

Forces mortes et forces vives dans la physique de Leibniz¹ laurence.bouquiaux@uliege.be

Introduction

L'opposition force morte/force vive a été souvent étudiée, mais elle soulève une série de questions sur lesquels les commentateurs divergent ; l'objet de cette communication sera d'analyser certaines de ces questions.

En première approche, en suivant le *Specimen dynamicum*, (**texte 1**) on pourrait dire que Leibniz distingue la force élémentaire qu'il appelle *morte* « parce qu'en elle le mouvement n'existe pas encore, mais seulement une sollicitation au mouvement » et la force *vive* « unie au mouvement actuel ». La force centrifuge d'un corps en rotation que l'on vient tout juste de lâcher, la pesanteur, ou encore la force par laquelle un corps élastique déformé commence à se restaurer sont des exemples de forces mortes. La force d'un corps pesant qui tombe depuis un certain temps, ou celle d'un corps élastique qui a déjà commencé à se restaurer sont des exemples de forces vives. Leibniz ajoute que la force vive naît d'une infinité de forces mortes et il signale que c'est ce que Galilée a voulu dire en affirmant « énigmatiquement » que la force du choc est infinie par rapport à la force de la gravité.

(texte 1) «Vis quoque duplex: alia elementaris, quam et mortuam appello, quia in ea nondum existit motus, sed tantum sollicitatio ad motum, qualis est globi in tubo, aut lapidis in funda, etiam dum adhuc vinculo tenetur ; alia vero vis ordinaria est, cum motu actuali conjuncta, quam voco vivam. Et vis mortuae quidem exemplum est ipsa vis centrifuga, itemque vis gravitatis seu centripeta, vis etiam qua elastrum tensum se restituere incipit. Sed in percussione, quae nascitur a gravi jam aliquamdiu cadente, aut ab arcu se aliquamdiu restituente, aut a simili causa vis est viva, ex infinitis vis motuae impressionibus continuatis nata. Et hoc est quod Galilaeus voluit, cum aenigmatica loquendi ratione percussione vim infinitam dixit, scilicet si cum simplice gravitatis nisu comparetur. Etsi autem impetus cum vi viva semper sit conjunctus, differre tamen haec duo [...] ostenditur ». (*Specimen dynamicum*, GM 6, p.238)

Les commentateurs s'entendent en général sur l'origine galiléenne de l'opposition entre force morte et force vive. Ils s'entendent aussi sur l'expression mathématique qu'il faut associer à la notion de forces vive (mv^2), mais les interprétations divergent lorsqu'il s'agit de décrire précisément la nature de la force morte et le lien qui existe entre les deux types de forces :

Quant à la nature de la force morte :

- La force morte est associée à une vitesse infinitésimale. Peut-on en inférer qu'elle serait comme dv , ou comme mdv ?
- Doit-elle plutôt être associée à l'accélération ?
- Peut-elle être rapprochée de la notion newtonienne de *vis impressa* ?

¹ Communication présentée au Sixième congrès de la société d'études leibniziennes de langue française. Paris, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, 13-15 juin 2024. Organisation et institutions partenaires : Société d'Études Leibniziennes de Langue Française (SELLF), Leibniz Society of North America (LSNA), Centre d'Histoire des Philosophies Modernes de la Sorbonne (HIPHIMO).

- Faut-il y voir ce que nous appellerions aujourd'hui énergie potentielle (ce que possède un pendule à sa position la plus élevée, là où sa vitesse est nulle, mais qu'il a néanmoins la capacité de produire un effet) ?

Quant à la relation entre force morte et force vive :

La force vive, nous dit Leibniz, « naît d'une infinité de forces mortes ». Peut-on comprendre que la force morte est le résultat de l'intégration des forces mortes ? Si oui, de quel type d'intégration s'agit-il ? Comment faut-il, en particulier, comprendre le passage de la lettre à De Volder du 27 décembre 1698 selon lequel « les tendances ou sollicitations élémentaires sont comme dx , les vitesses comme x et les forces [vives] comme xx ou $\int x dx$. » ?

Là aussi, les avis divergent² :

- Selon R. Dugas, Leibniz aurait découvert le lien entre l'énergie cinétique et le travail d'une force. Ce serait même « son grand titre de gloire en dynamique ». L'équation que nous écrivons aujourd'hui $\frac{1}{2}mv^2 = \int \vec{F} \cdot \vec{ds}$. (Où F est la force morte leibnizienne, assimilée ici à la force newtonienne) rendrait compte de la conception leibnizienne du rapport entre force morte et force vive³.
- Selon R.S. Westfall (et d'autres), Leibniz ne pouvait envisager une intégrale de la force morte par rapport à l'espace, parce que les substances leibniziennes évoluent dans le temps et non dans l'espace, en sorte que l'on peut donner un sens à l'idée de sommer les *conatus* d'un corps dans le temps, mais pas par rapport à l'espace. Rien, dans la dynamique de Leibniz, ne correspondrait au concept d'énergie potentielle ou à celui de travail d'une force. En intégrant les forces mortes – par rapport au temps, donc $\int (\text{force morte}) dt$ –, Leibniz ne pouvait obtenir que la quantité de mouvement, et pas la force vive en mv^2 .⁴
- Bertoloni Meli pense quant à lui que Leibniz envisage l'intégrale de la force morte comme telle ($\int mdv$), sans faire intervenir un élément de temps ou d'espace. Leibniz sait bien sûr que cette intégrale est proportionnelle à la vitesse. Mais il ne faut pas y voir une erreur, comme s'il ne s'était pas rendu compte que l'intégration des forces mortes ne donnait pas une force vive (!). Tout simplement, il ne pense pas que l'on puisse passer ainsi des forces mortes aux forces vives⁵.

Une autre question que j'envisagerai ici est celle de l'usage (des usages) que Leibniz fait de cette opposition force morte vs force vive.

- Pour affirmer la nouveauté de la physique nouvelle : la physique des Anciens se réduit à la statique, qui ne prend en compte que les forces mortes, la nouvelle physique, qui commence

² D. Bertoloni Meli fait bien le point sur la question dans *Equivalence and Priority : Newton versus Leibniz*, Oxford University Press, 2002 [1993].

