Les quadriques de Tzitzeica et la théorie des surfaces.

Par

Lucien Godeaux (Liège).

On sait que les tangentes asymptotiques des deux modes d'une surface se correspondent dans une transformation de Laplace de l'espace réglé [1]). Les quadriques de Tzitzeica relatives à la suite de Laplace ainsi déterminée fournissent de nouveaux éléments de la théorie des surfaces, comme nous allons le voir. Malheureusement, il est malaisé de trouver une définition simple de ces éléments sans sortir de l'espace à trois dimensions contenant la surface.

1. Soit, dans l'espace ordinaire S_3, une surface (x), non réglée, n'appartenant pas à un complexe linéaire, rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes d'un point x de cette surface satisfont à un système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles que l'on peut mettre sous la forme (Wilczyński)

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$

$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0,$$

où l'on écrit x^{ik} pour $\dfrac{\partial^{i+k} x}{\partial u^i \, \partial v^k}$.

---

[1]) Bompiani, Sull' equazione di Laplace (Rend. Circolo matem. di Palermo, 1912, t. XXXIV, pp. 383–407), Tzitzeica, Géométrie différentielle projective des réseaux, (Paris, 1924). Voir également les notes sur la géométrie projective différentielle que nous avons publiées depuis 1927 dans les Bulletins de l'Académie royale de Belgique.

A un point x non parabolique de la surface, attachons le tétraèdre $xx^{10}x^{01}x^{11}$. Les coordonnées d'un point quelconque de l'espace peuvent s'écrire sous la forme

$$z_1 x + z_2 x^{10} + z_3 x^{01} + z_4 x^{11}$$

et nous dirons que les z sont les coordonnées locales de ce point.

Désignons par Q l'hyperquadrique d'un espace linéaire S_5 représentant les droites de S_3. Soient U, V les points images des tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01}. Les coordonnées de ces points satisfont aux équations

$$U^{10} + 2bV = 0, \quad V^{01} + 2aU = 0$$

et les surfaces (U), (V) sont les transformées de Laplace l'une de l'autre.

Désignons par $U_1, U_2, \ldots$ les transformés successifs de Laplace du point U dans le sens des v, par $V_1, V_2, \ldots$ ceux de V dans le sens des u. Nous avons

$$U_1 = U^{01} - U(\log \cdot b)^{01}, \quad U_2 = U_1^{01} - U_1(\log \cdot bh)^{01}, \ldots$$

moyennant

$$h_1 = -(\log \cdot b)^{11} + 4ab, \ldots;$$

$$V_1 = V^{10} - V(\log \cdot a)^{10}, \quad V_2 = V_1^{10} - V_1(\log \cdot ak)^{10}, \ldots$$

moyennant

$$k_1 = -(\log \cdot a)^{11} + 4ab, \ldots.$$

2. Tout point de l'espace S_5 a des coordonnées de la forme

$$\xi_2 U_2 + \xi_1 U_1 + \xi U + \eta V + \eta_1 V_1 + \eta_2 V_2,$$

les ξ et les η étant les coordonnées locales de ce point.

Considérons la quadrique

$$\xi\eta - h\xi_1\eta_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \eta_2 = 0. \tag{1}$$

Elle appartient à l'espace $U_1 U V V_1$, qui coupe Q suivant deux plans:

1) Le plan déterminé par la droite UV et le point $U_1 - V_1$, qui représente les droites du plan tangent à la surface (x) au point x.

2) Le plan déterminé par la droite UV et le point $U_1 + V_1$, qui représente la gerbe de droites de sommet x.

La quadrique (1) coupe le premier de ces plans suivant une conique dont les points représentent, dans le plan tangent en x à la surface (x), les tangentes à la conique d'équation tangentielle

$$(2) \qquad [2\zeta_2 - \zeta_1(\log \cdot a)^{10}][2\zeta_3 - \zeta_1(\log \cdot b)^{01}] - \lambda\zeta_1^2 = 0$$

et d'équation ponctuelle

$$[2z_1 + z_2(\log \cdot a)^{10} + z_3(\log \cdot b)^{01}]^2 - 4\lambda z_2 z_3 = 0.$$

Cette conique touche donc les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} aux points où elles sont rencontrées par la seconde directrice de Wilczyński.

