SOBRE LAS SUPERFICIES DE CUARTO ORDEN QUE CONTIENEN DOS CUBICAS ALABEADAS (*)

por

L. GODEAUX

En sus bellas investigaciones sobre la *teoría de la base* para las curvas trazadas sobre una superficie algebraica, F. SEVERI (1) ha establecido que el grupo de las transformaciones birracionales de una superficie algebraica regular en sí misma es isomorfo (holoédrica o meriédricamente) al grupo de las sustituciones automorfas, de módulo ± 1, de la forma cuadrática adscrita a la base de la superficie. Esto ha permitido el estudio de las transformaciones birracionales de una superficie de género uno ($p_a = P_4 = 1$) en sí misma, estudio hecho en el caso de que el número-base de la superficie es igual a 2 o a 3. Es así como FANO (2) ha estudiado varias superficies de cuarto orden sometidas a la única condición de contener curvas determinadas. Nosotros hemos estudiado igualmente, el grupo de las transformaciones de una superficie de cuarto orden, que contienen una recta y una cónica (3). En la presente nota, nos proponemos estudiar la superficie de cuarto orden que contiene dos cúbicas alabeadas que no se cortan. No determinamos por completo el grupo de transformaciones birracionales de la superficie, grupo que parece bastante complejo. Nos limitamos al estudio de algunas de sus transformaciones ; determinamos las curvas elípticas trazadas sobre la superficie y a propósito de estas curvas, hacemos algunas observaciones que nos parecen no desprovistas de interés.

(*) Traducción por T. R. Bachiller.

(1) *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* (Math. Annalen, 1906, t. 42, p. 194) ; *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* (Ann. Sc. de l'Ec. Norm. Sup., 1908, p. 449) ; *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica* (Rend. Circ. Mat. Palermo, 1910, t. 30, p. 265).

(2) *Superficie del quarto ordine con gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali* (Rend. R. Accad. Lincei, 1920).

(3) Bulletín de l'Acad. Roy. de Bélgique, juillet 1942.

1. Sea F una superficie de cuarto orden, sometida a la única condición de contener dos cúbicas alabeadas sin punto alguno común. Designemos estas cúbicas alabeadas por K_1, K_2 y por C las secciones planas de la superficie. La superficie F, depende de 17 módulos y su número-base es $\rho=3$. Las curvas K_1, K_2, C, forman una base cuyo determinante es

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 52$$

Si las curvas K_1, K_2, C no forman una base *intermediaria*, sean Γ, Γ_1, Γ_2 tres curvas que constituyan una base de tal naturaleza. Σ, Γ_1, Γ_2 tres curvas que constituyan una base de tal naturaleza. Representemos por $[X, Y]$ el número de puntos comunes a dos curvas X, Y y pongamos

$$[\Gamma, \Gamma] = \nu, \quad [\Gamma_1, \Gamma_1] = \nu_{11}, \quad [\Gamma_2, \Gamma_2] = \nu_{22}, \quad [\Gamma, \Gamma_1] = \nu_1.$$
$$[\Gamma, \Gamma_2] = \nu_2, \quad [\Gamma_1, \Gamma_2] = \nu_{12}$$

El determinante de la segunda base debe ser un divisor de 52 y la razón de los dos determinantes debe ser un cuadrado perfecto. Se debe, pues, tener

$$\nu\,\nu_{11}\,\nu_{22} + 2\,\nu_1\,\nu_2\,\nu_{12} - \nu\,\nu_{12}^2 - \nu_{11}\,\nu_2^2 - \nu_{22}\,\nu_1^2 = 13$$

Ahora bien, como la superficie F es de géneros uno ($p_a = P_4 = 1$), ν, ν_{11}, ν_{22} son pares; la ecuación anterior es, por tanto, imposible en números enteros. Por consiguiente, las curvas C, K_1, K_2, constituyen una base intermediaria. Además, por ser unívoca la división sobre una superficie de género uno (SEVERI), es también una base *mínima*.

Toda curva L de género π, trazada sobre la superficie F, satisface a una relación funcional

$$L \equiv \lambda\,C + \lambda_1\,K_1 + \lambda_2\,K_2,$$

donde λ, λ_1, λ_2 son enteros, que satisfacen a la ecuación

$$2\,\lambda^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 3\,\lambda\,(\lambda_1 + \lambda_2) = \pi - 1$$

