L. GODEAUX

Exercices

de

Géométrie Analytique.

1927.

Exercices de Géométrie analytique

On supposera les axes rectangulaires.

1. Former l'équation du lieu des droites s'appuyant sur les courbes

$$y=0\ ,\ z^2+2px=0\ ;$$
$$z=0\ ,\ y^2-2px=0$$

et sur la droite $y=z\ ;\ x=0$.

2. Former l'équation de la surface lieu des droites s'appuyant sur Oz et sur les courbes

$$z=a\ ,\ y^2=2px\ ;$$
$$z=-a\ ,\ x^2=2py$$

et étudier la section de cette surface par le plan $z=x-y$.

3. Former l'équation d'un cylindre ayant pour directrice

$$y^2=2px,\quad z=0$$

et dont les génératrices sont perpendiculaires à un plan ϖ mené par la droite $z=a\ ,\ y=x$

et faisant un angle θ avec Oz. Equation du lieu de l'intersection du cylindre avec le plan ϖ lorsque θ varie.

4. Equation du lieu des droites s'appuyant sur les droites

$$x=y\ ,\ z=0\ ;\ y=0\ ,\ z=a,$$

et tangentes à la quadrique $z=x^2+2y^2$. Section de ce lieu par le plan $z=x+y$.

5. On considère un trièdre trirectangle $Oxyz$ dont les faces sont tangentes à une sphère S. Par O, on mène une droite rencontrant S en A, B et on porte, à partir de O, sur cette droite, une distance $OM=AB$. Lieu du point M lorsque la droite varie et section de ce lieu par le plan passant par les points de contact de S avec les plans du trièdre $Oxyz$.

6. Lieu des droites s'appuyant sur les droites

$$x=0\ ,\ z=a\quad \text{et}\quad y=0\ ,\ z=-a,$$

tangentes à la quadrique $z = \alpha x y + \alpha^2$.

7. Lieu des droites s'appuyant sur Oz et sur les courbes

$$z = a\,,\quad xy + ay = 1\,,$$

$$z = -a\,,\quad xy + ax = 1\,.$$

Section de ce lieu par le plan $x + y + z = 3$.

8. Le lieu des droites tangentes à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,.$$

et s'appuyant sur les droites

$$y = 0,\ z = c \quad\text{et}\quad x = 0,\ z = -c,$$

se compose de deux quadriques. Nature de ces quadriques.

9. Lieu des droites s'appuyant sur

$$x = 0\,,\ z^2 = 2py\,;\ y = 0\,,\ z^2 = 2qx\,;\ z = 0\,,\ x = y\,.$$

Section de ce lieu par le plan $x + y - z = 3$.

10. Lieu des droites s'appuyant sur Oz et sur les courbes

$$z = a\,,\ xy - x - y = 0\,;\ z = -a\,,\ y^2 = 2x\,.$$

11. Équation de la surface engendrée par la révolution de Oz autour de la droite

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}\,.$$

Nature de cette surface et équations des génératrices rectilignes du second mode.

12. Surface engendrée par la révolution de la droite

$$z = 0\,,\ x + y = 1$$

autour de la droite

$$\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y-2}{\alpha^2} = \frac{z-\alpha}{1}\,.$$

Nature du lieu obtenu pour les diverses valeurs de α.

13. Surface engendrée par la révolution de la courbe

$$z = 0\,,\ x^2 + 2y^2 - x = 0$$

autour de la droite $x = y = z$. Étude de la section de cette surface par un plan passant par l'axe.

14. Équation de la surface de révolution d'axe

$$x = 0, \quad y - a + \alpha z = 0$$

et de directrice

$$y = 0, \quad x - a + \alpha^2 z = 0.$$

Nature de cette surface pour les différentes valeurs de α. Lieu du centre de cette surface lorsque α varie.

15.- Lieu des droites s'appuyant en A sur Oz, en B sur l'ellipse

$$z = 0, \quad \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

la distance AB étant constante. Étude de la section de cette surface par le plan passant par les bissectrices des angles Oxz, Oyz.

16.- Surface engendrée par la révolution de la droite

$$z = 0, \quad x - y = 1$$

autour de la droite

$$\frac{x-1}{\alpha} = \frac{y+2}{2\alpha^2} = \frac{z+\alpha}{-1}.$$

Equations des génératrices rectilignes de chaque mode de cette surface.

