OBSERVATIONS SUR DEUX CONGRUENCES LINÉAIRES DE CUBIQUES GAUCHES,

PAR

LUCIEN GODEAUX

(Liége).

Dans un des derniers fascicules de la „Nieuw Archief voor Wiskunde", M. VAN KOL s'est occupé de représentations planes des congruences linéaires de cubiques gauches ayant soit quatre bisécantes fixes et un point commun, soit cinq bisécantes fixes [1]). Nous avons rencontré ces congruences dans des travaux antérieurs [2]) et nous voudrions établir quelques rapprochements entre ces travaux et ceux de M. VAN KOL.

1. Soient A un point, b, b_1, b_2, b_3 quatre droites deux-à-deux gauches et ne passant ni l'une ni l'autre par A, G la congruence formée par les cubiques gauches passant par A et ayant comme cordes les quatre droites données. G est comme on sait une congruence linéaire de classe un. Considérons le plan α passant par la droite a issue de A et s'appuyant sur b, b_1, et par la droite a_1 issue de A et s'appuyant sur b_2, b_3. Les droites s'appuyant sur b, b_1, et sur une droite d quelconque du plan α forment une quadrique Q; celles qui s'appuyent sur b_2, b_3 et sur d forment

[1]) J. W. A. VAN KOL, *De congruentie der kubische ruimtekrommen, die door een gegeven punt gaan en vier gegeven koorden hebben, en haar afbeelding op een plat vlak* (Nieuw Archief voor Wiskunde, (2), XVI, 1929, pp. 37—39). *De congruentie der kubische ruimtekrommen, die vijf gegeven koorden hebben en haar afbeelding op een plat vlak* (Idem, pp. 40—41).

[2]) L. GODEAUX, *Sur une congruence linéo-linéaire de cubiques gauches*, (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1908, pp. 531—540). *Nouveaux types de congruences linéaires de cubiques gauches* (Nouvelles Annales de de Mathématiques, 1909, 7 p.). *Sur la congruence formée par les cubiques gauches ayant cinq bisécantes* (Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings, 1928 pp. 1001—1004).

une quadrique Q_1. Les quadriques Q, Q_1 ont en commun, outre d, une cubique gauche k de la congruence G et il est aisé de voir que toute cubique de G provient d'une et d'une seule droite du plan α.

Désignons par R_1 le lieu des droites s'appuyant sur b, b_2, b_3. Cette demi-quadrique coupe α suivant une conique irréductible Γ. Les droites de R_1 passant par les points de rencontre de Γ et de d coupent b aux points d'appui de k sur cette droite. Il y a donc une correspondance biunivoque entre les cubiques k de G et les pôles D des droites d du plan α par rapport à la conique Γ. On obtient ainsi précisément la représentation plane de G considérée par M. VAN KOL.

2. Les surfaces cubiques F passant par les droites b, b_1, b_2, b_3 ont en commun, outre ces droites, les droites c_1, c_2 s'appuyant sur les quatre premières. Deux surfaces F ont encore en commun une cubique gauche ayant pour bisécantes b, b_1, b_2, b_3. Trois surfaces F n'appartenant pas à un même faisceau ont encore en commun un point en dehors des six droites communes. Les surfaces F forment par suite un système linéaire homaloïdal $|F|$. Rapportons projectivement les surfaces F aux plans d'un second espace Σ'. Alors aux plans de l'espace Σ contenant G correspondent des surfaces cubiques F' passant par quatre droites deux-à-deux gauches b', b'_1, b'_2, b'_3 et par les droites c'_1, c'_2 s'appuyant sur ces quatre droites [1]). Entre les espaces Σ, Σ', on a une correspondance birationnelle.

Aux cubiques gauches de G correspondent dans Σ' les droites d'une gerbe de sommet A'. A un point de la droite b correspondent dans Σ' les points d'une droite s'appuyant sur b'_1, b'_2, b'_3. Par suite, si k est une cubique gauche de G, a' la droite qui lui correspond dans la gerbe de sommet A', les points d'appui de k sur b correspondent aux points de rencontre de a' avec la demi-quadrique R' lieu des droites s'appuyant sur b'_1, b'_2, b'_3. Les plans tangents à R' passant par A' forment un cône Φ'. Ce cône coupe un plan α ne passant par A' suivant une conique Γ et il existe une projectivité entre les points de b et ceux de Γ. Il résulte

---

[1]) Voir pas exemple la dernière de nos notes citées plus haut.

de ce qui précède que les tangentes à Γ aux points homologues des points d'appui de k sur b, se coupent au point de rencontre de a' et de α. On obtient ainsi la représentation plane de la congruence G considérée par M. VAN KOL.

3. On peut également obtenir cette représentation plane d'une troisième manière.

Désignons par a_1, a_2, a_3 les droites passant par A et s'appuyant respectivement sur les couples de droites b_2 et b_3, b_3 et b_1, b_1 et b_2. Considérons ensuite les surfaces cubiques F_1 ayant un point double ordinaire en A, passant par b_1, b_2, b_3 et par suite par a_1, a_2, a_3. Ces surfaces sont en nombre ∞^3; deux de ces surfaces ont en commun une cubique gauche passant par A et s'appuyant sur les droites b_1, b_2, b_3 en deux points. Trois de ces surfaces n'appartenant pas à un même faisceau ont en commun un seul point en dehors de leurs droites communes. Par suite les surfaces F_1 forment un système homaloïdal $|F_1|$. En rapportant projectivement les surfaces F_1 aux plans d'un espace Σ', on obtient une correspondance birationnelle entre Σ, Σ'. Aux plans de Σ correspondent des surfaces cubiques F'_1 et aux droites de Σ des cubiques gauches. En particulier, à la droite b correspond, dans Σ', une cubique gauche Γ' projective à cette droite et aux cubiques gauches k de G correspondent les cordes de Γ'. En projetant Γ' d'un de ses points O, sur un plan α, on obtient une conique Γ de ce plan projective à Γ' et par suite à b. On peut donc faire correspondre à une cubique gauche k de G le pôle par rapport à la conique Γ de la projection de la corde de Γ' homologue de k.

4. Soit maintenant G′ la congruence formée par les cubiques gauches ayant cinq bisécantes fixes b, b_1, b_2, b_3, b_4. En rapportant projectivement les surfaces cubiques passant par les quatre dernières de ces droites aux plans d'un espace Σ', à la droite b correspond une cubique gauche Γ' et aux cubiques gauches k de G′ correspondent les cordes de cette courbe Γ' [1]). La cubique Γ' et la droite b sont projectives. Si l'on projette Γ' d'un de ses points O sur un plan α, on

---

[1]) Voir nos notes citées plus haut.

obtient une conique Γ projective à Γ' et à b. A une cubique k de G', on peut faire correspondre le pôle par rapport à la conique Γ de la projection de la corde de Γ' homologue de k. On obtient ainsi la représentation plane de la congruence G' considérée par M. VAN KOL dans la seconde de ses notes citées.

Liége (Université), le 17 Mai 1929.