ACADÉMIE ROUMAINE

BULLETIN
DE LA SECTION SCIENTIFIQUE

PUBLIÉ PAR LE SECRÉTAIRE DE LA SECTION

DR. GR. ANTIPA

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROUMAINE

XI-ème ANNÉE

No. 1

EXTRAIT

SUR LES CORRESPONDANCES RATIONNELLES ENTRE DEUX SURFACES ALGÉBRIQUES AYANT MÊME IRRÉGULARITÉ

PAR

L. GODEAUX

CVLTVRA NAŢIONALĂ
BUCAREST
1927

SUR LES CORRESPONDANCES RATIONNELLES ENTRE DEUX SURFACES ALGÉBRIQUES AYANT MÊME IRRÉGULARITÉ

PAR

L. GODEAUX

NOTE PRÉSENTEÉ À L'ACADÉMIE ROUMAINE

PAR

MR. G. ŢIŢEICA

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROUMAINE

Dans leur «*Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*» [1]), MM. Enriques et Severi ont montré incidemment qu'entre une surface de Picard de diviseur δ et une surface de Jacobi, existait une correspondance $(\delta, 1)$. Ce résultat se trouve établi par la réprésentation paramétrique des surfaces de Picard. Si l'on tient compte de la définition géometrique des surfaces de Picard, le theorème de MM. Enriques et Severi peut s'énoncer de la manière suivante: Si entre une surface de Picard F et une surface de Jacobi F' existe une correspondance $(1, \delta)$, il existe également une correspondance $(1, \delta)$ entre les surfaces F' et F.

Nous avons cherché une démonstration géometrique de ce théorème, en nous limitant au cas où F et F' ont des modules généraux; la démonstration que nous avons réussi à trouver reposait sur les points suivants:

1. La correspondance $(1, \delta)$ entre F et F' détermine, sur F', une involution d'ordre δ privée de points unis et par suite cyclique.
2. Le diviseur σ de Severi [2]) d'une surface de Picard est égal à l'unité.
3. La surface dont les points représentent les ∞^2 systèmes linéaires appartenant à un système continu complet tracé sur l'une des surfaces F, F', est birationnellement identique à la surface considérée.

Partant de là, nous avons cherché à étendre le theorème de MM. Enriques et Severi à d'autres surfaces algébriques et nous sommes ainsi parvenu au théorème suivant, dont la démonstration fait l'objet de cette note.

Si une surface algébrique F', d'irrégularité $q > 0$, contient une involution cyclique I_p, d'ordre p, privée de points unis, dont l'image est une surface F

[1]) *Acta Mathematica*, 1903, tomes XXXII et XXXIII.

[2]) Voir Severi, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*. (Annales de l'École Normale supérieure, 1908).

d'irrégularité q ayant le diviseur de Severi égal à l'unité, la variété de Picard de la surface F contient une involution d'ordre p privée de points unis dont l'image est la variété de Picard de la surface F' [1]).

1. Soient F, F' deux surfaces algébriques de même irrégularité q $(q > o)$ entre lesquelles existe une correspondance $(1, p)$. Les groupes de p points de F' qui correspondent aux points de F forment une involution I_p d'ordre p que nous supposons cyclique et privée de points unis. L'involution I_p est donc engendrée par une transformation birationnelle T de F' en elle-même, de période p.

Considérons sur F un système linéaire irréductible $|C|$, régulier, de degré n et de genre π, ∞^1 au moins, appartenant à un système continu complet $\{C\}$, irréductible, formé de ∞^q systèmes linéaires tous réguliers. On sait qu'il existe sur toute surface des systèmes linéaires possédant ces propriétés [2]).

Aux courbes C correspondent sur F' des courbes C' de degré pn, de genre $p\,(\pi-1)+1$, non spéciales, puisque $|C|$ est par hypothèse non spécial et que le système canonique de F' est le transformé du système canonique de F.

Le genre arithmétique de F' est égal à $p\,(p_a+1)-1$, p_a étant le genre arithmétique de F [3]). Les courbes C' appartiennent à un système linéaire complet $|C'|$ dont la dimension r' vérifie, d'après le théorème de Rieman-Roch, l'inégalité

$$r' \geqslant p\,(p_a + n - \pi + 2) - 1.$$

D'autre part, la dimension r de $|C|$ est égale à

$$r = p_a + n - \pi + 1.$$

Il en résulte que, puisque r est au moins égal à l'unité, que r' est supérieur à r.

