REMARQUES SUR UNE INVOLUTION APPARTENANT À UNE SURFACE DU CINQUIÈME ORDRE

PAR

LUCIEN GODEAUX

(Liége)

Poursuivant nos recherches sur les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique (1), nous nous proposons, dans cette note, d'étudier un cas particulier qui nous semble présenter un certain interêt. Il s'agit d'une involution cyclique du troizième ordre, ayant trois points unis, appartenant à une surface algébrique. La surface image de l'involution possède une seule courbe canonique, dont nous étudions la formation.

1. Désignons par F la surface du cinquième ordre d'équation

$$a_1 x_1{}^4 x_2 + a_2 x_2{}^4 x_3 + a_3 x_3{}^4 x_1 + a_4 x_4{}^5 + a_5 x_1 x_2 x_3 x_4{}^2 = 0 .$$

Cette surface est en général dépourvue de points multiples et est par conséquent de genres quatre ($p_a = p_g = 4, p^{(1)} = 6$); ses sections planes en sont les courbes canoniques.

Le surface F est transformée en elle-même par une homographie H de période treize, dont les équations sont

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^{10} x_3 : \varepsilon^8 x_4 ,$$

(1) Voir sur ce suject notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique,* «Actual. Scient», nº 270. Paris, Hesmann, 1935; *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de dinemation,* «Annales de l'Ecole normale supérieur», 1938, pp. 193-222. Voir aussi diverses notes parues cette année (1930) dans les «Bulletins de l'Académie royale de Belgique» et dans les «Bulletins de la Société royale des Sciences de Liége», ainsi qu'une note en cours d'impression dans le «Bulletin des Sciences mathématiques».

ε étant une racine primitive treizième de l'unité. Cette homographie engendre sur la surface une involution d'ordre treize que nous désignerons per I.

L'involution I posséde trois points unis, à savoir les sommets $O_1(1,0,0,0)$, $O_2(0,1,0,0)$, $O_3(0,0,1,0)$ du tétraédre de référence.

Pour obtenir une surface-image de l'involution I, posons

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_1^4 x_2 : x_2^4 x_3 : x_3^4 x_1 : x_4^5$$

et interprétons les X comme coordonnées de l'espace. L'élimination des x entre les équations précédentes et celle de la surface F donne

$$(a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4)^5 + a_5^5 X_1 X_2 X_3 X_4^2 = 0 .$$

C'est l'équation d'une surface Φ image de l'involution I. Nous poserons, pour abréger,

$$\varphi \equiv a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 .$$

La surface Φ posséde comme seules singularités la droite double r

$$\varphi = 0, \quad X_4 = 0$$

et les trois points doubles

$$A_1(X_2 = X_3 = \varphi = 0), \quad A_2(X_3 = X_1 = \varphi = 0),$$
$$A_3(X_1 = X_2 = \varphi = 0).$$

Le plan $X_4 = 0$ coupe la surface Φ suivant la droite r comptée cinq fois, par conséquent, dans ce plan, la surface Φ posséde une droite double r' infiniment voisine de r et une droite simple r'' infiniment voisine de r'.

Observons que les points $B_1(X_1 = X_4 = \varphi = 0)$, $B_2(X_2 = X_4 = \varphi = 0)$, $B_3(X_3 = X_4 = \varphi = 0)$, appartenant à la droite r, sont triples pour la surface Φ. Les cônes tangents en B_1, B_2, B_3 à la surface ont respectivement pour équations

$$X_1 X_4^2 = 0, \quad X_2 X_4^2 = 0, \quad X_3 X_4^2 = 0.$$

La droite $X_2 = X_3 = 0$ coupe la surface Φ suivant cinq points confondus en A_1, par conséquent il existe sur cette droite un point double de la surface infiniment voisin de A_1. On voit d'ailleurs que A_1 est un point double biplanaire pour Φ, le cône tangent en ce point à cette surface étant $X_2 X_3 = 0$. On arrive à des conclusions analogues pour A_2 et A_3.

Les points doubles isolés n'ayant aucune influence sur les surfaces adjointes, la surface Φ, du cinquième ordre, posséde un seul plan adjoint, le plan $X_4 = 0$, et est donc de genres un $(p_a = p_g = 1)$.

2. À la courbe canonique de la surface Φ correspond, sur la surface F, une courbe canonique transformée en elle-même par l'homographie H. Il existe quatre courbes canoniques de F transformées en elles-mêmes par H, ce sont les sections de la surface par les plans du tétraèdre de référence.

La section de F par le plan $x_1 = 0$ posséde un point quadruple en O_3 et est donc rationnelle; il lui correspond donc sur Φ une courbe rationnelle qui ne peut être la courbe canonique de cette surface. Cette courbe rationnelle appartient précisément au domaine du point double A_2.

De même, aux sections de F par les plans $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ correspondent respectivement sur Φ des courbes rationelles appartenant aux domains des points A_3, A_1 et qui ne peuvent donner la courbe canonique de Φ.

La section de Φ par le plan $x_4 = 0$ est irréductible et dépourvue de points multiples; elle est donc de genre six. À cette courbe correspond sur Φ le domaine de la droite double r. Sur la courbe en question, H détermine une involution d'ordre treize, présentant trois points unis. En appliquant la formule de Zeuthen, on voit que cette involution est elliptique. Par conséquent, le domaine de la droite r sur Φ est équivalent à une courbe elliptique et la surface Φ est de genre linéaire $p^{(1)} = 1$.

3. Nous allons maintenant analyser la structure des points unis de l'involution I. Etant donnée la symétrie de l'équation de la surface F par rapport à x_1, x_2, x_3, il suffira d'ailleurs d'étudier un seul de ces points, par exemple le point O_1.

