Conférences : compte-rendu de la 48e session, Liège 1924 / Association française pour l'avancement des sciences...

II. GÉOMÉTRIE

L. GODEAUX
Professeur à l'École Militaire de Belgique.

SUR UNE PROPRIETE DES COURBES GAUCHES EN GEOMETRIE CAYLEYENNE ELLIPTIQUE

On sait que, en géométrie cayleyenne elliptique, on peut mener par un point deux parallèles à une droite (parallélisme de Clifford) ; chacune de ces parallèles dépend d'ailleurs rationnellement de la droite donnée. On peut donc envisager les parallèles de Clifford d'une espèce déterminée.

Soit C une courbe gauche. Par un point fixe Y, menons des parallèles de Clifford d'espèce déterminée aux tangentes à cette courbe et, sur chacune de ces parallèles, déterminons un point H tel que la distance YH soit égale à $\frac{\pi R}{2}$. En chaque point du lieu de H, menons la tangente à ce lieu et déterminons sur cette tangente, un point N distant de H de $\frac{\pi R}{2}$ $\left(\text{la courbure de l'espace étant } \frac{1}{R^2}\right)$. Dans cette note, nous démontrons que :

1° Les triangles YHN sont trirectangles ;

2° Dans le système de parallélisme de Clifford choisi, la droite YN est parallèle à la normale principale, la tangente HN à la binormale, au point correspondant de la courbe C.

I. Considérons l'espace cayleyen elliptique à trois dimensions dont la quadrique de l'absolu a pour équation, en coordonnées homogènes,

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Fixons le facteur de proportionnalité des coordonnées ponctuelles et tangentielles de l'espace par la condition que la somme des carrés de ces coordonnées soit égale à l'unité ($\Sigma x_i^2 = 1$, $\Sigma \xi_i^2 = 1$). Dans ces conditions, si $\frac{1}{R^2}$ désigne la courbure de l'espace, l'élément linéaire est donné par

$$ds^2 = R^2 (dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2).$$

Ue droite est déterminée par un de ses points X (x_0, x_1, x_2, x_3) et un second point Ξ $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ tel que le plan polaire de ce point par rapport à l'absolu passe par X et y soit perpendiculaire à la droite considérée. La distance entre les points X, Ξ est égale à $\frac{\pi R}{2}$.

Par un point Y (y_0, y_1, y_2, y_3) passent deux parallèles de Clifford à la droite X Ξ. La parallèle de la première sorte passe par le point H donné par

$$\left.\begin{aligned} \eta_0 &= -By_1 - Cy_2 - Dy_3, \\ \eta_1 &= By_0 - Dy_2 + Cy_3, \\ \eta_2 &= Cy_0 + Dy_1 - Cy_3, \\ \eta_3 &= Dy_0 - Cy_1 + By_2; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

la paralèlle de seconde sorte par le point H',

$$\begin{aligned} \eta'_0 &= -B'y_1 - C'y_2 - D'y_3, \\ \eta'_1 &= B'y_0 + D'y_2 - C'y_3, \\ \eta'_2 &= C'y_0 - D'y_1 + B'y_3, \\ \eta'_3 &= D'y_0 + C'y_1 - B'y_2. \end{aligned}$$

Si l'on pose $p_{ik} = x_i\xi_k - x_k\xi_i$, on a

$$\begin{gathered} B = p_{01} + p_{23}, \qquad C = p_{02} + p_{21}, \qquad D = p_{03} + p_{12}, \\ B' = p_{01} - p_{23}, \qquad C' = p_{02} - p_{31}, \qquad D' = p_{03} - p_{12}, \\ B^2 + C^2 + D^2 = 1, \qquad B'^2 + C'^2 + D'^2 = 1. \end{gathered}$$

Dans ce travail, nous n'utiliserons que les parallèles de la première sorte, mais les propriétés établies sont vérifiées lorsque l'on considère le parallélisme de la seconde sorte.

II. Soit C une courbe donnée par les équations

$$x_i = x_i(s), \qquad (s = 0, 1, 2, 3)$$

le paramètre étant l'abscisse curviligne s.

