Compte-rendu de la 55e session, Nancy 1931 / Association française pour l'avancement des sciences...

infinité dénombrable et admettent le point à l'infini comme point d'accumulation. Les valeurs caractéristiques

$$\rho = \frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_j} \qquad (i \neq j)$$

sont aussi en infinité dénombrable et admettent une infinité de points d'accumulation : l'origine et les points $\frac{1}{\lambda_i}$.

On peut construire une fonction analytique admettant ces points comme zéros, à l'aide de la déterminante fondamentale de $h\,(st)$; fonction qui admet une infinité de points singuliers essentiels.

Il est possible que cette fonction ait quelques-unes des propriétés fondamentales de l'équation de Killing. Elle se rencontre naturellement dans la résolution de l'équation intégrale

$$\mathrm{K}(st) = \mathrm{H}(st) + \lambda \int_a^b \mathrm{H}(su)\, h(ut)\, du - \mu \int_a^b h(su)\, \mathrm{H}(ut)\, du.$$

Lucien GODEAUX

Profcsesur à la Faculté des Sciences de Liége

SUR LES SUITES DE LAPLACE TERMINÉES

1. — Considérons une suite de Laplace, les paramètres étant u, v,

$$\ldots,\ \mathrm{X}_{-p},\ \ldots,\ \mathrm{X}_{-1},\ \mathrm{X}_0,\ \mathrm{X}_1,\ \ldots,\ \mathrm{X}_p,\ \ldots \qquad (1)$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des v, appartenant à un espace linéaire S_{2p+1} à $2p+1$ dimensions et non à un espace à un nombre moindre de dimensions. Soit Ω une réciprocité non singulière de S_{2p+1}, dont l'équation soit

$$\Omega\ (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0.$$

Désignons par Y_i le point que Ω fait correspondre à l'hyperplan déterminé par le point X_{-i} et par les p points situés de part et d'autre du point X_{-i} dans la suite (1). On obtient ainsi une suite de Laplace

$$\ldots,\ \mathrm{Y}_p,\ \ldots,\ \mathrm{Y}_1,\ \mathrm{Y}_0,\ \mathrm{Y}_{-1},\ \ldots,\ \mathrm{Y}_{-p},\ \ldots \qquad (2)$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. On a par définition

$$\Omega(\mathrm{X}_j, \mathrm{Y}_i) = 0, \quad (j = -i-p, -i-p+1, \ldots, -i, \ldots, -i+p).$$

La suite (2) ne peut appartenir à un espace linéaire ayant moins de $2p+1$ dimensions.

2. Supposons que la suite (1) se termine au point X_p en présentant le cas de Laplace. On a (en représentant par φ^{ik} la dérivée partielle d'une fonction φ prise i fois par rapport à u et k fois par rapport à v), $\mathrm{X}_p^{10} = 0$

et le point X_p décrit une courbe (X_p). Nous supposerons que cette courbe n'appartient pas à un hyperplan.

On obtient aisément, par dérivations successives,

$$\Omega(X_p, \ Y) = 0, \ \ldots, \ \Omega(X_p, \ Y_{-2p+1}) = 0, \ \Omega\left(X_p, \ Y^{10}_{-2p+1}\right) = 0, \ \ldots$$
$$\Omega\left(X^{01}_p, Y_{-1}\right) = 0, \ \ldots, \ \Omega\left(X^{01}_p, Y_{-2p+1}\right) = 0, \ \Omega\left(X^{01}_p, Y^{10}_{-2p+1}\right) = 0, \ \ldots$$
$$\Omega\left(X^{0,2p-1}_p, Y_{-2p+1}\right) = 0, \ \Omega\left(X^{0,2p-1}_p, Y^{10}_{-2p+1}\right) = 0, \ \ldots$$
$$\Omega\left(X^{0,2p}_p, \quad Y_{-2p}\right) = 0, \ \ldots$$

Les points Y_{-2p+1}, Y^{10}_{-2p+1}, Y^{20}_{-2p+1}, ... appartiennent à la droite que la réciprocité Ω fait correspondre à l'espace S_{2p-1} déterminé par les points $X_p, X^{01}_p, \ldots, X^{0,2p-1}_p$. On a donc une relation de la forme

$$Y^{20}_{-2p+1} + AY^{10}_{-2p+1} + BY_{-2p+1} = 0.$$

Sur la surface (Y_{-2p+1}), les lignes u sont des droites qui sont tangentes à la courbe engendrée par le point Y_{-2p} lorsque v varie. Ce point Y_{-2p} correspond, par Ω, à l'hyperplan osculateur à la courbe (X_p) au point X_p. La suite (2) se termine donc au point Y_{-2p} en présentant le cas de Goursat.

