UNIVERSITÉ DE LIÉGE

Cours de la Faculté des Sciences

Leçons

d'ALGÈBRE

par

Lucien GODEAUX

Membre de l'Académie Royale de Belgique

Professeur à l'Université de Liége

Editions Jules RAESER-GILS
Rue Tanixhe, 46, Bressoux

Chapitre I

Eléments de la théorie des déterminants.

1. **Permutations** - Ecrivons dans un ordre quelconque, les n premiers nombres 1, 2, ..., n, soit

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n .$$

C'est ce que l'on appelle une permutation des n premiers nombres.
On dit que cette permutation présente une inversion ou un dérangement lorsque de deux nombres α_i, α_k que l'on rencontre successivement en allant de gauche à droite, le premier α_i est supérieur au second α_k.
Une permutation est paire quand elle contient un nombre pair d'inversions, elle est impaire dans le cas opposé.
La permutation 45312 contient les inversions 43, 41, 42, 53, 51, 52, 31, 32 et est donc paire. La permutation 45213 contient les inversions 42, 41, 43, 52, 51, 53, 21 et est donc impaire.

2. **Transposition**. On appelle transposition l'opération qui consiste à échanger deux éléments d'une permutation.

Théorème - Une transposition change la parité d'une permutation.

Considérons la permutation

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n . \qquad (1)$$

Echangeons deux éléments consécutifs α_i, α_{i+1}, c'est-à-dire considérons la permutation

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_n . \qquad (2)$$

Si $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, la permutation (2) présente une inversion de plus que (1). Si $\alpha_i > \alpha_{i+1}$, c'est le contraire qui se produit. Les autres inversions qui peuvent se présenter dans (1) se retrouvent évidemment dans (2) et le théorème est établi pour une transposition affectant deux termes consécutifs.

Considérons maintenant la permutation

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \alpha_{k+1} \ldots, \alpha_n \qquad (1)$$

et la permutation

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_k, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_i, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \qquad (2)$$

qu'on en déduit en transposant α_i et α_k.

On peut passer de (1) à (2) en effectuant successivement les transpositions

$$(\alpha_i, \alpha_{i+1}), (\alpha_i, \alpha_{i+2}), \ldots, (\alpha_i, \alpha_{k-1}), (\alpha_i, \alpha_k),$$
$$(\alpha_{k-1}, \alpha_k), (\alpha_{k-2}, \alpha_k), \ldots, (\alpha_{i+1}, \alpha_k),$$

qui sont au nombre de $2(k-i)-1$, c'est-à-dire en nombre impair, par conséquent les substitutions (1) et (2) sont de parités différentes.

3. Définition d'un déterminant. Considérons un tableau carré de n^2 éléments formé de n lignes et de n colonnes, placé entre deux traits verticaux

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ik} & \ldots & a_{in} \\ & & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Formons tous les produits obtenus en prenant n éléments, un dans chaque ligne et dans chaque colonne. Soit

$$a_{\alpha_1\beta_1}\, a_{\alpha_2\beta_2} \dots a_{\alpha_n\beta_n} \qquad (2)$$

un de ces produits. Nous conviendrons d'affecter ce produit du signe + ou du signe – suivant que les permutations

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\,;\quad \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \qquad (3)$$

sont de même parité ou non.

Observons que le signe du produit (2) est indépendant de l'ordre des facteurs, car la transposition de deux termes de ce produit donne deux transpositions analogues des permutations (3) et celles-ci changent toutes deux de parité.

Cela étant, le déterminant (1) représente la somme

$$\Sigma\, \varepsilon\, a_{\alpha_1\beta_1}\, a_{\alpha_2\beta_2} \dots a_{\alpha_n\beta_n},$$

où ε est égal à +1 ou à –1 suivant que les permutations (3) sont de même parité ou non.

4 - __Remarques.__ On peut toujours s'arranger de telle sorte que dans les produits (3), la permutation $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ coïncide avec la permutation $1, 2, \dots, n$. Alors le déterminant (1) a pour valeur

$$\Sigma\, \varepsilon\, a_{1\gamma_1}\, a_{2\gamma_2} \dots a_{n\gamma_n},$$

ε étant égal à +1 ou a –1 suivant que la permutation $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$ est paire ou impaire.

Le déterminant (1) est dit d'ordre n.

Le terme

$$a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$$

de son développement est appelé diagonale principale.

5 - __Transposé d'un déterminant__. Considérons le déterminant (1) et écrivons un nouveau déterminant obtenu en prenant pour lignes les colonnes du déterminant (1). Soient

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ces deux déterminants

Le déterminant D' est appelé le transposé du premier

Le transposé d'un déterminant a la même valeur que ce détermi-nant. On a en effet

$$D = \Sigma \varepsilon\, a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_2\beta_2} \dots a_{\alpha_n\beta_n}$$

et

$$D' = \Sigma \varepsilon\, a_{\beta_1\alpha_1} a_{\beta_2\alpha_2} \dots a_{\beta_n\alpha_n}.$$

Le terme général du développement de D' se trouve, avec son si-gne dans le développement de D, donc $D' = D$.

6. Théorème. Si l'on transpose deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant, le déterminant obtenu est égal au premier chan-gé de signe.

Considérons le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qn} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

et le déterminant

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

que l'on en déduit en échangeant les lignes de rangs p et q.
Nous devons démontrer que l'on a $D' = -D$.
Nous pouvons écrire

$$D = \Sigma \pm a_{1\gamma_1} a_{2\gamma_2} \cdots a_{p\gamma_p} \cdots a_{q\gamma_q} \cdots a_{n\gamma_n}.$$

Nous avons donc

$$D' = \Sigma \pm a_{1\gamma_1} a_{2\gamma_2} \cdots a_{q\gamma_p} \cdots a_{p\gamma_q} \cdots a_{n\gamma_n}.$$

Or, dans le terme général de D', la permutation $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p, \ldots, \gamma_q, \ldots \gamma_n$ n'a pas changé tandis que celle des premiers indices, $1, 2, \ldots, q, \ldots p, \ldots n$ a subi une transposition et a donc changé de parité.
Le développement de D et D' contiennent donc les mêmes termes mais changés de signe et on a bien $D' = -D$.

7. <u>Corollaire</u>. <u>Un déterminant possédant deux lignes (ou deux colonnes) identiques est nul</u>.
Supposons en effet que l'on ait

$$a_{p1} = a_{q1}, \quad a_{p2} = a_{q2}, \ldots, a_{pn} = a_{qn}.$$

On a évidemment $D = D'$ et d'autre part $D' = -D$, d'où $D = 0$.

8. <u>Application au déterminant de Vandermonde</u>. On appelle déterminant de Vandermonde le déterminant d'ordre n

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & b & \cdots & m \\ a^2 & b^2 & \cdots & m^2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a^{n-1} & b^{n-1} & \cdots & m^{n-1} \end{vmatrix}$$

où $a, b, \ldots, m$ sont n nombres distincts.
Le développement de D est un polynôme en a, un polynome en $b, \ldots,$ un polynome en m. Si l'on fait $a = b$, on a $D = 0$, donc D est divisible par $b - a$. Pour la même raison, il est divisible par $c - a, \ldots, m - a, c - b, \ldots, m - b, \ldots$ On peut donc écrire

$$D = \lambda (b-a)(c-a)\ldots(m-a)(c-b)\ldots(m-b)\cdots(m-l).$$

La diagonale principale de D est

$$b c^2 \ldots l^{n-2} m^{n-1}.$$

Dans l'expression de D qui vient d'être obtenue, ce terme a pour coefficient λ, donc $\lambda = 1$ et l'on a

$$D = (b-a)(c-a)\ldots(m-a)(c-b)\ldots(m-b)\ldots(m-l).$$

9 - Théorème. Si l'on multiplie les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) d'un déterminant par un même facteur, le déterminant obtenu est égal au déterminant primitif, multiplié par ce facteur.

En effet, dans le déterminant D, remplaçons les termes de la $p^{ième}$ ligne par $\lambda a_{p1}, \lambda a_{p2}, \ldots, \lambda a_{pn}$; nous obtenons un nouveau déterminant

$$D_1 = \Sigma \varepsilon \lambda a_{1\gamma_1} a_{2\gamma_2} \ldots a_{p\gamma_p} \ldots a_{n\gamma_n}.$$

On a évidemment

$$D_1 = \lambda D.$$

Corollaire I. Dans un déterminant, on peut mettre en évidence un facteur commun à tous les éléments d'une même ligne (ou d'une même colonne).

Corollaire II Si l'on change les signes de tous les termes d'une même ligne (ou d'une même colonne) d'un déterminant, on obtient un nouveau déterminant égal au précédent changé de signe.

10- **Mineurs d'un déterminant** - Reprenons le déterminant D d'ordre n et supprimons dans ce déterminant la ligne et la colonne contenant le terme a_{ik}. Nous obtenons un déterminant d'ordre $n-1$ que nous désignerons par A_{ik} et que l'on appelle mineur du déterminant D correspondant au terme a_{ik}.
Observons que dans le développement de D figurent les termes du développement du produit $a_{ik}\, A_{ik}$, au signe près.
Le développement de D contient en effet le terme

$$\varepsilon a_{1\gamma_1} a_{2\gamma_2} \cdots a_{i\gamma_i} \cdots a_{n\gamma_n}, \qquad (1)$$

où l'on a $\gamma_i = k$. On peut l'écrire

$$\varepsilon a_{ik} \cdot a_{1\gamma_1} \cdots a_{i-1\,\gamma_{i-1}}\, a_{i+1\,\gamma_{i+1}} \cdots a_{n\gamma_n}, \qquad (2)$$

car pour passer de (1) à (2), on fait une transposition sur les premiers indices et une transposition sur les seconds.
Dans le développement de A_{ik}, figure le terme

$$\varepsilon' a_{1\gamma_1} \cdots a_{i-1\,\gamma_{i-1}}\, a_{i+1\,\gamma_{i+1}} \cdots a_{n\gamma_n}.$$

Une transposition effectuée sur $\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n$ change la parité de cette substitution et celle de la substitution

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_i = k, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n,$$

donc le produit $\varepsilon\varepsilon' = \pm 1$ reste le même, quel que soit le terme du développement de D, contenant a_{ik} considéré.
Le produit $\varepsilon\varepsilon' A_{ik}$ est appelé complément algébrique du terme a_{ik}.

11- **Développement d'un déterminant**. Un déterminant est égal à la somme des produits des éléments d'une ligne (ou d'une colonne) par les compléments algébriques de ces éléments.
Appelons A'_{ik} le complément algébrique $\varepsilon\varepsilon' A_{ik}$ de l'élément a_{ik}. On a, d'après ce qui précède

$$D = a_{1k} A'_{1k} + a_{2k} A'_{2k} + \cdots + a_{nk} A'_{nk},$$

$$D = a_{i1} A'_{i1} + a_{i2} A'_{i2} + \cdots + a_{in} A'_{in}.$$

En particulier, on a

$$D = a_{11} A_{11} - a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{1n} A_{1n} ,$$

$$D = - a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} - a_{23} A_{23} + \cdots + (-1)^{n} a_{2n} A_{2n} .$$

12. Théorème. La somme des produits des éléments d'une ligne (ou colonne) d'un déterminant par les compléments algébriques d'une autre ligne (ou d'une autre colonne) est nulle.

Considérons en effet la somme

$$a_{i1} A'_{p1} + a_{i2} A'_{p2} + \cdots + a_{in} A'_{pn} ,$$

où i et p sont distincts. Cette expression est le développement d'un déterminant d'ordre n qui contient deux lignes identiques, à savoir le i ième et le p ième. Ce déterminant est donc identiquement nul.

13. Corollaire. Si l'on ajoute aux éléments d'une ligne (ou d'une colonne) d'un déterminant, les éléments d'une autre ligne (ou d'une autre colonne) multipliés par un certain facteur, on obtient un nouveau déterminant égal au premier.

Supposons en effet que dans le déterminant D, on remplace les éléments

$$a_{i1} , a_{i2} , \ldots , a_{in}$$

de la i ième ligne, par

$$a_{i1} + h a_{p1} , a_{i2} + h a_{p2} , \ldots , a_{in} + h a_{pn} ,$$

p étant différent de i. On obtient un nouveau déterminant D_1 et on a

$$\begin{aligned} D_1 &= (a_{i1} + h a_{p1}) A'_{i1} + (a_{i2} + h a_{p2}) A'_{i2} + \cdots + (a_{in} + h a_{pn}) A'_{in} \\ &= a_{i1} A'_{i1} + a_{i2} A'_{i2} + \cdots + a_{in} A'_{in} \\ &+ h (a_{p1} A'_{i1} + a_{p2} A'_{p2} + \cdots + a_{pn} A'_{in}) . \end{aligned}$$

Le coefficient de h est nul et on a $D_1 = D$.

14- __Remarque__. Supposons que dans le déterminant D, nous ayons

$$a_{i1} = a'_{i1} + a''_{i1}\ ,\ a_{i2} = a'_{i2} + a''_{i2}\ , \dots ,\ a_{in} = a'_{in} + a''_{in} .$$

Nous avons

$$\begin{aligned} D &= (a'_{i1} + a''_{i1})\, A'_{i1} + \dots + (a'_{in} + a''_{in})\, A'_{in} \\ &= a'_{i1} A'_{i1} + \dots + a'_{in} A'_{in} + a''_{i1} A'_{i1} + \dots + a''_{in} A'_{in} . \end{aligned}$$

Appelons D' le déterminant obtenu en remplaçant dans D les termes $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ de la i ième ligne par $a'_{i1}, a'_{i2}, \dots, a'_{in}$ et D" celui que l'on obtient en remplaçant ces élements par $a''_{i1}, a''_{i2}, \dots, a''_{in}$. On a évidemment

$$D = D' + D'' .$$

Inversement, si l'on se donne les déterminants D', D" qui ont n-1 lignes identiques, on peut remplacer la somme D'+D" par D.

15- __Multiplication des déterminants__. Considérons deux déterminants

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad , \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Posons

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \dots + a_{in} b_{kn}$$

et formons le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} .$$

Pour plus de simplicité, nous supposerons n = 3. Le déterminant D peut alors s'écrire

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} + a_{23}b_{13} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{12} + a_{33}b_{13} & c_{31} & c_{33} \end{vmatrix} .$$

En vertu de la remarque précédente, on a

$$D = b_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{23} & a_{11}b_{31} + a_{12}b_{32} + a_{13}b_{33} \\ a_{21} & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23} & a_{21}b_{31} + a_{22}b_{32} + a_{23}b_{33} \\ a_{31} & a_{31}b_{21} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{23} & a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} + a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ b_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & c_{12} & c_{13} \\ a_{22} & c_{22} & c_{23} \\ a_{32} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} + b_{13} \begin{vmatrix} a_{13} & c_{12} & c_{13} \\ a_{23} & c_{22} & c_{23} \\ a_{33} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} .$$

Considérons le premier déterminant figurant dans cette somme
Il est égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b_{22} + a_{13}b_{23} & a_{12}b_{32} + a_{13}b_{33} \\ a_{21} & a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23} & a_{22}b_{32} + a_{23}b_{33} \\ a_{32} & a_{32}b_{32} + a_{32}b_{23} & a_{32}b_{32} + a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

A son tour, celui-ci est égal à la somme des déterminants

$$b_{22}b_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_{23}b_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} ,$$

c'est-à-dire à

$$(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32})\, D_1 .$$

Dans le développement de D, le premier terme est donc

$$b_{11}\, B_{11}\, D_1 ,$$

en appelant B_{11} le mineur de D_2 correspondant à b_{11}.
On trouve de même que les termes suivants sont respectivement égaux à

$$- b_{12}\, B_{12}\, D_1 , \quad b_{13}\, B_{13}\, D_1 .$$

On a donc

$$D = (b_{11} B_{11} - b_{12} B_{12} + b_{13} B_{13})\, D_1 = D_1 D_2 .$$

ou adjoint

16. Déterminant réciproque. Soient D un déterminant d'ordre n, A'_{ik} le complément algébrique de a_{ik}. On appelle déterminant réciproque de D, le déterminant

$$D' = \begin{vmatrix} A'_{11} & \dots & A'_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ A'_{n1} & \dots & A'_{nn} \end{vmatrix} .$$

Formons le produit DD'. Les termes de la première ligne de ce déterminant seront

$$a_{11} A'_{11} + a_{12} A'_{12} + \dots + a_{1n} A'_{1n} = D ,$$
$$a_{11} A'_{21} + a_{12} A'_{22} + \dots + a_{1n} A'_{2n} = 0 ,$$
$$\dots\dots$$
$$a_{11} A'_{n1} + a_{12} A'_{n2} + \dots + a_{1n} A'_{nn} = 0$$

$$\begin{vmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

De même, on voit que les termes de la diagonale principale du déterminant DD' sont égaux à D, les autres étant nuls. On a donc

$$D . D' = D^n , \qquad D' = D^{n-1}$$

Chapitre II.

