Compte-rendu de la 56e session, Bruxelles 1932 / Association française pour l'avancement des sciences...

La résolution d'une équation vectorielle telle que $\xi + \mu = \lambda$ ou $\mu + \eta = \lambda$ (λ, μ donnés; ξ, η inconnus) résulte de là; la solution est unique, ce qui équivaut à la propriété (4) avec distinction de l'addition à gauche et à droite.

Commutativité de l'addition. — C'est seulement ici que nous allons utiliser II 5°; avec le concours de II 2°, (C) et (D) nous obtenons

$$\begin{aligned}(\xi + \eta) + (-1).(\eta + \xi) &= (\xi + \eta) + [(-1).\eta + (-1).\xi] \\ &= [(\xi + \eta) + (-1).\eta] + (-1).\xi = [\xi + (\eta + (-1).\eta)] + (-1).\xi \\ &= (\xi + o) + (-1).\xi = \xi + (-1).\xi = o.\end{aligned}$$

d'où d'après (F)

$$\xi + \eta = o + (-1).[(-1).(\eta + \xi)]$$

et enfin la propriété (2) ou

$$\xi + \eta = \eta + \xi. \tag{G}$$

L'indépendance des conditions résulte d'exemples satisfaisant à neuf et mettent en échec une d'entre elles. La place me manquant pour montrer que chacun d'eux satisfait bien aux conditions requises, je ne puis que renvoyer à ma note des comptes rendus (1) en signalant toutefois une légère erreur. Les propriétés associative et commutative de l'addition ont lieu nécessairement pour les vecteurs colinéaires à cause de II 4° et des propriétés de l'addition des nombres. La définition spéciale de l'addition indiquée pour mettre en échec la propriété I 2° doit être restreinte aux vecteurs non colinéaires, la définition ordinaire étant appliquée aux vecteurs colinéaires.

Lucien GODEAUX

Professeur à l'Université de Liége

SUR LES RÉCIPROCITÉS DU PLAN

La théorie des réciprocités du plan est bien connue. A la réciprocité

$$\Sigma\, a_{ik} x'_i x_k = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

on associe l'homographie

$$\rho(a_{1i} x'_1 + a_{2i} x'_2 + a_{3i} x'_3) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3, \quad (i = 1, 2, 3)$$

la première conique d'incidence

$$\Sigma\, a_{ik} x_i x_k = 0,$$

(1) P. Flamant. La réduction et l'indépendance des conditions imposées aux familles de vecteurs abstraits (*Comptes rendus Académie des Sciences*, t. CXC, 1930), p. 615-617.

lieu des points qui appartiennent à leurs droites homologues, et la seconde conique d'incidence, lieu des droites qui contiennent leurs points homologues.

Nous avons été conduit, par notre enseignement [1], à étudier les réciprocités du plan, dans le domaine réel, sans nous appuyer sur la notion de mesure; nous indiquons ici comment nous introduisons la polarité par rapport à la première conique d'incidence en restant, pour être plus bref, dans le cas général où cette conique n'est pas dégénérée.

1. Soit θ une réciprocité du plan. A cette réciprocité, nous associons

1) l'homographie $\Omega = \theta^2$;

2) la transformation T qui fait correspondre à un point P du plan l'intersection P′ des droites p_{-1}, p_1 que θ^{-1} et θ font respectivement correspondre à P. Les droites p'_{-1}, p'_1 que θ^{-1}, θ font correspondre à P′ passent par P et par suite T fait correspondre P à P′. La transformation T est (généralement) biunivoque et involutive.

2. — Considérons une droite r. A un point M de cette droite, θ fait correspondre une droite m_1 coupant r en un point M_1. Nous désignerons par ω la projectivité entre les ponctuelles (M), (M_1) de support r déterminée par θ.

Supposons que r joigne deux points P, P′ homologues dans T. A P, ω et ω^{-1} font correspondre P′. Dans ω, P et P′ se correspondent doublement et ω est une involution I_r. Les couples M, M′ de cette involution sont d'ailleurs formés de points homologues dans T.

Soit Q un point n'appartenant pas à r, soient Q′ le point que T lui fait correspondre, s la droite QQ′. La projectivité ω déterminée par θ sur s est une involution I_s. Si U est le point commun à r, s, deux cas peuvent se présenter :

1) Au point U, θ et θ^{-1} font correspondre une même droite u passant ou non par U.

2) Au point U, θ et θ^{-1} font correspondre deux droites distinctes u_1, u_{-1} passant par U. Ce point est donc un point double des involutions I_r, I_s.

Examinons le second cas. A r, θ fait correspondre un point R_1 de u_1 et θ^{-1} un point R^{-1} de u^{-1}. Si MM′ est un couple de I_r, θ et θ^{-1} font correspondre à M respectivement les droites $m_1 = M' R_1$, $m_{-1}, = M' R_{-1}$. Lorsque M décrit r, M′ décrit également r et les faisceaux (m_1), (m_{-1}), de centres R_1, R_{-1} sont perspectifs. Il en résulte que la droite $R_1 R_{-1}$ est l'homologue d'un certain point R de r à la fois dans θ et θ_{-1}. Les points $R_1 R_{-1}$ ne peuvent appartenir à r et le point R est distinct de U. Au point de rencontre de s et de $R_1 R_{-1}$, θ et θ^{-1} font correspondre des droites passant par R. Par hypothèse, ce point doit appartenir à s et cette droite devrait donc coïncider avec r. Nous arrivons donc à une absurdité et le second cas ne peut se présenter.

---

[1] Voir nos *Leçons de géométrie projective*, Paris, Hermann, 1932.

