Guido Castelnuovo, Frederigo Enriques et la géométrie algébrique

par Lucien GODEAUX

Membre de l'Académie Royale de Belgique
Professeur à l'Université de Liége

Ce que l'on appelle communément aujourd'hui *Géométrie algébrique* n'est pas, comme on pourrait le croire *a priori*, l'ensemble des propriétés géométriques susceptibles de s'exprimer par des relations algébriques, mais bien celui des propriétés des variétés algébriques (courbes, surfaces...), qui ne sont pas altérées par des transformations birationnelles de ces variétés, c'est-à-dire par des transformations biunivoques s'exprimant au moyen de fonctions algébriques. Le terme est peut-être mal choisi, puisqu'il peut prêter à ambiguïté et l'expression « géométrie sur une variété algébrique », parfois utilisée, conviendrait mieux. Quoi qu'il en soit, la géométrie algébrique, entendue dans le sens que nous venons de rappeler, est de création relativement récente et sous l'impulsion de deux Maîtres éminents : Guido Castelnuovo et Federigo Enriques, elle a pris un grand essor. C'est l'œuvre de ces deux géomètres que nous voudrions, à grands traits, évoquer ici.

Jetons tout d'abord un regard en arrière. La première moitié du XIXe siècle fut l'âge d'or de la Géométrie projective. Les premiers éléments de cette géométrie furent jetés au début du XVIIe siècle par Desargues et Pascal, mais c'est Poncelet qui, par la publication de son Traité des propriétés projectives des figures (1822), l'érigea en corps de doctrine. Après lui, Michel Chasles, de Jonquières, Steiner, Moebius, Cremona..., y apportèrent des contributions importantes et von Staudt chercha, sans y réussir complètement, à débarrasser son exposition de toute notion métrique. Cremona, que nous venons de citer, clôt en quelque sorte cette brillante période de la géométrie projective, que l'on pourrait appeler la période des transformations linéaires, pour ouvrir celle des transformations birationnelles. De 1864 à 1870, ce géomètre créa, en effet, la théorie des transformations birationnelles, transformations biunivoques qui conservent le caractère algébrique des figures. Seules, avant lui, quelques transformations de cette sorte étaient connues : les transformations quadratiques, dont l'inversion est un cas particulier, et les transformations isologiques de DE JONQUIÈRES, auxquelles ce nom est resté attaché.

La théorie des transformations birationnelles allait ouvrir une voie nouvelle à la géométrie et il convient de mentionner ici un mémoire de BERTINI qui fut, dans cet ordre d'idées, un précurseur. Imaginons une infinité de couples de points dans un plan tels qu'un point du plan appartienne en général à un seul couple ; c'est ce que l'on appelle une involution plane du second ordre. Il s'agissait de classer ces involutions. Eh bien, BERTINI (1877) eut cette idée féconde de montrer qu'une involution de cette nature peut se ramener, par une transformation birationnelle, à une involution de l'un de quatre types bien définis, dont il détermine les caractères projectifs. On peut dire que le mémoire de BERTINI marque la naissance de la Géométrie algébrique italienne, aujourd'hui si riche de résultats.

En géométrie algébrique, les êtres géométriques (courbes, surfaces algébriques, systèmes linéaires de courbes planes, etc.) se répartissent en classes, deux êtres appartenant à une même classe s'il est possible de passer de l'un à l'autre par une transformation birationnelle.

Deux problèmes se posent :

a) Déterminer les caractères distinctifs de chaque classe, c'est-à-dire des caractères qui sont invariants pour les transformations birationnelles.

b) Déterminer, dans chaque classe, un être qui satisfait à certaines conditions, en général de caractère projectif, qui serve en quelque sorte de « modèle » de la classe.

Ainsi, dans le problème étudié par BERTINI, les involutions planes du second ordre se répartissent en quatre classes dont chacune est déterminée par un « modèle projectif » bien défini.

En fait, en ce qui concerne les courbes algébriques, on peut faire remonter la répartition en classes au célèbre mémoire de RIEMANN de 1857. D'autre part, BRILL et NOETHER avaient utilisé ce concept dans leur mémoire classique sur les courbes algébriques de 1873 ; nous aurons à revenir sur ce mémoire.

Venons-en à l'œuvre de CASTELNUOVO et d'ENRIQUES.

