VARIETES ALGEBRIQUES A TROIS DIMENSIONS AYANT UNE SURFACE CANONIQUE ISOLEE

par

† LUCIEN GODEAUX
(Liège)

Homenaje a su memoria

La construction de variétés algébriques possédant une seule variété canonique présente un certain intérêt. L'objet de cette note est précisément l'exposé d'un procédé de construction d'une variété algébrique à trois dimensions ayant une seule surface canonique. Le lecteur s'apercevra aisément que la méthode peut être utilisée pour des variétés à un nombre quelconque de dimensions. Si nous avons choisi d'exposer la question dans un cas simple, c'est pour éviter une complication de notations. Nous exposons précisément le théorème suivant:

Si une variété algébrique à trois dimensions appartenant à un espace à sept dimensions est transformée en elle-même par une homographie harmonique déterminant sur la variété une involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis et s'il existe un hyperplan touchant la variété suivant une surface dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques, l'image de l'involution est une variété possédant une surface canonique isolée.

Il est bon de remarquer que dans l'extension de la méthode, on doit se limiter aux variétés à un nombre impair de dimensions.

1. Considérons dans un espace S_7 à sept dimensions dont les coordonnées ponctuelles sont $y_0, y_1, \ldots, y_\nu, z_0, z_1, \ldots, z_{6-\nu}$, l'homographie harmonique H d'équations

$$\rho\ y_i' = y_i,\ \rho\ z_j' = -z_j \quad (i = 0, 1, \ldots, \nu;\ j = 0, 1, \ldots, 6-\nu).$$

Cette homographie possède deux axes, σ_1 ($z = 0$) de dimension ν et σ_2 ($y = 0$) de dimension $6-\nu$.

Considérons d'autre part une variété V à trois dimensions d'équations

$$\varphi_k (y_0, y_1, \ldots, y_\nu) + \psi_k (z_0, z_1, \ldots, z_{6-\nu}) = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \tag{1}$$

$$y_0 [f_3 (y_1, y_2, \ldots, y_\nu) + f_{1.2} (y\,;\, z)] + [\varphi_4 (y) + \psi_4 (z)]^2 = 0, \tag{2}$$

où les φ et les ψ sont des formes quadratiques de leurs arguments, f_3 une forme cubique et $f_{1.2}$ une forme linéaire en $y_0, y_1, \ldots, y_\nu$ dont les coefficients sont des formes quadratiques en z.

L'hyperplan $y_0 = 0$ touche la variété V suivant une surface F_1 d'équations

$$\varphi_k (y) + \psi_k (z) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{3}$$

On sait que le système canonique de la surface F_1, intersection de quatre hyperquadriques dans un espace à six dimensions est le système de ses sections hyperplanes. Par conséquent, si l'on désigne par F_2 les sections hyperplanes de la variété V, on a

$$F_2 \equiv 2\, F_1, \;\; F'_1 \equiv F_2.$$

On en déduit

$$F'_2 \equiv F_1 + F'_1 \equiv F_1 + F_2,$$

d'où

$$F'_2 - F_2 \equiv F_1.$$

La surface F_1 est donc une surface canonique de V et elle est évidemment unique.

2. Désignons par Ω une image de l'involution I engendrée sur V par H. Pour avoir un modèle projectif de Ω, rapportons projectivement les hyperquadriques de S_7 transformées en elles-mêmes par H et ne passant pas par les axes de cette homographie, aux hyperplans d'un espace S_R à

$$R = \nu^2 - 6\,\nu + 27$$

dimensions. Dans ce but, posons

$$Y_{ik} = y_i\, y_k = y_k\, y_i \qquad Z_{ik} = z_i\, z_k = z_k\, z_i.$$

On a entre les Y et les Z les équations que l'on obtient en exprimant que les déterminants

$$| Y_{ik} |, \ | Z_{ik} |$$

sont de caractéristique un. Les premières équations représent une variété Ψ_1 de Veronese généralisée, d'ordre 2^ν, située dans un espace Σ_1 à $(\nu + 1)(\nu + 2) : 2$ dimensions. Les secondes équations représentent une variété de Veronese Ψ_2 située dans un espace Σ_2 à $(8 - \nu)(7 - \nu) : 2$ dimensions et d'ordre $S^{\nu - 6}$.. L'ensemble des équations représente une variété W à 7 dimensions, lieu des droites s'appuyant sur Ψ_1 et Ψ_2 d'ordre $2^\nu \cdot 2^{6-\nu} = 64$.

Les équations (1) se traduisent par les équations de trois hyperplans ξ_1, ξ_2, ξ_3. Quant à l'équation (2), elle donne l'équation

$$Y_{00}\,\theta_0 (Y, Z) + Y_{01}\,\theta_1 (Y, Z) + \dots + Y_{0\nu}\,\theta_\nu (Y, Z) + \xi_4^2 (Y, Z) = 0 \quad (4)$$

les θ et ξ étant des formes linéaires en Y, Z.

La variété Ω est la section de W par un espace à $R - 3$ dimensions et par l'hypersurface (4). Cette variété est d'ordre 128.