Equations linéaires.

17. **Résolution d'un système de n équations linéaires à n inconnues.** Considérons le système de n équations linéaires

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_1 \,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_2 \,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = a_n . \end{array}\right\} \quad (1)$$

à n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Représentons par D le déterminant des coefficients des inconnues

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

et par $D_1, D_2, \dots, D_n$ les déterminants déduits de D en y remplaçant par $a_1, a_2, \dots, a_n$ les éléments respectivement de la première, de la seconde, ..., de la n ième colonne.

Théorème de Cramer. Si le déterminant D n'est pas nul, le système (1) admet une et une seule solution.

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Désignons par A_{ik} le complément algébrique de D correspondant à l'élément a_{ik}. Multiplions les équations (1) respectivement par $A_{11}, A_{21}, \dots, A_{n1}$ et ajoutons les membre à membre

Nous obtenons.

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1})x_1 && \to Dx_1\\
+\,&(a_{22}A_{11} + a_{22}A_{21} + \cdots + a_{n2}A_{n1})x_2 && \to 0\\
+\,&\cdots\cdots\cdots && \to 0\\
+\,&(a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \cdots + a_{nn}A_{n1})x_n && \to 0\\
=\,&a_1A_{11} + a_2A_{21} + \cdots + a_nA_{n1}, && \to D_1
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire

$$Dx_1 = D_1.$$

Comme D n'est pas nul, on en déduit

$$x_1 = \frac{D_1}{D}.$$

On obtient de même

$$x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Ces équations sont donc des conséquences des équations (1)

Inversement, les valeurs trouvées pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfont aux équations (1). Envisageons par exemple la première, on doit avoir

$$a_{11}D_1 + a_{12}D_2 + \cdots + a_{1n}D_n = a_1 . D$$

ce qui est évident car cela revient à écrire que le déterminant

$$a_1 D = \begin{vmatrix} a_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

(par transpositions de colonnes)

qui a deux lignes identiques, est nul.

19. **Théorème**. <u>La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de n équations linéaires homogènes à n inconnues soit satisfait pour des valeurs non toutes nulles de ces inconnues, est que le déterminant des coefficients soit nul.</u>

Le système d'équations linéaires homogènes

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

se déduit en effet du système (1) en posant $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.
Si le déterminant D des coefficients n'est pas nul, les solutions du système (2) sont données par le théorème de Cramer. Or, on a $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, ..., $D_n = 0$. Le théorème en résulte. $D = 0$

20. Systèmes de formes algébriques linéaires. Considérons un système de m formes linéaires en $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\left.\begin{array}{l} X_1(x) \equiv a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ , \\ X_2(x) \equiv a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_m(x) \equiv a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ , \end{array}\right\} \quad (3)$$

c'est-à-dire m fonctions linéaires et homogènes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Les m formes $X_1(x)$, $X_2(x)$, ..., $X_m(x)$ sont dites linéairement indépendantes s'il est impossible de trouver m constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ non toutes nulles telles que l'on ait

$$\lambda_1 X_1(x) + \lambda_2 X_2(x) + \cdots + \lambda_m X_m(x) = 0 \qquad (4)$$

quelles que soient les valeurs données à $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Dans le cas opposé, les m formes sont dites linéairement dépendantes. D'une manière plus précise, s'il existe $m-p$ systèmes de constantes donnant lieu à des relations de la forme (4), on peut exprimer $m-p$ des formes données en fonctions linéaires et homogènes des p autres. Ces dernières relations pourront s'écrire

$$X_{p+1}(x) = \lambda_{11} X_1(x) + \lambda_{12} X_2(x) + \cdots + \lambda_{1p} X_p(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_m(x) = \lambda_{m-p\,1} X_1(x) + \lambda_{m-p\,2} X_2(x) + \cdots + \lambda_{m-p\,p} X_p(x),$$

en changeant éventuellement le numérotage des formes.

Les expressions précédentes sont supposées vérifiées pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On dit que $X_{p+1}(x), \ldots, X_m(x)$ sont des combinaisons linéaires de $X_1(x), \ldots, X_p(x)$.

Formons le tableau des coefficients des formes (3), (pas un dét^{t})

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}$$

Nous désignerons par M ce tableau rectangulaire ou matrice.

La matrice M sera dite de caractéristique (ou de rang) p si parmi tous les déterminants d'ordre p que l'on peut tirer de M en effaçant $n-p$ colonnes et $m-p$ lignes, il y en a au moins un qui n'est pas nul, tandis que tous les déterminants d'ordre supérieur à p tirés de M, sont nuls.

21. Théorème. Si la matrice des coefficients de m formes linéaires en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est de caractéristique p, $m-p$ de ces formes sont des combinaisons linéaires des p autres.

On peut toujours supposer, sauf à changer de notations que le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{vmatrix} \qquad \neq 0$$

est différent de zéro.

Observons en premier lieu que puisque δ n'est pas nul, les formes $X_1(x), X_2(x), \ldots, X_p(x)$ sont linéairement indépendantes, car s'il existait une relation de forme

$$\lambda_1 X_1(x) + \lambda_2 X_2(x) + \ldots + \lambda_p X_p(x) = 0,$$

vérifiée pour toutes les valeurs de x, on devrait avoir

$$a_{11} h_1 + a_{21} h_2 + \cdots + a_{p1} h_p = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{1p} h_1 + a_{2p} h_2 + \cdots + a_{pp} h_p = 0,$$

ce qui n'est possible que pour $h_1 = h_2 = \cdots = h_p = 0$, puisque $\delta \neq 0$.

On a d'autre part

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & X_1(x) \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} & X_2(x) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & X_p(x) \\ a_{p+11} & \cdots & a_{p+1p} & X_{p+1}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & a_{1k} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} & a_{2k} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & a_{pk} \\ a_{p+11} & \cdots & a_{p+1p} & a_{p+1k} \end{vmatrix} x_k$$

Les p premiers déterminants ($k = 1, 2, \ldots, p$) sont nuls comme ayant deux colonnes identiques. Les $n-p$ autres le sont également puisque ce sont des déterminants d'ordre $p+1$ tirés de M. Il en résulte que le déterminant du premier membre est nul. Développons ce déterminant par rapport aux éléments de la première colonne ; on obtient une relation de la forme.

$$\delta X_{p+1}(x) = \alpha_1 X_1(x) + \alpha_2 X_2(x) + \cdots + \alpha_p X_p(x).$$

Puisque δ n'est pas nul par hypothèse, on peut écrire cette relation sous la forme

$$X_{p+1}(x) = h_1 X_1(x) + h_2 X_2(x) + \cdots + h_p X_p(x),$$

où les h sont des constantes

On démontrerait de même $X_{p+2}(x), \ldots, X_m(x)$ s'expriment linéairement en fonction de $X_1(x), \ldots, X_p(x)$.

22. Remarque - Si les $m-p$ formes $X_{p+1}(x), \ldots, X_m(x)$ sont des combinaisons linéaires de p formes linéairement indépendantes $X_1(x), \ldots, X_p(x)$, la matrice M a la caractéristique p.

En effet, la caracteristique de M ne peut être inférieure à p, puisque les formes $X_1(x), \ldots, X_p(x)$ sont indépendantes et que par suite $\delta \neq 0$. Elle ne peut non plus être supérieure à p, car en vertu du théorème précédent, il y aurait alors plus de p formes linéairement indépendantes.

23. Résolution d'un système d'équations linéaires et homogènes.

Considérons les m équations

$$X_1(x) = 0, \quad X_2(x) = 0, \quad \ldots, X_m(x) = 0,$$

et supposons que la matrice M ait pour caractéristique p. Nous supposerons, pour fixer les idées, comme plus haut, que les premiers membres des p premières équations sont linéairement indépendants, donc que $\delta \neq 0$.

Les équations

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = -(a_{1\,p+1}x_{p+1} + \cdots + a_{1n}x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pp}x_p = -(a_{p\,p+1}x_{p+1} + \cdots + a_{pn}x_n),$$

peuvent alors être résolues par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Deux cas peuvent se présenter :

1°) $p < n$. On obtiendra alors toutes les solutions du système proposé en donnant à $x_{p+1}, \ldots, x_n$ des valeurs quelconques et en prenant pour $x_1, \ldots, x_p$ les valeurs solutions du dernier système écrit ci-dessus, valeurs qui dépendent linéairement de celles de $x_{p+1}, \ldots, x_n$.

2°) $p \geq n$. Le système proposé admet comme unique solution

$$x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0.$$

24. Résolution d'un système d'équations linéaires non homogènes.

Considérons le système

$$X_1(x) = a_1, \quad X_2(x) = a_2, \quad \ldots, X_m(x) = a_m. \qquad (1)$$

Supposons encore que la matrice M ait pour caractéristique p et considérons la matrice M'

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & a_m \end{matrix}$$

Théorème. Si les équations (1) sont compatibles, les matrices M et M' ait même caracteristique

Supposons en effet que les équations (1) admettent la solution

$$x_1 = \alpha_1 , x_2 = \alpha_2 , \ldots , x_n = \alpha_n ;$$

on a donc

$$X_1(\alpha) = a_1 , X_2(\alpha) = a_2 , \ldots , X_m(\alpha) = a_m .$$

Supposons encore, pour fixer les idées $\delta \neq 0$. Comme plus haut (n° 21), on démontre en remplaçant les x pour les α, que l'on a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & a_1 \\ a_{21} & & a_{2p} & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & a_p \\ a_{p+11} & \cdots & a_{p+1\,p} & a_{p+1} \end{vmatrix} = 0$$

Ce déterminant est un déterminant d'ordre $p+1$ tiré de la matrice M'. On démontre de même que les autres déterminants d'ordre $p+1$ tirés de M' sont nuls. Par conséquent, la caractéristique de la matrice M' est au plus égale à p. Comme le déterminant d'ordre p tirés de la matrice M appartiennent également à M', la caractéristique de M' est égale à p.

Réciproquement, si les matrices M et M' ont même caractéristique et si les équations (1) privées de seconds membres, sont compatibles, les équations (1), avec second membre, sont compatibles.

Supposons que M et M' aient même caractéristique p et considérons les équations

$$X_1(x) - a_1 x_{n+1} = 0, \quad \ldots, \quad X_m(x) - a_m x_{n+1} = 0 . \qquad (2)$$

Si $p > n$, ces équations admettent l'unique solution

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x_{n+1} = 0$$

et les équations

$$X_1(x) = 0 \, , \quad X_2(x) = 0 \, , \quad \ldots, X_m(x) = 0$$

sont incompatibles, contrairement à l'hypothèse. On a donc $p \leq n$. Alors les équations (2), à $n+1$ inconnues homogènes, admettent des solutions que l'on obtient en choisissant arbitrairement les $n-p+1$ valeurs de $x_{p+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}$ et en déterminant les valeurs correspondantes de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ (n° 23). En particulier, on peut prendre $x_{n+1} = 1$.

Si $p = n$, il y a un seul système de solutions.

Si $p < n$, on peut choisir arbitrairement les valeurs de $n-p$ des inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Chapitre III.

Propriétés générales des équations algébriques.

25. Définitions Une fonction algébrique est dite rationnelle et entière par rapport à une variable si les exposants de cette variable sont entiers, positifs ou nuls. Elle peut s'écrire sous la forme

$$F(x) \equiv A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1} x + A_n ,$$

n étant un entier et les coefficients A_0, A_1, ..., A_n étant réels ou imaginaires. n est le degré de $F(x)$.

L'équation

$$F(x) \equiv A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1} x + A_n = 0 \qquad (1)$$

est appelée équation algébrique.

Une valeur de x, réelle ou imaginaire, qui satisfait à l'équation (1), est appelée racine de cette équation, ou encore racine de la fonction $F(x)$.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons réels les coefficients de la fonction $F(x)$.

26. Propriétés des fonctions rationnelles et entières.

Si pour $x = a$, $F(a)$ est nul, $F(x)$ est divisible par $x - a$.

Le quotient est une fonction rationnelle et entière de degré $n-1$ en x.

La dérivée de $F(x)$ est la fonction rationnelle et entière de degré $n-1$.

$$F'(x) = n A_0 x^{n-1} + (n-1) A_1 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1} .$$

La derivée d'ordre p, $F^{(p)}(x)$, de $F(x)$, est une fonction rationnelle et entière de x.

La dérivée d'ordre n de n de $F(x)$ est une constante,

$$F^{(n)}(x) = n!\, A_0$$

Les dérivées d'ordres supérieurs à n de $F(x)$ sont nulles.

La fonction $F(x)$ est continue par rapport à x.

Si $F(a)$ et $F(b)$ sont de signes contraires, il y a au moins une racine de $F(x)$ comprise entre a et b.

Si $F'(a) > 0$, la fonction $F(x)$ est croissante au point $x = a$,

Si $F'(a) < 0$, la fonction $F(x)$ est décroissante au point $x = a$.

27. Formule de Taylor. Considérons la fonction

$$F(x+h) = A_0(x+h)^n + A_1(x+h)^{n-1} + \cdots + A_n$$

et développons les puissances de $x+h$ par la formule du binome. Ordonnons le résultat par rapport aux puissances croissantes de h. On trouve

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1}F'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \cdots + \frac{h^p}{p!}F^{(p)}(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}F^{(n)}(x).$$

Cette formule est la formule de Taylor.

28. Théorème. Pour x suffisamment grand en valeur absolue, $F(x)$ a le signe de son premier terme $A_0 x^n$.

Ecrivons

$$\frac{F(x)}{A_0 x^n} = 1 + \frac{A_1}{A_0}\frac{1}{x} + \frac{A_2}{A_0}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \cdots + \frac{A_n}{A_0}\left(\frac{1}{x}\right)^n. \tag{1}$$

Supposons en premier lieu x positif. Il suffira de montrer que l'on peut prendre x suffisamment grand pour que le second membre soit positif.

Si les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont tous de même signe, la propriété est évidente, tous les termes du second membre étant positifs. Le second membre est positif pour x positif.

Supposons qu'il y ait k des quantités $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ayant le signe

contraire de celui de A_0. Soient $A_p, A_q, \dots, A_r$ ces quantités.
Dans le second membre de (1), il y a k termes négatifs,

$$\frac{A_p}{A_0}\left(\frac{1}{x}\right)^p, \quad \frac{A_q}{A_0}\left(\frac{1}{x}\right)^q, \dots, \quad \frac{A_r}{A_0}\left(\frac{1}{x}\right)^r. \qquad (2)$$

Prenons une valeur de x satisfaisant aux inégalités

$$-\frac{A_p}{A_0}\left(\frac{1}{x}\right)^p < \frac{1}{k}, \quad -\frac{A_q}{A_0}\left(\frac{1}{p}\right)^q < \frac{1}{k}, \dots, \quad -\frac{A_r}{A_0}\left(\frac{1}{x}\right)^r < \frac{1}{k},$$

c'est-à-dire aux inégalités

$$x > \left(-k\frac{A_p}{A_0}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad x > \left(-k\frac{A_q}{A_0}\right)^{\frac{1}{q}}, \dots, \quad x > \left(-k\frac{A_r}{A_0}\right)^{\frac{1}{r}}$$

ou $-\left(\frac{A_p}{A_0}\frac{1}{x^p} + \dots \frac{A_r}{A_0}\frac{1}{x^r}\right) >$ $\frac{A_p}{A_0}\frac{1}{x^p}$

Alors, la somme des k termes (2) est comprise entre -1 et 0 et le second membre de (1) est positif.
Le théorème est donc démontré pour x positif. Pour le démontrer pour x négatif, posons $x' = -x$ et observons que, d'après ce qui vient d'être démontré.

$$F(x) = F(-x') \quad \text{et} \quad A_0(-x')^n = A_0 x^n$$

ont le même signe pour x' suffisamment grand. Le théorème est donc démontré.

