Sur les réciprocités de l'espace dont les quadriques d'incidence sont imaginaires

LUCIEN GODEAUX

On sait qu'à une réciprocité ou corrélation de l'espace, on attache deux quadriques d'incidence et une homographie, carré de la réciprocité. La première quadrique d'incidence est le lieu des points qui appartiennent à leurs plans homologues; la seconde, le lieu des plans qui contiennent leurs points homologues. On peut se proposer d'étudier les réciprocités dont les quadriques d'incidence satisfont à une propriété déterminée. C'est ce que nous nous proposons de faire ici. Nous plaçant dans le domaine réel, nous supposons que les quadriques d'incidence d'une réciprocité sont imaginaires et nous recherchons les propriétés de cette reciprocité, Nous parvenons ainsi à quelques résultats qui nous paraissent intéressants (1).

1.—Soit θ une réciprocité de l'espace réel dont les quadriques d'incidence sont imaginaires; il n'existe donc aucun point réel appartenant à son plan homologue ni, corrélativement, aucun

(1) On pourra consulter nos *Leçons de Géométrie projective*, (Paris Hermann, 1933), au sujet des propriétés utilisées dans cette note.

plan réel contenant son point homologue. La polarité par rapport à la première quadrique d'incidence de θ est uniforme et peut être représentée, par un choix convenable du tétraèdre de référence, par l'équation à coefficients réels.

$$a_1^2\, y_1 z_1 + a_2^2\, y_2 z_2 + a_3^2\, y_3 z_3 + a_4^2\, y_4 z_4 = 0. \qquad (1)$$

L'équation de la réciprocité θ peut par conséquent s'écrire

$$\begin{gathered} a_1^2\, y_1 z_1 + a_2^2\, y_2 z_2 + a_3^2\, y_3 z_3 + a_4^2\, y_4 z_4 + \\ + a_{12}(y_1 z_2 - y_2 z_1) + a_{13}(y_1 z_3 - y_3 z_1) + a_{14}(y_1 z_4 - y_4 z_1) \qquad (2) \\ + a_{23}(y_2 z_3 - y_3 z_2) + a_{24}(y_2 z_4 - y_4 z_2) + a_{34}(y_3 z_4 - y_4 z_3) = 0, \end{gathered}$$

les coefficients étant réels.

Si nous désignons par θ_1 la polarité uniforme d'équation (1) et par θ_2 le système-nul d'équation

$$a_{12}(y_1 z_2 - y_2 z_1) + \dots + a_{34}(y_3 z_4 - y_4 z_3) = 0,$$

nous voyons donc que la réciprocité θ appartient au faisceau déterminé par une polarité uniforme θ_1 et par un système-nul θ_2.

2.—Désignons par $\Omega = \theta^2$ l'homographie associée à la réciprocité θ et supposons que Ω possède un point uni A. Soit α le plan homologue de A. Le point A est à son tour l'homologue du plan α: le point A et le plan α se correspondent doublement dans θ. De plus, le point A ne peut, par hypothèse, appartenir au plan α.

A un point R du plan α, θ fait correspondre un plan ρ passant par A et à ce plan, un point R' du plan α. Dans le plan α, θ détermine donc une réciprocité θ' faisant correspondre la droite $\alpha\rho$ au point R et Ω une homographie Ω' faisant correspondre R' à E.

L'homographie Ω' possède au moins un point uni B auquel θ' fait correspondre une droite b. Au point B, θ fait correspondre le plan $\beta = Ab$ et par conséquent b ne peut passer par B. Le point B et la droite b se correspondent doublement dans θ', le point B et le plan β se correspondent doublement dans θ.

Considérons la droite AB.A un point R de cette droite, θ fait correspondre un plan ρ passant par la droite $\alpha\beta$ et coupant AB en R_1. Au plan ρ, θ fait correspondre un point R' qui appartient nécessairement à AB, puisque cette droite est unie pour Ω. Puisque le point A et le plan α d'une part, le point B et le plan β d'autre part, se correspondent doublement dans θ, lorsque R coïncide avec A, R_1 coïncide avec B et lorsque R coïncide avec B, R_1 coïncide avec A. Par conséquent, la réciprocité θ détermine sur la droite AB une homographie dans laquelle les points A, B se correspondent doublement; cette projectivité est donc une involution, d'ailleurs elliptique. Cela étant, au point R_1, θ fait correspondre le plan ρ_1 passant par R et par la droite $\alpha\beta$, donc au plan ρ, θ fait correspondre le point R. Le point R' coïncide donc avec R et tous les points de la droite AB sont unis pour Ω.

