Q ; supposons que ce soit la première, le point de contact étant U_2. Désignons par D_1, D_2 les points de rencontre de la droite V_1V_2 avec Q.

L'hyperplan $VV_1V_2V_3V_4$, polaire du point U_2 par rapport à Q, contient les points U_1, U_2, U_3 et coupe Q suivant un cône de sommet U_2. Le plan $V_1V_2V_3$, conjugué du plan $U_1U_2U_3$, passe par le sommet de ce cône ; les points U_2, V_1, V_2, V_3 sont donc coplanaires. Le plan $V_1V_2V_3$ coupe Q suivant les droites U_2D_1, U_2D_2 et la quadrique Φ_1 est donc dégénérée en deux plans distincts.

Désignons d_1, d_2 les droites de S_3 représentées sur Q par D_1, D_2 ; par d la droite représentée par U_2. Les points caractéristiques de la quadrique de Lie Φ sont, outre le point x, les points $R_1=dd_1$, $R_2=dd_2$. La quadrique Φ_1 est formée des plans $\rho_1=dd_1$, $\rho_2=dd_2$. Les droites U_2D_1, U_2D_2 représentent les faisceaux de rayons de sommets R_1, R_2 et de plans ρ_1, ρ_2.

Si l'on exprime que la droite U_1U_2 est tangente à Q en U_2, on a

$$\Omega(U_2, U_2)=0, \quad \Omega(U_1, U_2)=0,$$

c'est-à-dire

$$\beta=0, \quad (\log bh_1)^{01}=0.$$

La seconde condition est d'ailleurs une conséquence de la première, car on a

$$\beta^{10} = -2\ h_1\ (\log\ bh_1)^{01}$$

et, par hypothèse, h_1 n'est pas nulle. On a, en outre, $h_2 = h_1$.

Les équations (5) deviennent

$$U_3 + 2a\,[\alpha V + V_1\,(\log ak_1)^{10} + V_2] = 0\,,$$
$$V_3 + V_2\,(\log a^3k_1^2k_2)^{10} + \alpha_1 V_1 + 2\,bU_2 = 0\,.$$

On voit donc que le point U_3 appartient au plan VV_1V_2 et, comme nous l'avons déjà reconnu, le point U_2 au plan $V_1V_2V_3$. Il en résulte que le point U_n ($n \geqslant 0$) appartient au plan $U_{n-4}\ U_{n-5}\ U_{n-6}$, le point U_5 au plan U_1UV, le point U_4 au plan UVV_1, le point U au plan $V_3V_4V_5$, le point V_n au plan $V_{n+4}\ V_{n+5}\ V_{n+6}$. La suite L est donc en quelque sorte circonscrite à elle-même, chaque point de cette suite appartenant au plan déterminé par trois autres.

Les points D_1, D_2 sont donnés par

$$D_1 = V_1^{10} + \varphi V_1,\ \ D_2 = V_1^{10} - \varphi V_1,$$

où φ est une racine de l'équation

$$\varphi^2 + \alpha = 0.$$

Un calcul simple montre que les points D_1, D_2 décrivent des réseaux conjugués à la congruence (V_1V_2) et que, de plus, le plan tangent en D_1 à la surface (D_1) [ou en D_2 à la surface (D_2)] touche l'hyperquadrique Q suivant la droite D_1U_2 (ou $D_2\ U_2$). La droite $D_1\ U_2$ (ou $D_2\ U_2$) est tangente à la ligne u de la surface (D_1) [ou (D_2)]. Par suite, les droites d_1, d_2 sont des tangentes asymptotiques respectivement des surfaces (R_1), (R_2) et sur ces surfaces, les lignes u sont des asymptotiques.

La droite V_2V_3 coupe l'hyperquadrique Q en des points situés sur les droites D_1U_2, D_2U_2.

Nous allons fixer l'attention sur la surface (R_1), les propriétés de la surface (R_2) étant analogues. Désignons par $\overline{V}$ le point de rencontre des droites V_2V_3, D_1U_2 et, pour uniformiser les notations, représentons le point D_1 par $\overline{U}$. Un calcul simple montre que les lignes u, v forment un réseau conjugué sur la surface $(\overline{V})$ et que le plan tangent à cette surface en $\overline{V}$ touche Q le long de la droite $\overline{V}\,\overline{U}$. De plus, cette droite est tangente en $\overline{V}$ à la courbe v située sur cette surface. Il en résulte que les lignes v sont des asymptotiques de la surface (R_1).

Si les quadriques de Lie d'une surface n'ont que trois points caractéristiques, il y a conservation des asymptotiques sur les trois nappes de l'enveloppe (**22**).

14. — Les points $\overline{U}$, $\overline{V}$ sont consécutifs dans une suite de Laplace que nous écrirons

$$\ldots, \overline{U_m}, \ldots, \overline{U}, \overline{V}, \ldots, \overline{V_m}, \ldots, \qquad (\overline{L})$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u. La suite $(\overline{L})$ est à la fois inscrite dans la suite (L) et circonscrite à cette suite. Le point $\overline{V}$ appartenant à la droite V_2V_3 et le point $\overline{U}$ à la droite V_1V_2, le point $\overline{U}_1$ appartient à la droite VV_1, le point $\overline{U}_2$ à la droite UV, ... D'autre part, la droite $\overline{U}\overline{V}$ passant par U_2, la droite $\overline{V}\overline{V}_1$ passe par U_1, la droite $\overline{V}_1\overline{V}_2$ par U, ...

Désignons par $\overline{\Phi}$ la quadrique de Lie attachée au point R_1 à la surface (R_1). Elle est représentée, dans S_5, par les plans $\overline{U}\overline{U}_1\overline{U}_2$, $\overline{V}\overline{V}_1\overline{V}_2$ conjugués par rapport à Q. Les points caractéristiques de la quadrique $\overline{\Phi}$, distincts de R_1, sont les sommets du quadrilatère dont les droites sont représentées par les intersections de Q avec les droites $\overline{U}_1\overline{U}_2$, $\overline{V}_1\overline{V}_2$. La première appartient au plan UVV_1, qui touche Q le long de la droite UV, donc $\overline{U}_1\overline{U}_2$ est tangente à Q en $\overline{U}_2$. La droite $\overline{V}_1\overline{V}_2$ passe par U ; si elle était tangente à Q en ce point, les quadriques $\overline{\Phi}$ n'auraient que deux points caractéristiques et coïncideraient avec les quadriques Φ, ce qui est impossible. Il en résulte que les quadriques $\overline{\Phi}$ ont trois points caractéristiques.