³ R. Dugas, *La Mécanique au 17^e siècle*, Dunod, 1954, p.490

⁴ R.S. Westfall, *Force in Newton's Physics. The science of dynamics in the seventeenth century*, 1971, chap.6, p. 301.

⁵ *Equivalence and Priority*, p. 90. Bertoloni Meli ajoute que, quand Leibniz affirme que la relation entre force morte et force vive est analogue à celle qu'il y a entre un point et une ligne, il veut seulement insister sur le fait que la force morte est infinitésimale, tandis que la force vive est finie, sans prétendre que l'une est l'intégrale de l'autre.

avec Galilée et atteindrait son plein développement avec la dynamique leibnizienne, étudie (aussi) les forces vives et atteint un degré de généralité supérieur.

- Dans la polémique avec les Cartésiens, contre leur estime de la force en mv (plutôt que, comme le suggère Leibniz, en mv^2).
- Dans le cadre de l'étude des chocs, pour tenter d'expliquer pourquoi deux corps qui ont même quantité de mouvement (mv) s'arrêtent mutuellement – lors d'un choc frontal, deux corps dont les vitesses sont réciproques des masses forment un système dont le centre de masse est immobile, aucun corps ne l'emporte sur l'autre, chacun rejaillit avec sa vitesse initiale –, alors qu'ils n'ont, selon l'estime leibnizienne, pas la même force (ils n'ont pas le mv^2). C'est là une objection que les Cartésiens font à Leibniz et à laquelle celui-ci s'efforce de répondre dans un grand nombre de textes.
- Dans le contexte de son opposition à Newton, pour marquer le contraste entre ses forces et la *vis impressa* de Newton⁶.
- Pour mémoire, je signale une suggestion de P. Phemister, que je n'explorerai pas ici, selon laquelle l'opposition force morte/vive fournirait un analogue au niveau physique de la relation qui existe au niveau psychique entre les petites perceptions et les perceptions conscientes, qui s'obtiennent par une opération de sommation (d'intégration ?) des précédentes⁷.

Enfin, pour terminer, je consacrerai quelques mots à la question de savoir en quel sens il pourrait y avoir, chez Leibniz, privilège d'un type de force par rapport à l'autre :

Très souvent, la force morte est associée à la statique, à l'abus que les Cartésiens en ont fait et à une vision étriquée de la physique : ce que l'on peut établir à partir des forces mortes vaut de manière partielle ou « accidentelle », la loi des forces vives vaut de manière générale. Dans le couple force morte / force vive, c'est la force vive qui semble privilégiée. Les termes eux-mêmes le confirment : on voit mal Leibniz célébrer, ce qu'il désigne comme « mort ». Il n'est cependant pas impossible, je pense, d'interroger cette disqualification des forces mortes.

Nous ne pourrions évidemment pas apporter des réponses à toutes ces questions. Ma proposition est de tenter de les éclairer 1) en apportant d'abord quelques précisions sur l'origine galiléenne de l'opposition, origine affirmée de manière récurrente par Leibniz 2) en communiquant les résultats d'une enquête (nécessairement trop rapide) à propos de cette opposition chez Leibniz, depuis la lettre à Mariotte de juillet 1673 où elle apparaît (sans doute) pour la première fois jusqu'aux écrits de la maturité.

Le contexte galiléen

La discussion à laquelle Leibniz fait allusion quand il affirme que la force de percussion – qu'il associe à la force vive – est, selon Galilée, infinie par rapport au poids – qu'il associe à la force morte – apparaît dans une série de passages où Galilée s'interroge sur la possibilité de comparer

⁶ C'est ce que suggère D. Bertoloni Meli, qui indique aussi que la première apparition de l'opposition force morte/vive dans un texte publié se trouve dans le *Tentamen de Motuum Coelestium causis*, dont nous savons, grâce à Bertoloni Meli que Leibniz l'a écrit après avoir lu les *Principia* de Newton.

⁷ P. Phemister, *Leibniz and the Natural World. Activity, Passivity and Corporeal Substances in Leibniz's Philosophy*, Springer, 2005, p 196-197.

la force qu'exerce le poids d'un corps sur une balance ou sur un pieu, par exemple, et la force de percussion, celle qu'exerce un poids qu'on laisserait tomber depuis une certaine hauteur, sur le plateau d'une balance ou sur un pieu, par exemple. Dans ces passages, Galilée qualifie volontiers le poids au repos de « peso morto »⁸.

La question s'inscrit dans la postérité de l'une des *Questions mécaniques* (la 19^e) du pseudo-Aristote,⁹ qui demande pourquoi on peut fendre un bois en le frappant avec une hache, alors que si on se contente de poser la hache, le bois n'est pas entamé¹⁰. L'idée qui semble s'imposer est qu'il y a une force qui s'ajoute au poids, une force de percussion qu'il conviendrait d'étudier. Plusieurs auteurs, dont Galilée, vont suggérer diverses expériences destinées à mesurer cette force de percussion en la comparant au poids.

On trouve des développements sur cette question dans les *Mécanique*¹¹ un texte de jeunesse, qui date de l'époque de Padoue, dans les *Discorsi* (3^{ème} et 4^{ème} journée) et, surtout, dans un texte qui sera publié en 1718 sous le nom de *Sixième journée*¹²

Je ne puis pas décrire ici dans le détail l'ensemble des dispositifs imaginés par Galilée. Je m'en tiendrai à un exemple, qui apparaît dans la *Sixième journée* : il s'agit d'une expérience de pensée, qui va aboutir à l'idée que la force de percussion ne peut pas être comparée à la force exercée par le poids du corps (qualifié de « poids mort ») :

On imagine qu'en laissant tomber sur un pieu un poids de 100 livres d'une hauteur de 4 brasses, le pieu s'enfonce de 4 doigts. On imagine, en outre, que si on veut obtenir le même enfoncement sans percussion, il faut poser sur le pieu un poids de 1000 livres, qui « agissant par sa seule gravité, sans mouvement préalable, serait appelé poids mort ». Peut-on conclure de là que la force d'un poids de 100 livres, jointe à la vitesse acquise au terme d'une chute de 4 brasses est égale à la gravité du *peso morto* de 1000 livres ?

