SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES DE GENRES NULS À COURBES BICANONIQUES IRRÉDUCTIBLES

par **Lucien Godeaux** (Liège)

Lorsque G. Castelnuovo recherchait les conditions de rationalité d'une surface algébrique ($p_a = P_2 = 0$), il fut conduit à construire des surfaces ayant les genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 0$. Effectivement, il construisit une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$, $P_2 = 2$. De son côté, F. Enriques a montré que la surface du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, a les genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$, $P_2 = 1$. Le problème de déterminer toutes les surfaces non rationnelles, de genres $p_a = p_g = 0$, était ainsi posé. Ces surfaces peuvent se partager en deux catégories: celles dont les courbes bicanoniques et pluricanoniques sont composées au moyen des courbes elliptiques d'un faisceau et celles dont les courbes bicanoniques (et pluricanoniques) sont irréductibles. Ce sont ces dernières qui retiendront notre attention ici. Quelques exemples en ont été construits, en 1931, par M. Campedelli et par nous, où l'on a $P_2 = 2$ ou $P_2 = 3$. (1). D'autres exemples, où P_2 atteint jusqu'à la valeur sept, ont été construits récemment par M. P. Burniat, dans un mémoire encore inédit. Nous avons d'ailleurs établi que la valeur maximum de P_2 était égale à dix.

Revenons à l'exemple d'Enriques. Celui-ci a montré que toute surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$, à courbe bicanonique d'ordre zéro, était une transformée birationnelle de sa surface et que celle-ci était l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface dont tous

(1) On trouvera la bibliographie de ces questions dans notre exposé sur *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls.* Actualités scientifiques N° 123 (Paris, Hermann, 1934).

les genres sont égaux à l'unité ($p_a = P_4 = 1$). Partant de ce dernier fait, nous avons cherché à construire des surfaces de genres $p_a = p_g = 0$ comme images d'involutions cycliques, privées de points unis, appartenant à une surface algébrique. C'est par ce procédé que nous avons pu construire des surfaces de bigenre $P_2 = 2$, $P_2 = 3$ dont les courbes bicanoniques sont irréductibles. La première de ces surfaces est l'image d'une involution d'ordre cinq appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 4$, $P_2 = 10$. Nous avons pu prouver récemment que toute surface ayant les caractères de cette première surface pouvait s'y ramener par une transformation birationnelle ([1]). La seconde est l'image d'une involution d'ordre huit appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 7$ ([2]).

L'objet de ce travail est de rechercher dans quelles conditions une surface algébrique F contient une involution cyclique privée de points unis, dont l'image est une surface F' de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 0$, les courbes bicanoniques étant irréductibles.

1. Soit F une surface algébrique régulière, de genres p_a, $p^{(1)}$ contenant une involution cyclique I d'ordre p, dépourvue de points unis. Nous désignerons par $|K|$ le système canonique de F et par T la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution. Nous supposerons que le système canonique $|K|$ est simple, c'est-à-dire qu'il n'est pas composé au moyen d'une involution ou d'un faisceau et qu'il est dépourvu de composantes fixes. De plus nous supposerons $p_a > 2$, c'est-à-dire que $|K|$ n'est pas un faisceau.

La transformation T change le système canonique en soi et il existe donc au moins une courbe canonique, soit $\overline{K}$, transformée en elle-même par T. Si nous désignons par F' une surface image de l'involution I, il correspond à $\overline{K}$ sur cette surface une courbe K' d'un certain genre π. La formule de Zeuthen donne

$$p^{(1)} = p(\pi - 1) + 1.$$

D'autre part, entre le genre arithmétique p_a de F et celui p_a' de F', nous avons la relation ([3])

$$p_a + 1 = p(p_a' + 1).$$

([1]) *Sur les surfaces de genres géométrique et arithmétique nuls possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles* (Bulletin de l'Académie Roy. de Belgique, 1958, pp. 738-749).

([2]) *Sur la construction de surfaces non rationnelles de genres zéro* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1949, pp. 688-693).

([3]) Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*. Actualités scientifiques, N° 270 (Paris, Hermann, 1935), ou encore notre *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Académie Roy. de Belgique, 1953, pp. 1-80).

Supposons qu'il y ait dans $|K|$, $t(t \leqslant p)$ systèmes linéaires partiels $|K_1|$, $|K_2|, \ldots, |K_t|$ appartenant à l'involution I et soient $r_1, r_2, \ldots, r_t$ leurs dimensions. D'après la théorie des homographies, on a

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_t + t = p_a.$$

Les systèmes $|K_1|, |K_2|, \ldots, |K_t|$ sont de degré $p^{(1)} - 1 = p(\pi - 1)$. Soient $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_t|$ les systèmes linéaires (complets) qui leur correspondent sur F'. Ces systèmes ont le degré $(p^{(1)} - 1) : p = \pi - 1$ et le genre π. Un seul de ces systèmes peut être spécial et est alors le système canonique de F'. Les autres systèmes sont non spéciaux et d'après le théorème de Riemann-Roch, leurs dimensions sont toutes égales à p_a'.