Les quadriques de Lie d'une surface et les quadriques de Lie d'une nappe de l'enveloppe des premières, ont le même nombre de points caractéristiques (**27**).

Les foyers de la directrice de Wilczynski xy de la surface (x) sont

$$p = y + 2\,h_1x, \quad q = y + 2\,k_1x.$$

Les foyers de la droite mn sont le point n et le point

$$m' = 2\,(h_1 - k_1)\,m + \alpha n.$$

Supposons les quantités $(\log a)^{11}$, $(\log b)^{11}$ distinctes ; les points p, q et m, n sont distincts et on a

$$2(k_1 - h_1)q^{01} + [2a\alpha - (h_1 + k_1)(\log b)^{01} - 2k_1^{01}]q + 2[k_1(\log bk_1)^{01} - a\alpha]p = 0,$$

$$2(h_1 - k_1)n^{01} + [(h_1 - k_1)(\log b)^{01} - 2a\alpha]n + 2am = 0.$$

p est le transformé de Laplace de q dans le sens des v et m, celui de n dans le même sens. Si n_1 est le transformé de Laplace de n dans le sens de u, la droite nn_1 rencontre la droite xy au point $y - 2h_1x$. Les plans focaux de la droite mn coupent la droite xy aux points $y - 2h_1x$, $y - 2k_1x$.

Supposons maintenant

$$(\log a)^{11} = (\log b)^{11},$$

d'où $h_1 = k_1$. Les foyers des droites xy sont confondus ; celui de la droite xy est $y + 2h_1x$, celui de la mn est n. Les points p, n décrivent des surfaces sur lesquelles les lignes v sont des asymptotiques, les tangentes à ces lignes étant respectivement les droites xy, mn.

Dans tous les cas, les directrices de Wilczynski s'appuient sur la droite d, joignant les points R_1, R_2. Cette droite d engendre une congruence W, conformément d'ailleurs à un théorème classique de Darboux.

15. — Avant d'étudier les surfaces pour lesquelles les quadriques de Lie ont cinq points caractéristiques, telles que les asymptotiques soient conservées sur les différentes nappes de l'enveloppe, nous étudierons les congruences W.

Soit (j) une droite engendrant une congruence W dont la surface (x) est une nappe focale. D'après un théorème de Darboux, le point J qui représente la droite j sur Q satisfait à une équation de Laplace. Il résulte de plus d'un théorème de M. Demoulin (**9**) que si ce point, qui appartient à la droite UV, est représenté par

$$J = \lambda U - \mu V,$$

on a

$$\lambda^{01} + 2a\mu = 0, \quad \mu^{10} + 2b\lambda = 0. \tag{12}$$

Le point J satisfait alors à l'équation de Laplace

$$J^{11} - J^{10}\,(\log\mu)^{01} - J^{01}\,(\log\lambda)^{10} + [(\log\lambda)^{10}\,(\log\mu)^{01} - 4\,ab]\,J = 0.$$

Le point J appartient à une suite de Laplace que nous écrirons

$$\ldots,\ J_n,\ \ldots,\ J_1,\ J,\ J_{-1},\ \ldots,\ J_{-n},\ \ldots, \qquad (\mathcal{J})$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u. La suite $(\mathcal{J})$ est inscrite dans la suite (L); le point J_n appartient à la droite $U_{n-1}\,U_n$, le point J_{-n} à la droite $V_{n-1}\,V_n$.

Les équations (12) sont précisément les mêmes que celles auxquelles satisfont les coordonnées des points U, V. Cela étant, considérons un espace linéaire à six dimensions S_6 dont une des faces de la pyramide de référence soit l'espace S_5 déjà considéré. Soient, dans cet espace, $\mathfrak{U}$ un point dont les coordonnées sont celles de U et μ, $\mathfrak{V}$ un point dont les coordonnées sont celles de V et λ. Les points $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ sont consécutifs dans une suite de Laplace $\mathcal{L}$. La projection de cette suite sur S_5, à partir du sommet opposé de la pyramide de référence, est la suite (L). D'autre part, la droite $\mathfrak{U}\,\mathfrak{V}$ coupe S_5 au point J et la section de $\mathcal{L}$ par l'espace S_5 est donc la suite $(\mathcal{J})$. On a donc

$$J_n = \mu_{n-1}\,U_n - \mu_n\,U_{n-1}, \quad J_{-n} = \lambda_{n-1}\,V_n - \lambda_n\,V_{n-1},$$

où μ_n, λ_n se définissent par les relations

$$\mu_n = \mu_{n-1}{}^{01} - \mu_{n-1}\,(\log bh_1 \ldots h_{n-1})^{01},\ \mu_n{}^{10} = h_n\mu_{n-1},$$
$$\lambda_n = \lambda_{n-1}{}^{10} - \lambda_{n-1}\,(\log ak_1 \ldots k_{n-1})^{10},\ \lambda_n{}^{01} = k_n\,\lambda_{n-1},$$

analogues à celles qui servent à former les coordonnées des points U_n, V_n.

Le second foyer de la droite j est le point $\overline{x}$ défini par

$$\sqrt{\rho}\;\overline{x} = \left[\lambda\left(\log\frac{a}{\lambda}\right)^{10} - \mu\left(\log\frac{b}{\mu}\right)^{01}\right] x - \lambda m + \mu n,$$

où l'on a posé

$$\rho = 2\,\lambda\lambda^{20} - 2\,\mu\mu^{02} - \overline{\lambda^{10}}^{2} + \overline{\mu^{01}}^{2} + 4\,\lambda^2\,(b^{01} + c_1) - 4\,\mu^2\,(a_1{}^{10} + c_2).$$

Les asymptotiques de la surface $(\overline{x})$ sont les lignes u, v et on a

$$\overline{x}^{20} - \frac{\mu}{\lambda}\left(\log\frac{\rho}{\mu}\right)^{10}\overline{x}^{01} + \overline{c}_1\,\overline{x} = 0,$$

$$\bar{x}^{02} - \frac{\lambda}{\mu}\left(\log\frac{\rho}{\mu}\right)^{01}\bar{x}^{10} + \bar{c}_2\,\bar{x} = 0\,,$$

où $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ dépendent de a, b, c_1, c_2, λ, μ.