29- Théorème. Pour x suffisamment petit en valeur absolue, $F(x)$ a le signe de son terme de degré le moins élevé

Soit

$$F(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x^s,$$

s étant entier, positif ou nul.
Ecrivons

$$\frac{F(x)}{A_{n-1}x^s} = 1 + \frac{A_{n-s+1}}{A_{n-s}}x + \dots + \frac{A_0}{A_{n-s}}x^{n-s} \qquad (1)$$

Supposons en premier lieu x positif. Si tous les coefficients de $F(x)$ ont le même signe, le premier membre de l'égalité (1) est positif et le théorème est démontré.
S'il n'en est pas ainsi, supposons que les k quantités

$-\frac{A_{n-p}}{A_{n-p}} > 0$ $\times$ons les 2 m^{bres} par l'inverse du coef

$-\frac{A_{n-p}}{A_{n-p}} \cdot x^p < \frac{1}{k}$

$$\frac{A_{n-p}}{A_{n-1}}, \quad \frac{A_{n-q}}{A_{n-s}}, \quad \dots, \quad \frac{A_{n-r}}{A_{n-s}}$$

soient négatives, les autres positives. Il suffira de prendre x (positif) de manière à satisfaire aux k inégalités

$$x < \left(-\frac{1}{k}\frac{A_{n-s}}{A_{n-p}}\right)^{\frac{1}{p-s}}, \quad x < \left(-\frac{1}{k}\frac{A_{n-s}}{A_{n-q}}\right)^{\frac{1}{q-s}}, \quad \dots, \quad x < \left(-\frac{1}{k}\frac{A_{n-s}}{A_{n-r}}\right)^{\frac{1}{r-s}}$$

pour que le second membre de l'égalité (1) soit positif.

Pour démontrer le théorème quand x est négatif, il suffira de considérer la fonction $F(-x)$ pour x positif.

29- <u>Racine d'une équation algébrique</u>. Nous admettrons le principe de d'Alembert : <u>Toute équation algébrique entière, à coefficients réels ou imaginaires, a au moins une racine réelle ou imaginaire.</u>

Soit a_1 une racine de $F(x)=0$. $F(x)$ est divisible par $x-a$ et on a

$$F(x) = (x-a_1)\,F_1(x)$$

$F_1(x)$ est un polynome de degré $n-1$ et admet, d'après le principe de d'Alembert, une racine a_2. Le polynome $F_1(x)$ est divisible par $x-a_2$ et on a

$$F(x) = (x-a_1)(x-a_2)\,F_2(x),$$

$F_2(x)$ étant un polynome de degré $n-2$ - Et ainsi de suite. On parvient finalement à

$$F(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\,F_n(x),$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ étant racines de $F(x)=0$ et $F_n(x)$ étant un polynome de degré $n-n=0$, c'est à dire une constante. Par identification des deux membres de la relation précédente, on voit que cette constante est A_0. On a donc finalement

$$F(x) = A_0(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n).$$

Les racines $a_1, a_2, \dots, a_n$ ne sont pas nécessairement distinctes

Supposons que α des nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ soient égaux à a, β à b, ..., γ à c. On a

$$F(x) = A_0 (x-a)^{\alpha} (x-b)^{\beta} \dots (x-c)^{\gamma},$$

avec

$$\alpha + \beta + \dots + \gamma = n.$$

Supposons que $F(x)$ puisse admettre une racine p distincte de $a, b, \dots, c$. On a alors

$$F(p) = A_0 (p-a)^{\alpha} (p-b)^{\beta} \dots (p-c)^{\gamma} = 0,$$

d'où $A_0 = 0$. L'équation ne serait pas de degré n, ce qui est absurde. Observons de plus que l'on ne peut avoir

$$F(x) = A_0 (x-a')^{\alpha'} (\alpha - b')^{\beta'} \dots (x-c')^{\gamma'}$$

sans avoir

$$a' = a,\ b' = b,\ \dots,\ c' = c,\ \alpha' = \alpha,\ \beta' = \beta,\ \dots,\ \gamma' = \gamma.$$

Supposons qu'il puisse en être autrement.
On a alors

$$(x-a)^{\alpha} (x-b)^{\beta} \dots (x-c)^{\gamma} = (x-a')^{\alpha'} (x-b')^{\beta'} \dots (x-c')^{\gamma'}.$$

Le premier membre s'annule pour $x = a$ et il doit donc en être de même du second. Il en résulte que a est égal à $a', b', \dots$ ou c', par exemple à a'.
Supposons que α et α' puissent être différents et que, pour fixer les idées, on ait $\alpha' < \alpha$. On a alors

$$(x-a)^{\alpha-\alpha'} (x-b)^{\beta} \dots (x-c)^{\gamma} = (x-b')^{\beta'} \dots (x-c')^{\gamma'}.$$

On peut décomposer d'une autre manière

Le premier membre s'annule pour $x = a$ et le second reste différent de zéro, ce qui est absurde. On a donc $\alpha = \alpha'$.
En poursuivant le même raisonnement, on voit que $b = b'$, ..., $c = c'$, $\beta = \beta'$, . . γ', donc :

<u>Une équation de degré n admet n racines, distinctes ou non</u>

On en déduit que :

I. <u>Si une équation de degré n s'annule pour plus de n valeurs</u>

de x, comptées chacune avec son degré de multiplicité, ses coefficients sont identiquement nuls.

II. Si deux fonctions rationnelles et entières de x, $F(x)$, $F_1(x)$, de degrés n, n_1, $(n \geq n_1)$ sont égales pour plus de n valeurs de x, elles sont complètement identiques.

En effet, l'équation $F(x) - F_1(x) = 0$, qui est de degré n, admet plus de n racines et ses coefficients sont donc tous nuls.

30. Théorème. Si une équation à coefficients réels admet une racine imaginaire, elle admet comme racine l'imaginaire conjuguée avec le même degré de multiplicité.

On a, en effet

$$F(\alpha + \beta i) = P + iQ, \quad F(\alpha - \beta i) = P - iQ,$$

P et Q étant réels.

Si $\alpha + \beta i$ est racine de $F(x)$, on a

$$P + iQ = 0,$$

c'est-à-dire $P = 0$, $Q = 0$ et par suite

$$F(\alpha - \beta i) = P - iQ = 0.$$

Cela étant, $F(x)$ est divisible par $x - \alpha - \beta i$, $x - \alpha + \beta i$, c'est-à-dire par $(x-\alpha)^2 + \beta^2$. Posons

$$F(x) = [(x-\alpha)^2 + \beta^2]\, F_1(x).$$

$F_1(x)$ est à coefficients réels. Si ce polynome admet la racine $\alpha + \beta i$, il admet la racine $\alpha - \beta i$. En continuant de la sorte, on arrivera finalement à

$$F(x) = [(x-\alpha)^2 + \beta^2]^p f(x),$$

où $f(x)$ est un polynome n'admettant plus les racines $\alpha + \beta i$ ou $\alpha - \beta i$.

Corollaire. Une équation de degré impair, à coefficients réels, admet au moins une racine réelle.

car les rac. imag. se présentent tjs par couples.

31 - Relations entre les coefficients et les racines de $F(x)$

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ les n racines, distinctes ou non, de $F(x) = 0$.
Représentons par S_p la somme des produits p à p de $a_1, a_2, \dots, a_n$.
On a donc

$$S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$
$$S_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Le second membre de

$$F(x) = A_0 (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

peut s'écrire

$$A_0 x^n - A_0 S_1 x^{n-1} + A_0 S_2 x^{n-2} \dots + (-1)^n A_0 S_n = 0.$$

On a donc

$$S_1 = -\frac{A_1}{A_0}, \quad S_2 = \frac{A_2}{A_0}, \quad S_3 = -\frac{A_3}{A_0}, \dots, S_n = (-1)^n \frac{A_n}{A_0}.$$

32. Racines multiples d'une équation.

Théorème - Si a est racine multiple d'ordre α de $F(x) = 0$, a est racine de

$$F'(x) = 0, \quad F''(x) = 0, \quad \dots, \quad F^{(\alpha-1)}(x) = 0$$

avec les degrés de multiplicité respectifs $\alpha - 1, \alpha - 2, \dots, 1$.
D'après la formule de Taylor, on a

$$F(x) = F(a + x - a) = F(a) + \frac{x-a}{1} F'(a) + \dots + \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} F^{(\alpha-1)}(a)$$
$$+ \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} F^{(\alpha)}(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} F^{(n)}(a).$$

$F(x)$ est divisible par $(x-a)^\alpha$ mais non par $(x-a)^{\alpha+1}$, donc on a

$$F(a) = 0; \quad F'(a) = 0, \quad \dots, \quad F^{(\alpha-1)}(a) = 0, \quad F^{(\alpha)}(a) \neq 0.$$

Appliquons maintenant la formule de Taylor à la fonction $F'(x)$.
On a

$$F'(x) = \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \qquad F^{(\alpha)}(x) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n)}(x),$$

donc $F'(x)$ admet la racine $x = a$ avec la multiplicité $\alpha - 1$.
Et ainsi de suite.

<u>Corollaire</u> Si l'on a

$$F(x) = A_0 (x-a)^{\alpha} (x-b)^{\beta} \dots (x-l)^{\lambda},$$

le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et de $F'(x)$ est

$$A_0 (x-a)^{\alpha-1} (x-b)^{\beta-1} \dots (x-l)^{\lambda-1}$$

33. <u>Transformation d'une équation</u>. Transformer une équation c'est déterminer une nouvelle équation dont les racines ont, avec celles de l'équation proposée, une relation déterminée. La nouvelle équation s'appelle la <u>transformée</u> de l'équation donnée.

La transformation homographique est définie par

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d},$$

où l'on suppose

$$ad = bc \neq 0.$$

La transformée homographique de $F(x) = 0$ est l'équation

$$F\left(\frac{b-dx}{cx-a}\right) = 0$$

Si $F(x) = 0$ est de degré n, en multipliant sa transformée homographique par $(cx-a)^n$, on obtient une équation de degré n.

Nous aurons à considérer les cas particuliers suivants :

a) <u>Transformée en $-x$</u>. On prend $a = -1$, $b = c = 0$, $d = 1$.

b) <u>Transformée en kx</u>. On prend $a = k$, $b = c = 0$, $d = 1$.

c) <u>Transformée en $x + h$</u>. On prend $a = d = 1$, $b = h$, $c = 0$.

d) <u>Transformée en $\frac{1}{x}$</u>. On prend $x = d = 0$, $b = c = 1$.

34. Problème I. <u>Transformer une équation à coefficients commensurables en une autre à coefficients entiers, le terme de degré le plus élevé ayant pour coefficient l'unité</u>.

L'équation donnée peut s'écrire sous la forme

$$\frac{A_0}{a_0} x^n + \frac{A_1}{a_1} x^{n-1} + \dots + \frac{A_n}{a_n} = 0,$$

où $A_0, A_1, \ldots, A_n, a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des entiers.

Ecrivons la sous la forme

$$x^n + \frac{a_0 A_1}{a_1 A_0} x^{n-1} + \cdots + \frac{a_0 A_n}{a_n A_0} = 0.$$

et rempl. x par $\frac{x}{k}$.

Prenons la transformée en kx; après multiplication par k^n, on a

$$x_n + \frac{a_0 A_1}{a_1 A_0} k x^{n-1} + \cdots + \frac{a_0 A_n}{a_n A_0} K^n = 0.$$

Il suffit, pour résoudre le problème, de prendre pour k le plus petit multiple commun des nombres $A_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

35. Problème II. Faire disparaître un terme de degré déterminé d'une équation donnée.

Prenons la transformée en $x - h$ de l'équation $F(x) = 0$. Par la formule de Taylor, cette transformée s'écrit (rempl. x par $x+h$).

$$F(x+h) = F(h) + \frac{x}{1} F'(h) + \cdots + \frac{x^p}{p!} F^{(p)}(h) + \cdots + \frac{x^n}{n!} F^n(h) = 0.$$

Pour faire disparaître le terme en x^p, il suffit de prendre pour h une racine de l'équation $F^{(p)}(h) = 0$.

En particulier, pour faire disparaître le terme en x^{n-1}, il suffit de prendre pour h une racine de $F^{(n-1)}(h) = 0$, c'est-à-dire de

$$nA_0 h + A_1 = 0.$$

La transformée en $x + \frac{A_1}{nA_0}$ de $F(x)$ ne contient plus de terme en x^{n-1}.

$A_0(x+h)^n + A_1(x+h)^{n-1} + \cdots = 0$

$A_0 x^n + (nhA_0 + A_1)x^{n-1} + \cdots = 0$

D'où $h \to nA_0 h + A_1 = 0$

Chapitre IV

Nombre de racines réelles d'une équation à coefficients réels.

36. **Principe de substitution.** Si dans un segment (x_0, X), il y a un nombre impair de racines réelles de l'équation $F(x)=0$, $F(x_0)$ et $F(X)$ sont de signes contraires ; s'il y en a un nombre pair, $F(x_0)$ et $F(X)$ sont de même signe.

Supposons pour fixer les idées $x_0 < X$. Les racines de l'équation $F(x)=0$ peuvent se ranger en quatre catégories :

a) Les racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, de multiplicités respectives $a_1, a_2, \dots a_p$, comprises entre x_0 et X ;

b) Les racines $b_1, b_2, \dots, b_q$, de multiplicités respectives $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$, inférieures à x_0 ;

c) Les racines $c_1, c_2, \dots, c_r$, de multiplicités respectives $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$, supérieures à X ;

d) Les racines imaginaires conjuguées $d_1 \pm ig_1$, $d_2 \pm ig_2, \dots, d_s \pm ig_s$, de multiplicités respectives $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s$.

On peut donc écrire

$$F(x) = A_0\, \mathcal{A}(x)\, \mathcal{B}(x)\, \mathcal{C}(x)\, \mathcal{D}(x),$$

en posant

$$\mathcal{A}(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_p)^{\alpha_p},$$

$$\mathcal{B}(x) = (x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\dots(x-b_q)^{\beta_q},$$

$$\mathcal{C}(x) = (x-c_1)^{\gamma_1}(x-c_2)^{\gamma_2}\dots(x-c_r)^{\gamma_r},$$

$$\mathcal{D}(x) = [(x-d_1)^2+g_1^2]^{\delta_1}[(x-d_2)^2+g_2^2]^{\delta_2}\dots[(x-d_s)^2+g_s^2]^{\delta_s}.$$

Les quantités $\mathcal{B}(x_0)$, $\mathcal{C}(x_0)$, $\mathcal{D}(x_0)$ ont respectivement mêmes signes que $\mathcal{B}(X)$, $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{D}(X)$. On a en effet par exemple

$$\frac{\mathcal{B}(x_0)}{\mathcal{B}(X)} = \left(\frac{x_0 - b_1}{X - b_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{x_0 - b_2}{X - b_2}\right)^{\beta_2} \cdots \left(\frac{x_0 - b_q}{X - b_q}\right)^{\beta_q}.$$

Tous les rapports figurant dans le second membre sont positifs, donc $\mathcal{B}(x_0)$ et $\mathcal{B}(X)$ sont de même signe.

Il en résulte que les rapports

$$\frac{F(x_0)}{F(X)} \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{A}(x_0)}{\mathcal{A}(X)}$$

ont le même signe. On a

$$\frac{\mathcal{A}(x_0)}{\mathcal{A}(X)} = \left(\frac{x_0 - a_1}{X - a_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{x_0 - a_2}{X - a_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{x_0 - a_p}{X - a_p}\right)^{\alpha_p}.$$

Chacun des rapports figurant dans le second membre sont négatifs, donc

Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p$ est pair, $\dfrac{\mathcal{A}(x_0)}{\mathcal{A}(X)}$ est positif ;

Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p$ est impair, $\dfrac{\mathcal{A}(x_0)}{\mathcal{A}(X)}$ est négatif.

Le théorème est donc démontré.

On en conclut que :

1°) __Si $F(x_0)$ et $F(X)$ sont de signes contraires, il y a un nombre impair de racines réelles comprises entre x_0 et X__ ; s'il y en avait un nbre pair ils seraient de m. signe

2°) __Si $F(x_0)$ et $F(X)$ sont de même signe, il y a un nombre pair de racines réelles comprises entre x_0 et X__.

37 - __Applications__. I - __Toute équation de degré impair a au moins une racine réelle de signe contraire à celui de son dernier terme, lorsque le coefficient du premier terme de l'équation est supposé positif__.

Soit l'équation

$$F(x) \equiv A_0 x^{2n+1} + A_1 x^{2n} + \cdots + A_{2n} x + A_{2n+1} = 0,$$

où A_0 est positif.

Pour x suffisamment grand, $F(x)$ a le signe de son premier terme $A_0 x^{2n+1}$, c'est-à-dire est positif. Nous conviendrons de représenter cette propriété par la notation $F(+\infty) > 0$.

Pour x négatif, suffisamment grand en valeur absolue, $F(x)$ a le signe de son premier terme $A_0 x^{2n+1}$, c'est-à-dire le signe $-$. Nous conviendrons d'écrire $F(-\infty) < 0$.

Pour $x = 0$, on a $F(0) = A_{2n+1}$.

Si A_{2n+1} est positif, $F(0)$ et $F(-\infty)$ sont de signes contraires et il y a une racine négative au moins.

Si A_{2n+1} est négatif, $F(0)$ et $F(+\infty)$ sont de signes contraires et il y a une racine positive au moins.

