MATHEMATICAL STRUCTURES — COMPUTATIONAL
MATHEMATICS — MATHEMATICAL MODELLING
Papers dedicated to Professor L. Iliev's 60th Anniversary
Sofia, 1975, p. 267 - 271

UNE FAMILLE DE VARIETES ALGEBRIQUES

L. Godeaux

A mon ami L. Iliev, pour ses 60 ans

Résumé. Une variété de Veronese d'ordre n^2 est obtenue en rapportant projectivement les hyperquadriques d'un espace à n dimensions aux hyperplans d'un espace à $n(n+3)/2$ dimensions. L'auteur considère dans un espace à $(n+1)(n+2)/2$ dimensions un cône dont les sections hyperplanes sont des variétés de Veronese et les sections de ce cône par des hypersurfaces algébriques.

En considérant jadis la surface de Humbert dont les points représentenles couples de points d'une courbe de genre trois, un point correspondant à deux couples formant un groupe canonique de la courbe, nous avons dét montré que l'on peut prendre pour modèle projectif de cette surface, dans un espace linéaire à six dimensions l'intersection d'un cône dont les sections hyperplanes sont des surfaces de Veronese, avec une hypersurface cubique [1,2]. Cela nous a conduit à une étude systématique des surfaces tracées sur le cône en question [3]. Certaines recherches récentes nous ont conduit à reprendre cette question mais en remplaçant le cône par un cône dont les sections hyperplanes sont des variétés de Veronese. Précisément, nous considérons dans un espace à $n(n+3)/2$ dimensions, la variété qui représente les hyperquadriques d'un espace à n dimensions, variété que nous appelons variété de Veronese. Nous plaçant alors dans un espace à $(n+1)(n+2)/2$ dimensions, nous considérons un cône dont les sections hyperplanes sont des variétés de Veronese et l'intersection de ce cône avec des hypersurfaces. Cela nous conduit à des variétés privées de variété canonique, ou ayant des variétés canoniques d'ordre zéro et à d'autres variétés présentant un certain intérêt.

1. Les hyperquadriques linéairement indépendantes d'un espace linéaire S_n à n dimensions sont au nombre de $r=(n+1)(n+2)/2$. Rapportons projectivement ces hyperquadriques aux hyperplans d'un espace linéaire S_{r-1} à $r-1$ dimensions. Il correspond aux points de S_n les points d'une variété de Veronese W_n d'ordre 2^n.

Aux points d'un hyperplan de S_n correspondent sur W_n les points d'une variété de Veronese W_{n-1} d'ordre 2^{n-1}. Comme parmi les hyperquadriques de S_n se trouvent des hyperquadriques dégénérées en deux hyperplans, il existe des hyperplans de S_{r-1} coupant W_n suivant deux variétés W_{n-1}.

Aux points d'un espace à $n-2$ dimensions de S_n correspondent sur W_n les points d'une variété de Veronese W_{n-2}. Deux variétés W_{n-1} ont en commun une seule variété W_{n-2}.

On établit facilement les equations de la variété W_n. Si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées des points de S_n, posons $X_{ik}=x_i x_k=x_k x_i$ et considérons les X_{ik} comme les coordonnées des points de S_{r-1}. On obtiendra les équations de W_n en exprimant que le déterminant $|X_{ik}|$ est de caractéristique un, c'est-à-dire que tous ses sous-mineurs de quatre éléments sont nuls.

Soit S_r un espace dont l'espace S_{r-1} de W_n est un hyperplan et soit 0 un point de cet espace n'appartenant pas à cet hyperplan.

Nous désignerons par W'_n le cône projetant de 0 la variété W_n. Nous désignerons de même par W'_{n-1} et W'_{n-2} les cônes projetant de 0 les variétés W_{n-1} et W_{n-2}.

Toutes les sections hyperplanes du cône W'_n sont des variétés de Veronese, analogues à W_n.

2. Considérons dans S_r une hypersurface algébrique V d'ordre p, ne passant pas par le sommet 0 du cône W'_n. Cette hypersurface coupe le cône W'_n suivant une variété Ω_n à n dimensions, que nous nous proposons d'étudier.

Nous dénoterons également par Ω_{n-1} la section d'un cône W'_{n-1} par V et par Ω_{n-2} la section du cône W'_{n-2} par la même variété V.

Rappelons que l'on a, sur Ω_n, les sections hyperplanes K équivalentes à deux Ω_{n-1}.

Nous supposerons $2p \geqq n+3$.