Désignons par

$$\overline{\mathrm{U}} = |\,\bar{x}\,\bar{x}^{10}\,|\,,\quad \overline{\mathrm{V}} = |\,\bar{x}\,\bar{x}^{01}\,|$$

les points de Q qui représentent les tangentes asymptotiques de la surface $(\bar{x})$. On a

$$\overline{\mathrm{U}}^{10} = \frac{\mu}{\lambda}\left(\log\frac{\rho}{\mu}\right)^{10}\overline{\mathrm{V}}\,,\ \overline{\mathrm{V}}^{01} = \frac{\lambda}{\mu}\left(\log\frac{\rho}{\lambda}\right)^{01}\overline{\mathrm{U}}\,.$$

Les points $\overline{\mathrm{U}}$, $\overline{\mathrm{V}}$ sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$\ldots,\overline{\mathrm{U}}_n,\ldots,\overline{\mathrm{U}}_1,\overline{\mathrm{U}},\overline{\mathrm{V}},\overline{\mathrm{V}}_1,\ldots,\overline{\mathrm{V}}_n,\ldots \qquad (\overline{\mathrm{L}})$$

dans laquelle est inscrite la suite $(\mathcal{J})$.

Le point P, pôle de l'hyperplan $\mathrm{J}_{-2}\,\mathrm{J}_{-1}\,\mathrm{J}\,\mathrm{J}_1\,\mathrm{J}_2$ par rapport à Q est donné par

$$\mathrm{P} = \lambda\,(\mathrm{U} - \overline{\mathrm{U}}) = \mu\,(\mathrm{V} - \overline{\mathrm{V}}).$$

En effet, ce point appartient à une suite de Laplace

$$\ldots,\ \mathrm{P}_n,\ \ldots,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P},\ \mathrm{P}_{-1},\ \ldots,\ \mathrm{P}_{-n},\ \ldots \qquad (\mathcal{P})$$

polaire de la suite $(\mathcal{J})$ par rapport à Q ; cette suite est donc circonscrite aux suites (L), $(\overline{\mathrm{L}})$.

Dans les suites $(\overline{\mathrm{L}})$, $(\mathcal{P})$, chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. Le point P_n est le pôle de l'hyperplan $\mathrm{J}_{-n+2}\ldots\ \mathrm{J}_{-n-2}$.

Les plans $\mathrm{J}_{n-1}\,\mathrm{J}_n\,\mathrm{J}_{n+1}$, $\mathrm{P}_{-n-1}\,\mathrm{P}_{-n}\,\mathrm{P}_{-n+1}$, conjugués par rapport à Q, représentent une quadrique Ψ_n de S_3. On obtient ainsi une suite de quadriques (pour n prenant toutes les valeurs entières, positives, nulle ou négatives) telle que deux quadriques consécutives se touchent en quatre points, qui sont des points caractéristiques des deux quadriques (**32**). La quadrique Ψ (pour $n = 0$) dégénère en deux plans : les plans focaux de la droite j. Considérée comme quadrique-enveloppe, elle dégénère en deux gerbes de rayons ayant pour sommets les foyers de la droite j.

A toute congruence W *est attachée une suite de quadriques telle que deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points, caractéristiques pour chacune de ces quadriques.*

16. — Le complexe linéaire osculateur à la congruence (j) le long de la droite j est représenté par l'hyperplan $J_{-2} \ldots J_2$, de pôle P. La polarité par rapport à ce complexe linéaire est représentée, dans S_5, par l'homologie harmonique de centre P et d'hyperplan $J_{-2} \ldots J_2$.

Les points U et $\overline{U}$ sont homologues dans cette homologie, par suite les plans UU_1U_2, $\overline{U}\overline{U}_1\overline{U}_2$, qui se coupent suivant la droite J_1J_2. sont également homologues dans cette homologie. Il en est de même des plans VV_1V_2, $\overline{V}\overline{V}_1\overline{V}_2$. Les plans $\overline{U}\overline{U}_1\overline{U}_2$, $\overline{V}\overline{V}_1\overline{V}_2$ représentent la quadrique de Lie $\overline{\Phi}$ attachée au point $\overline{x}$ à la surface (x). Les quadriques Φ, $\overline{\Phi}$ ont en commun les quatre droites représentées sur Q par les intersections de cette hyperquadrique avec les droites J_1J_2, $J_{-1}J_{-2}$; par suite ces quadriques se touchent en quatre points. *Elles sont de plus polaires réciproques par rapport au complexe linéaire osculateur à la congruence* (j) *le long de la droite* $j = x\overline{x}$. Cette dernière propriété est due à M. Demoulin (**11**), qui l'avait obtenue par une voie différente (cf. **28**).

On remarquera que cette propriété ne peut s'étendre aux autres quadriques des suites que nous avons attachées à (x), $(\overline{x})$. Le point P_n, par exemple, est l'intersection des droites $U_{n-1}\,\overline{U}_{n-1}$, $U_n\,\overline{U}_n$, mais le point J_n, que les droites $U_{n-1}\,U_n$, $\overline{U}_{n-1}\,\overline{U}_n$ ont en commun, n'appartient pas à l'hyperplan polaire de P_n par rapport à Q.

17. — Supposons que l'on nous donne deux congruences W, soient (j), (j'), ayant pour surface focale commune (x). Nous adopterons, pour les éléments déduits de la seconde congruence, les mêmes notations que pour la première, mais accentuées. Nous aurons donc deux nouvelles suites de Laplace de S_5, $(\mathcal{J}')$, $(\mathcal{L}')$, polaires par rapport à Q, la première inscrite dans (L), $(\overline{L})$, la seconde circonscrite à ces suites.

Les droites JJ_{-1} et $J'J'_{-1}$, situées dans le plan UVV_1, se coupent en un point A et de même, les droites $J\,J_1$, $J'J'_1$ se coupent en un point B. Lorsque u varie seule, les droites $J\,J_1$, $J'J'_1$ engendrent des développables dont les plans tangents sont respectivement JJ_1J_{-1}, $J'J'_1J'_{-1}$, qui se coupent suivant la droite BA. Cette droite est donc tangente à la ligne u tracée sur la surface (B). De même, la droite AB est tangente à la ligne v tracée sur la surface (A). Il en résulte que les points A, B se succèdent dans une suite de Laplace

$$\ldots, B_n, \ldots, B_1, B, A, A_1, \ldots, A_n, \ldots, \qquad (\mathcal{D})$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u. La suite $(\mathcal{D})$ est inscrite dans les suites $(\mathcal{J})$, $(\mathcal{J}')$; le point B_n est l'intersection des droites $J_n\, J_{n+1}$ et $J'_n\, J'_{n+1}$, le point A_n celui des droites $J_{-n}\, J_{-n-1}$, $J'_{-n}\, J'_{-n-1}$.