Nous avons donc deux hypothèses à examiner suivant que F' possède un système canonique ou non.

2. Supposons en premier lieu que F' possède un système canonique, c'est-à-dire que $p_a' > 0$. Soit précisement $|\Gamma_t|$ ce système canonique, de dimension $r_t = p_a' - 1$.

L'adjoint $|\Gamma_t'|$ à $|\Gamma_t|$ est le système bicanonique de F' et a la dimension $P_2' - 1 = p_a' + \pi - 1$, puisque le genre linéaire de F' est égal à π.

Sur une courbe Γ_1, les courbes Γ_t' découpent une série paracanonique complète $g_{2\pi-2}^{\pi-2}$ et par conséquent le système $|\Gamma_t' - \Gamma_1|$ a la dimension $p_a' + \pi - 1 - (\pi - 1) = p_a'$. À ce système correspond sur F un système de courbes canoniques composé au moyen de l'involution I, distinct du système $|K_t|$, c'est-à-dire un des systèmes $|K_1|, |K_2|, \ldots, |K_{t-1}|$.

Observons que les systèmes $|\Gamma_t' - \Gamma_1|$, $|\Gamma_t' - \Gamma_2|$ ne peuvent coïncider, car cela entraînerait $\Gamma_1 \equiv \Gamma_2$. Il en résulte que les systèmes $|\Gamma_t' - \Gamma_1|, |\Gamma_t' - \Gamma_2|, \ldots, \Gamma_t' = \Gamma_{t-1}|$, de dimension p_a', coïncident, dans un certain ordre, avec les systèmes $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_{t-1}|$. On en conclut $r_1 = r_2 = \cdots = r_{t-1} = p_a'$ et

$$(t-1)(p_a' + 1) + p_a' = p_a = p(p_a' + 1) - 1,$$

d'où $t = p$.

Par conséquent: *Si une surface algébrique regulière F de genre $p_a > 2$ contient une involution cyclique d'ordre p privée de points unis et si la surface F' image de cette involution a le genre arithmétique $p_a' > 0$, le système canonique de F contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution, $p - 1$ ont la dimension p_a' et le dernier, auquel correspond le système canonique de F', la dimension $p_a' - 1$.*

La surface F' est régulière et son genre linéaire est égal à π.

3. Supposons maintenant que la surface F' soit dépourvue de système canonique, c'est-à-dire que l'on ait $p'_a = 0$. On a alors $p = p_a + 1$.

Les courbes Γ'_1 adjointes aux courbes Γ_1 découpent sur une de celles-ci la série canonique complète $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$, donc, puisque $|\Gamma'_1|$ ne peut contenir $|\Gamma_1|$, la dimension de $|\Gamma'_1|$ est $\pi - 1$. Sur une courbe Γ_2, $|\Gamma'_1|$ découpe une série paracanonique $g_{2\pi-2}^{\pi-2}$ complète, donc le système $|\Gamma'_1 - \Gamma_2|$ a la dimension $\pi - 1 - (\pi - 1) = 0$. Le système $|\Gamma'_1 - \Gamma_2|$ coïncide avec un des systèmes $|\Gamma_2|, |\Gamma_3|, \ldots, |\Gamma_t|$. De même, les systèmes $|\Gamma'_1 - \Gamma_3|, |\Gamma'_1 - \Gamma_4|, \ldots, |\Gamma'_1 - \Gamma_t|$ et d'une manière générale $|\Gamma'_i - \Gamma_k|$ sont des courbes isolées et coïncident dans un certain ordre avec $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_t|$.

Observons que les systèmes $|\Gamma'_1 - \Gamma_2|, |\Gamma'_1 - \Gamma_3|$, par exemple, sont des courbes distinctes.

Cela étant, les systèmes $|\Gamma'_1 - \Gamma_2|, |\Gamma'_1 - \Gamma_3|, \ldots, |\Gamma'_1 - \Gamma_t|$ reproduisent, dans un certain ordre, les systèmes $|\Gamma_2|, |\Gamma_3|, \ldots, |\Gamma_t|$ et ces systèmes ont la dimension nulle. Parmi les systèmes $|\Gamma'_2 - \Gamma_1|, |\Gamma'_2 - \Gamma_3|, \ldots, |\Gamma'_1 - \Gamma_t|$ se trouve certainement le système $|\Gamma_1|$, donc ce système a également la dimension nulle.

On en conclut

$$t = p_a = p - 1.$$

Par suite: *Si une surface algébrique régulière F de genre $p_a > 2$ contient une involution cyclique d'ordre $p = p_a + 1$ dépourvue de points unis et ayant comme image une surface F' (régulière) de genre $p'_a = 0$, le système canonique de F contient $p - 1$ courbes isolées appartenant à l'involution.*

Le genre linéaire de F' est égal à π et celui de F à

$$p^{(1)} = (p_a + 1)(\pi - 1) + 1.$$

4. Nous nous placerons désormais dans les cas où $p'_a = 0$ et nous désignerons par $K_1, K_2, \ldots, K_{p-1}$ les courbes canoniques de F appartenant à l'involution, par $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-1}$ les courbes, de genre π, qui leur correspondent sur F'.

