

Compte-rendu de la 56e  
session, Bruxelles 1932 /  
Association française pour  
l'avancement des sciences...

Association française pour l'avancement des sciences. Congrès (056 ; 1932 ; Bruxelles). Auteur du texte. Compte-rendu de la 56e session, Bruxelles 1932 / Association française pour l'avancement des sciences.... 1932.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [utilisation.commerciale@bnf.fr](mailto:utilisation.commerciale@bnf.fr).

La résolution d'une équation vectorielle telle que  $\xi + \mu = \lambda$  ou  $\mu + \eta = \lambda$  ( $\lambda, \mu$  donnés;  $\xi, \eta$  inconnus) résulte de là; la solution est unique, ce qui équivaut à la propriété (4) avec distinction de l'addition à gauche et à droite.

*Commutativité de l'addition.* — C'est seulement ici que nous allons utiliser II 5°; avec le concours de II 2°, (C) et (D) nous obtenons

$$\begin{aligned} & (\xi + \eta) + (-1) \cdot (\eta + \xi) = (\xi + \eta) + [(-1) \cdot \eta + (-1) \cdot \xi] \\ & = [(\xi + \eta) + (-1) \cdot \eta] + (-1) \cdot \xi = [\xi + (\eta + (-1) \cdot \eta)] + (-1) \cdot \xi \\ & = (\xi + 0) + (-1) \cdot \xi = \xi + (-1) \cdot \xi = 0. \end{aligned}$$

d'où d'après (F)

$$\xi + \eta = 0 + (-1) \cdot [(-1) \cdot (\eta + \xi)]$$

et enfin la propriété (2) ou

$$\xi + \eta = \eta + \xi. \quad (G)$$

L'indépendance des conditions résulte d'exemples satisfaisant à neuf et mettent en échec une d'entre elles. La place me manquant pour montrer que chacun d'eux satisfait bien aux conditions requises, je ne puis que renvoyer à ma note des comptes rendus (1) en signalant toutefois une légère erreur. Les propriétés associative et commutative de l'addition ont lieu nécessairement pour les vecteurs colinéaires à cause de II 4° et des propriétés de l'addition des nombres. La définition spéciale de l'addition indiquée pour mettre en échec la propriété I 2° doit être restreinte aux vecteurs non colinéaires, la définition ordinaire étant appliquée aux vecteurs colinéaires.

---

## Lucien GODEAUX

Professeur à l'Université de Liège

### SUR LES RÉCIPROCITÉS DU PLAN

La théorie des réciprociés du plan est bien connue. A la réciprocié

$$\sum a_{ik} x'_i x_k = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

on associe l'homographie

$$\rho(a_{1i} x'_1 + a_{2i} x'_2 + a_{3i} x'_3) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3, \quad (i = 1, 2, 3)$$

la première conique d'incidence

$$\sum a_{ik} x_i x_k = 0,$$

---

(1) P. FLAMANT. La réduction et l'indépendance des conditions imposées aux familles de vecteurs abstraits (*Comptes rendus Académie des Sciences*, t. CXC, 1930), p. 615-617.

lieu des points qui appartiennent à leurs droites homologues, et la seconde conique d'incidence, lieu des droites qui contiennent leurs points homologues.

Nous avons été conduit, par notre enseignement <sup>(1)</sup>, à étudier les réciprociétés du plan, dans le domaine réel, sans nous appuyer sur la notion de mesure; nous indiquons ici comment nous introduisons la polarité par rapport à la première conique d'incidence en restant, pour être plus bref, dans le cas général où cette conique n'est pas dégénérée.

1. Soit  $\theta$  une réciprociété du plan. A cette réciprociété, nous associons

1) l'homographie  $\Omega = \theta^2$ ;

2) la transformation  $T$  qui fait correspondre à un point  $P$  du plan l'intersection  $P'$  des droites  $p_{-1}, p_1$  que  $\theta^{-1}$  et  $\theta$  font respectivement correspondre à  $P$ . Les droites  $p'_{-1}, p'_1$  que  $\theta^{-1}, \theta$  font correspondre à  $P'$  passent par  $P$  et par suite  $T$  fait correspondre  $P$  à  $P'$ . La transformation  $T$  est (généralement) biunivoque et involutive.

2. — Considérons une droite  $r$ . A un point  $M$  de cette droite,  $\theta$  fait correspondre une droite  $m_1$  coupant  $r$  en un point  $M_1$ . Nous désignerons par  $\omega$  la projectivité entre les ponctuelles  $(M), (M_1)$  de support  $r$  déterminée par  $\theta$ .

Supposons que  $r$  joigne deux points  $P, P'$  homologues dans  $T$ . A  $P, \omega$  et  $\omega^{-1}$  font correspondre  $P'$ . Dans  $\omega, P$  et  $P'$  se correspondent doublement et  $\omega$  est une involution  $I_r$ . Les couples  $M, M'$  de cette involution sont d'ailleurs formés de points homologues dans  $T$ .