3. Commençons par le cas le plus simple, $n=2$. La variété Ω_2 est alors une surface et les variétés Ω_1 sont des courbes d'ordre $2p$. Le cône W'_1 projette du point 0 une conique γ de la surface de Veronese W_2. Ce cône et par suite la courbe Ω_1 appartiennent donc à un espace à trois dimensions. Entre la conique γ et la courbe Ω_1 nous avons une correspondance $(1, p)$. Les points unis sont déterminés par les intersections de Ω_1 avec l'hyperplan polaire de 0 par rapport à V. Ils sont donc au nombre de $2p(p-1)$. La formule de Zeuthen donne

$$2p(-1)+2p(p-1)=2(\pi-1),$$

π étant le genre de la courbe Ω_1. Celle-ci est donc de genre $\pi=(p-1)^2$.

On pourrait encore calculer le genre π de Ω_1 en remarquant que cette courbe étant dans un S_3 l'intersection d'un cône du second ordre et d'une surface d'ordre p, la série canonique de cette courbe est découpée par les surfaces d'ordre $p+2-4=p-2$. En d'autres termes, en désignant par K les sections hyperplanes de Ω_2, la série canonique est découpée par les courbes $(p-2)K$. Mais K équivaut à $2\Omega_1$, donc le système adjoint au réseau $|\Omega_1|$ est

$$|\Omega'_1|=|(2p-4)\Omega_1|.$$

On en conclut que le système canonique de la surface Ω_2 est

$$|\Omega'_1-\Omega_1|=|(2p-5)\Omega_1|.$$

On remarquera que la démonstration donnée ici est plus simple que celle de notre note citée plus haut.

4. Supposons maintenant $n=3$. La variété Ω_3 est à trois dimensions et contient un système linéaire ∞^3 de surfaces $|\Omega_2|$. Sur une de ces surfaces, le système canonique est déterminé par $(2p-5)\Omega_1$. Or, deux surfaces Ω_2 ont en commun une seule courbe Ω_1. Il revient donc au même d'écrire que le système adjoint à $|\Omega_2|$ est $|\Omega'_2|=|(2p-5)\Omega_2|$.

Il en résulte que le système canonique de Ω_3 est

$$|\Omega'_1-\Omega_2|=|(2p-6)\Omega_2|$$

et comme les sections hyperplanes de Ω_3 sont équivalentes à deux Ω_2, le système canonique de Ω_3 peut s'écrire

$$|\Omega'_2-\Omega_2|=|(p-3)K|.$$

5. Les résultats précédents conduisent à supposer que le système canonique de la variété Ω_n est

$$|(2p-n-3)\Omega_{n-1}|.$$

Supposons que cette hypothèse soit vraie pour les variétés Ω_{n-1}, c'est-à-dire que le système canonique de Ω_{n-1} soit

$$|(2p-n-2)\Omega_{n-2}|.$$

Comme deux variétés Ω_{n-1} de Ω_n ont en commun une seule variété Ω_{n-2}, cela revient à écrire que le système adjoint à $|\Omega_{n-1}|$ est

$$|\Omega'_{n-1}|=|(2p-n-2)\Omega_{n-1}|.$$

Il en résulte que le système canonique de Ω_n est

$$|\Omega'_{n-1}-\Omega_{n-1}|=|(2p-n-3)\,\Omega_{n-1}|$$

et la formule induite plus haut est exacte.

Le système canonique de la variété Ω_n à n dimensions, d'ordre $2^n p$, intersection du cône W'_n et d'une hypersurface d'ordre p ne passant pas par le sommet du cône, est donné par

$$|(2p-n-3)\Omega_{n-1}|.$$

Si $n=2\nu+1$ est impair, le système canonique est

$$|(p-\nu-2)K|$$

et est découpé par les hypersurfaces d'ordre $p-\nu-2$.

6. Examinons quelques cas particuliers.

Si $2p=n+3$, l'adjoint à Ω_{n-1} est $\Omega'_{n-1}\equiv\Omega_{n-1}$ et le système $|\Omega_{n-1}|$ est son propre adjoint. La variété Ω_n possède une variété canonique d'ordre zéro. On a alors $n=2\nu+1$ et $p=\nu+2$.

L'intersection du cône $W'_{2\nu+1}$ et d'une hypersurface d'ordre $\nu+2$ est une variété à $2\nu+1$ dimensions ayant une variété canonique d'ordre 0.

Si $2p=n+2$, ce sont les variétés Ω_{n-1} qui possèdent une variété canonique d'ordre zéro et la variété Ω_n est dépourvue de variété canonique. On a nécessairement $n=2\nu$ et $p=\nu+1$.