Si ε désigne une racine primitive d'ordre p de l'unité, on peut attacher à chacune des courbes K_i une puissance de ε. Précisément, nous attacherons à K_i le nombre ε^i.

Le système bicanonique de F contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution et auxquels sont attachés les nombres $\varepsilon^0 = 1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-1}$.

Le système auquel est attaché le nombre 1 contient les courbes

$$K_1 + K_{p-1},\ K_2 + K_{p-2},\ \ldots .$$

Le système auquel est attaché le nombre ε comprend les courbes

$$K_2 + K_{p-1},\ K_3 + K_{p-2},\ \ldots .$$

Ce dernier système ne contient aucune courbe contenant K_1 comme partie. Par contre, tous les autres systèmes contiennent une courbe dont K_1 fait partie. Sur F', il correspond au système considéré un système contenant les courbes

$$\Gamma_2 + \Gamma_{p-1},\ \Gamma_3 + \Gamma_{p-2},\ \ldots,$$

mais aucune courbe contenant Γ_1 comme partie. Par contre, les systèmes correspondant sur F' aux autres systèmes appartenant à l'involution I et compris dans le système bicanonique de F contiennent une courbe contenant Γ_1 comme partie. Puisque $p'_a = p'_g = 0$, aucun d'eux ne peut être l'adjoint à Γ_1. On en conclut que cet adjoint est nécessairement le système qui correspond au nombre ε. On a donc, pour l'adjoint $|\Gamma'_1|$ à Γ_1,

$$\Gamma'_1 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_{p-1} \equiv \Gamma_3 + \Gamma_{p-2} \equiv \cdots .$$

Un raisonnement analogue montre que l'adjoint à la courbe Γ_i est celui des systèmes linéaires correspondant au système linéaire partiel du système bicanonique de F auquel est attaché le nombre ε^i. On a

$$\Gamma'_i \equiv \Gamma_{i+1} + \Gamma_{p-1} \equiv \Gamma_{i+2} + \Gamma_{p-2} \equiv \cdots .$$

Les systèmes adjoints $|\Gamma'_1|$, $|\Gamma'_2|$, ..., $|\Gamma'_{p-1}|$ sont réguliers (théorème de Picard) et découpent respectivement sur $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-1}$ la série canonique complète. Ils ont donc, puisque $p'_g = 0$, la dimension $\pi - 1$.

Le système linéaire comprenant les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_{p-1} \Gamma_2 + \Gamma_{p-2}, \ldots$, correspondant à $\varepsilon^0 = 1$, est le système bicanonique $|C_2|$ de la surface F'. On a donc

$$C_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_{p-1} \equiv \Gamma_2 + \Gamma_{p-2} \equiv \cdots .$$

Le système tricanonique $|C_3|$ de F' est l'adjoint à $|C_2|$; on a donc

$$C_3 \equiv C'_2 \equiv \Gamma'_1 + \Gamma_{p-1} \equiv \Gamma_2 + 2\Gamma_{p-1} \equiv \cdots .$$

À ce système est attaché le nombre $\varepsilon^0 = 1$.

5. Pour poursuivre cette étude, nous allons considérer séparément les cas où p_a est pair ou impair, c'est-à-dire où p est impair ou pair.

Supposons en premier lieu p_a pair et posons $p_a = 2s$, d'où $p = 2s + 1$. Nous avons

$$C_2 = \Gamma_1 + \Gamma_{2s} \equiv \Gamma_2 + \Gamma_{2s-1} \equiv \cdots \equiv \Gamma_s + \Gamma_{s+1}.$$

Ensuite, nous avons

$$\Gamma'_1 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_{2s} \equiv \Gamma_3 + \Gamma_{2s-1} \equiv \cdots \equiv \Gamma_s + \Gamma_{s+2} \equiv 2\Gamma_{s+1}.$$

$$\Gamma'_2 \equiv 2\Gamma_1 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_{2s} \equiv \cdots \equiv \Gamma_s + \Gamma_{s+3} \equiv \Gamma_{s+1} + \Gamma_{s+2}.$$

Plus généralement, nous avons

$$\Gamma'_{2i} \equiv \Gamma_1 + \Gamma_{2i-1} \equiv \Gamma_2 + \Gamma_{2i-2} \equiv \cdots \equiv \Gamma_{i-1} + \Gamma_{i+1} \equiv 2\Gamma_i,$$

$$\Gamma'_{2i+1} \equiv \Gamma_1 + \Gamma_{2i} \equiv \Gamma_2 + \Gamma_{2i-1} \equiv \cdots \equiv 2\Gamma_{s+i+1}.$$

Chacun des systèmes $|C_2|$, $|\Gamma'_1|$, $|\Gamma'_2|$, ..., $|\Gamma_{2s}|$ contient s courbes formées de deux courbes Γ.

Observons que nous avons $s > 1$, puisque par hypothèse $p_a > 2$.

