SUR UN THÉORÈME DE M. G. KOENIGS

PAR

L. GODEAUX
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

EXTRAIT DU „BULLETIN SCIENTIFIQUE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE TIMIȘOARA“

TIMIȘOARA.
IMPRIMERIE „CARTEA ROMÂNEASCĂ“
1928.

SUR UN THÉORÈME DE M. G. KOENIGS

PAR

L. GODEAUX
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

EXTRAIT DU „BULLETIN SCIENTIFIQUE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE TIMIŞOARA"

TIMIŞOARA
IMPRIMERIE „CARTEA ROMÂNEASCĂ"
1928.

SUR UN THÉORÈME DE M. G. KOENIGS

PAR

L. GODEAUX

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

Considérons une congruence de droites et appelons surfaces de cette congruence les surfaces réglées formées de droites de la congruence. Appelons demi-quadrique un des systèmes de génératrices rectilignes d'une quadrique, demi-quadrique osculatrice à une surface réglée, le long d'une droite de celle-ci, la demi-quadrique ayant comme support la quadrique osculatrice à la réglée le long de la droite considérée et contenant cette droite.

Dans sa thèse[1)], M. *Koenigs* a démontré que *les génératrices des demi-quadriques osculatrices aux surfaces réglées d'une congruence de droites le long d'une droite de celle-ci commune à toutes ses surfaces réglées forment un complexe du second ordre.*

Nous nous proposons dans cette note d'exposer une démonstration très simple du théorème de M. *Koenigs,* basée sur la considération de l'hyperquadrique de *Klein* représentant, dans un espace linéaire à cinq dimensions, les droites de l'espace ordinaire. Nous utiliserons à cet effet quelques considérations dues à *C. Segre*[2)] sur les espaces osculateurs à une surface de l'espace à cinq dimensions. Nos raisonnements nous donneront l'occasion de préciser le théorème de M. Koenigs.

1. Soit g une droite de l'espace engendrant une congruence (g). Les coordonnées radiales $g_{12}, g_{13}, \ldots, g_{34}$ de g sont des fonctions analytiques de deux paramètres essentiels u, v.

Considérons l'hyperquadrique Q de *Klein* qui représente, dans un espace linéaire à cinq dimensions S_5, les droites de l'espace. L'équation de Q est

$$p_{12}\, p_{34} + p_{13}\, p_{42} + p_{14}\, p_{23} = 0,$$

1) **G. Koenigs.** — *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé* (Annales de l'École normale supérieure, 1882, 2^e série, t. XI, pp. 219—338). Voir *n*° 87. Voir aussi: *Wilczynski, Sur la théorie générale des congruences,* p. 59 (Mémoires in-4° de l'Académie roy. de Belgique, 2^e série, t. III, pp. 1 — 86).

2) **C Segre.** — *Su una classe di superficie degl'iperspazi, legata colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine* (Atti della R. Accad. di Torino, 1907, t. XLII, pp. 1047 — 1079).

$p_{12}, p_{13}, \ldots p_{34}$, interprétées comme coordonnées projectives homogènes de l'espace S_5, étant les coordonnées radiales d'une droite de l'espace.

Aux droites g de la congruence (g) correspondront des points G de l'hyperquadrique Q, formant une surface que nous représenterons par (G). Nous écarterons le cas où la congruence (g) a l'ordre ou la classe égaux à un ; dans ces conditions, la surface (G) n'est ni un plan de l'hyperquadrique Q, ni la section de cette hyperquadrique par un espace linéaire.

Nous conviendrons de représenter par G^{lm} le point dont les coordonnées sont

$$g_{ik}^{lm} = \frac{\delta^{l+m} g_i}{\delta u^l \delta v^k} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

De plus, nous représenterons, suivant un usage généralement admis, par $\lambda A + \mu B$ un point dont les coordonnées sont $\lambda a_{ik} + \mu b_{ik}$, $(i, k = 1, 2, 3, 4)$. Ainsi, par exemple, le point $\lambda G^{10} + \mu G^{01}$ aura pour coordonnées $\lambda g_{ik}^{10} + \mu g_{ik}^{01}$.