La tangente en un point X de la courbe C passe par le point $\Xi \left(\xi_i = R\frac{dx_i}{ds}\right)$, pôle du plan normal à la courbe en X par rapport à l'absolu.

Par un point Y de l'espace, menons les parallèles de Clifford (de première sorte) aux tangentes à C (les points de cette courbe étant supposés ordinaires). Ces parallèles sont déterminées par les divers points H d'une courbe Γ représentée par les formules (1).

L'élément linéaire $d\sigma$ de Γ est donné par

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = R^2\left[\left(\frac{d\eta_0}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_3}{ds}\right)^2\right].$$

---

(1) G. Fubini, *Il parallelismo de Clifford negli spazii ellittici*. Annali della R. Scuola Normale di Pisa, 1900, vol. IX.

La courbe Γ peut être appelée la *première indicatrice* de C. La courbure $\frac{1}{\rho}$ de la courbe C en un point X est donnée par

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \frac{d\sigma}{ds},$$

et on trouve sans difficulté,

$$\rho = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum \left(x_i \frac{d^2 x_K}{ds^2} - x_K \frac{d^2 x_i}{ds^2} \right)^2}}.$$

III. La tangente en un point H à la courbe Γ passe par le point N de coordonnées

$$\left.\begin{aligned}
\nu_0 &= -R\left(y_1 \frac{dB}{d\sigma} + y_2 \frac{dC}{d\sigma} + y_3 \frac{dD}{d\sigma}\right),\\
\nu_1 &= +R\left(y_0 \frac{dB}{d\sigma} - y_2 \frac{dD}{d\sigma} + y_3 \frac{dC}{d\sigma}\right),\\
\nu_2 &= +R\left(y_0 \frac{dC}{d\sigma} + y_1 \frac{dD}{d\sigma} - y_3 \frac{dB}{d\sigma}\right),\\
\nu_3 &= +R\left(y_0 \frac{dD}{d\sigma} - y_1 \frac{dC}{d\sigma} + y_2 \frac{dB}{d\sigma}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

La distance des points Y, N est égale à $\frac{\pi R}{2}$, car on a

$$\cos \frac{YN}{R} = \Sigma y_i \nu_i \equiv 0.$$

Le triangle Y H N est trirectangle ; on a en effet, par exemple,

$$\cos NYH = \Sigma y_i \nu_i \equiv 0.$$

IV. Menons, par le point X, la parallèle de Clifford (de première sorte) à la droite YN. Cette droite passe par X et par le point N′ de coordonnées

$$\left.\begin{aligned}
\nu'_0 &= -B_1 x_1 - C_1 x_2 - D_1 x_3,\\
\nu'_1 &= B_1 x_0 - D_1 x_2 + C_1 x_3,\\
\nu'_2 &= C_1 x_0 + D_1 x_1 - B_1 x_3,\\
\nu'_3 &= D_1 x_0 - C_1 x_1 + B_1 x_2,
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

où l'on pose

$$B_1 = q_{01} + q_{23}, \quad C_1 = q_{02} + q_{31}, \quad D_1 = q_{03} + q_{12},$$
$$q_{iK} = y_i \nu_K - y_K \nu_i.$$

En tenant compte des formules (2), on a

$$B_1 = R \frac{dB}{d\sigma} = \rho \frac{dB}{ds}, \quad C_1 = \rho \frac{dC}{ds}, \quad D_1 = \rho \frac{dD}{ds}.$$

On en déduit, en tenant compte des valeurs de B, C, D,

$$\frac{\nu'_0}{\rho} = \mathrm{R}\left[\frac{d^2 x_0}{ds^2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_0\left(x_1 \frac{d^2 x_1}{ds^2} + x_2 \frac{d^2 x_2}{ds^2} + x_3 \frac{d^2 x_3}{ds^2}\right)\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{\nu'_0}{\rho} = \mathrm{R}\frac{d^2 x_0}{ds^2} - \mathrm{R}x_0 \sum_i^{o\ldots3} x_i \frac{d^2 x_i}{ds^2}.$$