Le système $|C'|$ est irréductible.

2. La transformation T transforme en lui-même le système $|C'|$ et opère sur ce système comme une homographie sur les points d'un espace linéaire à r' dimensions. Le système $|C'|$ contient un système linéaire partiel formé de courbes transformées chacune en elle-même par T, c'est le système formé par les courbes C' transformées des courbes C. Nous désignerons ce système linéaire partiel par $|C'_0|$; il est composé au moyen de l'involution I_p.

D'après la théorie des homographies spatiales, $|C'|$ contient au moins un second système linéaire partiel composé au moyen de l'involution I_p.

[1]) Dans un travail *Sur une propriété des surfaces algébriques irrégulières contenant une involution régulière d'ordre deux*, en cours d'impression dans les «Bulletins de l'Académie royale de Belgique» nous avons établi ce théorème dans un cas particulier.

[2]) Voir F. Severi, *Nuovi contributi alla teoria dei sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica*. (Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, 1916 1. sem., pp. 459—471, 551—562).

[3]) Severi, *Sulle relazioni che legano...* (Rend. R. Instituto Lomb., 1903).

Soit $|C_1'|$ ce système linéaire partiel. Chacune des courbes C_1' étant transformée en elle-même par T, ces courbes sont les transformées de courbes C_1 de la surface F, ces courbes C_1 formant un systéme linéaire complet. On a [1])

$$|pC| = |pC_1'|.$$

Supposons que $|C_1|$ n'appartienne pas au système continu complet $\{C\}$. Lorsque $|C|$ décrit le système complet $\{C\}$, $|C_1|$ décrit un système continu ∞^q, $|\overline{C}|$ et l'on a, par le raisonnement précédent appliqué à chaque système linéaire de $\{C\}$,

$$\{pC\} = \{p\overline{C}\}.$$

Mais cela n'est pas possible, car, puisque le diviseur σ de Severi de F est égal à l'unité, la division sur la surface F est une opération univoque et par suite les systèmes $\{C\}$, $\{\overline{C}\}$ doivent coïncider. Il en résulte que tout système linéaire partiel de $|C'|$, composé au moyen de I_p, provient d'un système linéaire appartenant à $\{C\}$.

3. Supposons que le système $|C'|$ contienne précisément t $(1 < t \leqslant p)$ systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_p. Soient $|C_0'|, |C_1'|, \ldots, |C_t'|$ ces systèmes, $|C|, |C_1|, \ldots, |C_t|$ les systèmes linéaires correspondants sur F. Ces systèmes sont complets, appartiennent à $\{C\}$ et sont par suite de dimension r. On a, d'après la théorie des homographies,

$$tr + t = r' + 1,$$

c'est-à-dire

$$t\,(p_a + n - \pi + 2) \geqslant p\,(p_a + n - \pi + 2),$$

ou encore, puisque $p_a + n - \pi + 2$ est positif par hypothèse,

$$t \geqslant p.$$

Il en résulte que $t = p$ et que $|C'|$ contient p systèmes linéaires partiels composés au moyen de I_p, toujours distincts.

4. Désignons par V_q, V_q' les variétés de Picard attachées respectivement aux surfaces F, F'. Les points de V_q et les systèmes linéaires de $\{C\}$ se correspondent birationnellement.

Lorsque le système linéaire $|C|$ décrit le système continu $\{C\}$, le système $|C'|$ décrit sur F' un système continu $\{C'\}$ non linéaire. A chaque système linéaire de $\{C\}$ correspond un système linéaire $|C'|$ de $\{C'\}$ et inversement, à chaque système linéaire de $\{C'\}$ correspondent p systèmes

[1]) L. Godeaux, *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de la Société mathématique de France, 1919).

linéaires de $\{C\}$, toujours distincts. Le système $\{C'\}$ est par suite formé de ∞^q systèmes linéaires et est irréductible. La surface F' ayant l'irrégularité q, il existe une correspondance birationnelle entre les systèmes linéaires de $\{C'\}$ et les points de la variété V_q'.

On en conclut qu'il existe, entre les variétés V_q' et V_q, une correspondance $(1, p)$, c'est-à-dire sur V_q, une involution d'ordre p dont V_q' est l'image. De plus, cette involution est privée de points unis, puisque les systèmes linéaires de $\{C\}$ qui correspondent à un même système linéaire de $\{C'\}$ sont toujours distincts. Le théorème énoncé au début de ce travail est donc démontré.

Liège, Université, 12 août 1927.