Nous distinguerons trois cas :

a) La surface (G) n'est ni une développable ni un cône :

b) La surface (G) est une développable ;

c) La surface (G) est un cône.

2. Plaçons-nous dans le premier cas et fixons l'attention sur une droite ordinaire générique de la congruence (g) et sur le point ordinaire G correspondant sur la surface (G). Une réglée de la congruence (g) contenant g sera représentée sur (G) par une courbe C passant par le point G. Nous représenterons une telle courbe en supposant u, v fonctions analytiques d'une variable t, ces fonctions prenant pour une certaine valeur de t, unique, des valeurs égales aux paramètres u, v du point G. Nous représenterons par u', v', ... les dérivées de ces fonctions par rapport à t.

Soit C une courbe tracée sur (G) et passant par G. La demi-quadrique osculatrice le long de g à la réglée de (g) représentée par C, a pour image sur Q la section de cette hyperquadrique par le plan osculateur en G à la courbe C. Ce plan osculateur est déterminé par les points :

$$G, \quad G^{10} u' + G^{01} v',$$

$$G^{20} u'^2 + 2 G^{11} u' v' + G^{02} v'^2 + G^{10} u'' + G^{01} v''.$$

Nous supposerons tout d'abord que les coordonnées des points de (G) ne sont pas solutions d'une même équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. Dans ces conditions les points $G, G^{10}, G^{01}, G^{20}, G^{11}, G^{02}$ sont indépendants et tout point de l'espace S_5 peut être représenté par

$$\alpha_0 G + \alpha_1 G^{10} + \alpha_2 G^{01} + \alpha_3 G^{20} + \alpha_4 G^{11} + \alpha_5 G^{02}.$$

Les quantités $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_5$ peuvent s'interpréter comme coordonnées projectives homogènes des points de S_5.

Le plan osculateur à la courbe C au point G sera dans ces conditions représenté par les équations

$$\left\|\begin{array}{cccccc} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u' & v' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u'' & v'' & u'^2 & 2u'v' & v'^2 \end{array}\right\| = 0,$$

c'est-à-dire par

$$2\,\alpha_3\,v' - \alpha_4\,u' = 0,\quad 2\,\alpha_5\,u' - \alpha_4\,v' = 0,$$

$$2\,u'\,v'\,(\alpha_1\,v' - \alpha_2\,u') + \alpha_4\,(u'\,v'' - v'\,u'') = 0.$$

Considérons le plan osculateur aux courbes C ayant même tangente en G. Nous supposons donc $u' : v'$ constant, u'' et v'' pouvant varier. Le lieu de ces plans est l'espace linéaire S_3, à trois dimensions, représenté par

$$2\,v'\,\alpha_3 - u'\,\alpha_4 = 0,\quad 2\,u'\,\alpha_5 - v'\,\alpha_4 = 0.$$

Cet espace S_3 contient le plan tangent ω à la surface (G) au point G, plan dont les équations sont

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0.$$

L'espace S_3 est complètement déterminé par le plan ω et le point

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0,\quad \alpha_3 : \alpha_4 : \alpha_5 = u'^2 : 2\,u'\,v' : v'^2.$$

Le lieu de ce point est une conique Γ dont les équations sont

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0,\quad \alpha_4^2 - 4\,\alpha_3\,\alpha_5 = 0.$$

Le lieu des plans osculateurs au point G aux différentes courbes tracées sur la surface (G) et passant par G, est donc le cône V_4^2, du second ordre, projetant la conique Γ à partir du plan ω[3].

La section de l'hyperquadrique Q par le cône V_4^2 est le lieu des points images des génératrices des demi-quadriques osculatrices le long de g aux surfaces réglées de la congruence (g) passant par g. Le lieu de ces génératrices est donc bien un complexe du second ordre et le théorème de M. *Koenigs* est démontré dans le cas envisagé.

3. — Considérons le plan ω tangent en G à la surface (G). Ce plan est tangent à Q en G ou, éventuellement, appartient en entier à Q. Trois cas peuvent se présenter :

1) Le plan ω est tangent à l'hyperquadrique Q et rencontre cette hyperquadrique suivant deux droites distinctes ;

---

(3) Cfr. **Segre** (loc. cit.) où ce point est établi par une voie un peu différente.

