SUR LA THÉORIE DES RÉCIPROCITÉS DU PLAN

PAR

LUCIEN GODEAUX

(Liége)

La théorie des réciprocités ou corrélations du plan est généralement traitée soit en partant des équations de ces réciprocités en coordonnées projectives, soit, comme l'a fait M. P. LÉVY (1), en utilisant des propriétés métriques. Il nous a paru intéressant d'établir cette théorie sans faire appel aux notions métriques, de manière à la faire rentrer dans le cadre du cours de Géométrie projective que nous professons à l'Université de Liége (2).

Dans une note antérieure (3), nous avons montré comment on pouvait introduire, sans appel aux notions métriques, les coniques d'incidence d'une réciprocité, mais cette méthode est assez longue et n'est en somme applicable que dans le cas où ces coniques sont réelles et irréductibles. Il semble difficile d'y faire rentrer le cas de la réciprocité représentée par l'équation à coefficients réels

$$\begin{aligned} a_1^2 y_1 z_1 + a_2^2 y_2 z_2 + a_3^2 y_3 z_3 + a_{23}(y_2 z_3 - y_3 z_2) \\ + a_{31}(y_3 z_1 - y_1 z_3) + a_{12}(y_1 z_2 - y_2 z_1) = 0, \end{aligned}$$

dont les coniques d'incidence sont imaginaires. Nous avous donc préféré utiliser une autre méthode, faisant intervenir une quadrique, et qui introduit immédiatement tous les cas possibles. Nous déterminons dans chaques cas la nature de l'homographie associée à la réciprocité.

---

(1) *Sur les caractères invariants des transformations corrélatives* («Bulletin de la Société mathématique de France», 1929, pp. 42-49, 174-177).

(2) L. GODEAUX, *Leçons de Géométrie projective*. Paris, Hermann, 1932.

(3) *Sur les réciprocités du plan* (Association Française pour l'Avancement des Sciences, C. R. du Congrès de Bruxelles, 1932, pp. 44-47).

1. Soient σ, σ' deux plans superposés, Θ une réciprocité entre ces plans. Considérons deux points S, S' extérieurs aux plans σ, σ', et projetons σ de S, σ' de S'. Les gerbes de sommets S, S' sont liées par une réciprocité Θ': si P est un point de σ et p' la droite que Θ lui fait correspondre dans σ', à la droite SP, Θ' fait correspondre le plan $S'p'$.

Le lieu des points communs aux rayons de la gerbe de sommet S et aux plans homologues de la gerbe de sommet S' est une quadrique Q (éventuellement dégénérée en deux plans dont l'un passe par S et l'autre par S').

Soit P un point commun au plan σ et à la quadrique Q. La droite p' que Θ fait correspondre à P passe par ce point et par conséquent l'intersection de Q et du plan σ est le lieu des points qui appartiennent aux droites que la réciprocité Θ leur fait correspondre; ce lieu est la première courbe d'incidence de Θ.

Le plan σ peut occuper, par rapport à la quadrique Q, cinq positions:

1) Le plan σ rencontre Q suivant une conique irréductible C.
2) Le plan σ rencontre Q suivant un seul point réel (et suivant deux droites imaginaires conjuguées).
3) Le plan σ rencontre Q suivant deux droites distinctes.
4) Le plan σ rencontre Q suivant une seule droite (Q est alors un cône).
5) Le plan σ ne rencontre Q en aucun point réel.

Nous aurons, en correspondance, cinq types de réciprocités à étudier.

2. Plaçons-nous dans le premier cas, où Θ possède une première conique d'incidence irréductible C. Soit $\Omega = \Theta^2$ l'homographie associée à Θ.

Si P est un point de C, la droite p' que Θ lui fait correspondre passe par ce point et, lorsque P décrit C, enveloppe une conique irréductible Γ, la seconde conique d'incidence de Θ.

Aux points de p', Θ fait correspondre des droites passant par un point P'. En particulier, à P correspond p', donc le point P' appartient à p'. Il en résulte qu'au point P', Θ fait correspondre une droite p'' passant par ce point. P' appartient donc à C. La réciprocité Θ fait correspondre p'

à P et F' à p', donc Ω fait correspondre P' à P. La conique C est donc transformée en elle-même par l'homographie associée Ω. De même, Ω fait correspondre p'' à p' ; ces droites sont tangentes à la conique Γ et celle-ci est transformée en elle-même par Ω.

Soint ω l'homographie déterminée par Ω sur la conique C, U le centre et u l'axe de collinéation de ω. L'homographie ω ne peut être une involution, car alors si P, P' forment un couple de cette involution, à chacun de ces points correspondrait la même droite PP', ce qui est absurde. Il en résulte que Ω ne peut être une homologie.

Considérons deux points M, N de C. situés sur une droite passant par U. Les points M', N' que ω leur fait correspondre appartiennent à C et déterminent une droite passant par U. Les droites MM', NN' se coupent sur u et d'autre part correspondent respectivement, dans Θ, aux points M, N. Au point commum à ces droites, θ fait donc correspondre la droite $M'N'$ et par suite à la droite u, Θ fait correspondre le point U. Corrélativement, au point U, Θ fait correspondre la droite u: Le point U et la droite u se correspondent doublement dans Θ.

