NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE (3), XXIII, (1975), 32-34

SUR LES COURBES PROJECTIVEMENT CANONIQUES

par LUCIEN GODEAUX

Nous appelons courbe *projectivement canonique*, une courbe algébrique de genre π, appartenant à un espace $S_{\pi-1}$ à $\pi-1$ dimensions, dont les sections hyperplanes constituent la série canonique, d'ordre $2\pi-2$, pour la distinguer de la courbe canonique d'une surface. On sait que pour $\pi \geq 4$, une courbe canonique de genre π appartient à $(\pi-2)(\pi-3) : 2$ hyperquadriques linéairement indépendantes. On sait de plus que si la courbe contient une série g_3^1, la courbe appartient à une règlée rationnelle d'ordre $\pi-2$ qui est commune à toutes les hyperquadriques contenant la courbe et que si la courbe contient une série g_5^2, elle appartient à une surface de Veronese commune à toutes les hyperquadriques contenant la courbe [1].

Dans cette note, nous nous proposons de montrer que si la courbe est tracée sur une surface rationnelle à sections hyperplanes elliptiques, les hyperquadriques contenant la courbe, sauf une, contiennent cette surface.

1. Soit dans un plan σ une courbe Γ d'ordre six contenant $d \leq 5$ points doubles ordinaires. La courbe Γ est de genre $10-d = \pi$ et ses adjointes sont les cubiques γ_3 passant par les points doubles. Le système $|\gamma_3|$ a la dimension $9-d$.

Rapportons projectivement les courbes γ_3 aux hyperplans d'un espace S_{9-d} à $9-d$ dimensions. Au plan σ correspond une surface F d'ordre $9-d = \pi-1$.

Les courbes γ_3 découpent sur Γ la courbe canonique d'ordre $2\pi-2$ de cette courbe et par conséquent à la courbe Γ correspond sur F une courbe C d'ordre $2\pi-2$, de genre π, située dans un espace à $9-d = \pi-1$ dimensions, c'est-à-dire une courbe C projectivement canonique de genre π.

Il existe $(\pi-2)(\pi-3):2$ hyperquadriques de $S_{\pi-1}$ contenant C et deux de ces hyperquadriques déterminent un faisceau, celle des hyperquadriques de ce faisceau passant par un point de F n'appartenant pas à C, contient F. Il y a donc des hyperquadriques contenant C qui contiennent F.

2. Aux domaines des points $A_1, A_2, \ldots, A_d$ doubles pour la courbe Γ et formant la base du système $|\gamma_3|$, correspondent sur la surface F des droites respectivement $a_1, a_2, \ldots, a_d$. Puisqu'à une section hyperplane de F correspond une courbe γ_3, à la section de F par une hyperquadrique ne contenant pas la surface, correspond dans le plan σ une courbe γ_6 d'ordre six passant deux fois par les points $A_1, A_2, \ldots, A_d$.

Les hyperquadriques de l'espace S_{9-d} linéairement indépendantes sont au nombre de $(11-d)(10-d):2$ et les courbes d'ordre six du plan σ linéairement indépendantes sont au nombre de 28, celles qui passent deux fois par les points A sont donc au nombre de 28-3d. Il y a donc

$$\tfrac{1}{2}(11-d)(10-d) - 28 + 3d$$

hyperquadriques de S_{9-d} qui passent par F.

En introduisant le nombre $\pi = 10-d$, on voit qu'il existe $(\pi-1)(\pi-4):2$ hyperquadriques linéairement indépendantes passant par la surface F.

On a

$$\tfrac{1}{2}(\pi-2)(\pi-3) - \tfrac{1}{2}(\pi-1)(\pi-4) = 1,$$

donc parmi les hyperquadriques contenant C, il y en a une qui ne contient pas F. Elle coupe cette surface suivant la courbe C uniquement.

3. On sait qu'il existe en outre une surface rationnelle à sections hyperplanes elliptiques, représentant les quartiques ayant deux points doubles. Ces quartiques γ_4 sont les adjointes à une courbe Γ du septième ordre possédant deux points triples A_1, A_2. La courbe Γ est de genre 9.

Rapportons projectivement les courbes γ_4 aux hyperplans d'un espace S_8 à 14-6 = 8 dimensions. Au plan σ de Γ correspond dans cet espace une surface F d'ordre 8 à sections hyperplanes elliptiques et aux domaines des points A_1, A_2 correspondent sur cette surface des coniques ϕ_1, ϕ_2 qui ont en commun un point A simple pour la surface, représentant la droite A_1A_2.

A la section de la surface F par une hyperquadrique ne la contenant pas correspond dans le plan σ une courbe du huitième ordre passant quatre fois par les points A_1, A_2. Ces courbes linéairement indépendantes sont au nombre de 45-20 = 25. D'autre part les hyperquadriques linéairement indépendantes de S_8 sont au nombre de 45. Il existe donc 20 hyperquadriques contenant la surface F.

A la courbe Γ d'ordre 7 et de genre 9 correspond sur F une courbe C d'ordre 16, projectivement canonique. Par cette courbe passent 21 hyperquadriques linéairement indépendantes dont 20 contiennent F.

Il en reste une qui ne contient pas F et qui coupe cette surface suivant la courbe C. Observons qu'à la section de F par cette hyperquadrique correspond dans le plan σ une courbe du huitième ordre passant quatre fois par les points A_1, A_2. Cette courbe se compose de la courbe Γ d'ordre 7 et de la droite A_1A_2.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Une courbe projectivement canonique C, *de genre* π, *de* $S_{\pi-1}$, *appartient à* $(\pi-2)(\pi-3):2$ *hyperquadriques linéairement indépendantes. Pour* $\pi \leq 10$ *la courbe peut être tracée sur une surface rationnelle* F, *à sections hyperplanes elliptiques, appartenant aux hyperquadriques contenant* C *sauf à une, qui découpe sur* F *la courbe* C.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ENRIQUES-CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Bologna, Zanichelli, 1924, pp.97-108.

(Received, October 4, 1974)