(4) **G. Tzitzeica**, *Géométrie différentielle projective des réseaux*, n° 38, (Paris, Gauthier-Villars, 1924).

2) Le plan ω est tangent à l'hyperquadrique Q qu'il touche suivant une droite;

3) Le plan ω appartient en entier à l'hyperquadrique Q.

On sait[4] qu'une courbe tracée sur Q est l'image d'une surface développable si les tangentes à cette courbe appartiennent toutes à l'hyperquadrique Q.

Plaçons-nous dans le premier cas. Par un point G de (G) passent deux tangentes à la surface appartenant à Q; en d'autres termes par G passent deux courbes tracées sur (G) et représentant des développables de la congruence (g) contenant g. Nous supposerons que les paramètres u, v aient été choisis de manière à ce que les développables de la congruence (g) soient représentées par $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ Alors les tangentes en G à la surface (G) sont précisément les droites GG^{10}, GG^{01}.

Les points de la droite GG^{10} représentent les droites d'un faisceau dont le centre est un des foyers de la droite g et le plan, un plan focal de cette droite. Désignons par R ce foyer, ϱ ce plan focal. Le point R décrit une des nappes (R) de la surface focale de (g). Le plan ϱ est le plan tangent à la développable de (g) engendrée lorsque u varie seul. En d'autres termes, lorsque u varie seul, le point R engendre une courbe tracée sur (R) et dont le plan osculateur en R est le plan ϱ. Nous dirons que le faisceau de rayons (R, ϱ), de centre R et de plan ϱ, est un faisceau focal de la congruence (g) relatif à la droite g.

La droite GG^{01} représente le second faisceau focal (S, σ) de la congruence (g) relatif à la droite g.

Considérons un espace linéaire S_3 lieu des plans osculateurs aux courbes de (G) passant par G et ayant même tangente en ce point. La section de Q par cet espace S_3 représente une congruence bilinéaire. Les directrices de celle-ci ont pour images les sections par Q de la droite polaire de cet espace S_3 par rapport à Q. Puisque ω est tangent à Q et appartient à S_3, cette droite polaire appartient au plan ω et les directrices de la congruence bilinéaire appartiennent l'une au faisceau (R, ϱ), l'autre au faisceau (S, σ). Les espaces linéaires projetant du plan ω les points de la conique Γ représentent les congruences bilinéaires désignées par M. *Koenigs* sous le nom de congruences osculatrices à la congruence (g) le long de ses différentes droites.

Envisageons le second cas. Les deux foyers et les deux plans focaux de la congruence (g) sont actuellement confondus; il en résulte que (g) est le lieu des tangentes aux courbes asymptotiques d'un système de la surface focale (R) de cette congruence. Les deux directrices de la congruence bilinéaire représentée par un espace linéaire S_3 projetant un point de la conique Γ à partir du plan ω, sont l'une une droite de l'unique faisceau focal de la congruence (g) relatif à la droite g, l'autre une droite infiniment voisine de la première.

Passons au troisième cas. Toutes les surfaces de la congruence (g) sont des développables et par suite cette congruence est une gerbe de rayons ou un plan réglé, cas qui ont été exclus et qui ne présentent d'ailleurs aucun intérêt.

4. — Nous allons maintenant supposer que les coordonnées des points de la surface (G) satisfont à une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre

$$(1) \qquad A_0 G + A_1 G^{10} + A_2 G^{01} + A_3 G^{20} + A_4 G^{11} + A_5 G^{02} = 0,$$

où $A_0, A_1, \ldots, A_5$ sont des fonctions analytiques de u et v.

Les six points $G, G^{10}, \ldots, G^{02}$ appartiennent à un hyperplan Σ_5.

Le plan osculateur au point G à toute courbe C tracée sur la surface (G) et passant par G appartient à cet hyperplan Σ_4. Par suite le lieu de ces plans osculateurs coïncide avec Σ_4.