Une telle conclusion est, selon Galilée, erronée, parce que si on recommence l'opération en laissant à nouveau tomber le même poids de la même hauteur, le pieu continuera à s'enfoncer¹³ tandis que pour obtenir ce second effet avec un poids mort, il faudra utiliser un poids de plus de 1000 livres : celui-là a déjà fait tout ce qu'il pouvait ; le retirer puis le reposer ne lui permettra

⁸ De Gandt, « les « Mécaniques » attribuées à Aristote et le renouveau de la sciences des machines au 16^e siècle », dans *Les Études philosophiques*, 1986, n°3, p. 394, ajoute que Galilée désigne comme « peso vivo » le poids en mouvement, mais sans donner de référence. Je n'ai pas pu, pour ma part, trouver de passage où Galilée utilise le couple peso morto/vivo.

⁹ Les *Mécaniques* ou *Questions mécaniques*, ont été redécouvertes au début de la Renaissance (éditées en 1497 à Venise à partir d'un manuscrit en provenance de Byzance) et attribuées à tort à Aristote. Elles ont été traduites, commentées (Galilée leur a consacré un cours à l'époque de Padoue) et ont donné lieu à des discussions par (notamment) Tartaglia, Benedetti, et Galilée. Le petit traité a ensuite été plus ou moins oublié. La plupart des auteurs du 16^e pensaient que le texte était bien d'Aristote.

¹⁰ « Pourquoi, si l'on pose sur le bois une grande hache avec un grand fardeau par-dessus, elle coupe si peu le bois que ce n'est pas la peine d'en parler ; mais si on lève la hache et que l'on frappe le bois, on le fend en deux » (853b14)

¹¹ Il y a en réalité deux version de ce traité : une brève (datée de 1593) et une longue (datée d'environ 1600). Pour les détails sur ce manuscrit et son titre (en particulier sur l'ajout par l'éditeur de la mention « avec un fragment sur la force de la percussion »), voir Sophie Roux, « Quelles mathématiques pour la force de percussion ? ». Omniscience. *Mathématiques et connaissance du monde réel avant Galilée*, p. 243-285, 2010. <https://hal.science/hal-03995914>. Voir également le texte de S. Roux et E. Festa, (étude en cours de développement) disponible en ligne <http://www.crm.sns.it/media/course/719/percoffa.pdf>.

¹² c'est Tommaso Bonaventuri qui a, le premier, publié en 1718 le dialogue sur la force de la percussion, sous le titre « Sixième journée... ». La traduction française de la *Sixième journée* par S. Moscovici se trouve dans la *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, tome 16, n°2, 1963. pp. 119-137.

¹³ D'après Galilée, il s'enfoncera moins, parce que la résistance du terrain aura augmenté.

pas d'en faire plus. On peut réitérer le même raisonnement pour les chocs successifs. Pour produire des effets équivalents à ceux que produisent des chocs successifs apparemment identiques (le même corps tombe de la même hauteur), il faut des poids morts de plus en plus lourds.

Salviati-Galilée conclut de cette expérience que « *la force de la percussion est infinie, ou disons indéterminée, ou impossible à déterminer* ». ¹⁴ Indéterminée puisque le poids mort qui devrait produire le même effet qu'elle change sans cesse. Infinie parce que, écrit encore Galilée, aucune résistance, si grande soit-elle ne peut demeurer immobile sous la puissance d'aucune percussion, si petite soit-elle ¹⁵. La pesanteur et la percussion sont incommensurables.

La *Sixième journée* ne sera publiée qu'en 1718. Il est probable que Leibniz a pu voir le texte lors de son voyage en Italie, en 1689, mais il fait référence à l'approche galiléenne de la percussion dès 1673. À cette époque, il semble que Leibniz connaissait, sinon les détails de l'argumentation galiléenne, à tout le moins la manière dont la question se posait, et l'idée de l'infinité de la percussion ¹⁶.

Les premières occurrences

Les premières occurrences de la notion de force morte que j'ai trouvées chez Leibniz sont liées aux échanges avec Mariotte. ¹⁷

La première occurrence se trouverait dans une *Lettre à Mariotte datée de juillet 1673 (À Mariotte, 1673, A III, 1, N.25)*

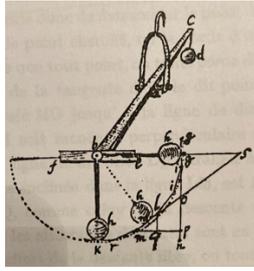
Leibniz examine le dispositif suivant :

¹⁴ Traduction de la *Sixième journée* par S. Moscovici, op. cit. p. 124.

¹⁵ *Ibid*, p. 125.

¹⁶ Outre les conférences de Torricelli prononcées en 1642-1643 mais qui ne seront publiées qu'en 1715, on peut évoquer le *de vi percussionis* de Borelli, publié en 1667 – A. Ranea, M. Fichant et E. Pasini signalent dans leur édition de la *Dynamica* (A. Costa, M. Fichant, E. Pasini, *Gottfried Wilhelm Leibniz: Dynamica de Potentia et Legibus Naturae Corporeae Tentamen scientiae novae*, Georg OLMS 2023, vol. I & II.1 & II.2) que l'on pouvait trouver un historique précis de la transmission de la proposition de Galilée dans la Préface du livre de Borelli et que Leibniz mentionne ce texte dans les brouillons des *Dynamica* –, ou encore les *Saggi di naturali Esperienze Fatte nell'Accademia del Cimento*, un texte de Lorenzo Magalotti publié en 1666 que Leibniz aurait lu en 1673, et dans lequel il est à deux reprises question de « peso morto ». Ce serait, selon Bertoloni Meli (*Equivalence and Priority*, p. 86) l'origine la plus probable de la notion de « force morte ». A. Robinet (*Iter italicum et Architectonique disjonctive*), suivi en cela par A. Ranea, M. Fichant et E. Pasini pense que Viviani a pu mettre le texte de la *Sixième journée* sous les yeux de Leibniz lors du passage de celui-ci à Florence, en 1689. Pour plus de détails, voir le terme *percussio* (*vis percussio*) du glossaire de l'éd. De la *Dynamica*, op. cit., vol II, p.715.