17.- Lieu des droites s'appuyant sur les droites

$$y = ax, \; z = a \quad ; \quad y = -ax, \; z = -a,$$

parallèles au plan $z = a^2(x+y)$. Equations des génératrices du second mode du lieu trouvé.

18.- Lieu de la perpendiculaire abaissée du point $(x_0 + a\lambda, y_0, z_0 + c\lambda)$ sur le plan $y = \lambda x$, lorsque λ varie. Nature de ce lieu. Equations des génératrices rectilignes du second mode lorsque le lieu est un paraboloïde hyperbolique.

19.- Lieu des droites s'appuyant sur les droites $x = 0, z = a$; $y = 0, z = -a$, et parallèles au plan $z = a(x+y)$. Equations des génératrices rectilignes du second mode.

20.- Lieu des droites s'appuyant sur les droites

$$x = 0, \; y = \lambda z + a; \quad y = 0, \; x = \lambda z - a,$$

parallèles au plan $x+y+z=0$. Equations des génératrices rectilignes du second mode.

21. Lieu des droites s'appuyant sur les droites

$$x=0\,,\ z-a=y\quad;\quad y=0\,,\ z+a=x,$$

parallèles au plan $\lambda^2 x+\lambda y+z=0$. Lieu des directions principales passant par l'origine lorsque λ varie.

22. Lieu des droites intersections de plans perpendiculaires passant respectivement par les droites

$$y=\lambda x,\ z=x+\lambda\ ;\ z=\lambda y,\ x=y+\lambda.$$

Nature de ce lieu pour les diverses valeurs de λ.

23. Par un point M de la droite r ($z=0$, $y=x$), on mène un plan ϖ passant par d ($x=0$, $z=a$) et un plan ϖ' passant par d' ($y=0$, $z=-a$). Lieu de la droite intersection d'un plan passant par d, perpendiculaire à ϖ et d'un plan passant par d', perpendiculaire à ϖ', lorsque M décrit la droite r. Nature de ce lieu.

24. Lieu de la droite commune à deux plans perpendiculaires passant l'un par la droite

$$x+\lambda y+\lambda^2 z=1,\ \lambda^2 x+\lambda y+z=1,$$

l'autre par la droite

$$\mu x+\mu^2 y+z=1,\ x+\mu y+\mu^2 z=1.$$

Ce lieu peut-il être de révolution?

25. Lieu des droites s'appuyant sur les droites ($x=0, z=a$), ($y=0$, $z=-a$), ($z=0$, $y=bx$). Equations des génératrices rectilignes du second mode.

26. Lieu de la droite commune à deux plans perpendiculaires passant respectivement par les droites ($x=0, z-a+ky=0$), ($y=0, z+a-kx=0$). Equations des génératrices rectilignes du second mode.

27. Lieu des droites s'appuyant sur les droites ($z=a$, $y=0$), ($z=-a$, $x=0$), ($\lambda^2 x=\lambda y=z$). Nature de ce lieu lorsque λ

varie. Lieu du centre lorsque λ varie.

28.. On considère deux dièdres droits ayant respectivement pour arêtes $(x=0,\ z-a+ky=0)$, $(y=0,\ z+a-kx=0)$. Deux faces de ces dièdres se rencontrent suivant une droite s'appuyant sur la droite $z=0$, $x=y$. Lieu des droites communes aux deux autres faces. Nature de ce lieu lorsque k varie.

29.. Lieu des droites s'appuyant sur les droites $(y=\lambda x,\ z=\lambda)$, $(z=\lambda^2 y,\ x=\lambda^2)$, $(x=\lambda^3 z,\ y=\lambda^3)$. Nature de ce lieu lorsque λ varie. Equations des génératrices rectilignes du second mode.