Représentons par

$$\ldots, A'_n, \ldots, A'_1, A', B', B'_1, \ldots, \ldots B'_n, \ldots \qquad (\mathcal{D}')$$

la suite polaire de $(\mathcal{D})$ par rapport à Q. Chaque point de cette suite est le transformé du précédent dans le sens des u et A'_n est le pôle de l'hyperplan $A_{n-2} \ldots A_{n+2}$, B'_n celui de l'hyperplan $B_{n-2} \ldots B_{n+2}$.

La droite PP′ est la conjuguée, par rapport à Q, de l'espace commun aux hyperplans $J_{-2} \ldots J_2$, $J'_{-2} \ldots J'_2$; c'est-à-dire de l'espace B_1BAA_1. De même, la droite $P_1P'_1$ et l'espace BAA_1A_2 sont conjugués par rapport à Q. Par suite, le point A′ est l'intersection des droites PP′, $P_1P'_1$. De même, B′ est l'intersection des droites PP′, $P_{-1}P'_{-1}$; et ainsi de suite. D'ailleurs, la suite $(\mathcal{D}')$ est circonscrite aux suites $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{P}')$.

Les suites de Laplace $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{D}')$ *donnent naissance, dans* S_3, *à une suite de quadriques telles que deux quadriques consécutives se touchent en quatre points, caractéristiques pour les deux quadriques* (**28**).

Les quadriques Δ_u, Δ_v représentées respectivement par les plans A_1AB et $A'_1A'B'$, ABB_1 et $A'B'B'_1$, ont été considérées par M. Demoulin (**11**). Ces deux quadriques ont en commun la droite d, passant par x, commune aux plans tangents en $\bar{x}$, $\bar{x}'$ aux surfaces $(\bar{x})$, $(\bar{x}')$; la droite d' passant par $\bar{x}$, $\bar{x}'$; les directrices de la congruence linéaire commune aux complexes linéaires osculateurs le long des droites j, j' aux congruences (j), (j').

Appelons, avec M. Demoulin, transformation de Guichard la transformation qui fait se correspondre les points focaux des droites d'une congruence W. D'après le théorème de permutabilité de Bianchi, il existe une infinité de points de d et une infinité de points de d' qui se correspondent dans des transformations de Guichard. D'après M. Demoulin, la quadrique Δ_u est le lieu des tangentes aux lignes u aux points considérés des droites d, d' ; la quadrique Δ_v, celui des tangentes aux lignes v aux mêmes points. M. Demoulin avait établi que les quadriques Δ_u, Δ_v se touchent en quatre points caractéristiques pour ces quadriques. La suite de quadriques à laquelle appartiennent Δ_u, Δ_v a été considérée simultanément par M. Demoulin (**13**) et par nous (**28**), suivant des méthodes différentes.

Les considérations qui précèdent peuvent s'étendre au cas où l'on considère trois, quatre ou cinq congruences W ayant (x) comme surface focale commune. Dans le cas de trois congruences, par exemple (**30**), on aura trois réseaux (J), (J'), (J'') conjugués à la congruence (UV) et le point commun aux trois plans JJ_1J_2, $J'J'_1J'_2$, $J''J''_1J''_2$ engendre un réseau conjugué (u, v).

18. — Nous passerons à l'étude de l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface (x) lorsque ces quadriques ont cinq points caractéristiques (**21**, **26**).

Désignons par C_1, C_2 les points de rencontre de V_1V_2 avec Q, par D_1, D_2 ceux de U_1U_2 avec Q. Ces points sont distincts et les points U_2, V_2 ne peuvent appartenir à Q. La droite C_iD_l appartient tout entière à Q et représente un faisceau de rayons de S_3 dont le sommet R_{il} est un point caractéristique de Φ et dont le plan ρ_{il} touche Φ en R_{il}. Le plan ρ_{11}, par exemple, contient les points R_{12}, R_{22}.

Pour abréger l'écriture, désignons par C un des points C_1, C_2, par D un quelconque des points D_1, D_2, par R et ρ le point et le plan correspondants dans S_3. Supposons que, sur la surface (R), les asymptotiques soient u, v. Les tangentes asymptotiques RR^{10}, RR^{01} sont représentées, sur Q, par deux points $\overline{U}$, $\overline{V}$ de la droite CD, transformés de Laplace l'un de l'autre. Soit $\overline{V}_1$ le transformé de Laplace de $\overline{V}$ dans le sens des u, $\overline{U}_1$ celui de $\overline{U}$ dans le sens des v.

Lorsque u varie seul, les droites $\overline{U}\overline{V}$, U_1U_2 engendrent les développables dont les plans tangents sont respectivement $\overline{U}\,\overline{V}\,\overline{V}_1$ $U\,U_1\,U_2$. Par suite, la tangente en D à la ligne u tracée sur la surface (D) doit être commune à ces plans et rencontre $U\,U_1$ en un point D', qui appartient également à $\overline{V}\,\overline{V}_1$. Lorsque v varie seul, les droites $U\,U_1$, $\overline{V}\,\overline{V}_1$ engendrent des développables dont les plans tangents sont $U\,U_1\,U_2$, $\overline{V}_1\,\overline{V}\,\overline{U}$; par suite, la tangente en D' à la ligne v tracée sur (D') passe par D. Le point D décrit donc un réseau conjugué à la congruence $(U_1 U_2)$. De même, le point C décrit un réseau conjugué à la congruence $(V_1 V_2)$ et les droites $V V_1$, $\overline{U}\,\overline{U}_1$ se rencontrent en un point C'.

Les points C, D sont représentés par

$$C = V_1^{10} + \varphi V_1, \quad D = U_1^{01} + \psi U_1,$$

où φ, ψ satisfont à

$$\varphi^2 + \alpha = 0, \quad \psi^2 + \beta = 0, \quad (\alpha \neq 0, \beta \neq 0)\,.$$

On trouve aisément, par un calcul simple, que les conditions nécessaires et suffisantes pour que les points C, D décrivent des réseaux conjugués respectivement aux congruences $(V_1 V_2)$, (U_1, U_2) sont

$$(\log a\varphi)^{10} = 0, \quad (\log b\psi)^{01} = 0.$$

Ces relations entraînent

$$(\log a^2\alpha)^{10} = 0, \quad (\log b^2\beta)^{01} = 0, \tag{13}$$

dont l'une est conséquence de l'autre en vertu de la relation (10). Réciproquement, si les relations (13) sont vérifiées, les points C_1, C_2, D_1, D_2 décrivent des réseaux conjugués.

