Geometria Istituto Lombardo (Rend. Sc.) A 108, 59-64 (1974)

INVOLUTIONS CYCLIQUES RATIONNELLES APPARTENANT À DES SURFACES À SYSTÈME CANONIQUE IRRÉDUCTIBLE

LUCIEN GODEAUX (m. s.)

(Adunanza del 22 novembre 1973)

SUNTO. — Costruzione di una superficie algebrica non razionale che contiene una involuzione ciclica razionale con un numero finito di punti uniti.

Dans nos recherches sur les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique F, nous avons à deux reprises rencontré des involutions rationnelle appartenant à des surfaces irrégulières.

Dans le premier cas, la surface F représentait les couples de points, non ordonnés, d'une courbe de genre trois. L'involution est d'ordre sept et présente trois points unis (1).

Dans le second cas la surface F représente les couples de points d'une courbe particulière, contenant une involution cyclique rationnelle d'ordre p. La surface F possède un involution cyclique rationnelle d'ordre p (2).

Dans le second cas la surface F représente les couples de points rationnelle, cyclique, appartenant à une surface régulière dont le système canonique est irréductible. Nous ferons ensuite quelques applications d'un théorème d'Enriques.

---

(1) *Sur une involution rationnelle douée de trois points de coïncidence appartenant à une surface de genre trois.* Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1921, pp. 653-665, 694-702.

(2) *Involuzioni cicliche razionali appartenenti a superficie irregolari.* Atti e Memorie della Accademia di Modena, 1956, pp. 1-12.

Il nous arrivera dans le cours de ce travail, d'invoquer quelques propriétés des involutions cyclique. Nous renverrons à l'ouvrage que nous avons publié sur ces questions ([3]).

1. - Considérons dans un espace à trois dimensions S_3 l'homographie biaxiale H de période p, d'équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon x_4 ,$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité. Cette homographie transforme en elle même la surface F d'équation

$$\varphi_p (x_1 , x_2) + \psi_p (x_3 , x_4) = 0$$

où φ_p et ψ_p sont des formes algébriques de degré p de leurs arguments.

Dans S_3, l'homographie H engendre une involution I d'ordre p. Pour obtenir une image de cette involution, rapportons projectivement les surfaces F aux hyperplans d'un espace S_{2p+1} à $2p+1$ dimensions, en posant

$$Y_i = x_1^i x_2^{p-i} , \quad Z_i = x_3^i x_4^{p-i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, p) .$$

L'élimination des x donne les équations

$$\left\| \begin{matrix} Y_0 & Y_1 & \ldots & Y_{p-1} \\ Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_p \end{matrix} \right\| = 0 ,$$

$$\left\| \begin{matrix} Z_0 & Z_1 & \ldots & Z_{p-1} \\ Z_1 & Z_2 & \ldots & Z_p \end{matrix} \right\| = 0 .$$

Les premières de ces équations représentent une courbe algébrique K_1 d'ordre p appartenant à une espace σ_1 à p dimensions. Les secondes représentent une courbe rationnelle normale K_2 située dans un espace σ_2 à p dimensions. Les espaces σ_1, σ_2 ne se rencontrent pas.

Les équations précédentes, envisagées simultanémént dans l'espace S_{2p+1} représentent le lieu des droites W s'appuyant sur les courbes K_1, K_2. C'est une variété à trois dimensions d'ordre p^2, passant p

([3]) *La théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique er applications.* Rome, Cremonese, 1963.

fois par les courbes K_1, K_2. Aux groupes de l'involution I situé sur une droite s'appuyant sur les axes de H correspondent des points d'une droite s'appuyant sur K_1, K_2.

2. - Considérons une surface F, soit F_0, qui ne présente aucune particularité. Ses courbes canoniques, quand elles existent, sont découpées par les surfaces d'ordre $p-4$ qui ne sont assujetties à aucune condition, la surface F_0 étant dépourvue de singularité. On a donc, la surface étant régulière,

$$p_a = p_g = \binom{p-1}{3} = \frac{1}{6}(p-1)(p-2)(p-3).$$

Sur F_0, l'homographie H engendre une involution I' possédant $2p$ points unis: les points de rencontre de la surface avec les axes de H.

L'involution I' a pour image la section Φ de la variété W par un hyperplan.

Par un point de Φ passant deux droites: l'une s'appuyant sur K_1, l'autre sur K_2. La surface Φ représente donc les couples de points de deux courbes rationnelles et est par conséquent rationnelle.

Observons que pour $p \leq 3$, on a $p_a = p_g = 0$. Nous supposerons donc $p > 3$ et pour ces valeurs le système canonique de F_0 est irréductible.

L'involution d'ordre p > 3 *engendrée sur une surface* F_0 *par une homographie biaxiale de période* p *et possédant* 2p *points unis a pour image une surface rationnelle représentant les couples de points de deux courbes rationnelles.*

3. - Comme vérification, supposons que p soit une nombre premier.