II. <u>Toute équation de degré pair dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles de signes contraires</u>.

Soit l'équation

$$A_0 x^{2n} + A_1 x^{2n+1} + \cdots + A_{2n+1}\, x + A_{2n} = 0,$$

où $A_0 > 0$, $A_{2n} < 0$. On a

$$F(+\infty) > 0, \quad F(0) < 0, \quad F(-\infty) > 0,$$

d'où le théorème.

III. <u>Une équation n'ayant que des racines imaginaires conserve toujours le signe de son premier terme</u>.

38 - <u>Variations et permanences</u>.

Étant donnée une suite de nombres

$$a_1, a_2, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n,$$

deux nombres consécutifs de même signe sont dits présenter une <u>permanence</u>, deux nombres consécutifs de signes contraires sont dits présenter une <u>variation</u>.

Le nombre de permanences de la suite des coefficients

$$A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$$

des coefficients d'une équation

$$F(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{n-1}\, x + A_n$$

(où plusieurs coefficients peuvent être nuls) est appelé <u>nombre</u>

de permanences de l'équation. Le nombre de variations de cette suite est appelé nombre de variations de l'équation.

39. Théorème - Si a est une racine réelle de l'équation $F(x)=0$ et si h est un nombre positif suffisamment petit, $F(a-h)$ et $F'(a-h)$ sont de signes contraires ; $F(a+h)$ et $F'(a+h)$ sont de même signe.

Supposons que a soit racine d'ordre α de $F(x)=0$. Alors a est racine d'ordre $\alpha-1$ de $F'(x)=0$ et on a

$$F(a+z)=\frac{z^{\alpha}}{\alpha!}F^{(\alpha)}(a)+\frac{z^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!}F^{(\alpha+1)}(a)+\dots+\frac{z^n}{n!}F^{(n)}(a),$$

$$F'(a+z)=\frac{z^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}F^{(\alpha)}(a)+\frac{z^{\alpha}}{\alpha!}F^{(\alpha+1)}(a)+\dots+\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n)}(a).$$

n étant le degré de $F(x)$.

Pour z suffisamment petit en valeur absolue, $F(z)$ et $F'(z)$ ont respectivement le signe de leur terme de degré le moins elevé. En d'autres termes $\frac{F(a+z)}{F'(a+z)}$ a le signe de z. Par conséquent, si $z=-h$, $F(a-h)$ et $F'(a-h)$ sont de signes contraires ; si $z=+h$, $F(a+h)$ et $F'(a+h)$ ont le même signe.

40. Remarque - De ce théorème, on déduit une démonstration du théorème de Rolle pour les fonctions rationnelles et entières.

Soient a, b, deux racines consécutives de $F(x)=0$. Les rapports

$$\frac{F(a+h)}{F'(a+h)}, \quad \frac{F(b-h)}{F'(b-h)}$$

sont de signes contraires. Mais puisqu'il n'y a pas de racine de $F(x)=0$ comprises entre $a+h$ et $b-h$, $F(a+h)$ et $F(b-h)$ sont de même signe. Par conséquent, $F'(a+h)$ et $F'(b-h)$ sont de signes contraires il y a un nombre impair de racines de $F'(x)=0$ comprises entre a et b.

41. Lemme I. Etant donnée une équation $F(x)=0$, de degré n,

à coefficients réels et une racine réelle a, d'ordre α, de cette équation, la suite

$$F(a-h),\ F'(a-h),\ \ldots,\ F^{(\alpha-1)}(a-h),\ F^{(\alpha)}(a-h) \qquad (1)$$

présente α variations de plus que la suite

$$F(a+h),\ F'(a+h),\ \ldots,\ F^{(\alpha-1)}(a+h),\ F^{(\alpha)}(a+h) \qquad (2)$$

h étant un nombre positif suffisamment petit

En effet, d'après le théorème précédent (n° 39), $F(a-h)$ et $F'(a-h)$ sont de signes contraires; il en est de même de $F'(a-h)$ et $F''(a-h)$, de $F''(a-h)$ et de $F'''(a-h)$, etc. La suite (1) présente donc α variations.

Au contraire, tous les termes de la suite (2) ont même signe (n° 39) donc cette suite ne présente que des permanences et le lemme est établi.

T

42 - Lemme II - Si a est une racine d'ordre α de l'équation $F'(x)=0$, mais n'est pas racine de l'équation $F(x)=0$, la suite

$$F(a-h),\ F'(a-h),\ F''(a-h),\ \ldots,\ F^{(\alpha+1)}(a-h), \qquad (1)$$

présente un nombre pair de variations de plus que la suite

$$F(a+h),\ F'(a+h),\ F''(a+h),\ \ldots,\ F^{(\alpha+1)}(a+h), \qquad (2)$$

h étant positif et suffisamment petit.

Choisissons h suffisamment petit pour que $F(x)$ ne possède pas de racine dans le segment $(a-h, a+h)$. Dans ces conditions, $F(a+h)$ et $F(a-h)$ ont le même signe.

1° Supposons α pair. Alors, l'équation $F'(x)$ possède un nombre pair de racines entre $a-h$ et $a+h$, $F'(a-h)$ et $F'(a+h)$ ont donc le même signe.

Les suites (1) et (2) présentent donc ou toutes deux une permanence, ou toutes deux une variation entre les deux premiers termes. Les termes suivants de la suite (1) présentent α variations (n° 39). Les termes suivants de la suite (2) ne présentent que des permanences. La suite (1) a donc un nombre pair α de variations de plus que la suite (2).

2°) Supposons maintenant α impair. Alors $F'(a-h)$ et $F'(a+h)$ sont de signes contraires, puisqu'il y a un nombre impair α de racines de $F'(x)=0$ entre $a-h$ et $a+h$. Si donc il y a une variation entre les deux premiers termes de la suite (1), il y a une permanence entre les deux premiers termes de la suite (2), ou inversement. Les termes suivants de la suite (1) présentent α variations et les termes suivants de la suite (2) ne présentent que des permanences. La suite (1) présente donc un nombre pair $\alpha+1$ de variations de plus que la suite (2).

43. Théorème de Fourier. Etant donnés l'équation $F(x)=0$, de degré n, à coefficients réels et deux nombres réels x_0, X ($x_0<X$), la suite

$$F(X)\ ,\ F'(X)\ ,\ \dots\ ,\ F^{(n)}(X) \qquad V \qquad (1)$$

ne peut avoir plus de variations que la suite

$$F(x_0),\ F'(x_0)\ ,\ \dots\ ,\ F^{(n)}(x_0) \qquad v \qquad (2)$$

et le nombre de racines réelles de l'équation $F(x)=0$ comprises entre x_0 et X est égal à la différence du nombre de variations de ces deux suites, diminué éventuellement d'un nombre pair.

Soit v le nombre de variations de la suite (2). Faisons varier x d'une manière continue de x_0 à X. Chaque fois que x traverse une racine de $F(x)=0$, la suite (2) perd autant de variations qu'il y a d'unités dans l'ordre de multiplicité de cette racine. Chaque fois que x traverse une racine d'une dérivée de $F(x)$ qui ne soit pas racine de $F(x)=0$, la suite (2) perd un nombre pair de variations.

Par suite, la suite (1) présente $V=v-r-2k$ variations, r étant le nombre de racines de $F(x)=0$ comprises entre x_0 et X, chacune étant comptée avec son ordre de multiplicité et k étant un entier positif ou nul. cd. si $a_i^{\alpha_1}$ et $a_i^{\alpha_2}$

On a donc bien $r = \alpha_1 + \alpha_2$

$$v - V = r + 2k.$$

44. Théorème de Descartes. Le nombre de racines positives d'une équation $F(x)=0$ à coefficients réels est égal au nombre de variations de cette équation, diminué éventuellement d'un nombre pair.

Appliquons le théorème de Fourier en prenant $x_0 = 0$ et pour X, un nombre positif suffisamment grand. Considérons les suites

$$F(0),\ F'(0),\ \ldots,\ F^{(n)}(0)\ , \qquad (1)$$
$$F(X),\ F'(X),\ \ldots,\ F^{(n)}(X)\ . \qquad (2)$$

On a coef $A_0 x^{n-p} + \dots +$

$$F^{(p)}(0) = p!\, A_{n-p}\ ,$$

donc le nombre de variations V de la suite (1) est égal au nombre de variations de l'équation $F(x)=0$.

D'autre part, le premier terme de $F^{(p)}$ est $n(n-1)\ldots(n-p+1)A_0x^{n-p}$. On peut prendre X suffisamment grand pour que $F^{(p)}(x)$ ait le signe de son premier terme, c'est-à-dire le signe de A_0. Pour X suffisamment grand, la suite (2) ne présentera donc que des permanences.

Si R_p est le nombre de racines positives de $F(x)=0$ et k un entier positif ou nul, on a donc

$$V = R_p + 2k.$$

(parce qu'il peut y avoir des couples de rac. imag.)

Corollaire. Le nombre de racines négatives d'une équation $F(x)=0$ à coefficients réels, est égal au nombre de variations de

<u>la transformée $F(-x)$ en $-x$ de $F(x)$, diminué éventuellement d'un nombre pair</u>

En effet, les racines négatives de $F(x) = 0$ sont les racines positives de $F(-x) = 0$.

<u>Remarque</u>. Si l'équation $F(x) = 0$ <u>ne possède que des racines réelles</u> et si V est le nombre de variations de $F(x)$, V' celui des variations de $F(-x)$, n le degré de l'équation, on a

$$V + V' = n.$$

C'est le cas qui se présente lorsque $F(x)$ est l'équation en S de de la théorie des quadriques.

<u>Exemple</u> $x^5 - 3x^4 + x^3 - 6x^2 - 7x + 1 = 0.$

4 variations

nbre rac. + : $r_p = 4 - 2k$.

Transf. en $(-x)$

$-x^5 - 3x^4 - x^3 - 6x^2 + 7x + 1 = 0$

$x^5 + 3x^4 + x^3 - \ldots$

1 variation.

nbre rac. − : $r_n = 1$.

Si seulement rac. réelles : 4 rac. +.

Chapitre V.

Résolution des équations numériques.

45. Préliminaires. Nous supposerons dans ce chapitre, que les coefficients de l'équation $F(x)=0$ sont commensurables. (ce sont des fractions)
On peut alors supposer qu'ils sont entiers, en multipliant les deux membres de $F(x)=0$ par un nombre convenable. Nous supposerons cette opération faite une fois pour toutes.

La résolution de l'équation $F(x)=0$, à coefficients entiers, comprend en général cinq phases.

a) Recherche de limites supérieure et inférieure des racines, c'est-à-dire de deux nombres entre lesquels sont comprises les racines;

b) Recherche des racines entières ;

c) Recherche des racines fractionnaires ;

d) Calcul avec une approximation donnée, des racines incommensurables.

e) Calcul des racines imaginaires.

46. Limites des racines. On appelle limite supérieure des racines d'une équation $F(x)=0$ une quantité L supérieure à toutes les racines de l'équation. Il en résulte que pour $x \geqq L$, $F(x)$ conserve toujours le même signe, celui de $A_0 L^n$.

La limite inférieure des racines est une quantité $-L'$ inférieure à toutes les racines de $F(x)=0$. Pour $x \leqq -L'$, la fonction $F(x)$ conserve toujours le même signe, celui de $A_0(-L')^n$.

La limite supérieure de la transformée $F(-x)$ de $F(x)$ en $-x$ est égale à L'

47. Méthode de Lagrange.

Soit

$$F(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n = 0$$

une équation à coefficients numériques entiers, où nous supposons $A_0 > 0$. Désignons par N la plus grande des valeurs absolues des coefficients négatifs de $F(x)$ et soit $A_p x^{n-p}$ le premier terme dont le coefficient est négatif. On a

$$F(x) > A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{p-1} x^{n-p+1} - N(x^{n-p} + \cdots + x + 1).$$

$A_0 x^n - N(x^{n-p} + \cdots + x + 1) > 0$

Pour toute valeur de x rendant positif le second membre de cette inégalité, $F(x)$ sera positif. Une telle valeur de x, supposée supérieure à l'unité, doit satisfaire à l'inégalité

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_{p-1} x^{n-p+1} > N \frac{x^{n-p+1} - 1}{x - 1}$$

Cette inégalité est certainement satisfaite par les valeurs de x telles que

$$A_0 x^n > N \frac{x^{n-p+1} - 1}{x - 1}$$

ou à

$$A_0 x^{p-1}(x-1) > N,$$

ou à fortiori, à

$$A_0 (x-1)^p \geq N$$

On aura donc

$$L \geq 1 + \sqrt[p]{\frac{N}{A_0}}.$$

Si l'on désigne par N la plus grande des valeurs absolues des coefficients des termes négatifs d'une équation numérique, par p la différence entre le degré de l'équation et celui du premier terme négatif, une limite supérieure des racines est donnée par

$$L \geq 1 + \sqrt[p]{\frac{N}{A_0}}.$$

48. Méthode de Newton. Considérons la suite
$$F(x),\ F'(x),\ \dots,\ F^{(n)}(x)$$
et soit L un nombre qui, substitué à x, rende toutes ces fonctions positives ($A_0 > 0$). Dans ces conditions, L est une limite supérieure des racines. En effet, si h est positif, la suite
$$F(L+h),\ F'(L+h),\ \dots,\ F^{(n)}(L+h)$$
ne peut posséder plus de variations que la suite
$$F(L);\ F'(L),\ \dots,\ F^{(n)}(L),$$
en vertu du théorème de Fourier. Or cette dernière suite ne possède que des permanences ; il en est donc de même de la première.
<u>Une limite supérieure des racines d'une équation $F(x)=0$ s'obtient en cherchant un nombre rendant positives la fonction $F(x)$ et toutes ses dérivées, le coefficient du terme de degré le plus élevé étant supposé positif.</u>

49. Méthode par groupement des termes. Cette méthode est basée sur l'observation suivante : Si $F(x)$, où $A_0 > 0$, ne possède qu'une variation, et si L et $F(L)$ sont positifs, $F(x)$ est positif pour toute valeur de x supérieure à L.
En mettant en évidence les coefficients négatifs, nous pourrons écrire
$$F(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_p x^{n-p} - A_{p+1} x^{n-p-1} - \dots - A_n,$$
c'est-à-dire
$$F(x) = x^{n-p}\left[A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \dots + A_p - \left(A_{p+1}\frac{1}{x} + \dots + A_n \frac{1}{x^{n-p}}\right)\right].$$
En désignant par h une quantité positive, on a
$$A_0(L+h)^p + A_1(L+h)^{p-1} + \dots + A_p > A_0 L^p + A_1 L^{p-1} + \dots + A_p,$$
$$A_{p+1}\frac{1}{L+h} + \dots + A_n \frac{1}{(L+h)^{n-p}} < A_{p+1}\frac{1}{L} + \dots + A_n \frac{1}{L^{n-p}},$$
ce qui démontre la propriété.
Cela étant, si nous considérons une équation quelconque, nous pourrons partager ses termes en plusieurs groupements, ordonnés

Ex. : $3x^6 - 5x^5 + 7x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 7x + 1 = 0$

① Lim. supér. des rac. $\boxed{\text{Lagrange}}$ 1er t. - : $p = 5$ $N = 9$ (le + grand coef.) $A_0 = 3$

$L \geq 1 + \sqrt[5]{3}$

Lim. inf. : $3x^6 + 5x^5 + 7x^4 - 8x^3 - 9x^2 + 7x + 1 = 0 \rightarrow p = 3$ $N = 8$ $L' \geq 1 + \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$

Donc rac. comprises entre $(-L', +L)$

suivant les puissances décroissantes de x,

② $\boxed{\text{Newton}}$

$f' = 18x^5 - 25x^4 + 28x^3 + 24x - 18x - 7$
$f'' = 90x^4 - 100x^3 + 84x^2 + 48x - 18$
$f''' = 360x^3 - 300x^2 + 168x + 48$
$= 90x^3 - 75x^2 + 42x + 12$
$f^{iv} = 360x^2 - 150x + 42$
$f^v = 360$
$x = 1$ convient

a) commençant tous par un terme positif ;

b) ne contenant qu'une seule variation.

Nous obtiendrons une limite supérieure des racines de l'équation en prenant une quantité positive limite supérieure commune des racines de chaque groupement.

③ $\boxed{\text{Groupement t.}}$ $3x^6 . 5x^5$ présente 1 seule variation
$(7x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 7x$ " "
Nbre qui rende + : je fais $x = 2$
2 est lim. sup. des rac.

50. Racines entières

- Supposons que l'équation

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n = 0,$$

à coefficients entiers, admette la racine entière a. Soit

$$B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \cdots + B_{n-1} = 0$$

le reste de la division. En effectuant la multiplication de ce quotient par $x - a$, on trouve

$$A_n = -a B_{n-1}, \quad A_{n-1} = B_{n-1} - a B_{n-2}, \quad \ldots, \quad A_1 = B_1 - a B_0, \quad B_0 = A_0.$$

On en conclut tout d'abord que les nombres $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ sont entiers. Ensuite, on voit que <u>a est un diviseur de A_n</u>.