Guido CASTELNUOVO naquit à Venise en 1865 et fut reçu Docteur en Sciences Mathématiques par l'Université de Padoue, en 1886. Dans cette Université, il eut pour Maître G. VERONESE qui, avec E. D'OVIDIO, devait montrer en Italie l'intérêt de la géométrie hyperspatiale. Une des premières recherches de Castelnuovo a trait aux involutions rationnelles, c'est-à-dire aux groupes de n points d'une droite tels que r points de la droite appartiennent en général à un seul groupe. Castelnuovo eut l'heureuse idée de considérer ces involutions sur une courbe rationnelle d'un espace projectif à n dimensions (1) ; l'exposé de la théorie y gagne singulièrement en clarté et bien des propriétés deviennent en quelque sorte intuitives. De 1887 à 1891, Castelnuovo fut l'assistant de E. d'Ovidio à Turin. Dans cette ville, il devait rencontrer Corrado Segre, son aîné de quelques années, qui commençait alors sa brillante carrière. Segre, devinant l'appoint que les méthodes crémoniennes pouvaient apporter au développement de la théorie des courbes et des surfaces algébriques, s'efforçait de faire connaître en Italie les travaux de Riemann, Brill et Noether. Du séjour de Castelnuovo à Turin date la nouvelle méthode d'exposition de la géométrie sur une courbe algébrique que l'on a appelée la « méthode hyperspatiale ». Dans leur mémoire sur les courbes algébriques, Brill et Noether avaient considéré les séries linéaires de groupes de points appartenant à une courbe plane. Une série linéaire d'ordre n et de dimension r, sur une courbe de genre p, est un ensemble de groupes de n points tels que r points appartiennent en général à un seul groupe. Lorsque la courbe est rationnelle ($p=0$), la série linéaire devient une involution. Se souvenant de la simplicité introduite dans l'étude de ces dernières lorsqu'elles sont considérées sur une courbe hyperspatiale, Castelnuovo considère également les séries linéaires sur une courbe de genre p hyperspatiale. Le support de la série importe peu, car si deux courbes appartiennent à la même classe, c'est-à-dire si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle (ne s'étendant pas nécessairement, en tant que transformation birationnelle, aux espaces contenant les courbes), cette transformation fait correspondre à une série linéaire une série linéaire de même ordre et de même dimension. Le fait de prendre comme support une courbe hyperspatiale conduit à un exposé plus simple et plus élégant de la théorie ; sa fécondité est de plus attestée par les nombreuses applications que Castelnuovo a pu en faire.

C'est pendant son séjour à Turin également que Castelnuovo a publié son important mémoire sur les systèmes linéaires de courbes algébriques planes, considérés dans le groupe des transformations birationnelles du plan. Cette question préoccupait à l'époque les géomètres italiens. L'usage systématique de la géométrie sur une

(1) Le même concept fut développé à la même époque et d'une manière indépendante par Fr. Deruyts, qui devait plus tard enseigner la Géométrie supérieure à l'Université de Liége.

courbe algébrique permit à CASTELNUOVO de traiter la question sous son véritable aspect et d'obtenir un grand nombre de résultats.

Le premier travail de CASTELNUOVO sur les surfaces algébriques date de 1891. A cette époque, il va occuper à Rome la chaire de Géométrie analytique, qu'il conservera jusqu'à sa retraite en 1935. C'est à Rome qu'il rencontrera ENRIQUES et ce sera le début d'une collaboration féconde.

Federigo ENRIQUES, né à Livourne en 1871, conquit son Doctorat en Sciences mathématiques à l'Université de Pise en 1891 ; il y avait eu pour Maîtres BETTI, DINI, BIANCHI et VOLTERRA. L'année suivante, il est envoyé à Rome pour y suivre les cours de CREMONA. CASTELNUOVO, dans la belle notice qu'il a consacrée en 1947 (Rend. Accad. dei Lincei) à son beau-frère (il avait épousé une sœur d'ENRIQUES), raconte qu'il s'aperçut bien vite que la méthode qui convenait le mieux pour mettre ENRIQUES au courant des faits acquis en géométrie algébrique était la conversation. C'est dans d'interminables promenades dans les rues de Rome que CASTELNUOVO exposa à ENRIQUES la géométrie sur une courbe algébrique et, cette théorie rapidement assimilée, ENRIQUES entreprit de l'étendre aux surfaces algébriques. Il me tenait quotidiennement au courant de ses recherches, écrit CASTELNUOVO, et je soumettais ses résultats à une critique sévère. Il ajoute qu'il n'est pas exagéré de dire que, dans ces conversations, fut construite la théorie des surfaces algébriques suivant la méthode italienne.