30.. On donne les familles de quadriques

$$\lambda^2 x(x-z)-\lambda y(y-z)+x-y=0, \qquad (1)$$

$$\lambda^2(x^2+z)+\lambda(y^2+x)+z^2-y=1, \qquad (2)$$

$$\lambda(yz+xz+y)-\lambda^2 x-(z-\lambda^2)(z-\lambda)=0, \qquad (3)$$

$$\lambda^2(x^2+yz)+\lambda(y^2+z)+z^2+y=1, \qquad (4)$$

$$\lambda(x^2+y^2+z^2)+(z-1)(x+y)=0, \qquad (5)$$

$$\lambda^2(x^2+2yz)+\lambda(y^2+2zx)+z^2+2xy=x+y+z, \qquad (6)$$

$$\lambda^2(z-xy)+\lambda(x^2+y^2-1)+x-y=0, \qquad (7)$$

$$\lambda x^2+\lambda^2 yz+y+z=0, \qquad (8)$$

$$\lambda^2 x(x+2z)+\lambda y(y+2z)+x+y=0, \qquad (9)$$

$$\lambda^2(z-xy)+\lambda(y^2-zx)+z^2-x^2=1, \qquad (10)$$

$$\lambda(x^2+y^2-z^2)+z-xy=1, \qquad (11)$$

$$\lambda^3(x^2+yz)+\lambda^2(y^2+zx)+\lambda(x^2+xy)=x+y+z, \qquad (12)$$

$$x^2+yz-x+\lambda(y^2+2x-y)+\lambda^2(z^2+xy-z)=\lambda^3, \qquad (13)$$

$$x^2+y^2-z^2-a^2+\lambda(z^2-xy)=0, \qquad (14)$$

$$\lambda^3(x^2+z)+\lambda^2(y^2+x)+\lambda(z^2+y)=1-\lambda^2, \qquad (15)$$

$$x^2+y^2+z^2=2\lambda yz+1, \qquad (16)$$

$$\lambda(yz+x)+\lambda^2(zx+y)+\lambda^3(xy+z)=1, \qquad (17)$$

$$yz+zx+xy=\lambda(x^2+y^2)+1, \qquad (18)$$

$$z - xy + \lambda(x^2+y^2-a^2) = 0, \qquad (19)$$
$$x^2+\lambda y^2+\lambda^2 z^2 - \lambda(\lambda+1)(yz+1)+\lambda x = 0, \quad (20)$$
$$x^2+y^2+z^2-a^2+2\lambda(z-xy) = 0, \quad (21)$$
$$\lambda^3 x(x-z)+\lambda^2 y(y-z)+\lambda z(z-1) = 1, \quad (22)$$

Déterminer la nature des quadriques représentées par ces équations pour les différentes valeurs de λ.

31.. Equations, sous forme paramétrique, du lieu des pieds des normales abaissées de l'origine sur les quadriques de chaque famille (On prendra λ comme paramètre).

32.. Ecrire l'équation du plan tangent à chacune des quadriques (λ étant supposé constant) sous forme normale

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = f(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

33.. En déduire l'équation du lieu des pieds des normales abaissées de l'origine sur les plans tangents de chaque quadrique (λ constant).

34. Lieu des pôles du plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

par rapport aux quadriques de chaque famille (λ variable). On écrira les équations de ce lieu sous forme paramétrique, en prenant λ pour paramètre.

35.. On considère un faisceau de quadriques

$$F(x,y,z) + \lambda F_1(x,y,z) = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

et une droite

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A'x+B'y+C'z+D'=0. \quad (\mathrm{II}).$$

Le lieu des conjuguées de la droite (II) par rapport à chacune des quadriques du faisceau (I), est une quadrique Q.

Le lieu des intersections des plans polaires des points de la droite (II) par rapport aux quadriques

$$F(x,y,z) = 0 \quad , \quad F_1(x,y,z) = 0$$

est la quadrique Q (dont on obtient ainsi les génératrices du second mode).

Démontrer cette propriété dans le cas où le faisceau (I) a pour équation (5), (11), (14), (16), (18), (19) et (21), la droite (II) ayant pour équations

$$z = 0 \quad , \quad x + y = 1 .$$

36.- Lieu des intersections des quadriques d'une des familles du n° 30 et des plans polaires d'un point $P(a,b,c)$ par rapport aux quadriques de cette famille.

37.- Déterminer les plans passant par un point $P(a,b,c)$ et coupant une quadrique du n° 30 suivant un cercle. Lieu du centre de ce cercle lorsque λ varie.

38.- Déterminer pour quelles valeurs de α, β, γ la quadrique

$$\alpha(z - xy) + \beta(x^2 + y^2 + 1) + \gamma z(x+y) = 1$$

possède une direction principale de paramètres directeurs $(1, 1, -1)$.

39.- Déterminer les équations du lieu des points de contact des plans tangents aux quadriques de la famille (2), parallèles aux sections circulaires de ces quadriques.

40.- Déterminer les équations des génératrices rectilignes de la quadrique (3) s'appuyant sur Oz. Lieu de ces génératrices lorsque λ varie.

41.- Déterminer les valeurs de a, b, c telles que la quadrique

$$a(x^2 + y) + b(y^2 + x) + c(z^2 - xy) = 1$$

soit de résolution.