Si, contrairement à l'hypothèse faite plus haut, la courbe (X_p) appartient à un espace linéaire S_q à $q \leqq 2p$ dimensions, on peut voir que

a) Si $q = 2p$, le point Y_{-2p} est fixe et la surface (Y_{-2p+1}) est un cône.

b) Si $q = 2p - 1$, le point Y_{-2p+1} appartient à la droite que Ω fait correspondre à l'espace S_{2p-1} contenant (X_p).

c) Si $q < 2p - 1$, le point Y_{-q} appartient à l'espace S_{2p-q} que Ω fait correspondre à S_q ; il en est par suite de même de tous les points de la suite (2) et par conséquent de tous les points de la suite (1).

3. Supposons inversement que la suite (2) se termine, au point Y_{-2p} en présentant le cas de Goursat. Le point Y_{-2p+1} décrit une développable dont l'arête de rebroussement est la courbe (Y_{-2p}) ; cette courbe ne peut appartenir à un hyperplan. L'hyperplan $Y_{-2p}\, Y_{-2p+1} \ldots Y_0$ est osculateur à la courbe (Y_{-2p}) et le point X_p de la suite (1) que la réciprocité Ω_{-1} fait correspondre à cet hyperplan décrit une courbe (X_p). D'autre part, le point X_{p-1} que Ω^{-1} fait correspondre à l'hyperplan $Y_{-2p+1} \ldots Y_1$ décrit une surface, par suite la suite (1) se termine au point X_p en présentant le cas de Laplace.

Dans ce qui précède, nous avons considéré une suite de Laplace appartenant à un espace ayant un nombre impair de dimensions simplement pour la facilité des notations, mais il est bien évident que le même résultat s'obtient de la même manière lorsque l'on considère un espace ayant un nombre pair de dimensions.

A une suite de Laplace se terminant en présentant le cas de Laplace, une réciprocité fait correspondre une suite de Laplace se terminant en présentant le cas de Goursat, et inversement.

Dans le cas où la réciprocité est une polarité, on retrouve un résultat dû à M. Tzitzeica,

4. Soit H une homographie non singulière de l'espace S_{2p+1}. A la suite de Laplace (1), H fait correspondre une suite de Laplace (3). Observons que l'opération Ω_1 définie par la relation $H = \Omega_1 \Omega$, est une réciprocité qui fait correspondre la suite (3) à la suite (2). Par suite

A une suite de Laplace se terminant en présentant le cas de Laplace ou celui de Goursat, uue homographie fait correspondre une suite de Laplace se terminant en présentant également respeetivement le cas de Laplace ou celui de Goursat.

Husny HAMID

Professeur à la Faculté des Sciences de Stamboul

SUR LA CARACTÉRISTIQUE DU PARABOLOIDE DES NORMALES A UNE SURFACE RÉGLÉE

1. Dans une note antérieure [1], j'ai obtenu le théorème suivant : « La courbe caractéristique du paraboloïde des normales est en général une biquadratique réelle ; si cette biquadratique dégénère elle est formée d'une cubique et d'une droite ; elle ne peut jamais dégénérer en deux coniques ou en un quadrilatère gauche, à moins que deux génératrices successives ne se rencontrent ».

Je vais examiner de près le cas de la décomposition en une cubique et une droite.

Adoptons b pour paramètre u de position de la génératrice de la surface réglée, de sorte que les équations de cette génératrice sont :

$$x = z\,a(u) + p(u); \qquad y = z\,u + q(u).$$

Nous supposerons que le trièdre des axes a été choisi de manière que l'on ait pour la génératrice au voisinage de laquelle nous faisons notre étude :

$$a = p = q = a' = q' = 0 \qquad p' \neq 0.$$

2. La caractéristique du paraboloïde des normales est déterminée par les équations :

$$y\,z + p'\,x = 0 \tag{1}$$

$$y^2 - y^2 + a''\,x\,z + p''\,x + q''\,y - p'^2 = 0 \tag{2}$$

Cherchons la condition pour qu'une droite r soit située sur l'intersection des quadriques (1) et (2)

---

[1] HUSNY HAMID, *Sur les normales aux surfaces réglées*, C. R. du Congrès de la Rochelle.