Mais on a

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \qquad \sum x_i \frac{dx_i}{ds} = 0,$$

$$\sum x_i \frac{d^2 x_i}{ds^2} = -\sum\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\mathrm{R}^2},$$

par conséquent

$$\frac{\nu'_0}{\rho} = \mathrm{R}\frac{d^2 x_0}{ds^2} + \frac{1}{\mathrm{R}} x_0.$$

On trouve de même

$$\frac{\nu'_i}{\rho} = \mathrm{R}\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \frac{1}{\mathrm{R}} x_i, \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\frac{\nu'_i}{\rho} = \frac{d\xi_i}{ds} + \frac{1}{\mathrm{R}} x_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{4}$$

Il en résulte que la droite passant par les points X et (3) est précisément la normale principale de la courbe C, les formules (4) définissant précisément les coordonnées ν_i' du plan passant par X et perpendiculaire à cette normale principale (1).

V. Considérons maintenant la parallèle de Clifford (de la première sorte) à la droite HN, menée par le point X. Cette droite passe par le point Z de coordonnées

$$\left.\begin{aligned} \zeta_0 &= -\mathrm{B}_2 x_1 - \mathrm{C}_2 x_2 - \mathrm{D}_2 x_3, \\ \zeta_1 &= \mathrm{B}_2 x_0 - \mathrm{D}_2 x_2 + \mathrm{C}_2 x_3, \\ \zeta_2 &= \mathrm{C}_2 x_0 + \mathrm{D}_2 x_1 - \mathrm{B}_2 x_3, \\ \zeta_3 &= \mathrm{D}_2 x_0 - \mathrm{C}_2 x_1 + \mathrm{B}_2 x_2, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

où l'on pose

$$\mathrm{B}_2 = r_{01} + r_{23}, \qquad \mathrm{C}_2 = r_{02} + r_{31}, \qquad \mathrm{D}_2 = r_{03} + r_{12},$$
$$r_{iK} = \eta_i \nu_K - \eta_K \nu_i.$$

(1) Bianchi, *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica.* Annali di Matematica, 1896, vol. XXIV.

On a

$$B_2 = \rho\left(C\frac{dD}{ds} - D\frac{dC}{ds}\right), \quad C_2 = \rho\left(D\frac{dB}{ds} - B\frac{dD}{ds}\right), \quad D_2 = \rho\left(B\frac{dC}{ds} - C\frac{dB}{ds}\right).$$

Pour démontrer que la droite XZ est la binormale à la courbe C, il suffira de démontrer que cette droite est perpendiculaire à la tangente et à la normale principale.

Le cosinus de l'angle de la tangente et de la droite XZ est donné par $\Sigma\xi_i\zeta_i$. Or, on a

$$\Sigma\xi_i\zeta_i = BB_2 + CC_2 + DD_2 \equiv 0.$$

Le cosinus de l'angle de la normale principale et de la droite XZ est donné par $\Sigma\nu_i'\zeta_i$. On a

$$\sum \nu'_i\zeta_i = B_1B_2 + C_1C_2 + D_1D_2 = \rho\left(B_2\frac{dB}{ds} + C_2\frac{dC}{ds} + D_2\frac{dC}{ds}\right) \equiv 0.$$

La droite XZ est donc bien la binormale de la courbe C au point X.

Professeur J. RICHARD

Châteauroux.

PRINCIPES DE LA GEOMETRIE DANS LEURS RAPPORTS AVEC L'ENSEIGNEMENT

On prétend quelquefois que la géométrie élémentaire ne saurait être enseignée aux débutants d'une façon bien rigoureuse et logique, et qu'il faut se contenter de démonstrations imparfaites.

Cette opinion est suggérée par la géométrie rationnelle de Halsted, conforme au mémoire d'Hilbert sur les fondements de la géométrie. Dans cet ouvrage on ne fait pas usage des déplacements, et l'on se hâte trop de conclure que l'usage des déplacements est incompatible avec la rigueur.

D'autres géomètres cependant, et notamment M. Peano ont étudiés les fondements de la géométrie et ont considéré le déplacement comme une notion importante, qu'ils se sont bien gardés de bannir.

Les géométries usuelles ne manquent point de rigueur, mais les