Soit  $Q$  un point n'appartenant pas à  $r$ , soient  $Q'$  le point que  $T$  lui fait correspondre,  $s$  la droite  $QQ'$ . La projectivité  $\omega$  déterminée par  $\theta$  sur  $s$  est une involution  $I_s$ . Si  $U$  est le point commun à  $r, s$ , deux cas peuvent se présenter :

1) Au point  $U, \theta$  et  $\theta^{-1}$  font correspondre une même droite  $u$  passant ou non par  $U$ .

2) Au point  $U, \theta$  et  $\theta^{-1}$  font correspondre deux droites distinctes  $u_1, u_{-1}$  passant par  $U$ . Ce point est donc un point double des involutions  $I_r, I_s$ .

Examinons le second cas. A  $r, \theta$  fait correspondre un point  $R_1$  de  $u_1$  et  $\theta^{-1}$  un point  $R_{-1}$  de  $u_{-1}$ . Si  $MM'$  est un couple de  $I_r, \theta$  et  $\theta^{-1}$  font correspondre à  $M$  respectivement les droites  $m_1 = M'R_1, m_{-1} = M'R_{-1}$ . Lorsque  $M$  décrit  $r, M'$  décrit également  $r$  et les faisceaux  $(m_1), (m_{-1})$ , de centres  $R_1, R_{-1}$  sont perspectifs. Il en résulte que la droite  $R_1 R_{-1}$  est l'homologue d'un certain point  $R$  de  $r$  à la fois dans  $\theta$  et  $\theta^{-1}$ . Les points  $R_1 R_{-1}$  ne peuvent appartenir à  $r$  et le point  $R$  est distinct de  $U$ . Au point de rencontre de  $s$  et de  $R_1 R_{-1}, \theta$  et  $\theta^{-1}$  font correspondre des droites passant par  $R$ . Par hypothèse, ce point doit appartenir à  $s$  et cette droite devrait donc coïncider avec  $r$ . Nous arrivons donc à une absurdité et le second cas ne peut se présenter.

<sup>(1)</sup> Voir nos *Leçons de géométrie projective*, Paris, Hermann, 1932.

3. — Plaçons-nous dans le premier cas et considérons un point quelconque  $A$  et son homologue  $A'$  dans  $T$ . A un point quelconque de la droite  $AA'$ ,  $T$  fait correspondre un point de cette droite. En particulier, au point de rencontre de la droite  $AA'$  avec la droite  $u$ ,  $T$  fait correspondre le point  $U$ . La droite  $AA'$  passe donc par le point  $U$ .

Observons que le point  $U$  et la droite  $u$  sont unis pour l'homographie  $\Omega$ .

*Les droites joignant deux points homologues de la transformation  $T$  passent par un point fixe, uni pour l'homographie  $\Omega$ .*

4. — Soient  $P$  un point,  $p_{-1}$ ,  $p_1$  les droites que  $\theta^{-1}$  et  $\theta$  lui font correspondre. Supposons que le point  $P$  n'appartienne pas à une de ces droites ni par suite à l'autre. Désignons par  $p$  la droite passant par le point  $P' = p_1 p_{-1}$ , conjuguée harmonique de  $PP'$  par rapport à  $p_{-1}$ ,  $p_1$ . Nous nous placerons dans le cas où la droite  $p$  varie avec le point  $P$ , une de ces droites ne correspondant pas à une infinité de points. En d'autres termes, nous supposerons que  $p$  peut occuper  $\infty^2$  positions. Les cas où  $p$  ne peut occuper que  $\infty^1$  positions ou est fixe correspondent à des dégénérescences de la première conique d'incidence et se traitent sans difficulté.

Faisons décrire au point  $P$  une droite  $m$  ne passant pas par le point  $U$ . Les droites  $p_{-1}$ ,  $p_1$  décrivent des faisceaux projectifs dont les centres sont les points  $M_{-1}$ ,  $M_1$  que  $\theta^{-1}$ ,  $\theta$  font correspondre à  $m$ . Le point  $P'$  décrit une conique  $\Gamma$  passant par les points  $M_{-1}$ ,  $M_1$ ,  $U$ . La droite  $p$  passe par un point fixe  $M$  de la conique  $\Gamma$ . La droite  $UM$  passe par le pôle  $S$  de la droite  $M_{-1} M_1$  par rapport à la conique  $\Gamma$ . La droite  $p$  coupe  $m$  en un point  $P_0$  qui, avec  $P$ , forme un couple de l'involution  $J$  permutable avec la projectivité  $\omega$  déterminée par  $\theta$  sur  $m$ .