NOETHER avait publié (1869, 1874) un important mémoire sur les surfaces algébriques, où il donnait les bases de la théorie et établissait les premières propriétés, mais ce mémoire était obscur et certaines démonstrations étaient longues et fastidieuses, laissant parfois une trop grande place à l'intuition. Il appartenait à ENRIQUES d'établir une théorie aux proportions harmonieuses.

L'instrument qui est à la base des recherches dans la géométrie sur une surface algébrique est le système linéaire de courbes tracées sur la surface, c'est-à-dire un système de courbes tel que par r points de la surface passe en général une seule courbe du système. Si deux surfaces appartiennent à la même classe, à un système linéaire de l'une correspond un système linéaire de l'autre. ENRIQUES commença par édifier la théorie de ces systèmes linéaires, puis il introduisit une opération fonctionnelle : l'opération d'adjonction. Sur une courbe algébrique de genre p, il existe une série linéaire privilégiée, d'ordre $2p$-2 et de dimension p-1, appelée série canonique. Si l'on prend pour modèle projectif de la courbe une courbe plane d'ordre m n'ayant que des points doubles ordinaires, ce qui est toujours possible

(Halphen), la série canonique est découpée par les courbes d'ordre m-3 passant simplement par les points doubles. Eh bien, à un système linéaire de courbes tracées sur une surface algébrique, Enriques associe un système linéaire dont les courbes découpent, sur les courbes du premier système, la série canonique de celles-ci. Il obtient ainsi le système adjoint au premier système. Dans ses premiers mémoires (1893, 1895), l'introduction du système adjoint présente quelques points délicats ; Enriques devait plus tard trouver une méthode beaucoup plus directe et plus simple, en utilisant les courbes jacobiennes des réseaux de courbes du système linéaire de départ.

Si $|C|$ est un système linéaire et $|C'|$ son adjoint, il existe en général des courbes C' qui contiennent une courbe C. On définit ainsi un système linéaire $|K| = |C'—C|$ appelé système canonique de la surface. Sur deux surfaces qui appartiennent à la même classe, les systèmes canoniques se correspondent. Le nombre des courbes canoniques linéairement indépendantes est donc un invariant : le genre géométrique p_g de la surface. Ici se place un fait curieux qui montre bien les difficultés du passage de la géométrie sur une courbe algébrique à la géométrie sur une surface. Le genre p d'une courbe algébrique est le nombre des groupes canoniques linéairement indépendants, mais on peut aussi obtenir sa valeur par une formule arithmétique exprimant la dimension du système linéaire des courbes d'ordre m-3 dont il a été question plus haut. Si l'on a affaire à une surface algébrique, on peut généraliser cette formule arithmétique et le calcul donne un nombre p , appelé genre arithmétique de la surface, qui peut être inférieur à p_g. Ce point avait déjà été remarqué par Cayley et par Clebsch. Il se fait que p_a est aussi un invariant des surfaces ; pour le démontrer, Enriques utilise une méthode fort ingénieuse, basée sur l'étude des dimensions des séries linéaires découpées sur une courbe C par les adjoints au système $|C|$ et à ses multiples successifs. Un théorème établi plus tard par Picard montra que l'on peut se limiter à la première de ces séries. D'une manière précise, la série découpée par les courbes adjointes C' sur une courbe C n'est pas la série canonique complète de cette courbe, mais une série dont la dimension est inférieure de p_g-p_a à la dimension de la série complète. Il en résulte que p_g-p_a et par suite p_a sont des invariants de la surface.

Enriques avait ainsi introduit deux invariants des surfaces algébriques : le genre géométrique et le genre arithmétique ; il faut y ajouter le genre des courbes canoniques, appelé genre linéaire p (1). A ces genres, Enriques en adjoignit d'autres de la manière suivante : On peut définir sur une surface le système somme de deux systèmes linéaires : c'est le système qui contient toutes les courbes formées de deux courbes prises une dans chacun des systèmes linéaires et les courbes, en général irréductibles, qui peuvent se ramener aux précédentes par variation continue dans le système linéaire (1). On en déduit la définition des multiples d'un système linéaire. ENRIQUES a considéré les systèmes double, triple..., du système canonique, qu'il appelle systèmes bicanonique, tricanonique... Les dimensions P_2-1, P_3-1,... de ces systèmes sont des invariants de la surface, dont l'utilité devait être démontrée immédiatement. CASTELNUOVO et ENRIQUES réussirent à construire des surfaces sur lesquelles le système canonique n'existe pas, mais qui possèdent des courbes bicanoniques. Ensuite, CASTELNUOVO parvint à démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit rationnelle est que son genre arithmétique p_a et son bigenre P_2 soient nuls.