Mais de plus, si les relations (13) sont vérifiées, un calcul simple montre que les asymptotiques de la surface (R) sont les courbes u, v. Les tangentes asymptotiques sont représentées par les points

$$\overline{U} = 2\, b\beta D + h_1\, [\psi + (\log bh_1)^{01}]\, C\,,$$
$$\overline{V} = 2\, a\alpha C + k_1\, [\varphi + (\log ak_1)^{10}]\, D\,;$$

$\overline{V}$ est le transformé de Laplace de $\overline{U}$ dans le sens des u.

En tenant compte des résultats obtenus plus haut dans les cas où α, β sont nuls, on peut énoncer le théorème suivant : *La condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotiques soient conservées sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface, est que l'un des points de rencontre de l'une des droites* U_1U_2, V_1V_2 *avec* Q *décrive un réseau conjugué* (u, v).

Les côtés du quadrilatère de Demoulin $R_{11}R_{12}R_{22}R_{21}$ décrivent des congruences W, dont les nappes focales sont les surfaces (R_{11}), (R_{12}), (R_{22}), (R_{21}). Cette configuration a fait l'objet d'études récentes de M. Finikoff (**14, 15**).

19. — Les droites $C_1 C_1^{01}$, $C_2 C_2^{01}$ se rencontrent, que les relations (13) soient vérifiées ou non, en un point A et les droites $D_1 D_1^{10}$, $D_2 D_2^{10}$ en un point B. On a (40)

$$\left.\begin{aligned} 2\,A^{10} + 2\,A\,(\log a)^{10} + 4\,bB &= V\,(\log a^2\,\alpha)^{10} \\ 2\,B^{01} + 2\,B\,(\log b)^{01} + 4\,aA &= U\,(\log b^2\beta)^{01}. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

La droite AB coupe Q aux points images des droites joignant les sommets opposés du quadrilatère de Demoulin.

Si les relations (13) sont vérifiées, c'est-à-dire s'il y a conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie, et dans ce cas seulement, les points A, B sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Ils appartiennent à une suite de Laplace

$$\ldots,\ A_1,\ A,\ B,\ B_1,\ \ldots, \qquad \text{(I)}$$

chaque point étant le transformé de Laplace du précédent dans le sens des u.

Appelons C'_1, C'_2 les points de VV_1 transformés de Laplace de C_1, C_2 dans le sens des v ; C''_1, C''_2 les points de UV transformés de C'_1, C'_2 dans le même sens ; D'_1, D'_2 les points de UU_1 transformés de D_1, D_2 dans le sens des u ; D''_1, D''_2 les points de UV transformés de D'_1, D'_2 dans le même sens. Le point A_1 est l'intersection des droites $C'_1C''_1$ et $C'_2C''_2$; le point B_1 l'intersection des droites $D'_1 D''_1$ et $D'_2 D''_2$. Les points C''_1, C''_2 décrivent des réseaux conjugués à la congruence (UV) et la suite de Laplace $(\mathcal{D})$ associée à ces points (cf. n° 17) coïncide (aux notations près) avec la suite (I). Il en est de même de la suite associée, dans les mêmes conditions, aux points D_1'', D_2''. On déduit de cette remarque que les droites $C_1C_1^{10}$, $C_2C_2^{10}$ passent par B et les droites $D_1D_1^{01}$, $D_2D_2^{01}$ par A.

Appelons Δ_a la quadrique de S_3 contenant les droites représentées sur Q par la section de cette hyperquadrique par le plan BAA_1, Δ_b la quadrique provenant, de la même manière, du plan B_1BA. Les quadriques Δ_a, Δ_b se touchent en quatre points, caractéristiques pour ces deux surfaces. Elles se rencontrent suivant les côtés d'un quadrilatère gauche. Deux côtés opposés de ce quadrilatère sont, comme on vient de le voir, les droites $R_{11}\,R_{22}$, $R_{12}\,R_{21}$. Les deux autres côtés sont représentés par les points de rencontre avec Q de la droite conjuguée à l'espace $B_1\,B\,A\,A_1$ par rapport à Q.

Désignons actuellement par $\overline{U}$, $\overline{V}$ les points de la droite $C_1 D_1$ représentant les tangentes aux asymptotiques u, v de la surface (R_{11}). Les points C_1, D_1 décrivent des réseaux conjugués à la congruence $(\overline{U}\,\overline{V})$; les quadriques Δ_a, Δ_b sont les quadriques de Demoulin associées aux congruences $(R_{11} R_{12})$, $(R_{11} R_{21})$, puisque les droites $C_1 C_1^{01}$, $D_1 D_1^{01}$ passent par A et les droites $C_1 C_1^{10}$, $D_1 D_1^{10}$ par B. Il en résulte que Δ_a et Δ_b ont en commun les directrices de la congruence linéaire commune aux complexes linéaires osculateurs aux congruences $(R_{11} R_{12})$, $(R_{11} R_{21})$. Mais on peut faire le même raisonnement en partant des surfaces (R_{12}), (R_{22}), (R_{21}), les quadriques Δ_a, Δ_b ne changeant d'ailleurs pas. Par conséquent : *Lorsqu'il y a conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie, les côtés du quadrilatère de Demoulin engendrent des congruences* W *et les complexes linéaires osculateurs à ces congruences en des génératrices correspondantes, appartiennent à une même congruence linéaire* (**40**).

Signalons encore ce résultat, aisé à obtenir, que les quadriques de Lie relatives à chacune des surfaces (R) ont cinq points caractéristiques parmi lesquels se trouve le point x.

20. — Jusqu'à présent, nous avons supposé la suite (L) illimitée dans les deux sens. Abandonnons cette hypothèse et supposons que la suite (L) s'arrête au point U_n en présentant le cas de Laplace. Les tangentes aux lignes v aux points d'une ligne u de la surface (U_{n-1}) forment un cône de sommet U_n. Les coordonnées du point U_n ne dépendent pas de u et lorsque v varie, le point U_n décrit une courbe (U_n). Analytiquement, ces circonstances sont caractérisées par la condition $h_n = 0$. Les différents cas qui peuvent se présenter sont obtenus en considérant l'espace linéaire de dimension minimum contenant la courbe (U_n).