Rapportons projectivement les courbes canoniques K de F aux hyperplans d'un espace linéaire S_{2s-1} à $2s - 1 = p_a - 1$ dimensions. Puisque par hypothèse le système canonique est simple, nous obtenons une surface simple $\overline{F}$, transformée birationnelle de F. Si nous rapportons l'espace S_{2s-1} à une figure de référence formée par les hyperplans découpant sur $\overline{F}$ les courbes $K_1, K_2, \ldots, K_{p-1}$, la transformation T donne une homographie dont les équations peuvent s'écrire

$$\frac{x'_1}{\varepsilon x_1} = \frac{x'_2}{\varepsilon^2 x_2} = \cdots = \frac{x'_{2s}}{\varepsilon^{2s} x_{2s}}.$$

Les hyperquadriques de S_{2s-1} linéairement indépendantes sont au nombre de $s(2s + 1)$. Les hyperquadriques découpent sur $\overline{F}$ le système bicanonique, de dimension $P_2 - 1 = p_a - p^{(1)} - 1 = (2s + 1)\pi - 1$. On en conclut que les hyperquadriques contenant $\overline{F}$ forment un système linéaire de dimension $(2s + 1)(s - \pi) - 1$. Par suite, on a $s \geqslant \pi$.

Supposons $s > \pi$. Le système $|C_2|$ a la dimension $\pi - 1$ et parmi les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_{2s}$, $\Gamma_2 + \Gamma_{2s-1}$, ... de ce système, il y en a π qui sont linéairement indépendantes. On peut supposer que ce sont les π premières.

Considérons les hyperquadriques de S_{2s-1} dont l'équation, lorsque l'on opère l'homographie T, se reproduit exactement (multipliée par $\varepsilon^0 = 1$). Elles ont pour équation

$$\lambda_1 x_1 x_{2s} + \lambda_2 x_2 x_{2s-1} + \cdots + \lambda_s x_s x_{s+1} = 0.$$

Les hyperquadriques du système

$$\lambda_1 x_1 x_{2s} + \lambda_2 x_2 x_{2s-1} + \cdots + \lambda_\pi x_\pi x_{2s-\pi+1} = 0$$

découpent sur $\bar{F}$ les courbes bicanoniques transformées des courbes C_2. Les hyperquadriques

$$\lambda_{\pi+1} x_{\pi+1} x_{2s-\pi} + \cdots + \lambda_s x_s x_{s+1} = 0$$

doivent donc contenir $\bar{F}$. Mais parmi ces hyperquadriques il y en a qui sont décomposées en deux hyperplans. La surface $\bar{F}$ serait donc dégénérée ou appartiendrait à un hyperplan, ce qui est absurde. On doit donc avoir $\pi = s$.

Les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{2s}$ ont le genre $\pi = s$, donc les systèmes $|\Gamma_1'|$, $|\Gamma_2'|, \ldots, \Gamma_{2s}'|$ ont la dimension $s-1$ comme $|C_2|$. Le nombre des hyperquadriques linéairement indépendantes passant par $\bar{F}$ est égal à $(2s+1)(s-\pi) = 0$. Donc :

Si une surface algébrique régulière F de genre arithmétique $p_a = 2s > 2$ contient une involution cyclique d'ordre $p = 2s+1$, dépourvue de points unis, la surface F' image de cette involution est dépourvue de courbe canonique mais possède des courbes bicanoniques irréductibles. Pour la surface F', on a $p_a' = p_g' = 0$, $p^{(1)} = P_2' = s$.

Le modèle projectif de la surface F dont les sections hyperplanes constituent le système canonique ne peut appartenir à une hyperquadrique.

6. Supposons maintenant p_a impair et posons $p_a = 2s - 1$, d'où $p = 2s$. Le système bicanonique de F' est

$$|C_2| \equiv \Gamma_1 + \Gamma_{2s-1} \equiv \Gamma_2 + \Gamma_{2s-2} \equiv \cdots \equiv \Gamma_{s-1} + \Gamma_{s+1} \equiv 2\Gamma_s.$$

Les systèmes adjoints $|\Gamma_1'|, |\Gamma_2'|, \ldots, |\Gamma_{2s-1}'$, aux courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{2s-1}$ sont donnés par

$$\Gamma_1' \equiv \Gamma_2 + \Gamma_{2s-1} \equiv \Gamma_3 + \Gamma_{2s-2} \equiv \cdots \equiv \Gamma_{s-1} + \Gamma_{s+2} \equiv \Gamma_s + \Gamma_{s+1},$$

$$\Gamma_2' \equiv 2\Gamma_1 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_{2s-1} \equiv \cdots \equiv \Gamma_{s-1} + \Gamma_{s+3} \equiv \Gamma_s + \Gamma_{s+2} \equiv 2\Gamma_{s+1},$$

. . . .

$$\Gamma_{2i+1}' \equiv \Gamma_1 + \Gamma_{2i} \equiv \Gamma_2 + \Gamma_{2i-1} \equiv \cdots \equiv \Gamma_i + \Gamma_{i+1} \equiv \cdots \equiv \Gamma_{2i+s} + \Gamma_{s+1},$$

$$\Gamma_{2i}' \equiv 2\Gamma_i \equiv \Gamma_1 + \Gamma_{2i-1} \equiv \cdots \equiv 2\Gamma_{s+i}.$$