Pratiquement, on calculera les limites supérieure L et inférieure $-L'$ des racines de l'équation et on essayera les diviseurs de A_n compris entre $-L'$ et L.

On peut également utiliser la remarque suivante :

Soient a une racine entière de $F(x) = 0$ et b un nombre qui ne soit pas racine de cette équation. On a

$$F(x) = (x - a) F_1(x), \qquad F(b) = (b - a) F_1(b),$$

donc $F(b)$ est divisible par $b - a$.

En particulier, si $F(1)$ n'est pas nul, $F(1)$ est divisible par $a - 1$; si $F(-1)$ n'est pas nul, $F(-1)$ est divisible par $a + 1$.

51. Racines fractionnaires

Observons qu'une équation dont le terme de plus haute puissance a pour coefficient l'unité, ne peut posséder de racines fractionnaires. En effet, si $A_0 = 1$ et si $\frac{a}{b}$ est une racine de $F(x) = 0$, on a

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = -\left[A_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \cdots + A_n\right] ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{a^n}{b} = -\left[A_1 a^{n-1} + A_2 a^{n-2} b + \cdots + A_n b^{n-1}\right] .$$

Le second membre est un entier, donc $b = 1$.

Cela étant, soit

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n = 0 \qquad (1)$$

une équation à coefficients entiers, dépourvue de racines entières. Prenons la transformée en kx de cette équation, l'entier k étant choisi de manière que dans la transformée x_n ait pour coefficient l'unité. Soit $A_0 \frac{x^n}{k^n} + A_1 \frac{x^{n-1}}{k^{n-1}} + \cdots = 0$.

$$x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots B_n = 0 \qquad (2)$$

Si a est une racine entière de l'équation (2), $\frac{a}{k}$ est une racine de l'équation (1). Inversement, si $\frac{a}{b}$ est une racine fractionnaire de l'équation (1), $k\frac{a}{b}$ est une racine de l'équation (2). Cette racine est nécessairement entière donc b divise k.

52. Racines incommensurables. Considérons une équation

$$F(x) \equiv A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n = 0 ,$$

à coefficients entiers, dépourvue de racines entières et fractionnaires. Soit x_1 une racine réelle, donc incommensurable, de cette équation. Nous supposerons que cette racine est simple.

Pour déterminer x_1 avec une certaine approximation, nous commencerons par séparer cette racine, c'est-à-dire par déterminer deux nombres a, b, $(a < b)$ tels que x_1 soit la seule racine de $F(x)$ dans l'intervalle (a, b). Dans ces conditions, $F(a)$ et $F(b)$ sont de signes contraires.

On arrivera à une première séparation des racines par tâtonnements.

Après avoir déterminé les limites inférieure $-L'$ et supérieure L des racines de $F(x)$, on substituera à x les valeurs entières comprises entre $-L'$ et L. Ensuite, on substituera à x des valeurs intermédiaires entre ces valeurs entières et ainsi de suite.

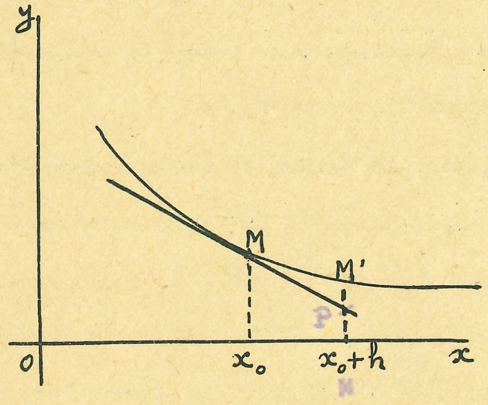
Il peut se faire que deux racines réelles x_1, x_2 de l'équation $F(x)=0$ soient trop voisines pour qu'elles puissent être aisément séparées. Dans ce cas, on peut remplacer $F(x)$ par sa transformée en $\frac{x}{k}$, k étant un entier convenablement choisi. Les racines de l'équation transformée correspondant à x_1, x_2 sont alors kx_1, kx_2 et sont plus aisément séparables.

53. Etude de la courbe $y=F(x)$

Considérons la courbe $y=F(x)$ en interprétant x, y comme coordonnées cartésiennes du plan. Soit $M(x_0, y_0)$ un point de cette courbe. La tangente à la courbe en ce point a pour équation

$$Y - y_0 = (X - x_0)\, F'(x_0).$$

Nous allons rechercher dans quelles conditions la courbe se trouve d'un même côté de la tangente dans le voisinage du point M. Dans ce but, nous considérerons le signe du segment PM', h étant une quantité positive ou négative.



Nous avons, par la formule de Taylor,

$$F(x_0+h) = F(x_0) + \frac{h}{1} F'(x_0) + \frac{h^2}{2!} F''(x_0) + h^3 . K ,$$

$\overline{MN} = F(x_0) + h F'(x_0) + \frac{h^2}{2!} [F$

qui nous donne l'ordonnée du point M'.

L'ordonnée du point P est donnée par

$$y_0 + h F'(x_0) = F(x_0) + h F'(x_0).$$

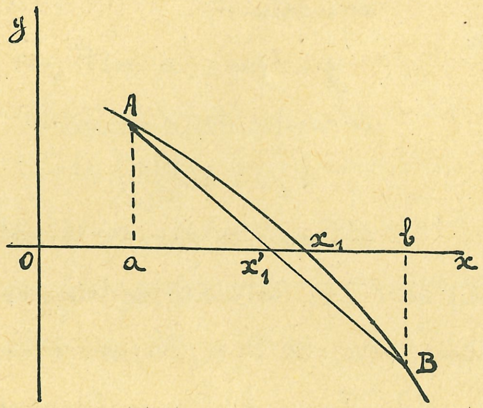
$MP = y_0 + h F'(x_0) = F(x_0) + h F'(x_0)$

Par conséquent, nous avons

$$PM' = \frac{h^2}{2} F''(x_0) + h^3 K.$$

Si $F''(x_0)$ n'est pas nul, pour h suffisamment petit, PM' aura le signe de $F''(x_0)$. Si $F''(x_0) > 0$, on dit que la courbe tourne sa concavité vers les y positifs au voisinage du point M. Si $F''(x_0) < 0$, on dit qu'elle tourne sa concavité vers les y négatifs.

54. Méthode par parties proportionnelles. Soit x_1 une racine incommensurable simple de l'équation $F(x) = 0$ et soient a, b deux nombres séparant cette racine. Nous supposerons $a < x_1 < b$. Désignons par A le point de coordonnées a, $F(a)$ et par B le point de coordonnées b, $F(b)$ de la courbe $y = F(x)$.



La droite AB a pour équation

$$y - F(a) = (x-a)\frac{F(a)-F(b)}{a-b}$$

et coupe l'axe Ox au point

$$x'_1 = \frac{bF(a) - aF(b)}{F(a) - F(b)}.$$

On a

$$\frac{x'_1 - a}{a-b} = \frac{F(a)}{F(a)-F(b)} < 1,$$

donc le point x'_1 se trouve entre a et b.

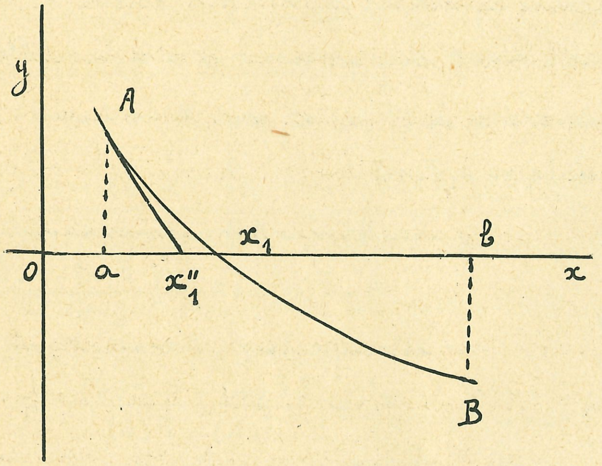
Le signe de $F(x'_1)$ indiquera si x'_1 se trouve entre a et x_1 ou entre x_1 et b.

Observons que si $F''(x)$ conserve un signe constant dans le segment (a, b) on peut déterminer la position du point x'_1 dans le segment (a, b).

Si $F''(x) > 0$ dans le segment (a, b) la courbe $y = F(x)$ tourne sa concavité vers les y positifs en tout point de l'arc AB. Le point x'_1 se trouvera dans le segment (x_1, b) si $F(a) > 0$, dans le segment (x_1, b) si $F(a) < 0$.

Si $F''(x) < 0$ dans le segment (a, b), la courbe $y = F(x)$ tourne sa concavité vers les y négatifs en tout point de l'arc AB. Le point x'_1 se trouvera dans le segment (a, x_1) si $F(a) > 0$ (cas de la figure), dans le segment (x_1, b) si $F(a) < 0$.

55. Méthode de Newton. - Soient a, b $(a < b)$ deux nombres séparant la racine x_1. Supposons en outre que, dans le segment (a, b), $F'(x)$ et $F''(x)$ conservent des signes constants.



Si $F''(a)$ a le même signe que $F(a)$, considérons la tangente en A à la courbe $y = F(x)$. Elle a pour équation

$$y - F(a) = (x - a) F'(a)$$

et coupe Ox au point

$y=0$ → $$x''_1 = a - \frac{F(a)}{F'(a)}.$$

Observons que si h est positif et suffisamment petit, $F(x_1 - h)$ et $F'(x_1 - h)$ sont de signes contraires. D'après les hypothèses faites, $F(a)$ et $F(x_1 - h)$ ont le même signe ; il en est de même de $F'(a)$ et de $F'(x_1 - h)$, donc $F(a)$ et $F'(a)$ sont de signes contraires. Il en résulte $x''_1 > a$.

D'autre part, si pour fixer les idées $F(a) > 0$, on a $F''(a) > 0$ et $F''(x) > 0$ dans le segment (a, b). La courbe tourne sa concavité vers les y positifs en tout point de l'arc AB et se trouve constamment au-dessus de la tangente en A. Il en résulte que x''_1 appartient au segment (a, x_1).

Si l'on avait $F(a) < 0$, $F''(a) < 0$, on arriverait à la même conclusion.

Si $F(a)$ et $F''(a)$ étaient de signes contraires, on prendrait la tangente en B à la courbe $y = F(x)$ et on aurait

$$x''_1 = b - \frac{F(b)}{F'(b)}$$

le point x''_1 étant compris entre x_1 et b.

56. __Remarque I__. On a supposé que $F'(x)$, $F''(x)$ conservaient le même signe dans le segment (a, b). La racine x_1 étant simple par hypothèse, $F'(x_1)$ n'est pas nul et il est toujours possible de choisir a, b de sorte que le segment (a, b) ne contienne aucune racine de $F'(x)$. Si $F''(x_1)$ n'est pas nul, on pourra de même trouver a, b de manière que le segment (a, b) ne contienne aucune racine de $F''(x)$.
Par contre, si $F''(x_1) = 0$, les hypothèses précédentes ne sont plus valables. Dans ce cas, x_1 sera racine du plus grand commun diviseur de $F(x)$, $F''(x)$. On sera conduit à appliquer les méthodes précédentes à la recherche des racines x_1 de ce plus grand commun diviseur.

57. __Remarque II__. La méthode par parties proportionnelles et la méthode de Newton fournissent deux nombres x'_1, x''_1 qui, lorsque $F''(x_1)$ n'est pas nul, séparent la racine x_1. Pour calculer celle-ci avec une approximation donnée, il suffira donc d'appliquer les méthodes un certain nombre de fois.

58. __Méthode de Lagrange__. La méthode de Lagrange consiste dans le développement d'une racine incommensurable x_1 de $F(x) = 0$ en fraction continue.

$a < x_1 < a+1$

Supposons que les entiers conséentifs a, $a+1$ séparent la racine x_1 de $F(x) = 0$. Posons

$$x_1 = a + \frac{1}{y} \ ;$$

on a

$$F\left(a + \frac{1}{y}\right) = F(a) + \frac{1}{y} F'(a) + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{1}{y^n} F^{(n)}(a) = 0.$$

Posons

$$F_1(y) = y^n F(a) + y^{n-1} F'(a) + \cdots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(a) = 0 .$$

A la racine x_1 de $F(x)$ correspond une racine y de $F_1(y)$. Cette racine y_1 est la seule racine de $F_1(y)$ qui soit supérieure à l'unité, car autrement, x_1 ne serait pas la seule racine de $F(x)$ comprise entre a et $a+1$. Soient b, $b+1$ deux entiers consécutifs séparant y_1.

$y > 1$

Posons

$$y_1 = b + \frac{1}{z} .$$

En substituant dans $F_1(y)$, on obtient une équation $F_2(z) = 0$ possédant une seule racine z_1 supérieure à l'unité.

L'application répétée de ce procédé donne le développement

$$x_1 = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c \dots}}$$

de x_1 en fraction continue.

On sait que l'erreur commise en prenant une réduite $\frac{P}{Q}$ pour valeur d'une fraction continue est moindre que $\frac{1}{Q^2}$. Si donc on veut obtenir x_1 avec une approximation donnée $\frac{1}{k}$, il suffira de prendre la réduite donnant

$$Q \leq \sqrt{k} .$$

59. __Racines imaginaires__. Supposons que l'équation $F(x) = 0$ admette la racine imaginaire $a + bi$ (et par conséquent la racine $a - bi$).

On a

$$F(a+bi) = F(a) + \frac{ib}{1} F'(a) + \frac{i^2 b^2}{2!} F''(a) + \frac{i^3 b^3}{3!} F'''(a) + \cdots = 0,$$

-1 $-i$

c'est-à-dire

$$F(a) - \frac{b^2}{2!} F''(a) + \frac{b^4}{4!} F^{(4)}(a) + \cdots$$
$$+ ib \left[F'(a) - \frac{b^2}{3!} F'''(a) + \frac{b^4}{5!} F^{(5)}(a) + \cdots \right] = 0 .$$

Par conséquent, pour que $a + bi$ soit racine de $F(x)$, on doit avoir puisque b n'est pas nul, parties entière et imag. $= 0$

$$F(a) - \frac{b^2}{2!} F''(a) + \frac{b^4}{4!} F^{(4)}(a) - \cdots = 0 ,$$
$$F'(a) - \frac{b^2}{3!} F'''(a) + \frac{b^4}{5!} F^{(5)}(a) - \cdots = 0 .$$

Nous sommes donc conduits à la résolution de deux équations à deux inconnues a, b.

Observons que l'on peut prendre comme inconnues a et $u = b^2$, en supposant $u > 0$, puisque b doit être réel.

Rac. incommensurables

$x^5 - x - 1 = 0$

1 variation → 1 rac. +.

Essayons la : $x = 0$ $f_0 = -1$

$x = 1$ $f_1 = -1$

$x = 2$ $f_2 = > 0$

Donc rac. positive comprise entre 1 et 2

$a = 1$ $b = 2$

$F'(x)$, $F''(x)$ pour calc. sa concavité.

On mène les tg. en a et b et on choisit la meilleure valeur.

---

* Rem. x_1 x_2 a $a+1$

On ampl. $x \to xk$.

on dilate les rac.

Il n'y en a plus qu'une entre a et $a+1$

Chapitre VI.

Elimination.

60. Définition. Considérons deux équations

$$F_1(x) = 0 \quad , \quad F_2(x) \qquad (1)$$

dont les premiers membres sont des polynomes entiers et rationnels en x, dont les coefficients dépendent d'une ou de plusieurs variables $y, z, \ldots$ Eliminer x entre ces équations, c'est :

1° Admettre qu'il existe au moins une solution $x, y, z, \ldots$ de ces équations.

2° Rechercher une équation

$$R(y, z, \ldots) = 0 \qquad (2)$$

ne contenant plus x, telle que parmi toutes les solutions $y, z, \ldots$ de cette équation, il en est qui, transportées dans les équations (1) donnent deux équations en x qui ont au moins une racine commune.

L'équation (2) s'appelle l'éliminante ou la résultante de l'élimination.

Si l'on peut résoudre une des équations (1) par rapport à x, il suffira de substituer à x la valeur trouvée dans l'autre équation pour obtenir la résultante. Cette méthode ne peut s'appliquer que dans un petit nombre de cas.