¹⁷ *Le Traité de la percussion et du choc des corps* a été publié en 1673. Leibniz l'a lu, annoté et commenté dès sa parution. M. Fichant a publié ces notes de lecture. Il situe ce texte dans un intervalle qui va des derniers mois de 1673 à la première moitié de 1674. M. Fichant, « Leibniz lecteur de Mariotte », *Revue d'histoire des sciences*, Vol. 46, No. 4 octobre-décembre 1993, pp. 333- 405. Leibniz, qui était à l'époque à Paris, ne se contentait pas de lire Mariotte, mais lui écrivait et le rencontrait.



(fig.1)

Il entreprend d'abord de répondre à la question suivante : si on suppose que les bras de la balance BC sont de même longueur, et que le poids d est moins lourd que le poids h qui peut osciller comme un pendule au bout de l'autre bras, pour quel angle le pendule équilibrera-t-il (pour un instant) le poids d ? Le poids h qui, « pèse simplement sur le bras BE » est, précise Leibniz « ce qui est appelé par quelques-uns la force morte ».

Après avoir résolu ce premier problème, Leibniz envisage ce qui se passe lorsque un corps h tombe sur le bras BE. Dans ce cas, écrit Leibniz, comme le choc ou la percussion est infinie à l'égard de la force morte d'un poids d, de quelque pesanteur qu'il puisse être, le choc de h, pour petit que soit h, agira sur d et le surmontera. Le choc produit par h est, écrit un peu plus loin Leibniz, « infinituple de la force morte d ».

La force morte désigne donc ici soit la force du corps d qu'il s'agit de soulever, soit la force du corps h lorsqu'il n'agit que par son poids. La force du choc ou la percussion, infinie à l'égard de la force morte du poids est désignée comme « force violente ou animée ». L'expression « force vive » n'apparaît pas.

Ce texte hérite clairement des questions galiléenne¹⁸ et de l'idée que la force de la percussion est infinie par rapport au poids, idée que Leibniz évoquera presque systématiquement à propos de l'opposition entre force morte et force vive. On est cependant encore loin de ce que deviendra par la suite cette opposition. En particulier, il n'est pas ici question d'imaginer que l'accumulation des forces mortes pourraient constituer une force vive, comme Leibniz ne cessera de le répéter par la suite.

On trouve une autre occurrence de l'expression « force morte » – Leibniz parle même d'une force qu'il a l'habitude (soleo) d'appeler morte – dans un texte écrit à la même époque¹⁹ :

Contre Mariotte, qui pensait avoir trouvé une expérience qui permettrait de mesurer la proportion entre le poids et la percussion, Leibniz affirme qu'il ne peut y avoir aucune proportion entre la force qu'il a l'habitude d'appeler morte (*vim ut vocare soleo mortuam*) et la force qui provient de l'accélération, pas plus qu'entre une ligne et une surface. Il ajoute que cela a déjà été remarqué par Galilée, démontré par son disciple Borelli et que c'était tenu pour manifeste par les héritiers de Galilée : la chute d'un corps si petit soit-il peut non seulement soutenir un autre aussi grand soit-il pendant un temps, mais il peut aussi l'élever à une certaine hauteur.

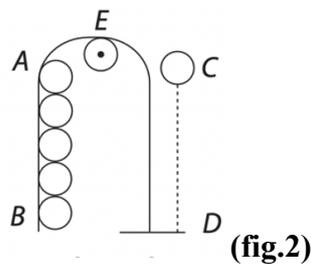
(texte 2) Verum fatendum est inter pondus seu vim ut vocare soleo mortuam, et vim acceleratione quaesitam nullam esse posse rationem; non magis quam inter lineam et superficiem; et ut recte animadversum est a Galilaeo et demonstratum ab ejus discipulis Joh. Alphonso Borello aliisque et vero ex ipsis Galilaei traditis manifestum; lapsu

¹⁸ Galilée n'est cependant pas nommé.

¹⁹ Texte écrit dans le contexte de la lecture de la *Mechanica* de Wallis : *Excerpta ex Wallisio cogitatis obiter occurrentibus aucta*, [letzte Monate 1674] VIII, 2, N9. Le texte se trouve sur la même feuille que les extraits et commentaires du traité de la percussion de Mariotte.

corporis quantulicunque aliud quantumcunque non tantum sustineri aliquandiu, sed et in aliquam altitudinem attolli posse. (*Excerpta ex Wallisio cogitatis obiter occurrentibus aucta*, [letzte Monate 1674] VIII, 2, N9)

Le premier texte dans lequel j'ai repéré l'opposition force morte/force vive est un passage d'un texte publié par l'Académie sous le titre *De motu et effectu*, (Avril 1675 A VIII, 2, N18) dans lequel il s'agit de comparer la force d'un corps qui tombe sur le plateau d'une balance à la résistance d'un poids posé sur l'autre plateau : combien de corps semblables à lui, demande Leibniz, le corps qui tombe pourra-t-il soulever ?



Ce texte nous intéresse parce qu'on y trouve une (première ?) définition de la force morte et de la force vive : la force morte, c'est « la force d'un poids au repos par laquelle il résiste à son élévation » (cela concerne les corps à gauche du schéma). La force vive est celle qui est acquise par l'accélération (cela concerne le corps à droite du schéma).

(texte 3) Vim autem mortuam voco, ponderis quieti, qua elevationi suae aut loco motioni resistit; vivam vero, quam acceleratione successiva quaesivit. (*De motu et effectu*, Avril 1675 A VIII, 2, N18).

La force morte est à nouveau ici un poids qui résiste, certainement pas un élément dont la répétition pourrait mener à la force vive. Dans les textes leibniziens envisagés jusqu'ici, la percussion et le poids sont deux types de forces différentes, qui concernent deux corps différents : le corps qui pèse (et, éventuellement, qui résiste) le *peso morto*, et le corps qui percute. La force vive est (infiniment) plus puissante que la force morte, mais cela n'est pas lié au fait que l'on obtiendrait la force vive en agrégeant des forces mortes.