Les coordonnées radiales de la congruence (g) satisfaisant à une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, (g) est une congruence W[5]. Par suite, les génératrices des demi-quadriques osculatrices suivant une droite aux surfaces d'une congruence W contenant cette droite forment un complexe linéaire.

Cette propriété est caractéristique des congruences W. En effet, si les plans osculateurs au point G, aux différentes courbes tracées sur la surface (G) et passant par G appartiennent à un hyperplan (quel que soit le point G), il existe une relation de la forme (l) et (g) est une congruence W.

5. — Supposons que la surface (G) soit une développable; cette surface est donc constituée par les tangentes à une courbe K appartenant à Q. Les tangentes à K appartiennent également à Q et K représente donc une développable de l'espace, ordinaire, c'est à dire le lieu des tangentes à une courbe k de cet espace. La congruence (g) est formée de ∞^1 faisceaux de rayons dont les centres sont les points de la courbe k et les plans, les plans osculateurs à cette courbe.

Désignons par $x_1(u)$, $x_2(u)$, $x_3(u)$, $x_4(u)$ les coordonnées projectives homogènes d'un point x de la courbe k. Les points

$$x, \; x^{10} + v\, x^{20},$$

où v a une valeur déterminée, déterminent une droite g de (g). Représentons par U le point image sur Q de la droite $x\,x^{10}$, les coordonnées de ce point étant

$$U_{ik} = x_i x_k^{10} - x_k x_i^{10}, \qquad (i,\; k = 1,\; 2,\; 3,\; 4).$$

Nous écrirons en abrégé,

$$U = |x \quad x^{10}|.$$

Nous avons alors

$$U^{10} = |x \quad x^{20}|$$

---

(5) **G. Darboux**, *Leçons, sur la théorie générale des surfaces,* t. II, p, 345 Paris, Gauthier-Villars, 1889). **G. Tzitzeica**, loc. cit., p. 262.

et le point G image de la droite g est donné par :

$$G = U + v\,U^{10}.$$

Le point U engendre, lorsque u varie, la courbe K, et la droite $U\,U^{10}$ la surface (G).

Les plans osculateurs au point G aux courbes tracées sur (G) et passant par G, appartiennent à un espace linéaire à trois dimensions, Σ_3, déterminé par les points $U, U^{10}, U^{20}, U^{30}$, c'est-à-dire à l'espace linéaire osculateur de la courbe K au point U considéré. En effet, un de ces plans osculateurs est déterminé par les points

$$G = U + v\,U^{10},$$

$$G^{10}\,u' + G^{01}\,v' = U^{10}\,(u' + v') + v\,u'\,U^{20},$$

$$G^{20}\,u'^2 + 2\,G^{11}\,u'\,v' + G^{10}\,u'' + G^{01}\,v'' = U^{10}(u'' + u'') + U^{20}\,(u'^2 + 2\,u'\,v' + v\,u'') + U^{30}\,v\,u'^2$$

Les génératrices des demi-quadriques osculatrices le long de la droite g aux surfaces réglées de (g) contenant cette droite, forment donc une congruence bilinéaire.

Tout ponit de l'espace Σ_3 peut être représenté par

$$\alpha_0 U + \alpha_1\,U^{10} + \alpha_2\,U^{20} + \alpha_3\,U^{30},$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ pouvant être interprétées comme les coordonnées projectives homogènes de ce point.

Posons

$$\Omega\,(p,\ q) = p_{12}\,q_{34} + p_{34}\,q_{12} + p_{13}\,q_{42} + \dots + p_{23}\,q_{14},$$

de sorte que, si $p_{12}, p_{13}, \dots, p_{34}$ sont les coordonnées projectives homogènes des points de S_5, l'équation de Q soit

$$\Omega\,(p,\ p) = 0.$$

Les points p, q sont conjugués par rapport à Q.

Moyennant ces notations, l'équation de la quadrique section de Q par Σ_3 est

$$\alpha_2^2\,\Omega\,(U^{20},\ U^{20}) + \Sigma_3^2\,\Omega\,(U^{30},\ U^{30}) + 2\,\alpha_1\,\alpha_3\,\Omega\,(U^{10},\ U^{30}) + 2\,\alpha_2\,\alpha_3\,\Omega(U^{20},\ U^{30}) = 0.$$

Cette quadrique est donc un cône de sommet U et par suite, elle représente une congruence bilinéaire de droites ayant comme directrices la tangente à la courbe k au point x et une droite infiniment voisine de cette tangente.