Pour montrer la fécondité de sa théorie, ENRIQUES l'appliqua à la détermination complète de surfaces de caractères déterminés. Pendant ce temps, CASTELNUOVO perfectionnait la théorie des systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface algébrique. La dimension d'une série linéaire appartenant à une courbe de genre p est fixée par le théorème de RIEMANN-ROCH. Il s'agissait de trouver l'analogue de ce théorème pour les systèmes linéaires de courbes appartenant à une surface. CASTELNUOVO réussit à résoudre cette difficile question. Sans entrer dans des détails, bornons-nous à indiquer un point qui montre une fois de plus la difficulté du passage des courbes aux surfaces. Sur une courbe algébrique, si les groupes d'une série linéaire appartiennent à des groupes de la série canonique, la dimension de ces séries est augmentée ; si les courbes d'un système linéaire appartenant à une surface appartiennent à des courbes canoniques, la dimension du système est diminuée.

Entre deux courbes algébriques appartenant à la même classe, il existe une correspondance birationnelle sans exception. Au contraire, dans la correspondance birationnelle entre deux surfaces F, F' d'une même classe, il peut exister des exceptions, c'est-à-dire des points d'une des surfaces auxquels correspondent sur l'autre les points d'une courbe, nécessairement rationnelle. De telles courbes sont appelées courbes exceptionnelles ; elles sont de deux espèces : une courbe exceptionnelle sur laquelle il n'existe aucun point auquel corresponde une courbe sur l'autre surface, est de première espèce ; elle est de seconde espèce dans le cas contraire. ENRIQUES a démontré

(1) Ainsi, dans un plan, le système somme du système linéaire des droites et du systèmes linéaire des coniques est le système linéaire des cubiques. Le double du système linéaire des coniques est le système linéaire des quartiques.

que, dans une classe de surfaces algébriques, il existe des surfaces dépourvues de courbes exceptionnelles de première espèce. D'autre part, CASTELNUOVO et ENRIQUES ont réussi à démontrer que, si une surface possède des courbes exceptionnelles de seconde espèce, elle est rationnelle ou peut se ramener, par une transformation birationnelle, à une surface réglée.

Pendant que CASTELNUOVO et ENRIQUES développaient en Italie la théorie algébrico-géométrique des surfaces algébriques, celles-ci étaient étudiées en France par PICARD, PAINLEVÉ, HUMBERT..., par des méthodes transcendantes. PICARD a notamment introduit les intégrales de différentielles totales attachées à une surface algébrique intégrales qui portent aujourd'hui son nom. Une surface algébrique ne possède pas, en général, d'intégrales de PICARD de première espèce (qui restent partout finies sur la surface) ; celles qui en possèdent sont des surfaces particulières. De même, les surfaces pour lesquelles le nombre p_g-p_a n'est pas nul sont aussi des surfaces particulières. Certains indices portaient à croire que ces deux catégories de surfaces particulières coïncidaient. La démonstration de l'identité de ces surfaces fut l'œuvre des géomètres italiens : CASTELNUOVO, ENRIQUES et M. SEVERI qui, depuis 1902, n'a cessé d'apporter des contributions essentielles à la géométrie algébrique. On peut caractériser ces surfaces de la manière suivante : Considérons sur une surface les courbes algébriques d'ordre donné ; ces courbes se répartissent en un nombre fini de systèmes continus (algébriques). Si ces systèmes sont tous linéaires, la surface est dite régulière, elle est dépourvue d'intégrales de PICARD de première espèce et ses genres géométrique et arithmétique sont égaux. Si, au contraire, ces systèmes ne sont pas tous linéaires, la surface est dite irrégulière, elle possède q intégrales de PICARD de première espèce linéairement indépendantes et on a $q = p_g$-p_a.

ENRIQUES s'est éteint à Rome le 14 juin 1946. CASTELNUOVO l'a suivi dans la tombe le 27 avril 1952. Nous avons essayé de faire comprendre quelle fut l'œuvre de ces deux géomètres : ils ont créé des méthodes nouvelles d'investigation et l'on ne sait ce que l'on doit le plus admirer ; ou l'élégance de ces méthodes ou la profondeur des résultats obtenus.

Lucien GODEAUX.