42. Démontrer que la quadrique

$$\alpha^3(x^2+y^2+z^2)+\alpha^2(yz+zx+xy)+\alpha(x-y-z)=1$$

est toujours de révolution. Déterminer les équations de l'axe de révolution.

43. La quadrique

$$\alpha^2(x^2-1)+\beta^2(y^2-1)+\gamma^2(z^2-1)+2\beta\gamma(x-yz)+2\gamma\alpha(y-zx)+2\alpha\beta(z-xy)=0$$

est un cône si $\alpha\beta\gamma$ n'est pas nul, un cylindre si l'un au moins des nombres α, β, γ est nul.

44. Rechercher le lieu du centre de la section de la quadrique (4) par le plan

$$\lambda^2 x + \lambda y + z = 1$$

lorsque λ varie. Même recherche pour la quadrique (6).

45. Lieu des points de contact des plans tangents à la quadrique

$$\alpha^2(y^2+z^2)+\alpha(x^2+yz)=1$$

passant par la droite

$$\frac{x-\alpha}{\alpha} = \frac{y-\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{z+1}{1},$$

lorsque α varie. (On mettra les équations sous forme paramétrique, α étant le paramètre).

46. Déterminer les valeurs non nulles de a, b, c de manière à ce que la quadrique

$$ayz + bzx + cxy = 1 \qquad (23)$$

soit de révolution.

47. Déterminer la relation qui doit exister entre a, b, c pour que la quadrique (23) soit tangente au plan

$$ax + by + cz = 1.$$

48. Lieu d'un point en lequel le plan tangent à la quadrique

$$ax^2 + 2byz + cz^2 = 2y$$

coïncide avec le plan

$$acx + by + cz = 1.$$

49.. Équations des génératrices rectilignes de la quadrique (9).

50.. Lieu du centre de la section de la quadrique (11) par le plan

$$\lambda(x+y) + z = 1,$$

lorsque λ varie.

51.. Lieu des sommets des quadriques

$$\alpha^2 yz + \alpha zx + xy = 1$$

lorsque α varie.

52.. Former l'équation du plan diamétral de la quadrique

$$\alpha^3(x^2+y) + \alpha^2(y^2+z) + \alpha(z^2+x) = 1,$$

conjugué au diamètre passant par l'origine. Lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur ce plan lorsque α varie.

53.. Lieu du diamètre conjugué au plan

$$z = x + y$$

par rapport aux quadriques (12), quand λ varie.

54.. Lieu des points de contact des plans tangents à la quadrique (14), perpendiculaires à la direction (1, -3, 2) lorsque λ varie.

55.. Équation du cône contenant les normales abaissées de l'origine sur la quadrique

$$a(x^2 - x) + b(y^2 - xz) + c(z^2 - xy) = 1.$$

Ce cône ne peut être de révolution.

56.. Relation existant entre a et b pour que la quadrique

$$a(z + xy) + b(x^2 + y^2 - 1) + ab(x - y)z = 0$$

soit de révolution. Equations de l'axe de révolution.

57.. Déterminer les axes de la quadrique

$$a(y^2+z^2-2x)+b(z^2+x^2-2y)+c(x^2+y^2-2z)=0.$$

58.. Lieu des centres des quadriques de chacune des familles données au n° 30.

59.. Condition pour que la quadrique

$$a(x-yz)+b(y-zx)+c(z-xy)=1$$

soit de révolution. Lieu des axes de révolution lorsque a varie.

60.. Lieu de la conjuguée de la droite

$$y=0 \quad , \quad z-a=\lambda x$$

par rapport à la quadrique

$$\lambda^3(x^2+2yz)+\lambda^2(y^2+2zx)+\lambda(z^2+2xy)=1$$

lorsque λ varie.

61.. Lieu des droites conjuguées de la droite

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$$

par rapport aux quadriques (16) lorsque λ varie. Nature de ce lieu.

62.. Lieu des intersections des plans diamétraux conjugués à la direction $(1,-1,-2)$ par rapport aux quadriques

$$z-2xy+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)=0,$$
$$x^2+y^2+z^2=2\lambda yz$$

lorsque λ varie. Nature de ce lieu.

63.. Valeurs de α, β, γ pour lesquelles la quadrique

$$\alpha(z-xy)+\beta(x^2+y^2-1)+\gamma z(x+y)=1$$

admet la direction (α,β,γ) comme direction principale. Paramètres directeurs des autres directions principales.