61. Méthode du plus grand commun diviseur. Opérons comme si nous recherchions le plus grand commun diviseur des polynomes F_1, F_2 et continuons les opérations jusqu'au moment où nous trouverons un reste indépendant de x. Soit par exemple

$$F_1 = F_2 Q_1 + R_1 \,,$$
$$F_2 = R_1 Q_2 + R_2 \,,$$
$$R_1 = R_2 Q_3 + R_3$$
$$R_2 = R_3 Q + R \,.$$

ne contient plus x

Une solution $x, y, z, \dots$ du système (1) satisfait à $R_1 = 0$ et réciproquement, une solution $x, y, z, \dots$ du système $F_2 = 0, R_1 = 0$ satisfait à $F_1 = 0$. Les systèmes d'équations $F_1 = 0, F_2 = 0$ et $F_2 = 0$, $R_1 = 0$ sont donc équivalents.
Il en est de même des systèmes d'équations $F_2 = 0$, $R_1 = 0$ et $R_1 = 0$, $R_2 = 0$; de ce dernier système et du système $R_2 = 0$, $R_3 = 0$.
Supposons en premier lieu que R dépende effectivement des variables $y, z, .$
Toute solution des équations $R_2 = 0, R_3 = 0$ vérifie $R = 0$; réciproquement, toute solution de $R_3 = 0$, $R = 0$ vérifie $R_2 = 0$ et par conséquent $R_1 = 0$, $F_2 = 0$ et $F_1 = 0$. $R = 0$ est la résultante.
Supposons maintenant que R soit une constante non nulle. $R \neq 0$
Il n'existe aucun système de valeurs de $x, y, z, \dots$ satisfaisant à $R_2 = 0, R_3 = 0$ et par conséquent, le système proposé est impossible.
Supposons enfin que R soit identiquement nul. Alors R_3 est le plus grand commun diviseur de F_1, F_2.

62 - Méthode dialytique de Sylvester.

Écrivons les équations (1) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} F_1 &\equiv x^m\varphi_0 + x^{m-1}\varphi_1 + \dots + x\varphi_{m-1} + \varphi_m = 0, \\ F_2 &\equiv x^n\psi_0 + x^{n-1}\psi_1 + \dots + x\psi_{n-1} + \psi_n = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Multiplions la première de ces équations successivement par $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ et la seconde par $1, x, x^2, \dots, x^{m-1}$. Nous obtenons ainsi $m+n$ équations.
Si les équations (1) ont une solution x commune, il en est de même de ces $m+n$ équations. Considérons ces dernières comme des équations linéaires dont les inconnues sont $x, x^2, \dots, x^{m+n-1}$.
Le déterminant des coefficients de ces inconnues est nul. Réciproquement, si ce déterminant est nul, les équations (1) ont une solution x commune.
Nous ferons la démonstration pour abréger l'écriture, dans le cas $m = 3$,

$$\begin{cases} x^3\varphi_0 + x^2\varphi_1 + x\varphi_2 + \varphi_3 = 0 \\ x^2\psi_0 + x\psi_1 + \psi_2 = 0 \end{cases}$$

$n = 2$. On a alors les équations

$$\begin{aligned} x^3\varphi_0 + x^2\varphi_1 + x\varphi_2 + \varphi_3 &= 0, \\ x^4\varphi_0 + x^3\varphi_1 + x^2\varphi_2 + x\varphi_3 &= 0, \\ x^2\psi_0 + x\psi_1 + \psi_2 &= 0, \\ x^3\psi_0 + x^2\psi_1 + x\psi_2 &= 0, \\ x^4\psi_0 + x^3\psi_1 + x^2\psi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Pour que ces équations soient compatibles, on doit avoir

$$\begin{vmatrix} 0 & \varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_0 & \psi_1 & \psi_2 \\ 0 & \psi_0 & \psi_1 & \psi_2 & 0 \\ \psi_0 & \psi_1 & \psi_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Pour démontrer que cette condition est suffisante, multiplions les colonnes du déterminant précédent respectivement par x^4, x^3, x^2, x et additionnons les à la dernière. Nous obtenons

$$\begin{vmatrix} 0 & \varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 & F_1 \\ \varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & xF_1 \\ 0 & 0 & \psi_0 & \psi_1 & F_2 \\ 0 & \psi_0 & \psi_1 & \psi_2 & xF_2 \\ \varphi_0 & \psi_1 & \psi_2 & 0 & x^2F_2 \end{vmatrix} = 0$$

En développant ce déterminant par rapport aux éléments de la dernière colonne, on obtient un résultat de la forme

$$(Mx + N)\,F_1 = (Px^2 + Qx + R)\,F_2 ,$$

M, N, P, Q, R étant indépendants de x.

L'équation $F_2 = 0$ étant du second degré, possède deux racines, qui annulent le premier membre. L'une de ces racines peut annuler le facteur $Mx + N$, l'autre annule F_1 et il y a donc au moins une racine commune à F_1, F_2.

<u>Remarque</u>. Dans le cas où m, n sont quelconques, on obtient, par

le raisonnement précédent une relation

$$\Phi F_1 = \Psi F_2 ,$$

où Φ est un polynome de degré $n-1$ en x et Ψ un polynome de degré $m-1$. Le raisonnement précédent est toujours valable.

63. Application à la résolution de systèmes d'équations

Considérons un système de n équations

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \ , \ F_2 = 0, \dots, F_n = 0$$

à n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$, dont les premiers membres sont des polynomes entiers et rationnels en $x_1, x_2, \dots, x_n$.

On commencera par éliminer une des inconnues, x_n par exemple, entre ces équations de manière à obtenir un système

$$G_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0 \ , \ G_2 = 0, \dots, G_{n-1} = 0$$

de $n-1$ équations à $n-1$ inconnues $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

Entre ces équations, on éliminera x_{n-1} et ainsi de suite, jusqu'au moment où l'on parviendra à une équation à une seule inconnue x_1 par exemple. On recherchera alors les valeurs des autres inconnues qui satisfont aux équations proposées lorsque l'on remplace x_1 par chacune des racines de l'équation précédente.

Par exemple, pour rechercher les racines imaginaires $a + bi$ de l'équation $F(x) = 0$, on devra résoudre les équations

$$P(a, u) = 0 \ , \ Q(a, u) = 0 \ , \ u = b^2$$

dont la forme a été donnée plus haut (n° 59). On éliminera par exemple a entre les deux premières équations et on obtiendra une équation $\varphi(u) = 0$ dont il suffira de considérer les racines positives. Si u_1 est une de ces racines, il restera à chercher les solutions a communes aux équations

$$P(a, u_1) = 0 \ , \ Q(a, u_1) = 0 .$$

$f_1(xyz)=0$, $f_2(xyz)=0$, $f_3(xyz)=0$; $\varphi_1(xy)=0$, $\varphi_2(xy)=0$; $\psi(x)=0$

$x_1 \dots$

rac. com

rac. com

Chapitre VII

Equations réciproques.

64. Définitions. Une équation algébrique entière $F(x)=0$ est dite réciproque si, lorsqu'elle admet la racine α, elle admet également la racine $\frac{1}{\alpha}$, inverse de la première.
Une équation réciproque est dite réduite lorsqu'elle est débarrassée des racines ± 1, nombres qui sont leurs propres inverses.

65. Théorème I. Pour qu'une équation soit réciproque, il faut et il suffit que les termes également distants des extrêmes soient égaux et de même signe, ou égaux et de signes contraires.
Soit

$$F(x) \equiv A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0 \qquad (1)$$

une équation réciproque. Elle doit coïncider avec sa transformée en $\frac{1}{x}$, c'est-à-dire avec l'équation

$$x^m F\left(\frac{1}{x}\right) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0 = 0 \qquad (2)$$

On doit donc avoir

$$\frac{A_0}{A_m} = \frac{A_1}{A_{m-1}} = \dots = \frac{A_{m-1}}{A_1} = \frac{A_m}{A_0}.$$

Soit k la valeur commune de ces rapports. On a

$$A_0 = k A_m, \quad A_m = k A_0,$$

d'où $k = \pm 1$ et

$$A_m = \pm A_0, \quad A_{m-1} \pm A_1, \quad \dots, \quad A_{m-p} = \pm A_p.$$

Réciproquement, si ces conditions sont vérifiées, les équations (1) et (2) ont les mêmes racines et l'équation (1) est donc réciproque.

66. Théorème II. Une équation réciproque réduite est de degré

<u>pair, ses coefficients également distants des extrêmes sont égaux et de même signe.</u>

L'équation réciproque réduite $F(x) = 0$ admet un nombre pair de racines et est par conséquent de degré pair $2n$. Soit (car chaque fois qu'il y a 1 rac $x_1 \to \frac{1}{x_1}$)

$$F(x) = A_0 x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + \cdots + A_{2n-1} x + A_{2n} = 0$$

cette équation. On a

$$\frac{A_0}{A_{2n}} = \frac{A_1}{A_{2n-1}} = \cdots = \frac{A_p}{A_{2n-p}} = k = \pm 1.$$

On en déduit

$$F(x) = k x^{2n} F\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pour $x = 1$, on a

$$F(1) = k F(1)$$

et puisque $F(1)$ n'est pas nul par hypothèse, $k = 1$.

67. Résolution des équations réciproques réduites

Soit l'équation réciproque réduite

$$F(x) = A_0 x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + \cdots + A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0 = 0. \qquad (1)$$

En divisant les deux membres de cette équation par x^n, on a

$$A_0\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + A_1\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \cdots + A_{n-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + A_n = 0. \qquad (2)$$

Posons

$$y = x + \frac{1}{x}, \quad y_2 = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad \ldots, \quad y_n = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

On a

$\left(x^p + \frac{1}{x^p}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) =$

$$y_p\, y = x^{p+1} + \frac{1}{x^{p+1}} + x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}} = y_{p+1} + y_{p-1},$$

d'où

$$y_{p+1} = y_p \cdot y - y_{p-1}.$$

Cette formule permet de calculer $y_2, y_3, \ldots, y_n$ de proche en proche et de les exprimer en fonction de y. On a

$$y_2 = y^2 - 2, \quad y_3 = y^3 - 3y, \ldots$$

Si y_p est de degré p en y, y_{p+1} est de degré $p+1$ en y ; or y_2 est de degré deux en y, donc y_p est de degré p en y.

En substituant dans l'équation (2) ou

$$A_0 y_n + A_1 y_{n-1} + \dots + A_n = 0$$

les valeurs de y_n, y_{n-1}, ..., en fonction de y, on obtient une équation $\Phi(y) = 0$ de degré n. Si a est une racine de cette équation, les racines de l'équation

$$x + \frac{1}{x} = a \quad \text{ou} \quad x^2 - ax + 1 = 0$$

satisfont à l'équation proposée (1).

<u>La résolution d'une équation réciproque réduite de degré $2n$ revient à la résolution d'une équation de degré n et de n équations du second degré.</u>

Chapitre VIII.

Equations binomes.

Ex

68. Définition. On appelle équation binome une équation ne contenant que deux termes

$$A_0 x^p + A_1 x^q = 0.$$

$A_0 x^{p-q} - B = 0$

Supposons, pour fixer les idées, $p > q$. Débarrassée de la racine $x = 0$, l'équation précédente peut s'écrire sous la forme

$$x^n = A. \qquad (1)$$

Dans ce qui va suivre, nous supposerons A réel ou imaginaire.

69. Les racines d'une équation binome sont toujours distinctes

En effet, si l'équation (1) avait une racine multiple, celle-ci annulerait la dérivée $n x^{n-1}$ et serait nulle, ce qui est impossible, A étant supposé différent de zéro.

70. Résolution trigonométrique de l'équation binome. Posons

$$A = r(\cos\alpha + i \sin\alpha), \quad (0 \leq \alpha < 2\pi),$$

et

$$x = \rho(\cos\omega + i \sin\omega).$$

En utilisant la formule de Moivre, on a

$$x^n = \rho^n(\cos n\omega + i \sin n\omega)$$

et l'équation devient

$$\rho^n(\cos n\omega + i \sin n\omega) = r(\cos\alpha + i \sin\alpha).$$

On a donc

$$\rho^n = r, \qquad n\omega = \alpha + 2k\pi,$$

k étant un entier. Par suite

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \omega = \frac{\alpha + 2k\pi}{n},$$

où ρ est la racine arithmétique d'indice n de r.

La quantité

$$x = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right] \qquad (1)$$

est donc la racine de l'équation proposée.

Observons que :

1°) Pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$, les n valeurs obtenues pour ω sont comprises entre 0 et 2π. De

$$0 \leq \alpha < 2\pi, \qquad 0 \leq k \leq n-1,$$

on déduit en effet

$$0 \leq \alpha + 2k\pi < 2\pi + 2(n-1)\pi \text{ ou } 2n\pi,$$

d'où

$$0 \leq \frac{\alpha+2k\pi}{n} < 2\pi.$$

2°) Pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$, les n valeurs obtenues pour ω sont distinctes.

3°) Pour toute autre valeur de k, on retrouve une valeur de x déjà obtenue pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Ex. $x^n = 1$ $\quad 1 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $\quad r = 1 \quad \alpha = 0$

$x^n = -1$ $\quad -1 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $\quad r = 1 \quad \alpha = \pi$

Par conséquent :

<u>Les n racines de l'équation</u>

$$x^n = A = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

<u>sont</u>

$$x = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

71. <u>Remarques</u>. Si A est réel et positif, on a $r = A$, $\alpha = 0$, d'où

$$x = \sqrt[n]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

En particulier, si $A = 1$, on a

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Si A est réel et négatif, on a $r = -A$, $\alpha = \pi$. En particulier, si $A = -1$, on a

$$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

72 - Si a est racine de l'équation $x^n = A$, toutes les racines de cette équation s'obtiennent en multipliant a par les n racines de $x^n = 1$.

En effet, si nous prenons la transformée en ax de l'équation proposée, nous obtenons

$$a^n x^n = A ,$$

c'est-à-dire $x^n = 1$, d'où la propriété énoncée.

73 - Les équations $x^n = \pm 1$ considérées comme équations réciproques. Les équations $x^n = \pm 1$ peuvent être considérées comme équations réciproques. En mettant en évidence la parité de n, on est conduit à considérer quatre cas :

(I) $x^{2p+1} + 1 = 0$,

(II) $x^{2p} + 1 = 0$,

(III) $x^{2p+1} - 1 = 0$,

(IV) $x^{2p} - 1 = 0$.

L'équation (I) admet la racine $x = -1$ et conduit à l'équation réciproque réduite

$$x^{2p} - x^{2p-1} + x^{2p-2} - \dots + 1 = 0 .$$

L'équation réciproque II est réduite.

L'équation III admet la racine $x = 1$ et conduit à l'équation réciproque réduite

$$x^{2p} + x^{2p-1} + \dots + x + 1 = 0 .$$

L'équation IV se ramène à deux équations

$$x^p - 1 = 0 \quad , \quad x^p + 1 = 0 ;$$

on est donc ramené à deux équations binomes que l'on examinera séparément.

74 - Racines de l'unité. On appelle racine d'indice n ou d'ordre n de l'unité les racines de l'équation $x^n = 1$. Elles sont données par la

Ex. I $x^n = 1$ $n=3$ $x^3=1$ $x = \cos\frac{2k\pi}{3} + \sin\frac{2k\pi}{3}$ $(k=0,1,2)$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$ $\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ → $x=1$, $x = \cos\frac{2\pi}{3} +$, $x = \cos\frac{4\pi}{3} +$

formule

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Pour $k = 0$, on a une racine réelle $x = 1$.

Si n est impair, les $n-1$ autres racines sont imaginaires et les racines obtenues en donnant à k les valeurs p, $n-p$ sont imaginaires conjuguées, car on a

$$\cos\frac{2p\pi}{n} = \cos\frac{2(n-p)\pi}{n}, \qquad \sin\frac{2p\pi}{n} = -\sin\frac{2(n-p)\pi}{n}.$$

Si n est pair, il y a une seconde racine réelle $x = -1$ donnée par $k = \frac{n}{2}$. Les $n-2$ autres racines sont imaginaires. Si p est compris entre 0 et $\frac{n}{2}$ (ces valeurs exclues), les racines données par $k = p$, $k = n-p$ sont imaginaires conjuguées.

75. Théorème I. Si a est une racine d'ordre n de l'unité, il en est de même de toute puissance de a.

On a en effet

$$(a^p)^n = (a^n)^p = 1.$$

Conséquence. Si a est une racine imaginaire de l'unité, la suite

$$a, a^2, a^3, \ldots, a^{n-1}, a^n, a^{n+1}, \ldots,$$

est périodique et possède en plus n termes différents.

76 Théorème II. Une racine commune aux équations

$$x^m = 1, \qquad x^n = 1$$

est racine de l'équation

$$x^p = 1,$$

p étant le plus grand commun diviseur de m, n.