Supposons maintenant que si Ω' est une homologie, le point B ne coïncide pas avec le centre de cette homologie et admettons qu'il existe une droite s du plan α, passant par B, qui soit unie pour Ω'. En remarquant qu'au point de rencontre des droites s et b, θ fait correspondre un plan passant par AB, et en recommençant le raisonnement précédent, on voit que tous les points de s sont unis pour Ω' et que cette homographie est donc une homologie d'axe s. Cela établi, remarquons que le centre S de l'homologie Ω' ne peut appartenir à s, car les droites que θ fait correspondre aux points de s passent par S. Mais alors, la droite BS est unie pour Ω' et tous les points de cette droite sont par conséquent unis pour cette homologie, qui est par suite l'identité, D'après le raisonnement fait plus haut sur la droite AB, Ω coïncide également avec l'identité, puisque le point B peut être choisi arbitrairement dans le plan α. Cela étant, θ est une polarité ou un système-nul, contrairement à l'hypothèse.

De tout ceci, on conclut que le point B est l'unique point du plan α qui soit uni pour Ω. Par suite, Ω *est une homographie axiale elliptique d'axe ponctuel AB et d'axe tangentiel* $\alpha\beta$.

3.—Le cas qui vient d'être étudié peut effectivement se présenter.

Observons en premier lieu que si ρ_1 est le plan polaire d'un point quelconque R par rapport à θ_1 et ρ_2 celui du même point par rapport à θ_2, au point R, θ fait correspondre un plan ρ passant par la droite $\rho_1 \rho_2$.

Cela étant, supposons que les droites doubles du système-nul Θ_2 forment un complexe linéaire spécial, c'est-à-dire que l'on ait

$$a_{12}\, a_{34} - a_{13}\, a_{24} + a_{14}\, a_{23} = 0.$$

Soit a l'axe de ce complexe linéaire spécial. Si R est un point de a, le plan ρ_2 est indéterminé et le plan ρ coïncide avec le plan ρ_1. Il en résulte que sur la droite a, θ détermine l'involution elliptique des couples de points conjugués par rapport à θ_1. Tous les points de a sont par suite unis pour Ω. Les plans que θ fait correspondre aux points de la droite a passent par la droite b, conjuguée de a par rapport à θ_1.

A un point de la droite b correspond un plan passant par a; la droite b est unie pour Ω. Sur cette droite, θ_1 détermine une projectivité elliptique non involutive dont le carré est la projectivité elliptique déterminée par Ω.

4.—Supposons maintenant que Ω soit dépourvue de points unis et par suite de plans unis. Le complexe formé par les droites doubles du système-nul θ_2 est par suite non spécial.

L'homographie Ω possède alors au moins une droite unie a sur laquelle elle détermine une projectivité elliptique.

Aux points de a, Ω fait correspondre des plans passant par une droite b qui ne peut rencontrer a, sans quoi il existerait un point de a appartenant à son plan homologue. D'une manière précise, à un point R de a, θ fait correspondre un plan ρ passant par b et à ce plan, un point R' de la droite a. Il en résulte qu'aux points de b, θ fait correspondre des plans passant par a et à ces plans, des points de b. La droite b est donc également unie pour Ω et sur cette droite, cette homographie détermine nécessairement une projectivité elliptique. Les droites a et b jouent des rôles symétriques.

Soient a_1, a_2 les conjuguées de a et b_1, b_2 les conjuguées de b respectivement par rapport à θ_1, θ_2. Supposons que les droites a_1, a_2 soient distinctes de b; les droites b_1, b_2 sont alors distinctes de a. Nous allons montrer que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Commençons par considérer une droite quelconque m. Les plans que θ fait correspondre aux points de m passent par une droite n ne rencontrant pas m et aux plans passant par m, θ fait correspondre des points de n. Soient m_1, m_2 les conjuguées de m par rapport à θ_1, θ_2. Considérons un point R de m et soient ρ_1 son plan polaire par rapport à θ_1, ρ_2 son plan polaire par rapport à θ_2, ρ le plan que θ lui fait correspondre. Les plan ρ_1, ρ_2, ρ doivent passer par une même droite s qui s'appuie donc sur n, m_1, m_2. Lorsque R varie sur m, les plans ρ_1, ρ_2, ρ et le droite s varient. De même, soit σ un plan passant par m, S_1 son pôle par rapport à θ_1, S_2 son pôle par rapport à θ_2, S le point que θ lui fait correspondre. Les points S_1, S_2, S sont en ligne droite et les points d'appui de cette droite sur m_1, m_2, n varient lorsque le plan σ tourne autour de m. Il en résulte que les droites n, m_1, m_2, supposées distinctes, sont nécessairement deux à deux gauches.