Dans la conique enveloppe Γ, Ω détermine une homographie ω', transformée de ω par θ. Il résulte de ce qui précède que U et u sont le centre et l'axe de collinéation de ω'.

Cela étant, trois cas peuvent se présenter:

a) ω et ω' sont hyperboliques. Les coniques C, Γ se touchent en deux points A, B, situés sur u, les tangentes aux coniques en ces points passant par U. L'homographie Ω possède trois points unis et trois droites unies.

b) ω et ω' sont paraboliques. Les coniques C, Γ ont en commun le seul point U, la tangente en ce point aux deux coniques étant la droite u. L'homographie Ω possède un seul point uni et une droite unie passant par ce point.

c) ω et ω' sont elliptiques. Les coniques C, Γ ne se rencontrent pas et l'homographie Ω possède un seul point uni et une droite unie ne passant pas par ce point.

3. Plaçons-nous dans le second cas. Il existe un seul point réel A appartemant à la droite a que θ lui fait correspondre.

Aux points de a, θ fait correspondre des droites passant par un point A' de a et à ce point A', une droite contenant ce point. Il en résulte que le point A' doit coïncider avec A et que celui-ci est donc uni pour Ω. Corrélativement, la droite a est unie pour Ω. L'homographie Ω possède un seul point uni et une droite unie passant par ce point.

4. Supposons maintenant que la première courbe d'incidence de Θ soit formée de deux droites distinctes a_1, a_2, se coupant en un point A.

Les droites a_1, a_2, ne peuvent être unies pour Ω, car alors, à tout point de la droite a_1, par exemple, Θ ferait correspondre cette droite, ce qui est absurde. A un point de a_1, Ω fait donc correspondre un point de a_2 et inversement; Ω échange donc entre elles les droites a_1, a_2.

A un point P_1 de a_1, Ω fait correspondre un point P_2 de a_2 et à P_1, Θ fait correspondre la droite P_1P_2. Les ponctuelles (P_1), (P_2) sont perspectives, le centre de perspectivité étant le point A_1 que Θ fait correspondre à a_1. De même, à un point P_2 de a_2, Ω fait correspondre un point P'_1 de a_1. Les ponctuelles (P_2) et (P'_1) sont perspectives, les droites $P_2P'_1$ passant par le point A_2 que Θ fait correspondre à a_2. Le point A est par suite uni pour l'homographie Ω.

Si la droite A_1A_2 ne passait pas par A, elle rencontrerait a_1 en un point R_1, a_2 en un point R_2 et à chacum de ces points Θ ferait correspondre la droite A_1A_2, ce qui est absurde. La droite $a = A_1A_2$ passe donc par A.

Les points A_1, A_2 sont échangés entre eux par Ω et la droite a est donc unie pour cette homographie. Sur la droite unie a, Ω détermine une projectivité dans laquelle les points A_1, A_2 se correspondent doublement; cette projectivité est donc une involution. Le point A étant uni pour Ω, cette involution est hyperbolique et il existe sur a un second point B uni pour Ω. Les couples AB et A_1A_2 se partagent harmoniquement.

Corrélativement, il existe une seconde droite b unie pour Ω, passant par A. Les couples de droites a b et a_1a_2 se partagent harmoniquement.

L'homographie Ω possède deux points unis et deux droites unies.

Remarquons en passant que l'homographie Ω^2 est une homologie spéciale de centre A et d'axe a.

5. Si la première courbe d'incidence de la réciprocité Θ est une droite a (comptée deux fois), tous les points de a sont unis pour Ω, sans quoi Θ ferait correspondre à tout

point de a cette droite elle-même, ce qui est absurde. L'homographie Ω est donc une homologie.

Aux point de a, Θ fait correspondre des droites passant par un point A, centre de l'homologie Ω. Le point A ne peut appartenir à a, car autrement aux points de a correspondrait cette droite elle-même, ce qui est absurde. Ω est donc une homologie générale.

A un point P de a, Θ fait correspondre la droite AP et à cette droite, le point P. A un point R de AP, Θ fait correspondre une droite r passant par P et à r, un point R' de AP. A un point M de r, Θ fait correspondre la droite $R'Q$, Q étant le point de rencontre des droites a et AM. A la droite RM, Θ fait correspondre le point de rencontre N des droites r et $R'Q$. Mais Θ^{-1} fait correspondre à N une droite passant par le point de rencontre S de a et de la droite AN. Les points R, M, S sont donc en ligne droite. Si nous considérons le quadrangle complet $QMNS$, deux côtés opposés MQ, NS passent par A, deux autres côtés opposés MN, QS passent par P, un cinquième côté passe par R et le dernier par R'. Il en résulte que le quaterne $APRR'$ est harmonique. Par suite l'homologie Ω est harmonique.

6. Reste le dernier cas, où il n'existe aucun point réel appartenant à la droite que Θ lui fait correspondre.

L'homographie Ω possède nécessairement un point uni A et une droite unie a, que Θ fait correspondre à A. Le point A, que Θ fait à son tour correspondre à a, ne peut appartenir à cette droite.

Si Ω possédait un second point uni B, celui-ci appartiendrait à a et Θ lui ferait correspondre la droite BA, contrairement à l'hypothèse.

L'homographie Ω possède donc un seul point uni et une droite unie ne passant pas par ce point.

Liége, Université, 13 septembre 1937.