Supposons $m > n$ et soit

$$m = nq + r, \qquad (r < n).$$

Si a est une racine commune aux équations données, on a

$$a^m = a^{nq+r} = a^{nq}.a^r = a^r = 1.$$

III $x^4 + 4a^4 = 0$

$4a^4 = -r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$r = 4a^4$

$\alpha = \pi$

$x = \sqrt[4]{4}\cdot a\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$ $k = (0,1,2,3)$

$k=0 \to x = a\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a(1+i)$

$k=1 \Rightarrow x = a\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -a(1+i)$

Les 2 autres rac. : conj : $\begin{cases} a(1-i) \\ -a(1-i) \end{cases}$

II $x^5=1$ $x=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}$ $(k=1,2,3,4)$

ou $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$

Continuons les opérations conduisant au plus grand commun diviseur de m, n et supposons que l'on ait

$$n = r q_1 + r_1 \,, \quad r = r_1 q_2 + r_2 \,, \quad \dots , \quad r_{k-1} = r_k q_{k-1} + p \,, \quad r_k = p \cdot q_{k+2} \,.$$

L'application répétée du raisonnement précédent donne

$$a^{r_1} = 1 \,, \; a^{r_2} = 1 \,, \; \dots , \; a^{r_k} = 1 \,, \; a^{p} = 1 \,.$$

77 - Théorème III. *Si n est un nombre premier supérieur à l'unité et a une racine imaginaire d'ordre n de l'unité, les n racines d'ordre n de l'unité sont*

$$a \,, \; a^2 \,, \; \dots , \; a^{n-1} \,, \; a^n = 1 \,. \qquad (1)$$

En effet, chaque terme de la suite (1) est racine de $x^n = 1$.
Si deux de ces termes a^h, a^k étaient égaux, a serait racine de $x^{h-k} = 1$, donc, si p est le plus grand commun diviseur de n et de $h-k$, de $x^p = 1$.
Or, n étant premier, $p = 1$ et on aurait $a = 1$, contrairement à l'hypothèse.
Les nombres de la suite (1) sont donc tous différents, ce qui démontre le théorème.

78 - Racines primitives de l'unité. On appelle racine primitive d'ordre n de l'unité une racine d'ordre n de l'unité dont les n premières puissances reproduisent toutes les racines d'ordre n de l'unité.

Si n est premier, toute racine d'ordre n de l'unité est primitive d'après le théorème précédent.

Si n n'est pas premier, il existe des racines d'ordre n de l'unité qui ne sont pas primitives.

Les racines cubiques primitives de l'unité sont

$$\varepsilon_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \,, \quad \varepsilon_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon_1^2 \,.$$

Parmi les racines imaginaires d'ordre six de l'unité, les racines ε_1

et ε_2 ne sont pas primitives. Les racines de $x^3 + 1 = 1$

$$\eta_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \,, \quad \eta_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

sont des racines primitives de $x^6 = 1$. On a en effet

$$\eta_1^2 = \varepsilon_1 \,, \quad \eta_1^3 = -1 \,; \quad \eta_1^4 = \varepsilon_2 \,, \quad \eta_1^5 = \eta_2 \,, \quad \eta_1^6 = 1 \,;$$

$$\eta_2^2 = \varepsilon_2 \,, \quad \eta_2^3 = -1 \,, \quad \eta_2^4 = \varepsilon_1 \,, \quad \eta_2^5 = \eta_1 \,, \quad \eta_2^6 = 1 \,.$$

Chapitre IX. pas pour examen.

Décomposition des fractions rationnelles.

79. Position du problème. Soit

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

une fraction rationnelle proprement dite et irréductible. Les fonctions $\varphi(x)$, $f(x)$ sont donc des polynomes entiers et rationnels, sans racine commune, le degré de $\varphi(x)$ étant inférieur à celui de $f(x)$. Nous supposerons que les coefficients de $\varphi(x)$, $f(x)$ sont des nombres réels.

On appelle fraction rationnelle simple une fraction de l'une des formes

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n},$$

les nombres A, B, C, a, p, q étant réels et les racines du trinôme x^2+px+q étant imaginaires. (conj.)

Nous nous proposons de montrer que la fraction rationnelle donnée se décompose, et d'une seule manière, en une somme de fractions rationnelles simples

80. Théorème I. Si a est une racine d'ordre m de $f(x)=0$, on a

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{x-a} + \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)},$$

où

$$f(x) = (x-a)^m f_1(x),$$

la fraction rationnelle

$$\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$$

étant irréductible et proprement dite.

Nous avons identiquement

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{\varphi(x) - A_1 f_1(x)}{f(x)}.$$

Disposons de la constante A_1 de manière que le numérateur de la

dernière fraction soit divisible par $x-a$; il suffit de prendre
$$\varphi(a) - A_1 f_1(a) = 0 .$$
Posons
$$\varphi(x) - A_1 f_1(x) = (x-a)\,\varphi_1(x)$$
et on peut alors écrire
$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{m-1} f_1(x)}$$
Répétons, sur la seconde fraction du second membre, la même opération ; nous pouvons écrire
$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{m-1} f_1(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{m-2} f_1(x)} ,$$
où
$$\varphi_1(a) - A_2 f_1(a) = 0 ,$$
$$\varphi_1(x) - A_2 f_1(x) = (x-a)\,\varphi_2(x) .$$
En continuant de même, on arrivera finalement à
$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{x-a} + \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} . \qquad (1)$$
Le degré de $\varphi_1(x)$ ne peut être supérieur ou égal à celui de $f_1(x)$, car si l'on avait
$$\varphi_1(x) = Q(x) f_1(x) + \psi(x) ,$$
on aurait
$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = Q(x) + \frac{A_1}{(x-a)^m} + \dots + \frac{A_m}{x-a} + \frac{\psi(x)}{f_1(x)}$$
et contrairement à l'hypothèse, $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ ne serait pas une fraction proprement dite.

La fraction $\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$ est irréductible, car si $\varphi_1(x)$ et $f_1(x)$ ont un facteur commun, en écrivant la formule (1) sous la forme
$$\varphi(x) = \left[A_1 + A_2(x-a) + \dots + A_m(x-a)^{m-1}\right] f_1(x) + (x-a)^m \varphi_1(x) ,$$
on voit que ce facteur diviserait également $\varphi(x)$. Les polynomes $\varphi(x)$ et $f(x) = (x-a)^m f_1(x)$ auraient donc un facteur commun, contrairement à l'hypothèse.

Remarque - Il peut se faire que certains des nombres $A_2, A_3, \dots, A_m$ soient nuls. Par exemple, il peut arriver qu'en posant $A_1 = \frac{\varphi(x)}{f_1(x)}$,

$\varphi(x) - A_1 f_1(x)$ soit divisible par $(x-a)^2$. On écrira alors

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^{m-2} f_1(x)}$$

On aura alors $A_2 = 0$.

Par contre, A_1 est toujours différent de zéro car autrement, $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ auraient le facteur commun $x-a$.

81. **Théorème II**. <u>La décomposition précédente n'est possible que d'une seule manière.</u>

Supposons en effet que l'on puisse avoir

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A'_1}{(x-a)^m} + \frac{A'_2}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A'_m}{x-a} + \frac{\varphi'_1(x)}{f_1(x)} .$$

En comparant à la formule (1), on a

$$A_1 + A_2(x-a) + \dots + A_m(x-a)^{m-1} + (x-a)^m \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} \equiv$$
$$\equiv A'_1 + A'_2(x-a) + \dots + A'_m(x-a)^{m-1} + (x-a)^m \frac{\varphi'_1(x)}{f_1(x)} .$$

$f_1(x)$ n'étant pas nul, $\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$, $\frac{\varphi'_1(x)}{f_1(x)}$ sont finis et pour $x=a$, on a $A'_1 = A_1$. Portons ces valeurs dans la relation précédente et divisons les deux membres par $x-a$. Pour $x=a$, on a $A'_2 = A_2$. Et ainsi de suite. On trouve finalement

$$\varphi'_1(x) \equiv \varphi_1(x) .$$

82. **Théorème III**. <u>Si $a+bi$ est une racine imaginaire de multiplicité m de $f(x)$ et si $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ est une fraction rationnelle proprement dite et irréductible, on a</u>

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{[(x-a)^2+b^2]^m} + \frac{A_2 x + B_2}{[(x-a)^2+b^2]^{m-1}} + \dots + \frac{A_m x + B_m}{(x-a)^2+b^2} + \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} , \quad (2)$$

où

$$f(x) = [(x-a)^2+b^2]^m f_1(x)$$

<u>et où $\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$ est une fraction rationnelle proprement dite et irréductible.</u>

Si $a+bi$ est racine d'ordre m de $f(x)$ il en est de même de $a-bi$.

Cela étant, on peut écrire identiquement

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{[(x-a)^2+b^2]^m} + \frac{\varphi(x) - (A_1 x + B_1) f_1(x)}{f(x)}$$

Nous pouvons disposer de A_1, B_1 de manière que le numérateur de la dernière fraction soit divisible par $(x-a)^2 + b^2$. Il suffit en effet qu'il soit divisible par $a + bi$, c'est-à-dire que l'on ait

$$\varphi(a+bi) - [A_1(a+bi) + B_1] f_1(a+bi) = 0.$$

On a

$$\frac{\varphi(a+bi)}{f_1(a+bi)} = M + Ni$$

et comme $\varphi(a+bi)$, $f_1(a+bi)$ ne peuvent être nuls, M et N ne peuvent être tous deux nuls. On doit donc avoir (autrement la fraction donnée ne serait pas irréductible)

$$A_1(a+bi) + B_1 = M + Ni,$$

c'est-à-dire

$$A_1 a + B_1 = M, \quad A_1 b = N.$$

Cela étant, posons

$$\varphi(x) - (A_1 x + B_1) f_1(x) = [(x-a)^2 + b^2]\, \psi_1(x).$$

Nous avons

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{[(x-a)^2+b^2]^m} + \frac{\psi_1(x)}{[(x-a)^2+b^2]^{m-1} f_1(x)}$$

En recommençant les opérations précédentes sur la dernière fraction du second membre, et ainsi de suite, on parviendra à la relation (2). On démontrera ensuite, comme dans le cas des racines réelles, que $\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$ est une fraction proprement dite et irreductible.

<u>Remarque</u>. Certains des nombres $A_2, B_2, \ldots, A_m, B_m$ peuvent être nuls, mais l'un au moins des nombres A_1, B_1 au moins n'est pas nul. De

$$A_1 a + B_1 = M, \quad A_1 b = N,$$

on tire en effet, puisque b n'est pas nul,

$$A_1 = \frac{N}{b}, \quad B_1 = M - \frac{a}{b} N.$$

Comme M et N ne peuvent être simultanément nuls, l'un au moins des nombres A_1, B_1 n'est pas nul.

83. Théorème. *La décomposition précédente n'est possible que d'une seule manière.*

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème correspondant relatif aux variables réelles.

84. Décomposition d'une fraction rationnelle. Soit

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

une fraction rationnelle proprement dite et irréductible. On peut toujours supposer que le coefficient de la plus haute puissance de x dans $f(x)$ est l'unité. Soit alors

$$f(x) \equiv (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\dots(x-l)^{\lambda}[(x-m)^2+n^2]^{\mu}\dots[(x-r)^2+s^2]^{\rho}.$$

On peut décomposer la fraction donnée en une somme de fractions simples

$$\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}}, \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}, \dots, \frac{A_{\alpha}}{x-a}$$

et d'une fraction proprement dite et irréductible. Le dénominateur de cette dernière est

$$(x-b)^{\beta}\dots(x-l)^{\lambda}[(x-m)^2+n^2]^{\mu}\dots[(x-r)^2+s^2]^{\rho}.$$

Appliquons à cette nouvelle fraction le théorème I et ainsi de suite jusqu'au moment où les racines réelles de $f(x)$ seront épuisées. Appliquons ensuite le théorème III et ainsi de suite. On obtiendra finalement

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}} &+ \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha}}{x-a} \\ &+ \frac{B_1}{(x-b)^{\beta}} + \dots + \frac{B_{\beta}}{x-b} + \dots \\ &+ \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda}} + \dots + \frac{L_{\lambda}}{x-l} \\ &+ \frac{M_1x+N_1}{[(x-m)^2+n^2]^{\mu}} + \dots + \frac{M_{\mu}x+N_{\mu}}{(x-m)^2+n^2} + \dots \\ &+ \frac{R_1x+S_1}{[(x-r)^2+s^2]^{\rho}} + \dots + \frac{R_{\rho}x+S_{\rho}}{(x-r)^2+s^2}.\end{aligned}$$

On obtient ainsi la formule générale de décomposition des fractions rationnelles.

85. Calcul des coefficients

On pourrait calculer les coefficients A, B, ..., L, M, N, ..., R, S par les procédés utilisés dans la démonstration des théorèmes I et III. En pratique, il est plus simple d'employer les méthodes suivantes

Posons

$$\mathcal{A}(x) = \frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}}, \quad \mathcal{B}(x) = \frac{f(x)}{(x-b)^{\beta}}, \quad \dots, \quad \mathcal{L}(x) = \frac{f(x)}{(x-l)^{\lambda}},$$

$$\mathcal{M}(x) = \frac{f(x)}{[(x-m)^2+n^2]^{\mu}}, \quad \dots, \quad \mathcal{R}(x = \frac{f(x)}{[(x-r)^2+s^2]^{\rho}}.$$

En multipliant par $f(x)$ les deux membres de la formule générale de décomposition, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = {} & [A_1 + A_2(x-a) + \dots + A_{\alpha}(x-a)^{\alpha-1}]\,\mathcal{A}(x) + \\
& [B_1 + B_2(x-b) + \dots + B_{\beta}(x-b)^{\beta-1}]\,\mathcal{B}(x + \\
& \dots\dots\dots \\
& + [L_1 + L_2(x-l) + \dots + L_{\lambda}(x-l)^{\lambda-1}]\,\mathcal{L}(x) + \\
& + [M_1x + N_1 + (M_2x+N_2)\{(x-m)^2+n^2\} + \dots + (M_{\mu}x - N_{\mu})\{(x-m)^2+n^2\}^{\mu-1}]\,\mathcal{M}(x) \\
& + \dots\dots \\
& + [R_{\rho}x + S_{\rho} + \dots + (R_{\rho}x+S_{\rho})\{(x-r)^2+s^2\}^{\rho-1}]\,\mathcal{R}(x) = 0.
\end{aligned}$$

On peut identifier les deux membres de l'équation (1) ce qui fournira des équations en A, B, ... L, M, N, ..., R, S certainement compatibles en vertu des théorèmes I et III.

On peut également opérer de la manière suivante :

Dans la relation (1) posons $x = a$. Nous avons

$$\varphi(a) = A_1\,\mathcal{A}(a),$$

ce qui donne A_1, puisque $\varphi(a)$ et $\mathcal{A}(a)$ ne sont pas nuls.

En posant $x = b, \dots, x = l$, nous avons de même

$$\varphi(b) = B_1\,\mathcal{B}(b), \quad \dots, \quad \varphi(l) = L_1\mathcal{L}(l).$$

Posons ensuite $x = m + ni$. Nous avons

$$\varphi(m+ni) = (M_1 i + N_1)\,\mathcal{M}(m+ni).$$

En égalant les parties réelles et imaginaires des deux membres, on obtient deux relations donnant M_1 et N_1.

En posant $x = r + si$, on aura de même R_1 et S_1.

Derivons totalement la relation (1) par rapport à x, puis faisons successivement $x = a$, $x = b$, ..., $x = l$, $x = m+ni$, ..., $x = r + si$, Nous obtiendrons des relations donnant A_2, B_2, ..., L_2, M_2, N_2, ..., R_2, S_2. Nous aurons par exemple

$$\varphi'(a) = A_2\,\mathcal{A}(a) + A_1\,\mathcal{A}'(a),$$

car on suppose $\alpha \geq 2$ et $\mathcal{B}'(a)$, ..., $\mathcal{L}'(a)$, $\mathcal{M}'(a)$ ..., $\mathcal{R}'(a)$ sont par conséquent nuls.

On dérivera éventuellement une seconde fois la relation (1) par rapport à x, et ainsi de suite

On fait partir l'et. en x^2

$x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0$

$x + h$

Il faut $3h + A_1 = 0$

Chapitre X.

L'équation du troisième degré

Formule de Cardan

86. Méthode de Hudde. Considérons une équation du troisième degré, à coefficients réels, dont on a fait disparaître le second terme. Écrivons la sous la forme

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (1)$$

Posons $x = y + z$, d'où en élevant au cube,

$$x^3 - 3xyz - (y^3 + z^3) = 0 \qquad (2)$$

Identifions les équations (1) et (2). On a

$$-3yz = p \,, \quad y^3 + z^3 = -q \qquad (3)$$

Par conséquent

$$y^3 z^3 = -\frac{p^3}{27} \,, \quad y^3 + z^3 = -q .$$

Il en résulte que y^3 et z^3 sont racines de l'équation du second degré

$$U^2 + qU - \frac{p^3}{27} = 0 , \qquad (4)$$

appelée résolvante de l'équation (1).