Observons que le système $|C_2|$ contient s courbes formées de couples de courbes Γ. Les systèmes $|\Gamma_1'|, |\Gamma_3'|, \ldots, |\Gamma_{2s-1}'|$ contiennent chacun $s-1$ courbes formées de deux courbes Γ, enfin les systèmes $|\Gamma_2'|, |\Gamma_4'|, \ldots, |\Gamma_{2s-2}'|$ en contiennent chacun s. Parmi les systèmes $|C_2|, |\Gamma_1'|, |\Gamma_2'|, \ldots, |\Gamma_{2s-1}'|$ il y a donc s qui contiennent s courbes formées de deux courbes Γ et s qui n'en contiennent que $s-1$.

Rapportons prejectivement les courbes K aux hyperplans d'un espace linéaire S_{2s-2} et appelons $\overline{F}$ la surface qui correspond à F. Rapportons l'espace à la figure de référence formée par les hyperplans qui découpent sur $\overline{F}$ les courbes $K_1, K_2, \ldots, K_{2s-1}$. À la transformation T correspond l'homographie

$$\frac{x_1'}{\varepsilon x_1} = \frac{x_2'}{\varepsilon^2 x_2} = \cdots = \frac{x_{2s-1}'}{\varepsilon^{2s-1} x_{2s-1}}.$$

Les hyperquadriques de S_{2s-2} linéairement indépendantes sont au nombre de $s(2s-1)$. Les courbes bicanoniques linéairement indépendantes de F sont au nombre de $P_2 = 2s\pi$. Par conséquent, il existe $s(2s-2\pi-1)$ hyperquadriques linéairement indépendantes contenant $\overline{F}$. On doit donc avoir $\pi \leqslant s-1$.

Considérons le système $|\Gamma_1'|$; il a la dimension $\pi - 1$, donc il y a π courbes de ce système, formées de deux courbes Γ, linéairement indépendantes. On peut supposer que ce sont les π premières. Aux courbes Γ_1' correspondent sur $\overline{F}$ des courbes bicanoniques découpées par les hyperquadriques dont l'équation, lorsque l'on effectue l'homographie T, se reproduit multipliée par ε. D'une manière précise, ces courbes sont découpées par les hyperquadriques

$$\lambda_1 x_2 x_{2s-1} + \lambda_2 x_3 x_{2s-2} + \cdots + \lambda_\pi x_{\pi+1} x_{2s-\pi} = 0$$

et il en résulte que les hyperquadriques

$$\lambda_{\pi+1} x_{\pi+2} x_{2s-\pi-1} + \cdots + \lambda_{s-1} x_s x_{s+1} = 0$$

contiennent la surface $\overline{F}$. Mais cela est impossible, car parmi ces hyperquadriques il en est qui sont dégénérées en deux hyperplans et $\overline{F}$ serait, ou dégénérée, ou située dans un hyperplan. On doit donc avoir $\pi = s-1$.

Considérons alors le système $|C_2|$. Il a la dimension $\pi - 1 = s-2$. Les courbes bicanoniques qui correspondent sur $\overline{F}$ aux courbes C_2 sont découpées par les hyperquadriques

$$\lambda_1 x_1 x_{2s-1} + \lambda_2 x_2 x_{2s-2} + \cdots + \lambda_{s-1} x_{s-1} x_{s+1} + \lambda_s x_s^2 = 0.$$

Puisque ce système, de dimension $s-1$, doit découper sur $\overline{F}$ un système de dimension $s-2$, la surface appartient à une hyperquadrique (irréductible) du système.

On peut reprendre ce raisonnement en partant de chacun des systèmes $|\Gamma_2'|, |\Gamma_4'|, \ldots, |\Gamma_{2s-2}'|$ et on en conclut que la surface $\overline{F}$ appartient à s hyperquadriques linéairement indépendantes.

Si une surface algébrique régulière F de genre arithmétique impair $p_a = 2s - 1$ contient une involution cyclique d'ordre pair $p = 2s$ privée de points unis, la surface F' image de cette involution est dépourvue de courbes canoniques mais possède des courbes bicanoniques irréductibles. La surface F' a les genres $p'_a = p'_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = s - 1$.

Le modèle projectif de la surface F dont les sections hyperplanes constituent le système canonique appartient à s hyperquadriques linéairement indépendantes. Chacune de ces hyperquadriques est représentée par une équation qui, lorsque l'on effectue l'homographie T, se reproduit multipliée par une puissance pair de ε, ces puissances étant différentes pour ces hyperquadriques.