A la surface F_1 correspond la surface Φ section de Ω par les quatre hyperplans $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. Elle est d'ordre 64 et l'espace

$$Y_{00} = Y_{01} = \dots = Y_{0\nu} = 0$$

touche Ω le long de la surface Φ_1.

3. Nous allons maintenant supposer que l'involution I engendrée sur V par H ne possède qu'un nombre fini de points unis. Pour cela, il faut que l'on ait $\nu = 3$ ou $\nu = 4$. Supposons en premier lieu $\nu = 3$. Dans ce cas la variété V ne rencontre pas les axes de l'homographie et l'involution est privée de points unis.

Le système canonique de F_1 est découpé par les surfaces $| F_2 |$. Appelons $\overline{F}_2$ les surfaces F_2 découpées par les hyperplans passant par σ_2 et F_2^+ celles qui sont découpées par les hyperplans passant par σ_1.

Le système canonique $| (F_1, F_2) |$ contient deux systèmes composés au moyen de l'involution I, à savoir les systèmes $| (F_1, \overline{F}_2) |$ et $| (F_1, F_2^+) |$. Le premier a la dimension deux, car il y a une surface $\overline{F}_2$ qui contient deux fois la surface F_1'. Le second a la dimension trois. Nous avons démontré [1] que le transformé du système canonique de Φ_1 était celui des systèmes précédents qui a la dimension minimum, c'est-à-dire le premier. Si nous appelons Φ_2 les surfaces qui correspondent sur Ω aux surfaces $\overline{F}_2$, le système $|\Phi_2|$ est l'adjoint à Φ_1. Nous avons donc le relation

$$\Phi'_1 \equiv \Phi_2.$$

D'autre part on a

$$\Phi_2 \equiv 2\,\Phi_1$$

et comme tantôt on en déduit

$$\Phi'_2 - \Phi_2 \equiv \Phi_1.$$

La surface Φ_1 est surface canonique de Ω et est unique.

Le système $|\Phi_2|$ étant l'adjoint à Φ_1, c'est le système bicanonique de Ω.

Entre le genre arithmétique $p_a = 7$ de F_1 et celui p'_a de Φ_1, on a la relation [2]

$$p_a + 1 = 2\,(p'_a + 1)$$

d'où $p'_a = 3$. Comme les surfaces F_1 et Φ_1 sont régulières, on $p_g = 7$ pour F_1 et $p_g = 3$ pour Φ_1.

Pour la variété Ω, on a $P_a = P_g = 1$, $P_2 = 3$.

4. Supposons maintenant $\nu = 4$. L'homographie H possède comme axes un espace à quatre dimensions σ_1 et un plan σ_2. L'hyperplan $y_0 = 0$ passe par le plan σ_2 et rencontre l'espace σ_1 suivant un espace à trois dimensions. Il en résulte que sur la surface F_1, l'homographie H détermine une involution ayant seize points unis. On sait [2] qu'à une courbe canonique de la surface Φ, correspond sur F_1 une courbe canonique ne passant pas par les points unis de l'involution. Par conséquent, le système canonique de la surface Φ_1 est découpé par les surfaces Φ_2 et le système $|\Phi_2|$ est l'adjoint à la surface Φ_1. Il existe une surface $\overline{F}_2$ contenant la surface F_1 comptée deux fois, donc on a

$$\Phi'_1 \equiv \Phi_2, \quad \Phi_2 \equiv 2\,\Phi_1$$

et la surface Φ_1 est surface canonique de Ω et unique.

Notons qu'entre le genre arithmétique $p_a = 7$ de F_1 et celui p'_a de Φ_1, on a la relation

$$12\,(p_a + 1) = 2.12\,(p'_a + 1) - 3.16,$$

d'où $p'_a = 5$, ce qui confirme que le système $|\Omega_2|$ est bien l'adjoint à $|\Phi_1|$.

Quant à la variété Ω, elle a les genres $P_a = P_g = 1$, $P_2 = 5$.

5. Retournons à la variété W.

A une hyperquadrique d'équation

$$g(y_0, y_1, \dots, y_\nu) = 0,$$

où g est une forme quadratique de ses arguments, correspond dans S_R un hyperplan passant par Σ_e. Lorsque cette hyperquadrique dégénère en un hyperplan passant par σ_2 compté deux fois, la section de W par l'hyperquadrique devient une variété le long de laquelle l'hyperplan correspondant touche la variété W. Désignons par γ_1 cette variété. De même à un hyperplan passant par σ_ν correspond dans W une variété γ_2 le long de laquelle un hyperplan touche la variété W.

Les variétés $2\gamma_1$ et $2\gamma_2$ appartiennent au système des sections hyperplanes de W, donc on a

$$2\gamma_1 \equiv 2\gamma_2.$$

Cette propriété se maintient sur les sections de W par des hyperplans et des hyperquadriques, donc on a sur les variétés Ω étudiées

$$2\Phi_2 \equiv 2\Phi_2^+$$

et ces variétés ont le diviseur de Severi égal à deux.

Bibliographie

[1] *Sur une propriété des correspondances rationnelles entre deux variétés algébriques*. «Bulletin des Sciences Mathématiques», pp. 291-297, 1938.

[2] *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications*. Rome, Cremonese, 1963.