SUR UNE PROPRIÉTÉ DES QUADRIQUES

por

LUCIEN GODEAUX

1. L'origine de cette note est la question élémentaire suivante : Considérons un ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

rapporté à ses axes et les deux tangentes

$$y=0, \quad z=c\,; \qquad x=0, \quad z=-c.$$

Le lieu des tangentes à l'ellipsoïde s'appuyant sur ces deux droites, se compose de deux hyperboloïdes

$$2\frac{x\,y}{a\,b}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

$$2\frac{x\,y}{a\,b}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

La courbe de contact avec l'ellipsoïde est la conique située dans le plan

$$bx-ay=0$$

pour le premier hyperboloïde, la conique située dans le plan

$$bx+ay=0$$

pour le second. Ces deux plans sont conjugués par rapport à l'ellipsoïde et partagent harmoniquement le couple de plans principaux passant par Oz.

On voit de plus que les génératrices du second mode des deux hyperboloïdes sont tangentes à l'ellipsoïde et s'appuyent sur les droites

$$x=0, \quad z=-c\,; \qquad y=0, \quad z=c.$$

Le fait que les coordonnées sont rectangulaires ne joue d'ailleurs aucun rôle et on pourrait supposer l'ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués quelconques.

Notre but dans cette note est d'établir un théorème analogue pour une quadrique quelconque, non conique, en utilisant uniquement les résultats établis, sans recourir à la notion de mesure, dans nos Leçons de Géométrie projective (*).

2. Soient Q une quadrique non conique;

M, N deux de ses points tels que la droite MN n'appartienne pas à la quadrique;

α, β deux plans conjugués passant par la droite MN;

A le pôle de α, situé dans β, B celui de β, situés dans α;

$a=$BN une tangente à Q située dans α et $b=$AN une tangente à Q située dans β.

Proposons-nous d'étudier le lieu des tangentes à la quadrique Q s'appuyant sur les droites a et b.

Menons par a un plan ρ coupant b en R. Les tangentes à Q situées dans ρ et passant par R ont leurs points de contact sur le plan polaire ρ' de R par rapport à Q. Le plan ρ' passe par la conjuguée $b'=$BN de $b=$AN par rapport à Q. Les faisceaux de plans (ρ), d'axe a, et (ρ'), d'axe b', sont projectifs. Lorsque le plan ρ coïncide avec α, ρ' coïncide avec le plan ANB, tangent à Q en N. Lorsque le plan ρ coïncide avec le plan AMB, tangent à Q en M, le point R coïncide avec A et le plan ρ' avec α. Le lieu de la droite $\rho\rho'$ est donc un cône Q_b, de sommet B, tangent au plan AMB le long de a et au plan ANB le long de b'. Une droite $\rho\rho'$ coupe, par construction, en deux points la courbe γ de contact de Q avec le lieu cherché et cette courbe est donc l'intersection de Q et de Q_b.

De même, il existe un cône Q_a, de sommet A, tangent au plan AMB le long de $a'=$AM et au plan ANB le long de b, dont les génératrices s'appuyent en deux points sur la courbe γ.

Soit P un point de la courbe γ distinct de M, N. Le plan PMN coupe Q, Q_a, Q_b suivant des coniques passant par M, N, P et tangentes en M au plan AMB, en N au plan ANB. Ces deux coniques coïncident donc en une conique φ qui fait partie de la courbe γ

(*) *Leçons de Géométrie Projective,* París, Hermann; et Liége, Thone, 1933.

La droite AP coupe Q en un second point P′ qui appartient à la courbe γ et le plan MNP′ coupe Q, Q_a, Q_b suivant une seconde conique ψ qui, avec φ, forme la courbe γ.

Les plans projetant les points de la conique φ des droites a, b, engendrent deux faisceaux projectifs et par conséquent les tangentes à Q aux points de φ, s'appuyant sur a, b, engendrent un hyperboloïde H_1. De même, les tangentes à Q aux points de la conique ψ, s'appuyant sur a, b, engendrent un hyperboloïde H_2. La surface cherchée se compose des hyperboloïdes H_1, H_2.

3. Soient P un point de la conique φ, g_1 la génératrice de H_1 passant par ce point. La conjuguée g'_1 de g_1 touche Q en P et s'appuie sur les conjuguées a' de a et b' de b.

D'autre part, la droite a', tangente en M à Q, s'appuie sur a et b ; elle appartient donc à H_1 (et de même à H_2). La droite b' appartient également à H_1 (et à H_2). La droite g'_1 rencontrant H_1 en troits points : P et ses points d'appui sur a', b', appartient à H_1.

On voit donc que les deux systèmes de génératrices rectilignes de H , sont tangentes à Q aux points de la conique φ, les génératrices du premier mode s'appuyant sur a, b ; celles du second sur a', b'.

L'hyperboloïde H_2 possède évidemment la propriété analogue.

Les hyperboloïdes H_1, H_2 ont en commun les quatre droites a, b, a', b'.

Soient M′ le pôle du plan μ de la conique φ et Ω_1 l'homologie harmonique de centre M′ et de plan μ. Cette homologie transforme Q en elle-même. Le plan tangent à Q en P passe par M′ et est uni ; dans ce plan, Ω_1 détermine une homologie harmonique de centre M′, dont l'axe est la tangente à φ située dans ce plan. Il en résulte que Ω_1 fait se correspondre les droites g_1, g'_1. Par suite, Ω_1 transforme l'hyperboloïde H_1 en lui-même, en échangeant les génératrices des deux modes.

A la droite a, Ω_1 fait correspondre a' et à la droite b, b'. D'ailleurs, M′ appartient à la droite AB et les points A, B se correspondent dans Ω_1.

A une droite g_2 de l'hyperboloïde H_2, s'appuyant sur a, b, Ω_1 fait correspondre una tangente à Q,s'appuyant sus a', b'. Cette tangente ne peut appartenir à H_1 et par suite appartient à H_2. Il en résulte que H_2 est transformé en soi par Ω_1. Les points de contact de deux tangentes homologues sont en général distincts et doivent être homologues dans Ω_1, par suite la droite qui les joint passe par M'. Mais ces points de contact sont situés sur la conique ψ, donc le plan ν de cette conique passe par M'.

Il en résulte que les plans μ, ν sont conjugués par rapport à Q. De plus, il partagent harmoniquenant les plans α, β, puis que A, B se correspondent sur Ω_1.

Soient Ω_a l'homologie harmonique de centre A et de plan α, Ω_b l'homologie harmonique de centre B et de plan β. Chacune de ces homologies transforme en soi chacune des quadriques Q, Q_a, Q_b. Puisqu'une droite passant par A et s'appuyant sur la conique φ, rencontre la conique ψ, Ω_a échange entre eux les plans μ de φ et ν de ψ. Il en est de même de Ω_b.

Etant donnés une quadrique non conique Q, deux points M, N de cette quadrique tels que la droite MN n'appartienne pas à la quadrique, α, β *deux plans conjugués passant par MN,* a *une tangente à Q en M située dans* α, b *une tangente à Q en N située dans* β, *le lieu des tangentes à Q s'appuyant sur* a *et* b *est formé de deux hyperboloïdes H_1, H_2, respectivement circonscrits à Q le long de deux coniques* φ, ψ *situées dans des plans passant par M, N, conjugués par rapport à Q et partageant harmoniquement les plans* α, β. *Les génératrices des deux modes des hyperboloïdes H_1, H_2 touchent Q le long de* φ, ψ *respectivement et s'appuyent sur les conjuguées* a' *de* a *et* b' *de* b.

Liége, le 30 août 1945.