Revenons maintenant aux droites unies a, b. Les droites a_1, a_2 et b, supposées distinctes, doivent être deux à deux gauches et il en est de même des droites a, b_1, b_2. Supposons le point R sur la droite a et conservons les notations précédemment introduites. Par le point R passe une droite r s'appuyant sur b_1, b_2. Le plan polaire par rapport à θ_1 du point d'appui S de s sur b est le plan Rb_1; le plan polaire du même point par rapport à θ_2 est le plan Rb_2; au point S, θ fait correspondre un plan σ passant par a et par l'intersection des deux plans précédents, c'est-à-dire par r. Soit maintenant R' le point de a que θ fait correspondre au plan ρ, R_1 le point de b_1 pôle de ρ par rapport à θ_1, R_2 le pôle du même plan par rapport à θ_2. Les points R', R_1, R_2 sont en ligne droite. La droite s, intersection des plans ρ, ρ_1, a pour conjuguée par rapport à θ_1 la droite RR_1; la même droite, intersection des plans ρ, ρ_2, a pour conjuguée par rapport à θ_2 la droite RR_2. D'autre part, à la droite s, θ fait correspondre une droite passant par R et située dans le plan σ. Nous avons donc construit une droite s à laquelle $\theta, \theta_1, \theta_2$ font correspondre des droites distinctes, concourantes, ce qui est impossible. Par conséquent, si a est une droite unie de Ω, les droites a_1, a_2 et b coïncident en une droite également unie pour Ω.

On voit donc que si a est une droite unie de Ω, ses conjuguées par rapport à θ_1, θ_2, coïncident en une droite b, également unie pour Ω. Inversement, il est facile de voir que si deux droites a, b sont conjuguées à la fois par rapport à θ_1, θ_2, elles sont unies pour Ω.

5.—L'homographie Ω, dépourvue de points et de plans unis, peut être soit une homographie biaxiale elliptique, soit une homographie n'ayant que deux droites unies.

Représentons les droites de l'espace par les points d'une hyperquadrique Q de l'espace à cinq dimensions S_5. On sait qu'à la polarité θ_1 correspond une homographie H_1 de S_5 ayant deux axes ponctuels à deux dimensions σ_1, σ_2, polaires l'un de l'autre par rapport à Q. Les plans σ_1, σ_2 sont réels mais rencontrent Q suivant des coniques imaginaires. Au système-nul θ_2 correspond dans S_5 une homologie H_2 de centre S et d'hyperplan σ, polaire de S par rapport à Q. Les homographies H_1, H_2 sont harmoniques et transforment en elle-même l'hyperquadrique Q.

Dans le cas général, aucun des plans σ_1, σ_2 ne passe par S et chacun de ces plans rencontre l'hyperplan σ suivant une droite. Il existe alors une seule droite passant par S et s'appuyant sur σ_1, σ_2. Cette droite est réelle et coupe Q en deux points réels auxquels correspondent deux droites a, b, unies pour Ω. Dans le cas général, Ω ne possède donc que deux droites unies.

Supposons maintenant que l'un des plans σ_1, σ_2, par exemple σ_1, appartienne à l'hyperplan σ. Alors, le plan σ_2 passe par le point S. Il existe donc une gerbe de droites passant par S et rencontrant le plan σ_1, unies pour les homographies H_1, H_2; ces droites coupent l'hyperquadrique Q en ∞^2 couples de points réels auxquels correspondent ∞^2 couples de droites, unies pour Ω. Dans ce cas, cette homographie est biaxiale elliptique.

Les droites passant par S et situées dans σ_2 sont également unies pour H_1, H_2 mais rencontrent Q en des points imaginaires.

Actuellement, les homographies H_1, H_2 sont permutables et il en est de même de la polarité θ_1 et du système-nul θ_2. Inversement, si θ_1, θ_2 sont permutables, H_1 et H_2 le sont également et Ω est une homographie biaxiale elliptique.

On voit que dans ce cas, les génératrices rectilignes (imaginaires) d'un mode de la quadrique fondamentale (imaginaire) de la polarité θ_1 sont des droites doubles du système-nul θ_2.

Nous pouvons résumer les résultats obtenus dans l'énoncé suivant:

Une réciprocité de l'espace dont les quadriques d'incidence sont imaginaires, appartient à un faisceau déterminé par une polarité uniforme et un système-nul.

Dans le cas général, l'homographie associée à la réciprocité est dépourvue de points et de plans unis; elle possède deux droites unies conjuguées à la fois dans la polarité et le système-nul.

Si la polarité et le système-nul sont permutables, l'homographie associée à la reciprocité est biaxiale elliptique.

Si les droites doubles du sistème-nul forment un complexe linéaire spécial, l'homographie associée à la reciprocité est axiale elliptique, l'axe ponctuel étant l'axe du complexe et l'axe tangentiel, le conjugué de l'axe ponctuel par rapport à la polarité.