3. — Plaçons-nous dans le premier cas et considérons un point quelconque A et son homologue A′ dans T. A un point quelconque de la droite AA′, T fait correspondre un point de cette droite. En particulier, au point de rencontre de la droite AA′ avec la droite u, T fait correspondre le point U. La droite AA′ passe donc par le point U.

Observons que le point U et la droite u sont unis pour l'homographie Ω.

Les droites joignant deux points homologues de la transformation T passent par un point fixe, uni pour l'homographie Ω.

4. — Soient P un point, p_{-1}, p_1 les droites que θ^{-1} et θ lui font correspondre. Supposons que le point P n'appartienne pas à une de ces droites ni par suite à l'autre. Désignons par p la droite passant par le point $P' = p_1\, p_{-1}$, conjuguée harmonique de PP′ par rapport à p_{-1}. p_1. Nous nous placerons dans le cas où la droite p varie avec le point P, une de ces droites ne correspondant pas à une infinité de points. En d'autres termes, nous supposerons que p peut occuper ∞^2 positions. Les cas où p ne peut occuper que ∞^1 positions ou est fixe correspondent à des dégénérescences de la première conique d'incidence et se traitent sans difficuté.

Faisons décrire au point P une droite m ne passant pas par le point U. Les droites p_{-1}, p_1 décrivent des faisceaux projectifs dont les centres sont les points M_{-1}, M_1 que θ^{-1}, θ font correspondre à m. Le point P′ décrit une conique Γ passant par les points M_{-1}, M_1, U. La droite p passe par un point fixe M de la conique Γ. La droite UM passe par le pôle S de la droite $M_{-1}\, M_1$ par rapport à la conique Γ. La droite p coupe m en un point P_0 qui, avec P, forme un couple de l'involution J permutable avec la projectivité ω déterminée par θ sur m.

Lorsque P′ coïncide avec M, P coïncide avec l'intersection A de UM avec m; la droite p coïncide avec la tangente à Γ en M. Soit A_0 le point où cette tangente coupe m.

Lorsque P′ coïncide avec U, le point P_0 coïncide avee A et par suite le point P, qui se trouve sur la tangente à Γ en U, coïncide avec A_0. Ce point est donc le pôle de la droite MU.

On en conclut, en vertu du théorème de von Staudt, que les points P, P_0 sont conjugués par rapport à Γ. Observons en outre que le point A_0 se trouve sur la droite u que θ, θ_{-1} font correspondre à U.

5. — Désignons par m_{-1}, m_1 les droites que θ_{-1}, θ font correspondre à M. Ces droites passent par A. Soient B_{-1} l'intersection des droites m_{-1} et $M_{-1}\, M$; B_1 l'intersection des droites m_1 et $M_1\, M$; B_0 celle de r et de $B_{-1}\, B_1$; B celle de $B_{-1}\, B_1$ avec AM. Le quaterne $B_{-1}\, B_1\, B_0\, B$ est harmonique et il en est par suite de même du quaterne de droites m_{-1}, m_1, r, AM. Par suite, la construction qui fait passer de P à p, fait passer de M à m.

Cela étant, appelons τ la correspondance entre P et p. Nous complèterons cette correspondance de la manière suivante. Soit s'il en existe Q un point appartenant à une des droites que θ, θ_{-1} lui fait correspondre et par suite à l'autre. Considérons une droite m passant par Q mais non par U; aux points de cette droite, τ fait correspondre les droites passant par un point M. Au point Q, nous ferons correspondre la droite QM.

Des propriétés établies plus haut, il résulte que τ est une polarité et que, de plus, les points appartenant à leurs polaires, si τ est non uniforme, forment la première conique d'incidence de θ.

Robert GODEAU

Chargé de cours à l'Université de Bruxelles

QUELQUES SURFACES ALGÉBRIQUES EN RELATION AVEC LES PÉRISPHÈRES

1. Soit un périsphère Σ, enveloppe des sphères d'une famille à un paramètre, dont les centres A sont les points d'une courbe (A). Une famille de lignes de courbure du périsphère Σ est formée de cercles; soit γ celui de ces cercles qui correspond au point A et soit γ_1 la ligne de courbure de la seconde famille passant par un point P du cercle γ.

Nous nous proposons de rechercher quelques lieux géométriques en relation avec le périsphère Σ et le cercle γ. Nous emploierons les notations utilisées dans notre article « *Sur les périsphères* » (Mathesis, 1931, p. 62). Pour étudier certains de ces lieux, nous rapporterons la figure au trièdre principal Axyz de la ligne (A) au point A. Les équations du cercle γ sont

$$x = a \qquad y^2 + z^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 \theta;$$

l'équation du plan α' mené par A parallèlement au plan de Ribaucour α (§2) [1] est

$$mx + ny = 0.$$

Nous excluons, dans ce qui va suivre, le cas particulier où le plan α est parallèle ou perpendiculaire à la droite Ax.

2. *Lieu des binormales aux lignes γ_1 aux points P du cercle γ.*
a. Solution géométrique. La droite polaire de la courbe γ_1 au point P étant la tangente t au point correspondant de la conique de Ribaucour (§2), la binormale b de la courbe γ_1 au point P sera l'intersection du plan tangent au cône (A, γ) le long de la génératrice AP avec le plan α'' mené par P parallèlement au plan de Ribaucour α.

Si HH' est le diamètre du cercle γ, situé dans le plan Axy et si U est le

---

(1) Les notations analogues à (§ 2) renvoient aux numéros de l'article « Sur les périsphères » (Mathesis, 1931, p. 62).