Les points unis de I' appartiennent aux axes de l'homographie H. Soit P un de ces points appartenant par exemple à la droite $x_1 = x_2 = 0$. Le plan tangent à F_0 en ce point passe par la droite $x_3 = x_4 = 0$ et par conséquent dans ce plan, H engendre une homologie de centre P. Le point P est donc un point uni de première espèce. Entre le genre arithmétique p_a de F_0 et celui p'_a de Φ, nous avons etabli la relation

$$12(p_a + 1) = 12p(p_a' + 1) + 2p(p-1)(p-5).$$

On en dé duit $p'_a = 0$ et comme la surface Φ est régulière, $p'_g = 0$.

Observons que les $2p$ points de diramation de la surface Φ sont les points de rencontre de cette surface avec les courbes K_1, K_2. Conformément à la théorie, ces points sont multipes d'ordre p pour la surface Φ et le cône tangent à la surface en un P' de ces points appartenant par exemple à la courbe K_1 est la projection de la courbe K_2 et est rationnel.

4. - Appelons C les courbes d'ordre p^2 découpées sur F_0 par les autres surfaces F. La série canonique est découpée sur une courbe C par les surfaces d'ordre $2p-4$ et cette série est donc d'ordre $2p^2(p-2)$.

Si π est le genre des courbes C, on a donc

$$2\pi - 2 = 2p^2(p-2).$$

La courbe C ne contient en général aucun point uni de I'. Il lui correspond sur Φ une sections hyperplane Γ de cette surface. Le genre π' des courbes Γ' est donné par la formule de Zeuten et on a

$$2\pi' - 2 = 2p(p-2).$$

5. - Considérons les surfaces F' d'équation

$$f'(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

où f' est una forme algébrique de degré $p-2$ en x_1, x_2 dont les coefficients sont des formes algébriques de degré $p-2$ en x_3, x_4. Les surfaces F' sont d'ordre $2p-4$ et passent $p-2$ fois par les axes de H.

Ces surfaces découpent sur une courbe C des groupes de la série canonique de cette courbe tranformés en eux -même par H. Nous désignerons ces surfaces par F'.

Une surface F' rencontre la surface F_0 suivant une courbe d'ordre $2p(p-2)$. Si R est un point de cette courbe, point qui ne peut appartenir à un axe de H, la droite passant par R contient le groupe de I' déterminé par ce point et la droite appartient à la surface F'. Une surface F' contieent donc des groupes de $2p(p-2)$ droites unies pour H qui découpent sur une courbe C les groupes de la série canonique de cette courbe.

A la section de F_0 par une surface F correspond sur Φ une courbe Γ qui découpe sur une courbe Γ la série canonique de celle-ci.

Elévons à la puissace p les deux membres de l'équation de F' et remplaçons les x en fonction des Y et des Z.

Nous obtenons une équation

$$f_1(Y; Z) = 0,$$

où f_1 est une forme algébrique de degré $p-2$ en Y, dont les coefficients sont des formes algébriques degré $p-2$ en Z. Cette équation représente une hypersurface V d'ordre $2(p-2)$ passant $p-2$ fois par les espaces σ_1, σ_2, c'est-à-dire par les courbes K_1, K_2. Elle contient aussi la courbe Γ'.

A une courbe découpée sur F_0 par une surface d'ordre $2p-4$ quelconque, correspond sur Φ une courbe qui appartient totalement à un système linéaire. Lorsque la surface d'ordre $2p-4$ tend uniformément vers une surface F', la courbe correspondante sur Φ tend vers la courbe Γ comptée p fois. En d'autres termes, l'hypersurface V a un contact d'ordre $p-1$ avec la surface Φ le long de la courbe Γ'.

La courbe Γ' est d'ordre $2(p-2)$ et ne peut contenir comme partie une section hyperplane Γ de Φ.

5. - L'involution I' possède $2p$ points unis qui sont des points simples pour F_0. Nous pouvons considérer l''entourage d'un de ces points comme une courbe rationnelle de degré virtuel -1 [4]. Nous désignerons par A la somme des courbes équivalentes aux $2p$ points unis de I'.

Examinons la correspondance $(1,p)$ existant entre les surfaces Φ et F_0. Sur Φ, il y a $2p$ points de diramation et chacun d'eux est équivalent au point de vue des transformations birationnelles à une courbe rationnelle de degré virtue-p. La courbe unie correspondante sur F_0 est d'ordre zéro.

A une courbe Γ correspond une courbe C et à une adjointe Γ' à $|\Gamma|$ une ocurbe C' adjointe à $|C|$ mais passant par les axes de H. La courbe $C' + (p-2)A$ est également adjointe à $|C|$ mais ne passe plus par les points unis de l'involution I'. Ces courbes sont découpées sur F_0 par les surfaces d'ordre $p-3$.

---

[4] Cette locution est employée par Enriques dans son ouvrage *Le superficie algebriche*. Bologne, Zanichelli, 1949. Voir p. 33.

Le système canonique de F_0 est donc

$$| C' - C + (p-2) A | .$$

C'est une application d'un théorème de F. Enriques [5] bien qu'Il l'ait établi dans le cas d'une courbe unie d'ordre supérieur à zéro.

Liége, le 26 septembre 1973.

---

[5] *Ricerche di Geometria sulle superfici algebriche.* Memorie della Accademia di Torino, pp. 171-232; *Memorie scelte,* tome I, pp. 31-106, Bologna, Zanichelli, 1956.