Supposons en premier lieu que la courbe (U_n) n'appartienne pas à un hyperplan. Il est aisé de voir que les relations de polarité des points de la suite (L) par rapport à Q subsistent, les points U_{n+1}, ... étant remplacés par les points U_n^{01}, ... (**37**). On en déduit que sur la surface (V_{n-2}), les courbes u sont situées dans des hyperplans ; sur (V_{n-1}), les courbes u appartiennent à des espaces S_3 ; sur (V_n), les courbes u sont planes ; sur (V_{n+1}) ce sont des droites. Enfin le point V_{n+2}, pôle de l'hyperplan $U_n U_n^{01}$

... U_n^{04}, ne dépend que de v ; il décrit une courbe (V_{n+2}) lorsque v varie et les droites V_{n+1} V_{n+2} sont tangentes à cette courbe. La suite (L) se termine donc, dans le sens des u, au point V_{n+2}, en présentant le cas de Goursat.

Le cas où la courbe (U_n) appartient à un hyperplan (mais non à un espace S_3) se traite de la même manière, mais on trouve alors que le point V_{n+2} est fixe, la surface (V_{n+1}) étant un cône. La suite (L) se termine au point V_{n+2} en présentant le cas mixte.

Lorsque la courbe (U_n) appartient à un espace linéaire à trois dimensions S_3, mais non à un plan, la droite V_{n+1} V_{n+2}, conjuguée de cet espace S_3 par rapport à Q, est fixe. Si le point V_{n+1} dépendait de v, les points V_n, V_{n-1}, ... appartiendraient à la droite V_{n+1} V_{n+2}, ce qui est absurde. Donc la suite (L) s'arrête au point V_{n+1} en présentant le cas de Laplace et on a $k_{n+1} = 0$.

Supposons maintenant que la courbe (U_n) soit plane. Alors les courbes u, sur la surface (V_n), appartiennent à un plan fixe, conjugué par rapport à Q du plan de la courbe (U_n). La suite (L) doit donc s'arrêter au point V_n en présentant le cas de Laplace ($k_n = 0$). Le point V_n ne dépend que de u et la courbe (V_n) est plane.

Si la courbe (U_n) se réduit à une droite, les courbes u, sur la surface (V_{n-1}), appartiennent à l'espace S_3 conjugué de cette droite par rapport à Q. La suite (L) s'arrête au point V_{n+1} en présentant le cas de Laplace ($k_{n-1} = 0$); V_{n-1} ne dépend que de u et décrit une courbe appartenant à l'espace S_3 dont il vient d'être question.

Il nous reste à examiner le cas où le point U_n est fixe. Les courbes u, sur la surface (V_{n-2}) appartiennent à l'hyperplan polaire de U_n par rapport à Q. La suite (L) se termine au point V_{n-2} en présentant le cas de Laplace ($k_{n-2} = 0$). Ce cas est analogue au second.

L'analyse précédente donne la solution des questions qui se présentent lorsque l'on suppose que la suite (L) se termine en présentant le cas de Goursat ou le cas mixte, comme on le voit sans difficulté.

Lorsque la suite (L) se termine au point U_n, elle se termine également en l'un des points V_{n+2}, V_{n+1}, V_n, V_{n-1} ou V_{n-2}, et inversement.

Lorsque la suite (L) se termine au point U ($b = 0$), la surface (x) est réglée. Lorsqu'elle se termine au point U_1 $(h_1 = 0)$, les asymptotiques u de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires. En particulier, lorsque la suite (L) se termine aux points U_1, V_1 $(h_1 = 0,\ k_1 = 0)$, la surface (x) a ses asymptotiques des deux familles appartenant à des complexes linéaires ; ces surfaces ont été déterminées par M. Terracini (**63**). Dans ce cas, la quadrique Φ_1 est fixe et correspond aux plans $U_1\,U_1^{01}\,U_1^{02}$, $V_1\,V_1^{10}\,V_1^{20}$; elle forme, avec la surface (x), l'enveloppe des quadriques de Lie.

Le cas où la suite (L) se termine aux points U_2, V_2, ces points appartenant à Q, correspond à une surface (x) dont les quadriques de Lie sont tangentes en un point fixe à un plan fixe (**50**).

21. — Supposons que (j) soit une congruence W dont (x) est une surface focale et soit J le point qui représente la droite j sur la droite UV. Qu'arrive-t-il lorsque la suite (L) se termine au point U_n en présentant le cas de Laplace ?

Reprenons les notations et les considérations du n° 15. Nous y avons construit une suite L qui, dans le cas actuel, doit se terminer au point U_n en présentant le cas de Laplace, puisque $h_n = 0$. Deux cas peuvent se présenter (**46**) :

a) Les points U_n, $\mathfrak{U}_n$ coïncident. Alors le point J_n coïncide avec U_n et la suite $(\mathcal{J})$ se termine au point J_n en présentant le cas de Laplace ;

b) Les points U_n, $\mathfrak{U}_n$ sont distincts. Dans ce cas, les droites $U_n\,U_n^{01}$, $\mathfrak{U}_n\,\mathfrak{U}_n^{01}$ se coupent en un point J_{n+1} et la suite $(\mathcal{J})$ se termine au point J_{n+1} en présentant le cas de Laplace.

Analytiquement, ces deux cas correspondent respectivement à $\mu_n = 0$ et à μ_n fonction de v seule.

Réciproquement, supposons que la suite $(\mathcal{J})$ se termine au point J_n en présentant le cas de Laplace. Les droites $U_{n-1}\,U_n$, $\mathfrak{U}_{n-1}\,\mathfrak{U}_n$ doivent passer par J_n et par suite les suites (L), $(\mathcal{L})$ se terminent toutes deux au point $U_n \equiv \mathfrak{U}_n$, où elles se terminent aux points distincts U_{n-1}, $\mathfrak{U}_{n-1}$ et les droites $U_{n-1}\,U_{n-1}^{01}$, $\mathfrak{U}_{n-1}\,\mathfrak{U}_{n-1}^{01}$ passent par J_n.

Voyons maintenant ce qui a lieu lorsque la suite (L) se termine au point V_{n+2} en présentant le cas de Goursat. La suite $(\mathcal{L})$ se termine également au point $\mathcal{V}_{n+2}$ en présentant le même cas. Si les points V_{n+2}, $\mathcal{V}_{n+2}$ sont distincts, le point J_{-n-2} décrit une courbe appartenant à la surface réglée développable (V_{n+1}), d'arête de rebroussement (V_{n+2}) et la suite $(\mathcal{J})$ se termine au point J_{-n-2} en présentant le cas de Goursat. Si au contraire les points V_{n+2}, $\mathcal{V}_{n+2}$ coïncident, les droites $V_{n+1}\,V_{n+2}$ et $\mathcal{V}_{n+1}\,\mathcal{V}_{n+2}$ coïncident et le point J_{-n-2} appartient à cette droite ; la suite $(\mathcal{J})$ se termine au point J_{-n-2} en présentant le cas de Goursat. Analytiquement, ces cas correspondent à $\lambda_n \neq 0$ et à $\lambda_n = 0$; dans le dernier cas, le point J_{-n-2} coïncide donc avec V_{n+2}.