7. Comme nous l'avons dit au début, nous avons déjà considéré deux exemples des constructions précédentes.

Dans le premier exemple, la surface F est du cinquième ordre dans S_3 et est transformée en soit par une homographie de période cinq ayant quatre points unis n'appartenant pas à la surface. On a donc $p_a = p_g = 4$, $p = 5$. La surface F', de genres $p'_a = p'_g = 0$, $P_2 = 2$, $P_3 = 4$ a un modèle tricanonique intéressant. C'est une surface du septième ordre ayant comme droites doubles tacnodales les côtés d'un quadrilatère gauche. Les diagonales du quadrilatère appartiennent à la surface et sont des droites exceptionnelles. Les courbes bicanoniques sont découpées par les quadriques passant par les côtés du quadrilatère gauche; ce sont des courbes d'ordre six et de genre quatre. La partie variable des courbes tricanoniques engendre le système des sections planes.

Comme nous l'avons dit plus haut, nous avons pu démontrer que toute surface de genre $p'_a = p'_g = 0$ possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles est une transformée birationnelle de la surface F'.

Dans le second exemple, la surface F est l'intersection de quatre hyperquadriques dans S_6; elle est transformée en soi par une homographie T de période huit, aucun des points unis pour T, T^2, T^4 n'appartenant à la surface. Cette surface a les genres $p_a = p_g = 7$, $p^{(1)} = 17$ et le système canonique est celui des sections hyperplanes. La surface F' a les genres $p'_a = p'_g = 0$, $p^{(1)} = 3$, $P_2 = 3$, $P_3 = 7$.

8. Dans ce qui va suivre, nous supposerons que $p = 2s + 1$ est un nombre premier. On peut observer que si p n'est pas premier et par exemple égal à qq_1, où q est premier, il suffirait de considérer la surface F_1 image de l'involution d'ordre q_1 engendrée sur F par T^q et dont les caractères pouvent être

obtenus en appliquant le théorème du début de ce travail. Sur cette surface F_1, on aurait alors une involution analogue à celle que l'on va considérer.

Le système tricanonique $|C_3| = |C_2'|$ de F' a la dimension

$$P_3' - 1 = 3(\pi - 1) = 3(s-1).$$

Considérons l'adjoint $|\Gamma_1''|$ au système $|\Gamma_1'|$. Nous avons

$$\Gamma_1'' - \Gamma_1 \equiv C_2, \qquad \Gamma_1'' \equiv C_2 + \Gamma_1.$$

Sur la courbe Γ_1, le système $|\Gamma_1''|$ découpe une série linéaire complète d'ordre $3(s-1)$, donc non spéciale et par conséquent de dimension $2s-3$. Les courbes passant par $2s-2$ points de Γ_1 contiennent cette courbe et sont complétées par les courbes de $|C_2|$, de dimension $s-1$. Il en résulte que $|\Gamma_1''|$ a la dimension $3(s-1)$ comme $|C_3|$.

À une courbe C_2 correspond sur F une courbe bicanonique, à Γ_1 une courbe canonique, donc à Γ_1'' une courbe tricanonique. D'autre part, on a

$$C_2 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_{2s-1}, \qquad \Gamma_1' \equiv \Gamma_3 + \Gamma_{2s-2}$$

et

$$C_2' \equiv C_3 \equiv \Gamma_2' + \Gamma_{2s-1}, \qquad \Gamma_1'' \equiv \Gamma_2' + \Gamma_{2s-2} \equiv 2\Gamma_1 + \Gamma_{2s-2},$$

donc $|\Gamma_1''|$ ne peut coïncider avec $|C_3|$.

Les adjoints $|\Gamma_2''|, |\Gamma_3''|, \ldots, |\Gamma_{2s}''|$ ont la même dimension $3(s-1)$ que $|C_3|$ et $|\Gamma_1''|$. À ces systèmes correspondent sur F des courbes tricanoniques. Ces systèmes sont distincts et distincts de $|C_3|$, $|\Gamma_1''|$. Il en résulte qu'il y a sur F, p systèmes linéaires appartenant à l'involution I et formés de courbes tricanoniques. Nous les désignerons par $|(3K)_0|, |(3K)_1|, \ldots, |(3K)_{2s}|$, ces systèmes correspondant respectivement à $|C_3|, |\Gamma_1''|, \ldots, |\Gamma_{2s}''|$.

On observera qu'à ces systèmes sont respectivement attachés les nombres $\varepsilon^0 = 1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{2s}$.

Le système tricanonique de F contient p systèmes linéaires partiels de même dimension $3(\pi-1) = 3(s-1)$ appartenant à l'involution I.

Comme le trigenre de F est $P_3 = p + 3p(\pi - 1) = p(3s-2)$, ce résultat est d'accord avec la théorie des homographies.

9. Nous voyons donc que le système tricanonique de F, de même que le système bicanonique, contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I et ayant la même dimension. Ce résultat peut être étendu aux systèmes pluricanoniques.

Le système n-canonique $|C_n|$ de F' a la dimension

$$P'_n - 1 = \binom{n}{2}(s-1)$$

et n'est autre que le système adjoint d'ordre $n - 2$ au systèmes $|C_2|$.

Nous avons

$$\Gamma_2^{(n-1)} - \Gamma_1 \equiv C_{n-1}, \qquad \Gamma_1^{(n-1)} \equiv C_{n-1} + \Gamma_1,$$

C_{n-1} étant une courbe $(n-1)$-canonique de F'.

