

Compte-rendu de la 55e  
session, Nancy 1931 /  
Association française pour  
l'avancement des sciences...

Association française pour l'avancement des sciences. Congrès (055 ; 1931 ; Nancy). Auteur du texte. Compte-rendu de la 55e session, Nancy 1931 / Association française pour l'avancement des sciences.... 1931.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [utilisation.commerciale@bnf.fr](mailto:utilisation.commerciale@bnf.fr).

infinité dénombrable et admettent le point à l'infini comme point d'accumulation. Les valeurs caractéristiques

$$\rho = \frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_j} \quad (i \neq j)$$

sont aussi en infinité dénombrable et admettent une infinité de points d'accumulation : l'origine et les points  $\frac{1}{\lambda_i}$ .

On peut construire une fonction analytique admettant ces points comme zéros, à l'aide de la déterminante fondamentale de  $h(st)$ ; fonction qui admet une infinité de points singuliers essentiels.

Il est possible que cette fonction ait quelques-unes des propriétés fondamentales de l'équation de Killing. Elle se rencontre naturellement dans la résolution de l'équation intégrale

$$K(st) = H(st) + \lambda \int_a^b H(su) h(ut) du - \mu \int_a^b h(su) H(ut) du.$$

## Lucien GODEAUX

Profeseur à la Faculté des Sciences de Liège

### SUR LES SUITES DE LAPLACE TERMINÉES

1. — Considérons une suite de Laplace, les paramètres étant  $u, v$ ;

$$\dots, X_{-p}, \dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots, X_p, \dots \quad (1)$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des  $v$ , appartenant à un espace linéaire  $S_{2p+1}$  à  $2p+1$  dimensions et non à un espace à un nombre moindre de dimensions. Soit  $\Omega$  une réciprocity non singulière de  $S_{2p+1}$ , dont l'équation soit

$$\Omega(X, Y) = 0.$$

Désignons par  $Y_i$  le point que  $\Omega$  fait correspondre à l'hyperplan déterminé par le point  $X_{-i}$  et par les  $p$  points situés de part et d'autre du point  $X_{-i}$  dans la suite (1). On obtient ainsi une suite de Laplace

$$\dots, Y_p, \dots, Y_1, Y_0, Y_{-1}, \dots, Y_{-p}, \dots \quad (2)$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des  $u$ . On a par définition

$$\Omega(X_j, Y_i) = 0, \quad (j = -i - p, -i - p + 1, \dots, -i, \dots, -i + p).$$

La suite (2) ne peut appartenir à un espace linéaire ayant moins de  $2p+1$  dimensions.

2. Supposons que la suite (1) se termine au point  $X_p$  en présentant le cas de Laplace. On a (en représentant par  $\varphi^{ik}$  la dérivée partielle d'une fonction  $\varphi$  prise  $i$  fois par rapport à  $u$  et  $k$  fois par rapport à  $v$ ),  $X_p^{10} = 0$

et le point  $X_p$  décrit une courbe  $(X_p)$ . Nous supposons que cette courbe n'appartient pas à un hyperplan.

On obtient aisément, par dérivations successives,

$$\begin{aligned} \Omega(X_p, Y) &= 0, \dots, \Omega(X_p, Y_{-2p+1}) = 0, \Omega(X_p, Y_{-2p+1}^{10}) = 0, \dots \\ \Omega(X_p^{01}, Y_{-1}) &= 0, \dots, \Omega(X_p^{01}, Y_{-2p+1}) = 0, \Omega(X_p^{01}, Y_{-2p+1}^{10}) = 0, \dots \\ \Omega(X_p^{0,2p-1}, Y_{-2p+1}) &= 0, \Omega(X_p^{0,2p-1}, Y_{-2p+1}^{10}) = 0, \dots \\ \Omega(X_p^{0,2p}, Y_{-2p}) &= 0, \dots \end{aligned}$$

Les points  $Y_{-2p+1}, Y_{-2p+1}^{10}, Y_{-2p+1}^{20}, \dots$  appartiennent à la droite que la réciprocity  $\Omega$  fait correspondre à l'espace  $S_{2p-1}$  déterminé par les points  $X_p, X_p^{01}, \dots, X_p^{0,2p-1}$ . On a donc une relation de la forme

$$Y_{-2p+1}^{20} + AY_{-2p+1}^{10} + BY_{-2p+1} = 0.$$

Sur la surface  $(Y_{-2p+1})$ , les lignes  $u$  sont des droites qui sont tangentes à la courbe engendrée par le point  $Y_{-2p}$  lorsque  $v$  varie. Ce point  $Y_{-2p}$  correspond, par  $\Omega$ , à l'hyperplan osculateur à la courbe  $(X_p)$  au point  $X_p$ . La suite (2) se termine donc au point  $Y_{-2p}$  en présentant le cas de Goursat.