Réciproquement, si la suite $(\mathcal{J})$ se termine en présentant le cas de Goursat, il en est de même de la suite (L).

Il est facile de voir quelles conclusions on peut tirer de ce qui précède pour la suite $(\overline{L})$ associée à la seconde nappe focale $(\overline{x})$ de la congruence (j).

Si la suite (L) se termine au point U_n en présentant le cas de Laplace, par exemple, quatre cas peuvent se présenter :

a) Le point J_n coïncide avec U_n et la suite $(\overline{L})$ s'arrête au point $\overline{U}_n \equiv U_n$;

b) Le point J_n coïncide avec U_n et la suite $(\overline{L})$ se termine au point $\overline{U}_{n-1}$, la droite $\overline{U}_{n-1}\,\overline{U}_{n-1}^{01}$ passant par U_n ;

c) Le point J_{n+1} appartient à la droite $U_n\,U_n^{01}$ et la suite $(\overline{L})$ se termine au point $\overline{U}_n$, la droite $\overline{U}_n\,\overline{U}^{01}_n$ passant par le point J_{n+1} ;

d) Les points J_{n+1}, $\overline{U}_{n+1}$ coïncident, la suite $(\overline{L})$ se terminant en $\overline{U}_{n+1}$.

Dans les quatre cas, la suite $(\overline{L})$ présente le cas de Laplace.

On vérifie sans peine, analytiquement, que les quatre cas peuvent effectivement se présenter.

Bibliographie

Traités

I. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 4 vol., Paris, 1887-1896.
II. Tzitzeica, *Géométrie différentielle projective des réseaux*, Paris, 1924.
III. Fubini et Cech, *Geometria proiettiva differenziale*. 2 vol., Bologne, 1927.
IV. — *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*. Paris, 1931.

Mémoires (1)

1. Bompiani. *Sull'equazione di Laplace* (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1912, t. 34, pp. 383-407).
2. — *La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato* (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1° sem. 1926, pp. 395-400 ; 2° sem. 1926, pp. 262-267).
3. *I fondamenti della teoria proiettiva delle curve e delle superficie*. Appendice au traité III, pp. 671-727.
4. Demoulin. *Sur la théorie des lignes asymptotiques* (*C. R.*, août 1908).
5. — *Sur la quadrique de Lie* (*C. R.*, sept. 1908).
6. — *Sur quelques propriétés des surfaces courbes* (*C. R.*, sept. et oct. 1908).
7. — *Sur la cyclide de Lie* (*C. R.*, nov. et déc. 1908).
8. — *Sur les surfaces* R *et les surfaces* Ω (*C. R.*, sept. et oct. 1911).
9. — *Sur les surfaces* R (*C. R.*, oct. 1911).
9*bis*. — *Sur quelques classes de congruences* W (*C. R.*, sept. 1933).
10. — *Sur les surfaces* Ω (*C. R.*, nov. 1911).
11. — *Sur la transformation de Guichard et les systèmes* K (*B. A. B.*, 1919, pp. 101-112).
12. — *Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques* (*C. R.*, juillet 1924).
13. — *Sur la théorie des réseaux* (*C. R.*, déc. 1929).
14. Finikoff. *Sur les quadriques de Lie et les congruences de M. Demoulin* (*Recueil math. de Moscou*, 1930, t. 37, pp. 48-97).
15. — *Transformations* T *des congruences de droites* (*Annali della R. Scuola norm. sup. di Pisa*, 1932).

---

(1) Abréviations.

C. R., *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Institut de France.
B. A. B., *Bulletins de l'Académie roy. des Sciences de Belgique*.
B. S. L., *Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liège*.
M. S. L., *Mémoires de la Société roy. des Sciences de Liège*.

16. Fubini. *Sulla teoria delle superficie* R *e delle loro trasformazioni* (*Rend. R. Accad. Lincei*, 2° sem. 1926, pp. 81-85).
17. Godeaux. *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé* (*B. A. B.*, 1927, pp. 812-826 ; 1928, pp. 31-41).
18. — *Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie* (*B. A. B.*, 1928, pp. 158-186, 345-348).
19. — *Sur les congruences formées par les directrices de Wilczynski d'une surface* (*B. A. B.*, 1928, pp. 335-345).
20. — *Sur les congruences de M. Goursat et les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie* (*B. A. B.*, 1928, pp. 455-466).
21. — *Sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface* (*B. A. B.*, 1929, pp. 37-53).
22. — *Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques* (*Bull. Soc. Math. de France*, 1929, pp. 26-41).
23. — *Sur les surfaces projectivement applicables ayant même quadriques de Lie* (*Anais Fac. Sc. Porto*, 1928, pp. 157-161).
24. — *Sur les directrices de Wilczynski et les quadriques de Lie d'une surface* (*B. A. B.*, 1929, pp. 126-133).
25. — *Sur certaines suites de Laplace* (*M. S. L.*, 1929, pp. 1-16).
26. — *Remarques sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface* (*B. A. B.*, 1929, pp. 702-710).
27. — *Sur les quadriques de Lie de certaines surfaces* (*B. A. B.*, 1929, pp. 943-952).
28. — *Sur la transformation de Guichard et sur certaines quadriques considérées par M. Demoulin* (*B. A. B.*, 1929, pp. 953-958).
29. — *Sur certaines suites de Laplace associées à une suite de Laplace donnée* (*B. A. B.*, 1930, pp. 264-273).
30. — *Sur les groupes de trois congruences* W *ayant une nappe focale commune* (*B. A. B.*, 1930, pp. 983-988).
31. — *Sur une propriété de l'enveloppe de certaines familles de quadriques* (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1° sem. 1930, pp. 52-58).
32. — *Sur quelques familles de quadriques associées aux points d'une surface* (*Annales de la Soc. Polonaise de Math.*, 1928, pp. 213-226).
33. — *Sur la théorie des surfaces et l'espace réglé* (*Atti Congresso Math. Bologna*, 1928, t. IV, pp. 353-356).
34. — *Remarques sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie* (*Comptes rendus du Congrès national des Sciences*, Bruxelles, 1930, pp. 69-70).
35. — *Sur les quadriques de Darboux d'une surface* (*B. A. B.*, 1930, pp. 1195-1205).
36. — *Remarque sur la théorie des suites de Laplace* (*M. S. L.*, 1931, pp. 1-8).
37. — *Sur les surfaces donnant lieu, dans l'espace réglé, à des suites de Laplace terminées* (*B. A. B.*, 1931, pp. 730-739).
38. — *Remarques sur les surfaces réglées* (*Revista mat. Hisp. Amer.*, 1931, pp. 158-163).
39. — *Sur les suites de Laplace terminées* (*A. F. A. S.*, Congrès de Nancy, 1931, pp. 40-42).
40. — *Sur la surface enveloppée par les quadriques de Lie d'une surface* (*Anais Fac. Sc. Porto*, 1931, pp. 1-11).
41. — *Sur quelques éléments associés aux points d'une surface* (*M. S. L.*, 1932, pp. 1-16).
42. — *Sur quelques quadriques associées aux points d'une surface* (*B. A. B.*, 1932, pp. 109-120).