Les courbes $\Gamma_1^{(n-1)}$ découpent sur Γ_1 une série linéaire d'ordre $n(s-1)$, de dimension $(n-1)(s-1)-1$. Donc les courbes $\Gamma_1^{(n-1)}$ qui passent par $(n-1)(s-1)$ points de Γ_1 contiennent cette courbe et sont complétées par les courbes C_{n-1}. Le système $(n-1)$-canonique de F' ayant la dimension

$$P'_{n-1} - 1 = \binom{n-1}{2}(s-1),$$

on en conclut que $\Gamma_1^{(n-1)}$ a la dimension $P'_n - 1$.

Les systèmes $\Gamma_2^{(n-1)}, \Gamma_3^{(n-1)}, \ldots, \Gamma_{2s}^{(n-1)}$ ont également, pour la même raison, la dimension P'_{n-1}, sont distincts et distincts de $|C_n|$, $|\Gamma_1^{(n-1)}|$. À ces systèmes correspondent sur F des systèmes linéaires partiels de courbes n-canoniques appartenant à l'involution I. Donc:

Le système n-canonique de F contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I et ayant la même dimension $P'_n - 1$.

Aux systèmes $|C_n|$, $|\Gamma_1^{(n-1)}|$, $|\Gamma_2^{(n-1)}|, \ldots, |\Gamma_{2s}^{(n-1)}|$ sont respectivement attachés les nombres $\varepsilon^0 = 1$, ε, $\varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{2s}$. Nous représenterons leurs homologues sur F par $|(nK)_0|$, $|(nK)_1|$, $|(nK)_2|, \ldots, |(nK)_{2s}|$.

10. Dans l'espace S_{2s-1}, l'homographie T engendre une involution d'ordre p que nous désignerons par I'. De ce qui précède résulte que parmi les hyperquadriques de cet espace, il y a p systèmes linéaires appartenant à l'involution I' et que ces systèmes ont la même dimension. Nous allons montrer qu'il en est de même pour les systèmes d'hypersurfaces algébriques.

Désignons par

$$\varphi_0 = 0, \ \varphi_1 = 0, \ \ldots, \ \varphi_{2s} = 0$$

les équations des systèmes d'hyperquadriques appartenant à l'involution I', étant entendu qu'au système $\varphi_i = 0$ est attaché le nombre ε^i. Parmi les hypersurfaces cubiques de S_{2s-1}, il y a évidemment p systèmes linéaires composés au moyen de l'involution I'. Écrivons leur équations sous la forme

$$\psi_0 = 0,\ \psi_1 = 0,\ \ldots,\ \psi_{2s} = 0,$$

le nombre ε^i étant attaché au système $\psi_i = 0$.

Considérons l'homographie H_0.

$$\frac{x_1'}{x_{2s}} = \frac{x_2'}{x_{2s=1}} = \cdots = \frac{x_i'}{x_{2s+1-i}} = \cdots = \frac{x_{2s}'}{x_1}.$$

Au terme

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_{2s}^{i_{2s}}, \qquad (i_1 + i_2 + \cdots + i_{2s} = 3)$$

H_0 fait correspondre le terme

$$x_1^{i_{2s}} x_2^{i_{2s-1}} \ldots x_{1s}^{i_1}.$$

Lorsque l'on applique T au premier terme, il se reproduit multiplié par la puissance $i_1 + 2i_2 + \cdots + 2si_{2s}$ de ε, le second par la puissance $2si_1 + \cdots + i_{2s}$ de ε. La somme de ces deux nombres est congrue à zero, modulo p. On en conclut qu'au système $\psi_0 = 0$, H_0 fait correspondre $\psi_0 = 0$, au système $\psi_k = 0$, le système $\psi_{p-k} = 0$, ces deux derniers systèmes ont donc la même dimension.

Nous pouvons écrire

$$\psi_k = x_1 \psi_{k-1} + \psi_k',$$

où ψ_k' ne contient plus x_1.

Considérons alors, dans l'hyperplan $x_1 = 0$, l'homographie H_1,

$$\frac{x_2'}{x_{2s}} = \frac{x_3'}{x_{2s-1}} = \cdots = \frac{x_s'}{x_{s+2}} = \frac{x_{s+1}'}{x_{s+1}} = \frac{x_{s+2}'}{x_s} = \cdots = \frac{x_{2s}'}{x_2}.$$

Au terme

$$x_2^{i_2} x_3^{i_3} \ldots x_{2s}^{i_{2s}},$$

H_1 fait correspondre le terme

$$x_{2s}^{i_2} x_{2s-1}^{i_3} \ldots x_2^{2_s}.$$

Si le premier terme appartient à ψ_k', on a

$$2i_2 + 3i_3 + \cdots + 2si_{2s} \equiv k, \qquad (\text{mod. } p). \qquad (1)$$

Lorsque l'on applique T, le second terme se reproduit multiplié par la puissance

$$2si_2 + (2s-1)i_3 + \cdots + 2i_{2s} \qquad (2)$$

de ε. En ajoutant les premiers membres de (1) et (2), on trouve

$$i_2 + i_3 + \cdots + i_{2s} \equiv 3, \qquad (\text{mod. } p).$$

On en conclut que le second terme appartient à ψ'_{3-k} si $k \leq 3$, à ψ'_{2s+4-k} si $k > 3$. Par conséquent, ψ'_k et ψ'_{2s+4-k} ont le même nombre de termes. Comme φ_k et φ_{2s+4-k} ont le même nombre s de termes, ψ_k et ψ_{2s+4-k} ont le même nombre de termes.