À cet effet, considérons le système lineaire de surfaces

$$\lambda_1 x_1^4 x_2 + \lambda_2 x_2^4 x_3 + \lambda_3 x_3^4 x_1 + \lambda_4 x_4^5 + \lambda_5 x_1 x_2 x_3 x_4^2 = 0 \quad (1)$$

contenant la surface F et posons

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 = x_1^4 x_2 : x_2^4 x_3 : x_3^4 x_1 : x_4^5 : x_1 x_2 x_3 x_4^2 \quad (2)$$

Aux groupes de treize points de l'espace engendrés par l'homographie H correspondent les points de la variété V, d'équation

$$X_1 X_2 X_3 X_4^2 = X_5^5$$

et la surface Φ n'est autre que la section de V par l'hyperplan

$$\varphi + a_5 X_5 = 0 .$$

Au point O_1, les surfaces (1) touchent le plan $x_2 = 0$ et dans ce plan, H détermine une homographie non homologique. Les points infiniment voisins de O_1 sur les droites $O_1 O_3$, $O_1 O_4$ sont unis pour l'involution I.

Effectuons, sur le système (1), la transformation quadratique

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_2 y_3 : y_1 y_3 : y_3 y_4$$

qui fait correspondre au point infiniment voisin de O_1 sur $O_1 O_3$ le point $O'_1 (1, 0, 0, 0)$.

Au système (1) correspond le système

$$\lambda_1 y_1^8 y_2 + \lambda_2 y_1 y_2^4 y_3^4 + \lambda_3 y_1^6 y_3^3 + \lambda_4 y_3^4 y_4^5 + \lambda_5 y_1^3 y_2 y_3^3 y_4^2 = 0$$

En effectuant encore deux fois de suit la transformation précédente sur ce dernier système, on obtient

$$\lambda_1 y_1^{16} y_2 + \lambda_2 y_1^3 y_2^4 y_3^{10} + \lambda_3 y_1^{16} y_3 + \lambda_4 y_3^{12} y_4^5 + \lambda_5 y_1^7 y_2 y_3^7 y_4^2 = 0$$

On en conclut que l'involution engendrée par H dans l'espace posséde trois points unis infiniment voisins successifs de O_1, dont le premier est sur la droite $O_1 O_3$. Le domaine du dernier de ces points contient une infinité de points unis. Il en résulte que le point uni O_1 sur la surface F posséde trois points unis successifs dont le dernier est parfait.

Les équations paramétriques (2) de la variété V peuvent être remplacées par les équations

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 =$$
$$= y_1^{16} y_2 : y_1^3 y_2^4 y_3^{10} : y_1^{16} y_3 : y_3^{12} y_4^5 : y_1^7 y_2 y_3^7 y_4^2 .$$

Aux points du domaine du quatrième ordre de O_1, unis pour l'involution, correspondent sur V les points de la droite

$$X_2 = X_4 = X_5 = 0 .$$

Cette droite est rencontrée par l'hyperplan découpant sur V la surface Φ un point $B_2 (X_2 = X_4 = \varphi = 0)$, triple pour la surface et qui appartient à la courbe canonique de celle-ci.

4. Effectuons maintenant la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_2 y_4 : y_3 y_4 : y_1 y_4 ,$$

faisant correspondre au point infiniment voisin de O_1 sur la droite $O_1 O_4$, le point $y_1 = 1$, $y_2 = y_3 = y_4 = 0$. Au système (1) correspond le système

$$\lambda_1 y_1^8 y_2 + \lambda_2 y_2^4 y_3 y_4^4 + \lambda_3 y_1^2 y_3^4 y_4^3 + \lambda_4 y_1^5 y_4^4 + \lambda_5 y_1^4 y_2 y_3 y_4^3 = 0.$$

Effectuons encore, sur ce système de surfaces, trois fois de suite la transformation précédente ; nous obtenons

$$\lambda_1 y_1^{20} y_2 + \lambda_2 y_2^4 y_3 y_4^{16} + \lambda_3 y_1^5 y_3^4 y_4^{12} + \lambda_4 y_1^{20} y_4 +$$
$$+ \lambda_5 y_1^{13} y_2 y_3 y_4^6 = 0 .$$

On voit donc qu'au point O_1 font suite quatre points unis successifs dont le premier est sur la droite $O_1 O_4$, les points du domaine du dernier point étant tous unis pour l'homographie H. Sur la surface F il existe donc quatre points unis pour l'involution I, infiniment voisins successifs de O_1, le premier étant sur $O_1 O_4$ et le dernier étant uni parfait.

Les équations paramétriques de la variété V peuvent s'écrire

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 =$$
$$= y_1^{20} y_2 : y_2^4 y_3 y_4^{16} : y_1^5 y_3^4 y_4^{12} : y_1^{20} y_4 : y_1^{13} y_2 y_3 y_4^6 .$$

Aux points du domaine du quatrième point uni qui vient d'être rencontré correspondent sur la variété V les points de la droite

$$X_2 = X_3 = X_5 = 0 .$$

L'hyperplan découpant la surface Φ sur le variété V rencontre cette droite au point $A_1 (X_2 = X_3 = \varphi = 0)$, double pour la surface.

On voit donc qu'au point uni O_1 de l'involution I sur la surface F font suite deux séries de points unis, l'une formée de trois points dont le premier se trouve sur O_1O_3, l'autre de quatre points dont le premier est situé sur O_1O_2. Les deux se terminent par les points unis parfaits de l'involution. Au point final de la première suite correspond sur la surface Φ une courbe infinitésimale du domaine du point B_2, rencontrée en un point par la courbe canonique de cette surface. Au point final de la seconde suite correspond sur Φ une droite infinitésimale du domaine du point double biplanaire A_1.

Toulouse, le 16 juillet 1940.