A partir du milieu des années 1670, autour du de corporum concursu (DCC) et pendant les années 80

Les forces mortes leibniziennes deviennent des quantités infinitésimales aptes à s'agréger. Elles interviennent dans une série de textes sur l'équilibre des fluides, mais aussi, et c'est là-dessus que nous allons nous concentrer, pour décrire les chocs entre les corps.

Après le DCC, et l'adoption de l'estime de la force en mv^2 , les forces mortes sont en particulier mobilisées pour répondre à l'objection selon laquelle deux corps dont les masses sont réciproques des vitesses, et qui n'ont dès lors pas la même force (i.e. le même mv^2), peuvent néanmoins s'arrêter puis se repousser mutuellement.

Leibniz formule lui-même le problème dès la section 10 du DCC et se contente d'y répondre en scindant le concept de force : il faudrait distinguer la *force d'ascension* (celle qui est définie

par la capacité d'un corps à élever une masse à une certaine hauteur, et qui est comme mv^2) et la *force d'agir l'un sur l'autre ou de se propulser*, qui est égale quand les mv sont égales.

(**texte 4**) Facillimum esse paralogismos committere in hac materia vel hinc patet, ostendimus vim aestimandam ex ductu corporis in quadratum celeritatis, hinc sequeretur si duo corpora quorum magnitudines reciproce ut quadrata celeritatum concurrent, ea se esse mutuo repulsura, quod tamen non fit; ratio quia habent quidem eandem vim ascendendi, sed aliud est de vi agendi in se invicem, seu sese propellendi. (Section 10 du *De corporum concursu*, 1978, M. Fichant, *La réforme de la Dynamique*, Vrin, 1994, p. 167).

Dans les années qui suivent, Leibniz va développer l'idée que les corps s'affrontent avec leurs forces mortes, qui sont infinitésimales, même s'ils possèdent une force vive. Il explique que la transmission d'une quantité de mouvement ne se fait jamais en un instant, mais que le corps percutant est d'abord comprimé, avant que la force ne soit peu à peu transmise à l'autre corps par un changement insensible, (c'est-à-dire par les impressions mortes), dont l'addition fait finalement résulter les impressions vives. On trouve des variations sur ce thème dans plusieurs textes maintenant publiés dans A VIII 3 et pour lesquels l'Académie propose une datation entre 1680 et 1687 : N21, N61, N62, N66, N68. Ces textes mériteraient une attention que je ne puis malheureusement pas leur consacrer ici.

Dans le contexte de la polémique qui va suivre la publication de la *Brevis demonstratio* en 1686, Leibniz va faire de l'opposition puissance morte / vive un argument dans son combat contre Descartes : celui-ci aurait à tort généralisé les lois de la statique, qui valent pour les forces mortes – lorsque les corps se rencontrent, ils s'équilibrent comme sur une balance (à bras inégaux) où la différence des hauteurs ou des vitesses compense celle des masses – à l'ensemble de la physique, où il est indispensable de prendre en compte les forces vives. C'est cet « abus de la statique » qui aurait amené Descartes à croire, à tort, que la force s'estime par la quantité mv et non par la quantité mv^2

Après la lecture de Newton, les forces mortes vont à nouveau être recrutées dans le cadre d'une polémique et remplir une nouvelle fonction : expliquer la force gravifique et la force centrifuge dans le cadre du modèle tourbillonnaire du mouvement des planètes élaboré par Leibniz. Les limites de cet exposé m'empêchent d'explorer davantage cet usage, mais je voulais au moins le signaler, nous seulement pour son importance dans les textes de la fin des années 80 et du début des années 90, mais aussi parce que c'est, selon Bertoloni Meli dans ce contexte, et plus précisément dans le *Tentamen de motuum coelestium causis* que l'on trouve pour la première fois l'opposition forces mortes/vives dans un texte publié.

Au tournant des années 1690, l'opposition force morte/vive est le plus souvent utilisée lorsqu'il est question de force centrifuge et/ou de la gravité (et assez peu pour expliquer la rencontre des corps). Ainsi, dans la *Dynamica*, les définitions de la force morte/vive sont données à partir de l'exemple de la force centrifuge (**texte 5**), et c'est pour l'essentiel dans ce contexte que l'opposition force morte/force vive intervient dans l'ouvrage²⁰. De manière remarquable, Leibniz n'utilise pas cette opposition dans la dernière section de la *Dynamica*, consacrée aux chocs²¹.

²⁰ Elle fait cependant aussi une apparition dans les propositions 35-36 où l'on retrouve le thème galiléen de la disproportion entre la puissance du poids et celle de la percussion.

²¹ *Dynamica*, 2^e partie, section 3. On pourrait faire la même remarque concernant le *Specimen dynamicum*.

(texte 5) Continuato per aliquod tempus conatu centrifugo corporis, oritur in eo celeritas recedendi a centro; et conatus centrifugus est ad celeritatem continuato recedendi conatu conceptam, ut finitum ad infinitum. VIM autem quæ est hoc modo ad celeritatem seu quæ est infinities minor celeritate, eam voco MORTUAM; at VIM celeritatem habentis aut cum hac comparabilem appello VIVAM. (*Dynamica* Pars 2, section 1, Proposition 28. Définition 5, éd. A. Costa, M. Fichant et E. Pasini, vol. 2, 2023, p. 402)

Dans la Correspondance avec Papin sur laquelle nous allons nous arrêter maintenant, l'opposition force morte vs force vive revient en force lorsqu'il s'agit de décrire la rencontre des corps.

Correspondance avec Papin

Nous allons nous concentrer sur la description des chocs dans les lettres échangées en 1696-97.

Le point de départ de la discussion est le paradoxe, évoqué à plusieurs reprises ci-dessus, et rappelé par Papin dans ses lettres, selon lequel deux corps dont les masses sont réciproques des vitesses s'arrêtent alors que, selon Leibniz ils n'ont pas la même force (puisque'ils n'ont pas le même mv^2).