Si, contrairement à l'hypothèse faite plus haut, la courbe  $(X_p)$  appartient à un espace linéaire  $S_q$  à  $q \leq 2p$  dimensions, on peut voir que

a) Si  $q = 2p$ , le point  $Y_{-2p}$  est fixe et la surface  $(Y_{-2p+1})$  est un cône.

b) Si  $q = 2p - 1$ , le point  $Y_{-2p+1}$  appartient à la droite que  $\Omega$  fait correspondre à l'espace  $S_{2p-1}$  contenant  $(X_p)$ .

c) Si  $q < 2p - 1$ , le point  $Y_{-q}$  appartient à l'espace  $S_{2p-q}$  que  $\Omega$  fait correspondre à  $S_q$ ; il en est par suite de même de tous les points de la suite (2) et par conséquent de tous les points de la suite (1).

3. Supposons inversement que la suite (2) se termine, au point  $Y_{-2p}$  en présentant le cas de Goursat. Le point  $Y_{-2p+1}$  décrit une développable dont l'arête de rebroussement est la courbe  $(Y_{-2p})$ ; cette courbe ne peut appartenir à un hyperplan. L'hyperplan  $Y_{-2p} Y_{-2p+1} \dots Y_0$  est osculateur à la courbe  $(Y_{-2p})$  et le point  $X_p$  de la suite (1) que la réciprocity  $\Omega_{-1}$  fait correspondre à cet hyperplan décrit une courbe  $(X_p)$ . D'autre part, le point  $X_{p-1}$  que  $\Omega^{-1}$  fait correspondre à l'hyperplan  $Y_{-2p+1} \dots Y_1$  décrit une surface, par suite la suite (1) se termine au point  $X_p$  en présentant le cas de Laplace.

Dans ce qui précède, nous avons considéré une suite de Laplace appartenant à un espace ayant un nombre impair de dimensions simplement pour la facilité des notations, mais il est bien évident que le même résultat s'obtient de la même manière lorsque l'on considère un espace ayant un nombre pair de dimensions.

*A une suite de Laplace se terminant en présentant le cas de Laplace, une réciprocity fait correspondre une suite de Laplace se terminant en présentant le cas de Goursat, et inversement.*

Dans le cas où la réciprocity est une polarité, on retrouve un résultat dû à M. Tzitzeica,

4. Soit  $H$  une homographie non singulière de l'espace  $S_{2p+1}$ . A la suite de Laplace (1),  $H$  fait correspondre une suite de Laplace (3). Observons que l'opération  $\Omega_1$  définie par la relation  $H = \Omega_1 \Omega$ , est une réciprocity qui fait correspondre la suite (3) à la suite (2). Par suite

*A une suite de Laplace se terminant en présentant le cas de Laplace ou celui de Goursat, une homographie fait correspondre une suite de Laplace se terminant en présentant également respectivement le cas de Laplace ou celui de Goursat.*

---

## Husny HAMID

Professeur à la Faculté des Sciences de Stamboul

### SUR LA CARACTÉRISTIQUE DU PARABOLOÏDE DES NORMALES A UNE SURFACE RÉGLÉE

1. Dans une note antérieure <sup>(1)</sup>, j'ai obtenu le théorème suivant : « La courbe caractéristique du paraboloides des normales est en général une biquadratique réelle ; si cette biquadratique dégénère elle est formée d'une cubique et d'une droite ; elle ne peut jamais dégénérer en deux coniques ou en un quadrilatère gauche, à moins que deux génératrices successives ne se rencontrent ».

Je vais examiner de près le cas de la décomposition en une cubique et une droite.

Adoptons  $b$  pour paramètre  $u$  de position de la génératrice de la surface réglée, de sorte que les équations de cette génératrice sont :

$$x = z a(u) + p(u); \quad y = z u + q(u).$$

Nous supposons que le trièdre des axes a été choisi de manière que l'on ait pour la génératrice au voisinage de laquelle nous faisons notre étude :

$$a = p = q = a' = q' = 0 \quad p' \neq 0.$$

2. La caractéristique du paraboloides des normales est déterminée par les équations :

$$y z + p' x = 0 \tag{1}$$

$$y^2 - y^2 + a'' x z + p'' x + q'' y - p'^2 = 0 \tag{2}$$

Cherchons la condition pour qu'une droite  $r$  soit située sur l'intersection des quadriques (1) et (2)

---

<sup>(1)</sup> HUSNY HAMID, *Sur les normales aux surfaces réglées*, C. R. du Congrès de la Rochelle.