On remarquera que l'espace Σ_3 est tangent à Q le long de la droite $U\,U^{10}$.

6. — Il nous reste à considérer le cas où la surface (G) est un cône. Soient A le sommet de ce cône, a la droite dont A est l'image. La congruence (g) est formée de ∞^1 faisceaux de rayons ayant leurs sommets sur la droite a et dont les plans passent par cette droite.

$\varphi(u)$ étant une fonction analytique de u, les coordonnées d'un point x de la droite a peuvent s'écrire

$$x_i = a_i \varphi(u) + b_i, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Soit d'autre part $y_i(u)$ les coordonnées d'un point y d'une courbe L. Nous pouvons considérer la congruence (g) comme engendrée par un faisceau de rayons de sommet x dont le plan passe par la droite a et le point y, lorsque u varie. Une droite g est déterminée par les points

$$x, \ x^{10} + v y.$$

Considérons sur Q les points

$$A = | x \ x^{10} | = | a\varphi + b \quad a\varphi' | = \varphi' \, | b \ a |,$$

$$B = | x \ y |.$$

La droite AB engendre, lorsque u varie, le cône (G).
Un point G est donné par

$$G = A + v B.$$

Les plans osculateurs au point G aux courbes tracées sur le cône (G) et passant par G ont pour lieu un espace linéaire à trois dimensions Σ_3' déterminé par les points

$$A, \ B, \ B^{10}, \ B^{20}.$$

En effet, un de ces plans est déterminé par les points

$$G = A + v B,$$

$$G^{10} u' + G^{01} v' = u' \varphi'' A + v u' B^{10} + v' B,$$

$$G^{20} u'^2 + 2 G^{11} u' v' + G^{02} v'^2 + G^{10} u'' + G^{01} v'' =$$
$$(u'' \varphi'' + u'^2 \varphi''') A + v'' B + (u'' v + 2 u' v') B^{10} + v u'^2 B^{20}.$$

Tout point de Σ_3' est représenté par

$$\alpha_0 A + \alpha_1 B + \alpha_2 B^{10} + \alpha_3 B^{20}$$

et l'équation de la section de Q par Σ_3' est

$$2 \alpha_1 \alpha_3 \Omega(B, B^{20}) + \alpha_2^2 \Omega(B^{10}, B^{10}) + 2 \alpha_2 \alpha_3 \Omega(B^{10}, B^{20}) + \alpha_3^2 \Omega(B^{20}, B^{20}) = 0.$$

Cette section est donc un cône du second ordre de sommet A. Ce cône représente une congruence bilinéaire ayant comme directrices la droite a et une droite infiniment voisine. Actuellement encore, l'espace Σ_3' est tangent à Q le long de la droite AB.

7. — Nous pouvons résumer les recherches précédentes dans l'énoncé suivant:

On considère une congruence de droites (g) *ayant au moins l'ordre ou la classe supérieur à l'unité.*

Le lieu des génératrices des demi-quadriques osculatrices aux surfaces réglées de la congruence (g) le long d'une droite de celle-ci commune à toutes ces surfaces réglées, est en général un complexe du second ordre. Il y a exception lorsque :

1) La congruence (g) est une congruence W. Le lieu en question est alors un complexe linéaire et cette propriété est caractéristique pour les congruences W.

2) La congruence (g) est le lieu de ∞^1 faisceaux de rayons dont les centres sont sur une courbe k et dont les plans sont les plans osculateurs de cette courbe. Le lieu considéré est alors une congruence bilinéaire de droites dont les directrices sont une tangente à la courbe k et une droite infiniment voisine.

3) La congruence (g) est le lieu de ∞^1 faisceaux de rayons dont les centres sont sur une droite a et dont les plans passent par cette droite a. Le lieu considéré est une congruence bilinéaire dont les directrices sont la droite a et une droite infiniment voisine.