La première réponse de Leibniz, conforme à ce qu'il a déjà souvent expliqué précédemment, et qui ressemble un peu à une solution *ad hoc*, est qu'il faut distinguer les forces mortes, par lesquelles deux corps s'arrêtent, et les forces vives, par lesquelles les corps peuvent agir et produire des effets (comme de s'élever à une certaine hauteur).

Lors d'un choc, les corps se rencontrent avec leurs forces mortes. Ils s'équilibrent comme sur une balance. Les lois de la statique s'appliquent; il y a compensation entre les masses et les vitesses. Deux corps qui ont même quantité de mouvement vont dès lors s'arrêter mutuellement. Mais la force qui permet de produire un effet doit être estimée par mv^2 .

Papin n'est pas convaincu et ne voit pas la nécessité d'introduire une force vive : la force sert à mesurer l'action des corps et, de l'aveu même de Leibniz, lors des rencontres, c'est toujours la force morte qui intervient. Il entreprend alors de montrer que la théorie de Leibniz n'est pas cohérente : si on considère, comme il le suggère, que seules les forces mortes (en mv) interviennent lors du choc, on sera contraint de renoncer au principe de conservation des forces vives. Pour le prouver, il introduit l'expérience de pensée suivante : soit 2 corps A et B dont les masses sont réciproques des vitesses. Juste au moment où les corps A et B qui se rencontrent sont à l'arrêt, on substitue à B un corps D plus gros, qui devra être repoussé selon la loi de la force morte (puisque c'est elle qui intervient au moment du choc), mais aura, de ce fait, une plus petite force vive. On n'aurait donc pas conservation des mv^2 .

Leibniz répond de manière détaillée à l'objection de Papin, dans la *lettre du 25 février/7 mars 1697*, (A III 7B, N 77, p. 318). Il montre qu'il est impossible que le corps D substitué à B, reçoive toute la force communiquée au ressort par le corps B²². Les forces seront redistribuées autrement, et cela affectera aussi le corps A.

Leibniz propose un exemple chiffré, que j'explicité sur la **(fig. 3)**

²² Leibniz précise que l'on peut penser le ressort comme un corps à part, en supposant que les corps concourants ne gardent pas de force dans leur parties, ou considérer que le ressort est celui que les corps enferment en eux-mêmes.

v_A, v_B, v_D vitesses initiales
 v'_A, v'_B, v'_D vitesses finales

$\frac{v_A}{v_B} = \frac{v'_A}{v'_B} = \frac{m_B}{m_A}$
 $\bar{v}_{cm} = 0$
 $\sum m v^2 = 1 \cdot 4^2 + 4 \cdot 1^2 = 20$

Substitution
 Selon Papin

A n'est pas affecté
 $v'_A = 4$
 $\frac{v'_A}{v'_D} = \frac{m_D}{m_A} = 8 \rightarrow v'_D = \frac{1}{2}$
 $\sum m v^2 = 1 \cdot 4^2 + 8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 18$

Selon Leibniz
 Les vitesses finales doivent vérifier 2 équations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v'_A}{v'_D} = \frac{m_D}{m_A} = 8 \\ \sum m v'^2 = 20 \end{array} \right.$$

$\sum m v'^2 = 1 \cdot v'^2_A + 8 v'^2_D$
 $= (8 v'_D)^2 + 8 v'^2_D$
 $= 72 v'^2_D$
 donc $72 v'^2_D = 20$
 $v'_D = \sqrt{\frac{20}{72}} = \frac{2\sqrt{5}}{6\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}\sqrt{2}}{6 \cdot 2} = \frac{\sqrt{10}}{6}$
 $v'_A = 8 v'_D = \frac{8\sqrt{10}}{6} = \frac{4}{3}\sqrt{10}$

la substitution affecte A
 $v'_A = \frac{4}{3}\sqrt{10}$
 $v'_D = \frac{\sqrt{10}}{6}$
 $\sum m v'^2 = 20$

(fig. 3)

Selon Leibniz, lorsque les corps A et B sont réduits au repos, ils ont transféré toute leur force (vive) au ressort. Après la substitution de D à B, toute la force vive du ressort doit être rendue aux corps en tenant compte à la fois

- de la loi de la force morte, la loi statique (que Papin prenait seule en compte), qui exige que les corps reçoivent une vitesse inversement proportionnelle à leur masse $v_A/v_D = 8$. (1^{ère} équation)
- de la loi de conservation de la force vive, : $m_A v'^2_A + m_D v'^2_D = 20$ (puisque à la fin, toute la force du ressort doit être redistribuée). (2^{ème} équation)

En introduisant les valeurs numériques dans les équations et en faisant le calcul, on trouve les vitesses finales de A et de D (**fig.3**). La force (vive) de D est plus petite que ne l'était celle de B, mais la force de A est devenue plus grande qu'elle n'était avant le choc et qu'elle ne serait si on avait laissé B. La force du ressort (l'énergie cinétique, dirions-nous aujourd'hui) a été redistribuée autrement qu'elle ne l'aurait été avec B.

En réalité, ce que Leibniz montre, c'est que la situation envisagée par Papin n'est pas possible : si on fait l'hypothèse que les corps A et D s'arrêtent mutuellement (1^{ère} équation) et que le ressort est tendu de la même manière i.e. que la force totale (l'énergie cinétique totale) est la même que dans le cas de la collision entre A et B (2^{ème} équation), on ne peut pas faire l'hypothèse que la vitesse initiale de A était 1 (cette vitesse initiale devait valoir $\frac{4}{3}\sqrt{10}$).

Le raisonnement de Leibniz est correct, mais il suppose de tenir compte des forces vives et de leur loi de conservation dans la description de la rencontre des corps, ce qui ne peut qu'être considéré comme une pétition de principe par Papin.

Le rôle que jouent les forces vives lors du choc apparaîtra de manière de plus en plus claire dans les lettres suivantes.