43. — *Sur les asymptotiques de la surface de Steiner* (*B. S. L.*, 1932, pp. 85-87).
44. — *Sur l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface cubique ayant trois points doubles biplanaires* (*B. A. B.*, 1932, pp. 405-411).
45. — *Sur les surfaces isothermo-asymptotiques dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques* (*B. S. L.*, 1932, pp. 88-90).
46. — *Note sur les congruences* W (*B. A. B.*, 1932, pp. 662-671).
47. — *Sur les conditions pour que les directrices de Wilczynski d'une surface forment des congruences* W (*B. A. B.*, 1932, pp. 774-781).
48. — *Sur la théorie des surfaces et les suites de Laplace* (*B. S. L.*, 1932, pp. 197-201).
49. — *Sur une classe de surfaces* (*B. A. B.*, 1932, pp. 1015-1025).
50. — *Remarque sur certaines surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques* (*B. S. L.*, 1933, pp. 2-5).
51. — *Sur l'impossibilité de couples de surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin* (*B. A. B.*, 1933, pp. 16-25).
52. — *Les quadriques de Tzitzeica et la théorie des surfaces* (*Annales de la Soc. polonaise de Math.*, 1931, pp. 21-24).
53. Mayer. *Remarques sur les surfaces minima projectives* (*Mathematica*, 1930, pp. 129-133).
54. Mentre. *Les variétés de l'espace réglé étudiées dans leurs propriétés infinitésimales projectives*, Paris, Thèse, 1923.
55. Mentre et Rozet. *Sur certaines surfaces tétraédrales* (*C. R.*, août 1932). (Un mémoire plus étendu est en cours d'impression dans *M. S. L.*).
56. Rozet. *Sur quelques congruences de droites* (*B. A. B.*, 1931, pp. 1206-1217).
57. — *Sur une congruence particulière de droites* (*B. A. B.*, 1932, pp. 356-360).
58. — *Sur le degré de généralité des surfaces dont les quadriques de Lie ont moins de cinq points caractéristiques* (*B. A. B.*, 1932, pp. 700-703).
59. — *Sur les directrices de Wilczynski d'une surface* (*B. A. B.*, 1932, pp. 858-866).
60. — *Sur les surfaces projectivement applicables dont les quadriques de Lie ont cinq points caractéristiques* (*B. A. B.*, 1932, pp. 1054-1064).
61. — *Sur l'applicabilité projective des congruences* W (*B. A. B.*, 1933, pp. 76-84).
62. — *Quelques remarques à propos des surfaces dont les quadriques de Lie ont moins de cinq points caractéristiques* (*B. S. L.*, 1933, pp. 21-26).
63. Terracini. *Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari* (Appendice à III, pp. 771-782).
64. — *Sulla teoria delle congruenze* W (*Rend. R. Istituto Lomb.*, 1927, pp. 657-674).
65. — *Nuove ricerche sulle congruenze* W (*Atti R. Istituto Veneto*, 1927, 1928, pp. 179-196).
66. — *Sulle superficie coniugate a un complesso quadratico* (*Atti R. Istituto Veneto*, 1927-1928, pp. 1251-1271).
67. Thomsen. *Ueber eine liniengeometrische Behandlungsweise der projektiven Flächentheorie* (*Abhand. Math. Sem. Hambourg*, 1925, pp. 232-266).
68. — *Sulle superficie minime proiettive* (*Annali di Matematica*, 1928, (4), t. 5, pp. 169-184).
69. Togliatti. *Sulle* V_3 *di* S_5 *con coincidenze di tangenti principali* (*Atti R. Istituto Veneto*, 1927-1928, pp. 1373-1421).

70. — *Alcuni esempi di superficie algebriche degli iperspazi che rappresentano un' equazione di Laplace* (*Commentarii Mathematici Helvetici*, 1929, pp. 255-272).

71. Tzitzeica, *Sur certaines congruences de droites* (*Journal de Math. pures et appliquées*, 1928, pp. 189-208).

72. Wilczynski. *Projective differential geometry of curved surfaces* (*Trans. Amer. math. Soc.*, 1907, pp. 233-260 ; 1908, pp. 79-120, 293-315 ; 1909, pp. 176-200, 279-296).

Addition

(Mémoires parus depuis la rédaction de l'exposé)

Demoulin. *Sur deux transformations des surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux ou trois points caractéristiques* (*B. A. B.*, 1933, pp. 479-502, 579-592).

— *Sur les systèmes* C *et sur les congruences de sphères* C (*B. A. B.*, 1933, pp. 870-876).

— *Sur une classe de familles de quadriques à deux paramètres* (*C. R.*, août 1933).

Godeaux. *Remarque sur les surfaces donnant lieu, dans l'espace réglé, à une suite de Laplace terminée* (*B. S. L.*, 1933, pp. 48-51).

— *Sur quelques relations concernant les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques* (*B. S. L.*, 1933, pp. 74-78).

— *Sur les quadriques de Moutard* (*B. S. L.*, 1933, pp. 100-104).

Rozet. *Sur certaines congruences* W (*B. A. B.*, 1933, pp. 179-186).

— *Sur l'applicabilité projective des surfaces dont les quadriques de Lie ont cinq points caractéristiques* (*B. A. B.*, 1933, pp. 918-923).

Imp. G. Thone, Liège (Belgique)