64.. Valeurs de a, b, c pour que $x=y=z$ soit une direction principale de la quadrique

$$a\,(x^2+xy-y)+b\,(y^2+yz-z)+c\,(z^2+zx-x)=1.$$

65.- Equation du cône du second ordre contenant les normales abaissées du point $S\,(x_0, y_0, z_0)$ sur la quadrique

$$a(yz-x)+b(zx-y)+c(xy-z)=1.$$

Lieu du point S pour lequel le cône est de révolution (a, b, c étant variables).

66.- Par un point $A(a, a, 0)$, on mène un plan ϖ; soit P le point où la perpendiculaire à ϖ en A perce le plan $\alpha\,(y-z=2a)$. Lieu du point d'intersection du plan ϖ et de la droite OP lorsque le plan ϖ tourne autour de A. Nature de ce lieu.

67.- Relation entre α, β, γ pour que la courbe

$$\alpha yz+\beta zx+\gamma xy=1, \quad \alpha x+\beta y+\gamma z=1$$

soit un cercle.

68.- Lieu des droites conjuguées par rapport à la quadrique

$$z^2+xy+\alpha(x^2+y^2)=1$$

des tangentes à la courbe

$$z=0, \; y^2=2\alpha x.$$

Nature du lieu obtenu, raison géométrique du résultat.

69.- Lieu d'un point M tel que la droite qui le joint à un point $A(0, 0, \alpha)$ rencontrant la quadrique

$$2z=ax^2+by^2$$

en B, C, le rapport anharmonique (AMBC) ait une valeur constante λ.

70.- On mène par la droite $(x=a,\; y=x)$ un plan ϖ rencontrant Ox en A et par la droite ($z=-a$, $x+y=0$), un plan ϖ' rencontrant Oy en B. Lieu de la droite $\varpi\varpi'$ lorsque la droite BC passe par un point fixe $(b, c, 0)$. Équations des génératrices du second mode du lieu trouvé.

71.- Equation du lieu d'un point M tel que le plan polaire de la droite OM par rapport au cône

$$\alpha yz + \beta zx + \gamma xy = 0$$

soit parallèle à la droite joignant M au point $A(\alpha, \beta, \gamma)$.

72.- Lieu du point M tel que la conjuguée de OM par rapport à la quadrique

$$z^2 = x^2 + y^2 + x - y + 1$$

soit perpendiculaire à un plan passant par M et par un point $A(a, b, c)$.

73.- Lieu d'un point M tel que le plan polaire du point où OM rencontre le plan $z = x + y + 1$ par rapport à la quadrique

$$x^2 + y^2 - axy + bz = 1$$

passe par M.

74.- Lieu de l'intersection d'un plan ϖ mené par un point $P(a, b, 0)$ avec la droite joignant les pôles de ce plan ϖ par rapport à deux sphères

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + (y-b)^2 + z^2 = b^2.$$

75.- Le lieu des pôles des plans tangents à une quadrique Q' par rapport à une quadrique Q, est une quadrique Q'' appelée polaire réciproque de Q' par rapport à Q.

Rechercher les polaires réciproques de

la quadrique	par rapport à la quadrique
$z = xy + a,$	$(x-r)^2 + y^2 + z^2 = r^2,$
$z = xy,$	$(x-a)^2 + (y-a)^2 + z^2 = 2a^2,$
$ayz + bzx + cxy = 1,$	$(x-R)^2 + y^2 + z^2 = R^2,$
$x^2 + y^2 + z^2 = 2axy + 1,$	$z = xy,$
$z = xy + x + y,$	$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$
$(x+y)^2 = 2(z - x + y),$	$z = xy,$
$y = zx + \alpha,$	$x = yz + \alpha,$
$x - y = (z+x)(z-y),$	$Ax^2 + By^2 + Cx^2 = 1.$

76. Lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à l'une des courbes

$$z = 0, \quad xy + x + y = 0;$$
$$z = 0, \quad y^2 = 2px + a;$$
$$z = 0, \quad ax^2 + by^2 + c = 0.$$

77. Foyers des quadriques

$$a(x^2+y) + b(y^2+z) + c(z^2+x) = 1,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ayz + 1,$$
$$z = \alpha(x^2 + 2y^2),$$
$$ayz + bzx + cxy = 1,$$
$$z = xy.$$

78. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles la quadrique (13) possède une direction principale faisant avec Oz un angle égal à $\frac{\pi}{3}$.