Ainsi, dans la *lettre du 8/18 novembre 1697* (A III 7B, N 156), Leibniz répète que les corps A et D « quoiqu'ils se soient arrêtés mutuellement, n'auraient jamais pu bander le ressort au point où A et B l'avaient bandé », parce que B et D n'ont pas la même force vive. Et il affirme explicitement qu'il « faut avoir égard aux forces vives » pour traiter le problème. Contrairement à ce que Papin avait cru comprendre, Leibniz ne pense pas que, lors de leur rencontre, les corps n'agissent l'un sur l'autre que selon la loi de la force morte.

Dans sa *lettre du 2/12 décembre 1697* (A III 7B, N 163, p.666), Leibniz introduit un thème nouveau, qu'il désigne comme une « merveille » : la décomposition de la force totale en force respective (force du choc) et force directive (force de progrès), dont chacune se conserve.

Ce passage rejoint, sous une forme un peu différente mais équivalente, ce que Leibniz dit dans l'*Essay de dynamique* de 1700 (GM VI, p. 227) de l'harmonie qu'expriment les trois lois de conservation qui interviennent pour décrire les chocs :

Si on désigne par m_a et m_b les masses des deux corps, par v_a et v_b leurs vitesses avant le choc et par v'_a et v'_b leurs vitesses finales, on a :

1. Équation linéale (à une dimension) : $v_A - v_B = v'_A - v'_B$ ou conservation de la vitesse respective.
2. Équation plane (à deux dimensions) : $m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$, ou conservation de la quantité de progrès. Il faut, précise Leibniz, considérer la somme ou la différence des quantités de mouvement des deux corps, suivant que leurs mouvements sont de même sens ou de sens contraires (nous résoudrions aujourd'hui ce problème de signe en passant à la forme vectorielle).
3. Équation solide (à trois dimensions) : $m_A v_A^2 + m_B v_B^2 = m_A v'^2_A + m_B v'^2_B$, conservation de la force totale ou absolue.

Le texte de la lettre à Papin (**texte 6**) et l'exemple chiffré qui y est proposé permet de transcrire les considérations de Leibniz en termes contemporains (**fig. 4**) : la « force de progrès », c'est l'énergie cinétique du centre de masse, la « force du choc », c'est l'énergie cinétique des corps

Les considérations développées dans ce passage sont essentielles pour Leibniz, parce qu'elles lui permettent de faire apparaître chacune des trois lois de conservation de son système comme une conséquence des deux autres. Bien loin de mener à une incohérence, la distinction entre force absolue et force respective introduit des notions qui sont harmonieusement liées.

Papin (**texte 7**) n'est pas prêt à entendre l'argument de l'harmonie : Imaginer, comme le suggère Leibniz, que les corps vont se comporter en sorte que soit préservée la loi de conservation des forces vives (des mv^2) parce que cette loi participe à l'harmonie est aux yeux de Papin un argument finaliste qui n'a pas sa place lorsqu'il s'agit de décrire le mouvement de corps inanimés. La proposition de Papin aurait, quant à elle, le double avantage de n'avoir recours qu'aux causes efficientes, et de ne pas multiplier inutilement les espèces de force.

(texte 7) Vous dites, Monsieur, que dans les deux cas que nous avons proposé, la cause totale n'est pas toujours égale et par conséquent l'effet total ne saurait aussi être égal : et par conséquent il faut que la différence se trouve dans le ressort parce qu'elle ne se rencontre nulle part ailleurs : on vous répondra que le corps A ne se met pas en peine de tout cela non plus que de savoir si le même progrès se conservera ou non : on sait que les corps inanimés ne se proposent point de fins de cette nature, mais qu'ils sont toujours retardés proportionnellement à la tension ou force qui est la cause efficiente de leur retardement. Voici donc l'avantage que notre hypothèse a par dessus la vôtre ; c'est que, sans multiplier les espèces de force et sans avoir recours aux causes finales, nous expliquons tout par des causes efficientes très conformes à la raison (...). (*Papin à Leibniz, 27déc 1697/6 janvier 1698, A III 7B N 171, p. 701*)

Dans la dernière lettre portant sur notre sujet (*Leibniz à Papin, 16/26 janvier 1698, A III, 7, N 17*), Leibniz avance un argument qui est une sorte de variation sur l'argument de l'harmonie des trois lois, mais sous une forme que son adversaire devrait entendre : il montre qu'on peut obtenir la conservation des mv^2 à partir de 1) la conservation de la vitesse relative (équivalente à celle de la réciprocité des masses et des vitesses, que Papin accepte) et 2) la conservation du progrès total (conservation de la vitesse du centre de gravité), que Papin doit aussi accepter, puisqu'il ne s'agit de rien d'autre que de reconnaître que la vitesse du système pris comme un tout ne sera pas modifiée si rien n'agit sur ce système de l'extérieur. L'argument est intéressant et peut sembler constituer un progrès par rapport à sa version précédente, dans la mesure où il ne s'agit plus ici seulement de montrer qu'on peut avoir à la fois conservation de la vitesse relative et conservation de mv^2 , mais de montrer que l'on obtient nécessairement la loi de conservation en mv^2 à partir des 2 autres lois, que Papin devrait accepter.

Leibniz ne parviendra pas à convaincre Papin, mais la discussion n'aura pas été vaine, et il est utile dans faire le bilan :

Comme précédemment

- Leibniz soutient qu'il a démontré que l'estime correcte des forces est en mv^2 : si l'on accepte d'évaluer la force d'un corps à partir de sa capacité à élever une certaine masse à une certaine hauteur et que l'on tient compte de la loi (empirique) de la chute des corps (de Galilée), il faut évaluer cette force en mv^2 , conformément à ce qui a déjà été prouvé dans la *brevis demonstratio*.
- Il pense avoir expliqué pourquoi des corps qui ont même mv (et donc des mv^2 différents) s'arrêtent mutuellement : si l'on accepte un principe de continuité, les corps vous

s'affronter avec leurs forces mortes, infinitésimales, comme en statique. Ils échangent des mdv . Ces mdv , sommés, donnent lieu à une force respective, proportionnelle à mv .