L'intersection d'un cône $W'_{2\nu}$ et d'une hypersurface algébrique d'ordre $\nu+1$ ne passant pas par le sommet du cône est une variété $\Omega_{2\nu}$ à 2ν dimensions, dépourvue de variété canonique, mais possédant un système linéaire $|\Omega_{n-1}|$ de dimension 2ν formé de variétés ayant chacune une variété canonique d'ordre zéro.

7. Considérons une section hyperplane K de Ω_n et déterminons son système canonique. De $|K|=|2\Omega_{n-1}|$, on déduit

$$|K'|=|\Omega_{n-1}+(2p-n-2)\Omega_{n-1}|=|(2p-n-1)\Omega_{n-1}|.$$

Comme vérification, nous avons

$$|K'-K|=|(2p-n-3)\Omega_{n-1}|$$

qui découpe sur une section hyperplane K le système canonique de Ω_n.

Si nous avons $n=2\nu+1$ et $p=\nu+2$, il vient $|K'|=|K|$ et la variété Ω_n possède une variété canonique d'ordre zéro, comme on l'a vu plus haut.

Si l'on pose $2p=n+1$, d'où $n=2\nu+1$, $p=\nu+1$, on a $K'\equiv 0$ et la variété Ω_n ne possède pas de variété canonique. On a $\Omega'_{n-1}+\Omega_{n-1}\equiv 0$.

L'intersection du cône $W'_{2\nu+1}$ et d'une hypersurface d'ordre $\nu+1$ ne passant pas par le sommet du cône, est une variété dépourvue de variété canonique.

Supposons $2p=n+5$, d'où $n=2\nu+1$, $p=\nu+3$. On a

$$|K'-K|=|2\Omega_{n-1}|=|K|$$

et le système canonique de Ω_n est celui de ses sections hyperplanes.

L'intersection du cône $W'_{2\nu+1}$ et d'une hypersurface d'ordre $\nu+3$ ne passant pas par le sommet du cône, est une variété dont le système canonique coïncide avec celui de ses sections hyperplanes.

Supposons enfin $2p=n+4$, d'où $n=2\nu$ et $p=\nu+2$. On a

$$|K'-K|=|2\Omega_{n-1}|.$$

Le système bicanonique $|2\Omega_{n-1}|=|K|$ coïncide avec celui des sections hyperplanes.

L'intersection du cône $W'_{2\nu}$ avec une hypersurface d'ordre $\nu+2$ ne passant pas par le sommet du cône, est une variété dont le système bicanonique coïncide avec celui de ses sections hyperplanes.

8. Considérons l'intersection de la variété Ω_n par une hypersurface d'ordre q ne passant pas par le sommet du cône. Nous désignerons cette variété par Ω_n^* et nous allons déterminer son système canonique.

La section de Ω_n^* de Ω_n par V_1 appartient au système linéaire $|qK$ et on a

$$|(qK)'|=|(q-1)K+K'|=|(q-1)K+(2p-n-1)\Omega_{n-1}|.$$

On en déduit

$$|(qK)'|=|2(q-1)\Omega_{n-1}+(2p-n-1)\Omega_{n-1}|,$$

c'est-à-dire

$$|(qK)'|=|(2p+2q-n-3)\Omega_{n-1}|.$$

Si nous désignons par Ω_{n-1}^* la section de Ω_{n-1} par l'hypersurface V_1, nous voyons que le système canonique de Ω_n^*, découpé par ses adjointes, est

$$|(2p+2q-n-3)\Omega_{n-1}^*|.$$

L'intersection du cône W_n' avec deux hypersurfaces d'ordres p, q ne passant pas par le sommet du cône, est une variété à $n-1$ dimensions dont le système canonique est découpé par les hypersurfaces

$$|(2p+2q-n-3)\Omega_{n-1}|.$$

On pourrait de ce théorème déduire l'existence de variétés ayant une variété canonique d'ordre zéro et d'autres variétés intéressantes. On pourrait de plus par une méthode analogue déduire le système canonique de la section de Ω_n^* par une hypersurface d'ordre s ne passant pas par le sommet du cône.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Godeaux. Sur une surface algébrique considérée par M. G. Humbert. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1921, 14—20.
2. L. Godeaux. Sur une involution rationnelle douée de trois points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique de genre trois. *Bulletin de l'Académie Roy. de Belgique*, 1921, 653—665, 694—702.
3. L. Godeaux. Sur une famille de surfaces algébriques de l'espace à six dimensions. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1924, 484—503.

Liège Belgique

Reçu le 31. I. 1973