La conique (2) et la quadrique de Lie attache au point x et dont l'équation tangentielle est

$$\zeta_1\zeta_4 - \zeta_2\zeta_3 - 8ab\,\zeta_1^2 = 0$$

ont en commun les faisceaux de plans dont les axes sont les tangentes asymptotiques, et un cône dont le sommet a pour coordonnées

$$(\log \cdot a)^{10}(\log \cdot b)^{01} - 8ab - \lambda, \quad -2(\log \cdot b)^{01}, \quad -2(\log \cdot a)^{10}, \; 4.$$

Ce point appartient à la première directrice de Wilczyński

$$\frac{z_2}{(\log \cdot b)^{01}} = \frac{z_3}{(\log \cdot a)^{10}} = \frac{z_4}{-2}.$$

La quadrique (1) coupe le plan déterminé par les points U, V, $U_1 + V_1$ suivant une conique dont les points représentent les génératrices du cône

$$(3) \qquad [2z_2 + z_4(\log b)^{01}][2z_3 + z_4(\log a)^{10}] - \lambda z_4^2 = 0.$$

Ce cône touche, le long des tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01}, les plans passant par la première directrice de Wilczyński. Il coupe le quadrique de Lie

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2ab\,z_4^2 = 0$$

suivant les droites xx^{10}, xx^{01} et suivant une conique située dans le plan

$$(4) \; 4z_1 + 2z_2(\log \cdot a)^{10} + 2z_3(\log \cdot b)^{01} + z_4[(\log \cdot a)^{10}(\log \cdot b)^{01} + 8ab - \lambda] = 0.$$

3. Les quadriques de Tzitzeica relatives au tétraèdre U_1UVV_1 sont les quadriques (1) osculant l'une la courbe u tracée sur la surface (U_1) au point U_1, l'autre la courbe v tracée sur la surface (V_1)

au point V_1 [1]). Ces quadriques ont pour équations

$$\begin{aligned} \xi\eta - 3h_1\,\xi_1\,\eta_1 &= 0, \\ \xi\eta - 3k_1\,\xi_1\,\eta_1 &= 0, \end{aligned} \qquad (\xi_2 = \eta_2 = 0).$$

Il leur correspond d'une part les deux plans τ_1, τ_2

$$(\tau_1)\quad 4z_1 + 2z_2(\log a)^{10} + 2z_3(\log b)^{01} + [(\log a)^{10}(\log b)^{01} + 8ab - 3h_1]\,z_4 = 0,$$
$$(\tau_2)\quad 4z_1 + 2z_2(\log a)^{10} + 2z_3(\log b)^{01} + [(\log a)^{10}(\log b)^{01} + 8ab - 3k_1]\,z_4 = 0.$$

et d'autre par les deux points T_1, T_2

$$(T_1)\quad (\log a)^{10}(\log b)^{01} - 3h_1 - 8ab,\ -2(\log b)^{01},\ -2(\log a)^{10},\ 4,$$
$$(T_2)\quad (\log a)^{10}(\log b)^{01} - 3k_1 - 8ab,\ -2(\log b)^{01},\ -2(\log a)^{10},\ 4.$$

Les plans τ_1, τ_2 sont les plans polaires des points T_1, T_2 par rapport à la quadrique de Lie.

Il est évident que la condition nécessaire et suffisante pour que la surface (x) soit isothermo-asymptotique est que les plans τ_1, τ_2 coïncident.

4. La considération des quadriques de Tzitzeica relatives aux tétraèdres VUU_1U_2 et UVV_1V_2 conduit à des surfaces réglées du troisième ordre et à une nouvelle droite, d'équations

$$\frac{z_2}{(\log b^2 h_1)^{01}} = \frac{z_3}{(\log a^2 k_1)^{10}} = \frac{z_4}{-2}.$$

[1]) Pour la définition de ces qurdriques, voir deux notes de M. Tzitzeica parues dans les Comptes rendus, 1926, t. 182.

Liége, Université, 5 octobre 1931.