On peut reprendre le raisonnement précédent en considérant les hyperplans $x_2 = 0, \ldots, x_{2s} = 0$ et on voit finalement que les ψ ont le même nombre de termes. En appliquant la théorie des homographies au système d'hypersurfaces cubiques de S_{2s-1}, on voit que le nombre de ces termes est $\frac{2}{3}s(s+1)$, ce qui est un entier puisque, p étant premier, s ne peut être de la forme $3t+1$.

Le raisonnement précédent s'étant sans difficulté aux hypersurfaces d'ordre quelconque et par conséquent:

Les hypersurfaces d'ordre n de S_{2s-1} se répartissent en p systèmes linéaires appartenant à l'involution I' engendrée dans cet espace par l'homographie T. Ces systèmes ont la même dimension

$$\frac{(2s+n-1)(2s+n-2)\ldots(2s+2)3s}{n!}.$$

11. Reprenons la surface $\bar{F}$ de S_{2s-1} et pour plus de simplicité typographique, désignons-la par F.

Nous avons vu que le trigenre de F est $P_3 = p(3s-2)$, par conséquent le nombre des hypersurfaces cubiques de S_{2s-1} qui contiennent F est

$$\binom{2s+2}{3} - p(3s-2) = \frac{1}{3}p(s-2)(2s-3).$$

Ce résultat peut être précisé. Considérons sur F le système $|(3K)_k|$. Il est découpé sur F par les hypersurfaces cubiques dont l'équation, lorsque l'on applique l'omographie T, se reproduit multipliée par ε^k, c'est-à-dire par les hypersurfaces $\psi_k = 0$ ne contenant pas F. Or $|(3K)_k|$ a la dimension $3(s-1)$ e $\psi_k = 0$, la dimension $\frac{2}{3}s(s+1) - 1$, donc il y a

$$\frac{2}{3}s(s+1) - 3(s-1) = \frac{1}{3}(s-2)(2s-3)$$

hypersurfaces cubiques linéairement indépendantes de $\psi_k = 0$ qui contiennent F.

La surface F appartient à p systèmes linéaires d'hypersurfaces cubiques de même dimension $\frac{1}{2}(s-2)(2s-3) - 1 = \frac{1}{3}(2s-1)(s-3)$. Lorsque l'on ap-

plique l'homographie E, ces p systèmes se reproduisent multipliés respectivement par les p premières puissances de ε.

Le même raisonnement peut être appliqué aux hypersurfaces d'ordre quelconque $n > 2$. On trouve ainsi que la surface F appartient aux hypersurfaces d'ordre n de p systèmes linéaires de dimension

$$\frac{4(2s+n-1)(2s+n-2)\ldots(2s+3)(s+1)s}{n!} - \frac{n(n-1)(s-1)}{2}.$$

Les équations de ces p systèmes se reproduisent, lorsque l'on effectue l'homographie T, multipliées par les p premières puissances de ε. Il convient cependant d'observer que les hypersurfaces de ces systèmes linéaires ne sont pas toutes irréductibles pour $n > 3$.

En particulier, la surface F appartient aux hypersurfaces du quatrième ordre de p systèmes linéaires de dimension $\frac{1}{6}(s-2)(2s^2+9s-15)-1$.

12. Dans le cas $s=2$, $p=5$, l'application des résultats précédents appelle une observation. La surface F est dans ce cas du cinquième ordre dans un espace S_3. Les surfaces du cinquième ordre de S_3 linéairement indépendantes sont au nombre de 56. Si l'on enlève la surface F, il reste cinq systèmes linéaires de surfaces du cinquième ordre, de dimension dix, qui découpent sur F les systèmes $|(5K)_0|$, $|(5K)_1|$, $\ldots$, $|(5K)_4|$.

Dans le cas $s=3$, $p=7$, la surface F est du quatorzième ordre dans S_5 et ses sections hyperplanes sont de genre quinze. Elle doit satisfaire aux conditions suivantes:

1⁰) Elle n'appartient à aucune hyperquadrique.

2⁰) Elle appartient à sept hypersurfaces cubiques linéairement indépendantes qui, lorsque l'on applique l'homographie T, se reproduisent multipliées respectivement par $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^6$.

3⁰) Les équations des six dernières de ces hypersurfaces contiennent respectivement les termes en x_5^3, x_3^3, x_1^3, x_6^3, x_4^3, x_2^3, puisque la surface ne peut passer par les points unis de l'homographie T.

Liège, décembre 1958.