6.—Reprenons l'équation (2) de la réciprocité θ. L'homographie associée Ω a pour équations

$$\rho(a_1^2 x_1' + a_{12} x'_2 + a_{13} x'_3 + a_{14} x'_4) = a_1^2 x_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 - a_{14} x_4,$$

$$\rho(-a_{12} x_1' + a_2^2 x_2' + a_{23} x_3' + a_{24} x_4') = a_{12} x_1 + a_2^2 x_2 - a_{23} x_3 - a_{24} x_4,$$

$$\rho(-a_{13} x_1' - a_{23} x_2' + a_3^2 x_3' + a_{34} x_4') = a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_3^2 x_3 - a_{34} x_4,$$

$$\rho(-a_{14} x_1' - a_{24} x_2' - a_{34} x_3' + a_4^2 x_4') = a_{14} x_1 + a_{24} x_2 + a_{34} x_3 + a_4^2 x_4.$$

L'équation caractéristique de cette homographie s'écrit

$$\begin{vmatrix} a_1^2 t & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ a_{12} & a_2^2 t & -a_{23} & -a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & -a_3^2 t & -a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_4^2 t \end{vmatrix} = 0,$$

où l'on a posé, pour abréger l'écriture,

$$t = \frac{1-\rho}{1+\rho}.$$

En développant cette équation, on obtient

$$a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 (1-\rho)^4$$

$$+ (a_{12}^2 a_3^2 a_4^2 + a_{13}^2 a_2^2 a_4^2 + a_{14}^2 a_2^2 a_3^2 + a_{23}^2 a_1^2 a_4^2 + a_{24}^2 a_1^2 a_3^2 +$$

$$+ a_{34}^2 a_1^2 a_2^2)(1-\rho)^2(1+\rho)^2 + (a_{12} a_{34} - a_{13} a_{24} + a_{14} a_{23})^2(1+\rho)^4 = 0.$$

On voit immédiatemment que, dans le cas général, cette équation possède deux couples de racines imaginaires conjuguées distinctes. Si le complexe linéaire formé par les droites doubles de θ_2 est spécial, le dernier coefficient de l'équation est nul, la racine $\rho = 1$ est double et donne un axe ponctuel de Ω.

Nous allons, en profitant des résultats établis plus haut, chercher les équations réduites de θ dans les trois cas possibles.

7.—Plaçons-nous d'abord dans le cas général. Puisque les droites unies a, b sont conjuguées par rapport à θ_1 et à θ_2, nous pouvons prendre pour ces droite respectivement

$$x_1 = x_2 = 0\,, \quad (a)\,; \quad x_3 = x_4 = 0\,, \quad (b).$$

L'équation de θ_1 n'est pas modifiée, mais dans celle de θ_2, on doit poser

$$a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = 0\,.$$

On vérifie aisément que l'homographie Ω a quatre points unis imaginaires, à savoir

$$(0, 0, a_4, ia_3),\ (0, 0, a_4, -ia_3),\ (a_2, ia_1, 0, 0),\ (a_2, -ia_1, 0, 0)\,.$$

Supposons maintenant que Ω soit biaxiale elliptique. Comme il existe ∞^2 couples de droites unies conjuguées à la fois par rapport à θ_1 et à θ_2, nous pouvons conserver les hypothèses faites tantôt sur les équations de θ.

L'équation caractéristique de Ω doit avoir deux racines doubles imaginaires conjuguées, ce qui exige

$$a_{12}^2\, a_3^2\, a_4^2 - a_{34}^2\, a_1^2\, a_2^2 = 0\,,$$

d'où

$$\frac{a_{12}}{a_1 a_2} = \frac{a_{34}}{\pm a_3 a_4}\,.$$

On obtient bien dans chaque cas une homographie biaxiale elliptique; les axes (imaginaires) ont pour équations

$$a_1 x_1 + ia_2 x_2 = 0, \quad a_3 x_3 \pm ia_4 x_4 = 0$$

et

$$a_1 x_1 - ia_2 x_2 = 0, \quad a_3 x_3 \mp ia_4 x_4 = 0 .$$

8.—Passons enfin au cas où le complexe linéaire des droites doubles de θ_2 est spécial. Nous pouvons supposer sans restriction que l'axe a de ce complexe est la droite

$$x_1 = x_2 = 0 ,$$

ce qui revient à poser

$$a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = a_{34} = 0 .$$

L'équation caractérisque de Ω se réduit à

$$a_1^2 \, a_2^2 \, (1-\rho)^4 + a_{12}^2 \, (1-\rho)^2 \, (1+\rho)^2 = 0 .$$

La racine double $\rho = 1$ donne l'axe ponctuel $x_1 = x_2 = 0$ de Ω. Les deux autres racines donnent les points unis imaginaires conjugués.

$$(a_2, ia_1, 0, 0), \quad (a_2, -ia_1, 0, 0)$$

appartenant à la conjuguée $x_3 = x_7 = 0$ de la droite $x_1 = x_2 = 0$ par rapport à θ_1.

Liége, Université, le 16 septembre 1937.