Lorsque  $P'$  coïncide avec  $M$ ,  $P$  coïncide avec l'intersection  $A$  de  $UM$  avec  $m$ ; la droite  $p$  coïncide avec la tangente à  $\Gamma$  en  $M$ . Soit  $A_0$  le point où cette tangente coupe  $m$ .

Lorsque  $P'$  coïncide avec  $U$ , le point  $P_0$  coïncide avec  $A$  et par suite le point  $P$ , qui se trouve sur la tangente à  $\Gamma$  en  $U$ , coïncide avec  $A_0$ . Ce point est donc le pôle de la droite  $MU$ .

On en conclut, en vertu du théorème de von Staudt, que les points  $P$ ,  $P_0$  sont conjugués par rapport à  $\Gamma$ . Observons en outre que le point  $A_0$  se trouve sur la droite  $u$  que  $\theta$ ,  $\theta^{-1}$  font correspondre à  $U$ .

5. — Désignons par  $m_{-1}$ ,  $m_1$  les droites que  $\theta^{-1}$ ,  $\theta$  font correspondre à  $M$ . Ces droites passent par  $A$ . Soient  $B_{-1}$  l'intersection des droites  $m_{-1}$  et  $M_{-1} M$ ;  $B_1$  l'intersection des droites  $m_1$  et  $M_1 M$ ;  $B_0$  celle de  $r$  et de  $B_{-1} B_1$ ;  $B$  celle de  $B_{-1} B_1$  avec  $AM$ . Le quaterne  $B_{-1} B_1 B_0 B$  est harmonique et il en est par suite de même du quaterne de droites  $m_{-1}$ ,  $m_1$ ,  $r$ ,  $AM$ . Par suite, la construction qui fait passer de  $P$  à  $p$ , fait passer de  $M$  à  $m$ .

Cela étant, appelons  $\tau$  la correspondance entre  $P$  et  $p$ . Nous compléterons cette correspondance de la manière suivante. Soit s'il en existe  $Q$  un

point appartenant à une des droites que  $\theta$ ,  $\theta_{-1}$  lui fait correspondre et par suite à l'autre. Considérons une droite  $m$  passant par  $Q$  mais non par  $U$ ; aux points de cette droite,  $\tau$  fait correspondre les droites passant par un point  $M$ . Au point  $Q$ , nous ferons correspondre la droite  $QM$ .

Des propriétés établies plus haut, il résulte que  $\tau$  est une polarité et que, de plus, les points appartenant à leurs polaires, si  $\tau$  est non uniforme, forment la première conique d'incidence de  $\theta$ .

## Robert GODEAU

Chargé de cours à l'Université de Bruxelles

### QUELQUES SURFACES ALGÈBRIQUES EN RELATION AVEC LES PÉRISPHERES

1. Soit un péricône  $\Sigma$ , enveloppe des sphères d'une famille à un paramètre, dont les centres  $A$  sont les points d'une courbe  $(A)$ . Une famille de lignes de courbure du péricône  $\Sigma$  est formée de cercles; soit  $\gamma$  celui de ces cercles qui correspond au point  $A$  et soit  $\gamma_1$  la ligne de courbure de la seconde famille passant par un point  $P$  du cercle  $\gamma$ .

Nous nous proposons de rechercher quelques lieux géométriques en relation avec le péricône  $\Sigma$  et le cercle  $\gamma$ . Nous emploierons les notations utilisées dans notre article « *Sur les péricônes* » (Mathesis, 1931, p. 62). Pour étudier certains de ces lieux, nous rapporterons la figure au trièdre principal  $Axyz$  de la ligne  $(A)$  au point  $A$ . Les équations du cercle  $\gamma$  sont

$$x = a \quad y^2 + z^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 \theta;$$

l'équation du plan  $\alpha'$  mené par  $A$  parallèlement au plan de Ribaucour  $\alpha$  (§2) <sup>(1)</sup> est

$$mx + ny = 0.$$

Nous excluons, dans ce qui va suivre, le cas particulier où le plan  $\alpha$  est parallèle ou perpendiculaire à la droite  $Ax$ .

2. *Lieu des binormales aux lignes  $\gamma_1$  aux points  $P$  du cercle  $\gamma$ .*

a. **Solution géométrique.** La droite polaire de la courbe  $\gamma_1$  au point  $P$  étant la tangente  $t$  au point correspondant de la conique de Ribaucour (§2), la binormale  $b$  de la courbe  $\gamma_1$  au point  $P$  sera l'intersection du plan tangent au cône  $(A, \gamma)$  le long de la génératrice  $AP$  avec le plan  $\alpha''$  mené par  $P$  parallèlement au plan de Ribaucour  $\alpha$ .

Si  $HH'$  est le diamètre du cercle  $\gamma$ , situé dans le plan  $Axy$  et si  $U$  est le

<sup>(1)</sup> Les notations analogues à (§2) renvoient aux numéros de l'article « *Sur les péricônes* » (Mathesis, 1931, p. 62).