- À partir de là, il explique l'erreur de Descartes (et de Papin) qui généralise(nt) à tort les lois de la statique, alors qu'il y a en réalité deux forces et deux lois différentes : celle qui régit la rencontre des corps et celle qui explique comment un corps peut utiliser sa force pour s'élever à une certaine hauteur.
- Il affirme que la question de savoir pourquoi deux corps qui ont la même force (en mv^2) ne s'arrêtent pas mutuellement est mal posée : la force qu'il faut prendre en compte dans ce cas, c'est la force respective, qui est comme mv .
- Il affirme que le recours à deux types de forces et à deux lois de conservation différentes, n'est pas problématique. Les deux lois de conservation ne se contredisent pas. Au contraire : elles trouvent leur place dans un système d'équations qui manifestent l'harmonie du monde naturel.

L'échange avec Papin a en outre amené Leibniz considérer qu'il est nécessaire de prendre en compte la conservation des forces vives au moment même où le choc a lieu, lorsque les échanges se font de manière infinitésimale. Les corps qui se rencontrent n'échangent pas seulement des mdv , ils transmettent aussi progressivement des quantités de forces vives au ressort, qui sera tendu différemment si les forces vives des corps sont différentes.

De son côté, Papin

- Persiste à juger inutile le recours à deux types de forces différentes : on peut tout expliquer avec les forces en mv .
- Estime irrecevable l'argument de l'harmonie et du recours aux causes finales : il faut s'en tenir à des explications en termes de cause efficiente.

L'analyse, dans l'échange avec Papin, de la manière dont les forces mortes et vives interviennent lors des chocs montre que l'on ne peut pas se contenter d'affirmer que les corps qui se rencontrent échangent des quantités infinitésimales qui sont comme mdv (selon le modèle de la balance). Il faut aussi tenir compte du fait que les corps transmettent au ressort des quantités infinitésimales de mv^2 que le ressort, emmagasine progressivement avant de les restituer aux corps. Les quantités de mouvement en mv , comme les forces vives en mv^2 , interviennent dans les chocs à la fois comme quantités infinitésimales et comme quantités finies. Ces considérations empêchent, me semble-t-il de maintenir, dans le cas des chocs, une correspondance entre l'opposition forces infinitésimales vs forces finies et l'opposition estime en mv vs estime en mv^2 .

En guise de conclusion

Pour terminer, je voudrais revenir quelques minutes sur les connotations négatives qui accompagnent la notion de force morte.

Dans les premiers textes où elle apparaît, la force morte est, nous l'avons dit, associée au poids mort, inerte. Par la suite, cette force est liée à l'erreur des Cartésiens et à une vision étriquée de la physique, qui n'aurait pas su dépasser la statique vers l'étude des mouvements « vifs et vigoureux ».

Les textes du milieu des années 1690 dans lesquels Leibniz entreprend d'articuler sa physique et sa métaphysique offrent, pourtant, quelques arguments en faveur d'une réhabilitation des forces mortes.

Ainsi, dans une *lettre à Bossuet du 12 juillet 1694*²³ (**texte 8**) qui reprend, en français ce que le *De primae philosophiae emendatione* (1694) dit en latin, Leibniz oppose la force « active » à laquelle il a, dit-il, destiné sa *Dynamique*, à la faculté de l'école « qui n'est qu'une possibilité prochaine pour agir ; mais morte, pour ainsi dire, et inefficace en elle-même si elle n'est excitée par dehors ». La force active enveloppe une « entéléchie », elle a un certain effort (*conatum*) et elle est portée d'elle-même à l'action, sans avoir besoin d'aide, pourvu que rien ne l'empêche. Leibniz propose ensuite deux exemples qu'il lui arrive de donner ailleurs comme exemple de force morte : l'exemple d'un corps pesant suspendu, et l'exemple d'un arc bandé. La force qui apparaît là, c'est le *conatus*, l'effort, la tendance ou le commencement d'une action, certainement pas quelque d'inerte ou de passif.

(**texte 8**) je dirai présentement que la considération de *la force*, à laquelle j'ai destiné une science particulière, qu'on peut appeler *Dynamique*, est de grand secours pour entendre la nature de la substance. Cette force active est différente de *la faculté* de l'école en ce que la faculté n'est qu'une possibilité prochaine pour agir; mais morte, pour ainsi dire, et inefficace en elle-même, si elle n'est excitée par dehors. Mais la force active enveloppe une *entéléchie* ou bien un acte; étant moyenne entre la faculté et l'action, et ayant en elle un certain effort, *conatum*: aussi est-elle portée d'elle-même à l'action sans avoir besoin d'aide, pourvu que rien ne l'empêche. Ce qui peut être éclairci par l'exemple d'un corps pesant suspendu, ou d'un arc bandé (...) Je tiens que cette vertu d'agir se trouve en toute substance, et même qu'elle produit toujours quelque action effective, et que le corps même ne saurait jamais être dans un parfait repos : ce qui est contraire à l'idée de ceux qui le mettent dans la seule étendue. (*Sur l'avancement de la métaphysique réelle, et particulièrement sur la nature de la substance expliquée par la force* (1694) A II, 2B N.274, p. 824)

Dans ce texte, comme dans d'autres de la même époque²⁴, Leibniz affirme qu'il y a une force dans chaque corps, une puissance d'agir qui se trouve en toute substance, et qui produit toujours quelque action effective, en sorte que, « le corps ne saurait jamais être dans un parfait repos », ce qui est, précise Leibniz, « contraire à l'idée de ceux qui le mettent dans la seule étendue ». Les forces par lesquelles un corps agit même quand il semble au repos évoquent à nouveau, les forces mortes, qui semblent ici devenues des alliées contre Descartes et sa conception de corps réduits à l'étendue.

Il y a des forces, de l'action, des corps qui agissent partout, même à l'équilibre, même quand tout semble immobile. Les forces mortes, d'abord associées à un poids mort dont il faut vaincre l'inertie, finissent par constituer une force active, et devenir un élément essentiel pour penser un monde où les corps tendent sans cesse à l'action.

²³ *Sur l'avancement de la métaphysique réelle, et particulièrement sur la nature de la substance expliquée par la force* (1694) A II, 2B, N.274.

²⁴ *De primae philosophiae emendatione, Specimen dynamicum*, Premier brouillon du *Système nouveau*.