On en déduit

$$U = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \;;$$

on peut donc poser

$$y^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \,, \qquad z^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} .$$

On a alors

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \,, \qquad z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} . \qquad (5)$$

On a finalement

$$\boxed{x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} .} \qquad (6)$$

Cette formule est due à Tartaglia et est connue sous le nom de formule de Cardan.

La formule (6) doit donner trois valeurs de x, puisque l'équation (1) est du troisième degré. Désignons par ε une racine cubique primitive de l'unité, par A une des trois valeurs de y et par B une des trois valeurs de z données par (5). Les trois valeurs de y, z données par (5) sont alors A, εA, $\varepsilon^2 A$ et B, εB, $\varepsilon^2 B$.

Le produit yz doit être réel d'après la première des formules (3) et les trois valeurs de x racines de l'équation (1) sont donc obtenues en associant les valeurs de y, z dont le produit est réel.

Supposons pour fixer les idées, que le produit AB soit réel. Les trois racines de l'équation (1) sont

rac primit de l'u: $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

$$x_1 = A + B,$$
$$x_2 = \varepsilon A + \varepsilon^2 B = -\frac{1}{2}(A+B) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(A-B),$$
$$x_3 = \varepsilon^2 A + \varepsilon B = -\frac{1}{2}(A+B) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(A-B),$$

en posant $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$.

87. Discussion de la formule de Cardan. Nous distinguerons trois cas, suivant que $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ est positif, nul ou négatif.

1°) $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$. Les valeurs de y^3 et z^3 sont réelles. Désignons par A, B les racines cubiques arithmétiques, donc réelles, de y^3, z^3. On a

$$x_1 = A + B, \quad x_2 = -\frac{1}{2}(A+B) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(A-B), \quad x_3 = -\frac{1}{2}(A+B) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(A-B).$$

Les quantités A et B étant certainement différentes, l'équation (1) possède une racine réelle x_1 et deux racines imaginaires conjuguées.

2°) $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$. Dans ce cas, y^3 et z^3 sont réels et tous deux égaux à $-\frac{q}{2}$. Si nous désignons par A la racine cubique arithmétique de $-\frac{q}{2}$, les trois racines de l'équation (1) sont

$$x_1 = 2A \quad , x_2 = x_3 = -A.$$

Les trois racines sont réelles et deux sont égales.

3°) $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$. Les valeurs de y^3 et z^3 sont imaginaires; cependant, les trois racines de l'équation (1) sont réelles.

Posons

$$-\frac{q}{2} = M \;, \; +\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)} = N,$$

d'où

$$y^3 = M + Ni \;, \quad z^3 = M - Ni \;.$$

Soit $y = A = a + bi$ une racine de $y^3 = M + Ni$. Nous prendrons pour B la racine de $z^3 = M - Ni$ telle que AB soit réelle, c'est-à-dire $B = a - bi$.

Les trois racines de l'équation (1) sont alors

$$x_1 = 2a \;, \quad x_2 = -(a + b\sqrt{3}) \;, \quad x_3 = -(a - b\sqrt{3})$$

et sont donc toutes réelles.

L'algèbre est impuissante à débarrasser les racines du symbole de l'imaginaire; pour cette raison, le troisième cas est appelé <u>cas irréductible</u>.

88 - <u>Remarque</u>. Dans l'emploi des formules de Cardan, il peut se faire qu'une racine commensurable soit donnée sous forme d'une combinaison de radicaux dont on peut ne pas apercevoir immédiatement la réduction

Ainsi, l'équation

$$x^3 - x - 6 = 0$$

admet la racine $x = 2$.

On a

$$p = -1, \; q = -6 \;, \; \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 9 - \frac{1}{27} > 0$$

et $x = 2$ est la seule racine réelle. Elle est donnée par

$$x = \sqrt[3]{3 + \frac{11}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}} \; + \; \sqrt[3]{3 - \frac{11}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}} \;.$$

On retrouve la valeur $x = 2$ en observant que

$$3 + \frac{11}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3, \quad 3 - \frac{11}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 \;,$$

d'où

$$x = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} + 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} = 2 .$$

89 - Résolution trigonométrique dans le cas irréductible.

Supposons

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$$

et posons $(0 \leq \alpha < 2\pi)$

$$y^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

d'où

$$z^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = r\,(\cos\alpha - i\sin\alpha) .$$

On a

$$y = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2h\pi}{3} + i\sin\frac{\alpha + 2h\pi}{3}\right), \quad (h = 0, 1, 2)$$

$$z = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{3} - i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{3}\right), \quad (k = 0, 1, 2)$$

Le produit yz devant être réel, nous prendrons pour y et z des quantités imaginaires conjuguées, c'est-à-dire $h = k$. Les trois racines de l'équation (1) seront

$$x_1 = 2\sqrt[3]{r}\,\cos\frac{\alpha}{3}, \quad x_2 = \sqrt[3]{r}\cos\frac{\alpha + 2\pi}{3}, \quad x_3 = \sqrt[3]{r}\cos\frac{\alpha + 4\pi}{3} .$$

Le calcul de x_1, x_2, x_3 se ramène donc à celui de la racine cubique arithmétique de r et au calcul de l'argument α.

Pour effectuer ce calcul, écrivons

$$-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)} = r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

d'où

$$-\frac{q}{2} = r\cos\alpha, \quad \sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)} = r\sin\alpha$$

et par conséquent

$$r^2 = \frac{q^2}{4} + \left(-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right) = -\frac{p^3}{27} .$$

Par suite

$$r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \quad \sqrt[3]{r} = \sqrt{-\frac{p}{3}}$$

On a alors

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{27q^2}{4p^3} + 1}, \quad \cos\alpha = -\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}} .$$

si α est positif, donc on peut supposer α compris entre 0 et π. Le signe de $\cos \alpha$ fixera alors exactement la valeur de α.

90. Résolution graphique de l'équation du troisième degré

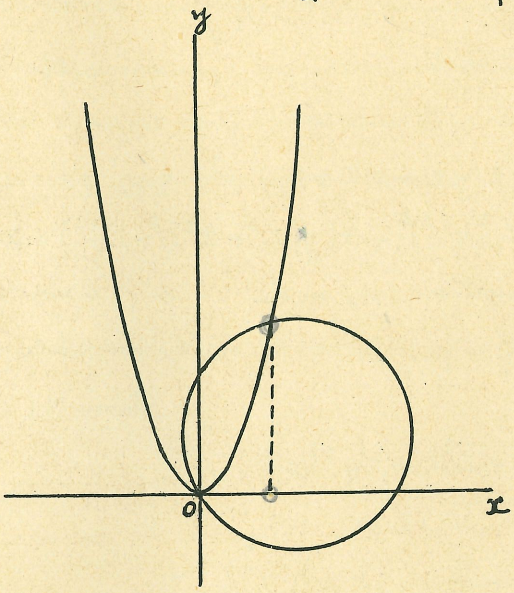
Reprenons l'équation

$$x^3 + px + q = 0 , \qquad (1)$$

posons $x^2 = y$ et multiplions les deux membres de l'équation par x. Elle s'écrit

$x^4 + px^2 + qx = 0$

$$y^2 + x^2 + (p-1)y + qx = 0 . \qquad (2)$$



En coordonnées rectangulaires, l'équation $y = x^2$ représente une parabole tangente à Ox à l'origine et ayant comme axe Oy. L'équation (2) représente une circonférence de centre $x = -\frac{q}{2}$, $y = -\frac{p-1}{2}$ passant par l'origine.

On retrouve l'équation (1) en cherchant les abscisses des points de rencontre de la parabole et de la circonférence distincts de l'origine. On observera que la parabole est indépendante de p, q.

Chapitre XI

L'équation du quatrième degré.

91. **Méthode d'Euler-Lagrange.** Considérons l'équation du quatrième degré

$$x^4+px^2+qx+r=0, \qquad (1)$$

dont on a fait disparaître le terme en x^3 et où nous supposerons réels les coefficients p, q, r. Posons

$$x=y+z+t. \qquad (2)$$

On a successivement

$$x^2-(y^2+z^2+t^2)=2(yz+zt+ty),$$

$$x^4-2x^2(y^2+z^2+t^2)-8xyzt+(y^2+z^2+t^2)^2-4(y^2z^2+z^2t^2+t^2y^2)=0.$$

En identifiant cette équation à l'équation (1), on a

$$2(y^2+z^2+t^2)=-p,$$

$$8yzt=-q,$$

$$(y^2+z^2+t^2)^2-4(y^2z^2+z^2t^2+t^2y^2)=r.$$

On en déduit

$$\left.\begin{aligned} y^2+z^2+t^2&=-\frac{p}{2}\\ y^2z^2+z^2t^2+t^2y^2&=\frac{p^2-4r}{16},\\ y^2z^2t^2&=\frac{q^2}{64}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Il en résulte que les quantités y^2, z^2, t^2 sont racines de l'équation du troisième degré

$$u^3+\frac{p}{2}u^2+\frac{p^2-4r}{16}u-\frac{q^2}{64}=0, \qquad (4)$$

appelée résolvante de l'équation (1).

Soient u_1, u_2, u_3 les racines de l'équation (4). On a

$$y=\pm\sqrt{u_1}, \quad z=\pm\sqrt{u_2}, \quad t=\pm\sqrt{u_3},$$

et par conséquent

$$x = \pm\sqrt{u_1} \pm \sqrt{u_2} \pm \sqrt{u_3} .$$

La détermination des signes sera déduite de la relation

$$(\pm\sqrt{u_1})(\pm\sqrt{u_2})(\pm\sqrt{u_3}) = -\frac{q}{8} .$$

voir note

92. Discussion. La résultante (4) est de degré impair et le terme indépendant est négatif, donc elle possède certainement une racine réelle positive. Soit u_1 cette racine (*). Dans la discussion nous devrons examiner trois cas :

1°) La résolvante possède, outre u_1, deux racines réelles positives u_2, u_3.

2°) La résolvante possède, outre u_1, deux racines réelles négatives u_2, u_3.

3°) Les racines u_2, u_3 sont imaginaires conjuguées.

Dans chaque cas, nous devrons tenir compte de la parité de q.

Premier cas. Les trois racines u_1, u_2, u_3 étant positives,

$$y = \pm\sqrt{u_1} , \quad z = \pm\sqrt{u_2} , \quad t = \pm\sqrt{u_3}$$

sont réels

Si q est positif, le produit $yzt = -\frac{q}{8}$ est négatif et les solutions de l'équation (1) sont

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} - \sqrt{u_3} , \\ x_2 &= \sqrt{u_1} - \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3} , \\ x_3 &= -\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3} , \\ x_4 &= -\sqrt{u_1} - \sqrt{u_2} - \sqrt{u_3} . \end{aligned} \right.$$

Si q est négatif, yzt est positif et les solutions sont

$$(\mathrm{II}) \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3} , \\ x_2 &= \sqrt{u_1} - \sqrt{u_2} - \sqrt{u_3} , \\ x_3 &= -\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} - \sqrt{u_3} , \\ x_4 &= -\sqrt{u_1} - \sqrt{u_2} + \sqrt{u_3} . \end{aligned} \right.$$

(*) Les deux autres racines, si elles sont réelles, sont toutes deux positives ou toutes deux négatives, comme on le voit en considérant le nombre de variations de l'équation (4)

Dans les deux hypothèses, les quatre racines de l'équation (1) sont réelles.

<u>Deuxième cas</u>. Nous avons $u_1 > 0$, $u_2 < 0$, $u_3 < 0$ et z, t sont imaginaires. Nous poserons

$$y = \pm\sqrt{u_1}\,, \quad z = \pm i\sqrt{-u_2}\,, \quad t = \pm i\sqrt{-u_3}$$

Le produit

$$yzt = -(\pm\sqrt{u_1})(\pm\sqrt{-u_2})(\pm\sqrt{-u_3})$$

doit avoir le signe de $-q$.

Si q est positif, on a

$$(\mathrm{III})\begin{cases} x_1 = \sqrt{u_1} + i(\sqrt{-u_2} + \sqrt{-u_3}), \\ x_2 = \sqrt{u_1} - i(\sqrt{-u_2} + \sqrt{-u_3}), \\ x_3 = -\sqrt{u_1} + i(\sqrt{-u_2} - \sqrt{-u_3}), \\ x_4 = -\sqrt{u_1} - i(\sqrt{-u_2} - \sqrt{-u_3}). \end{cases}$$

Si q est négatif, on a

$$(\mathrm{IV})\begin{cases} x_1 = \sqrt{u_1} + i(\sqrt{-u_2} - \sqrt{-u_3}), \\ x_2 = \sqrt{u_1} - i(\sqrt{-u_2} - \sqrt{-u_3}), \\ x_3 = -\sqrt{u_1} + i(\sqrt{-u_2} + \sqrt{-u_3}), \\ x_4 = -\sqrt{u_1} - i(\sqrt{-u_2} + \sqrt{-u_3}). \end{cases}$$

Les quatre racines de l'équation (1) sont <u>en général imaginaires</u>, quelque soit le signe de q.

<u>Troisième cas</u>. Supposons enfin que les racines u_2, u_3 soient imaginaires et posons

$$u_2 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad u_3 = r(\cos\alpha - i\sin\alpha).$$

On a alors

$$z = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2h\pi}{2} + i\sin\frac{\alpha + 2h\pi}{2}\right),$$

$$t = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{2}\right).$$

h et k étant égaux à 0 ou à 1. On peut écrire

$$z = \pm\sqrt{r}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$t = \pm\sqrt{r}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Supposons q positif et par suite yzt négatif. On a

$$x_1 = -\sqrt{u_1} + \sqrt{r}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt{r}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$
$$x_2 = -\sqrt{u_1} - \sqrt{r}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right) - \sqrt{r}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$
$$x_3 = \sqrt{u_1} + \sqrt{r}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right) - \sqrt{r}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$
$$x_4 = \sqrt{u_1} - \sqrt{r}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt{r}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

c'est-à dire

$$(\mathrm{V})\left\{\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt{u_1} + 2\sqrt{r}\cos\frac{\alpha}{2}, \\ x_2 &= -\sqrt{u_1} - 2\sqrt{r}\cos\frac{\alpha}{2}, \\ x_3 &= \sqrt{u_1} + 2i\sqrt{r}\sin\frac{\alpha}{2}, \\ x_3 &= \sqrt{u_1} - 2i\sqrt{r}\sin\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}\right.$$

Si q est négatif, on trouve de même

$$(\mathrm{VI})\left\{\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{u_1} + 2\sqrt{r}\cos\frac{\alpha}{2}, \\ x_2 &= \sqrt{u_1} - 2\sqrt{r}\cos\frac{\alpha}{2}, \\ x_3 &= -\sqrt{u_1} + 2i\sqrt{r}\sin\frac{\alpha}{2}, \\ x_4 &= -\sqrt{u_1} - 2i\sqrt{r}\sin\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}\right.$$

Dans ce troisième cas, l'équation (1) possède deux racines réelles et deux racines imaginaires conjuguées.

93. __Remarque__. Dans l'application de la résolution par radicaux d'une équation du quatrième degré, on doit résoudre la résolvante et pour cela, faire disparaître le terme en u^2 en substituant $u - \frac{p}{6}$ à u. On obtient ainsi l'équation

$$u^3 - \frac{p^2 + 12r}{48}u - \frac{p^3}{864} + \frac{pr}{24} - \frac{q^2}{64} = 0.$$

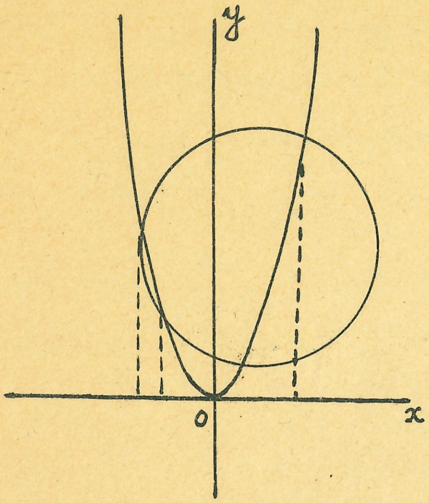
94. __Résolution graphique__. Ecrivons l'équation (1) sous la forme

$$x^4 + x^2 + (p-1)x^2 + qx + r = 0$$

et posons $y = x^2$. Nous pouvons écrire

$$y^2 + x^2 + (p-1)y + qx + r = 0, \qquad (2)$$

équation d'un cercle. Inversement, si nous éliminons y entre l'équa-



tion (2) et $y = x^2$, nous retrouvons l'équation (1), qui est donc l'équation aux abscisses des points d'intersection du cercle (2) et de la parabole $y = x^2$.

Le cercle (2) a pour centre le point $x = -\frac{q}{2}$, $y = -\frac{p-1}{2}$ et pour rayon

$$R = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{(p-1)^2}{4} - r}.$$

Table des Matières.