2. Las cuádricas que pasan por K_1 determinan sobre F las quínticas

$$C_1 \equiv 2\,C - K_1,$$

de género dos. El sistema $|C_1|$ es una red de grado dos y define una transformación birracional involutiva de la superficie F en sí misma. Sea T_1 esta transformación. Designemos por C', K'_1, K'_2 las curvas que T_1 hace corresponder respectivamente a C, K_1, K_2. Tenemos

$$|2C' - K'_1| = |2C - K_1|$$

Las bisecantes de K_1 cortan aún a la superficie F en pares de puntos homólogos, mediante la T_1. Las bisecantes de K_1, que se apoyan sobre una sección plana C de F, forman una superficie reglada de orden 10, que pasa cinco veces por K_1; esta superficie corta F, fuera de K_1, según la curva C considerada y la curva C′ homóloga. Se tiene, pues,

$$10\,C \equiv C + C' + 5\,K_1$$

Las bisecantes de K_1 que se apoyan sobre K_2, forman una superficie reglada de orden 12, que pasa seis veces por K_1. Esta superficie corta a F, fuera de K_1, K_2, según la curva K'_2. Por tanto, se tiene

$$12\,C \equiv K_2 + K'_2 + 6\,K_1$$

Se concluye que

$$\left.\begin{aligned} C' &\equiv 9\,C - 5\,K_1, \\ K'_1 &\equiv 16\,C - 9\,K_1, \\ K'_2 &\equiv 12\,C - 6\,K_1 - K_2 \end{aligned}\right\} \qquad [T_1]$$

A esta transformación corresponde la sustitución

$$\begin{aligned} \lambda' &= 9\,\lambda + 16\,\lambda_1 + 12\,\lambda_2, \\ \lambda'_1 &= -5\,\lambda - 9\,\lambda_1 - 6\,\lambda_2, \\ \lambda'_2 &= -\lambda_2, \end{aligned}$$

de módulo 1, que transforma en sí misma a la forma cuadrática

$$\varphi(\lambda_1 \lambda_1, \lambda_2) = 2\,\lambda^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - 3\,\lambda\,(\lambda_1 + \lambda_2)$$

3.—Las cuádricas que pasan por K_2, marcan de manera análoga sobre F, quínticas de género dos

$$C_2 \equiv 2\,C - K_2,$$

que forman una red de grado dos; se obtiene así una segunda transformación birracional involutiva T_2 de F en sí, que hace corresponder a C, K_1, K_2, las curvas C′, K'_1, K'_2 dadas por

$$\left.\begin{aligned} C' &\equiv 9\,C - 5\,K_2, \\ K'_1 &\equiv 12\,C - K_1 - 6\,K_2, \\ K'_2 &\equiv 16\,C - 9\,K_2 \end{aligned}\right\} \qquad [T_2]$$

Formemos las transformaciones T_1T_2 y T_2T_1. Se tiene

$$\left.\begin{aligned} C' &\equiv 21\,C - 15\,K_1 + 5\,K_2, \\ K'_1 &\equiv 20\,C - 15\,K_1 + 6\,K_2, \\ K'_2 &\equiv 36\,C - 26\,K_1 + 9\,K_2, \end{aligned}\right\} \qquad [T_1\,T_2]$$

$$\left.\begin{aligned} C' &\equiv 21\,C + 5\,K_1 - 15\,K_2, \\ K'_1 &\equiv 36\,C + 9\,K_1 - 26\,K_2, \\ K'_2 &\equiv 20\,C + 6\,K_1 - 15\,K_2 \end{aligned}\right\} \qquad [T_2\,T_1]$$

A las transformaciones T_1T_2, T_2T_1, corresponden sendas sustituciones automorfas de módulo 1 de la forma φ.

Si la transformación T_1T_2 es periódica, existen sistemas lineales de género superior a uno, transformados en sí mismos por tal transformación y por su inversa T_2T_1. Si

$$|\lambda C + \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2|$$

es un sistema de esa clase, se deberá tener

$$\begin{aligned} 5\,\lambda + 5\,\lambda_1 + 9\,\lambda_2 &= 0, \\ 15\,\lambda + 16\,\lambda_1 + 26\,\lambda_2 &= 0, \\ 5\,\lambda + 6\,\lambda_1 + 8\,\lambda_2 &= 0, \\ \varphi\,(\lambda_1\,\lambda_1,\,\lambda_2) &> 0 \end{aligned}$$

Se obtiene fácilmente, como solución de estas ecuaciones,

$$\lambda = 14\,h, \quad \lambda_1 = -5\,h, \qquad \lambda_2 = -5\,h,$$

siendo h un entero positivo. Pero se tiene

$$\varphi\,(14, -5, -5) = -78,$$

luego el sistema considerado no existe y la transformación T_1T_2 *no es* periódica.

4. Una curva elíptica

$$E \equiv \lambda C + \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$$

perteneciente a la superficie F, está determinada por enteros λ, λ_1, λ_2, que satisfacen a la ecuación

$$\varphi(\lambda_1 \lambda_1, \lambda_2) = 2\lambda^2 - \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right) + 3\lambda(\lambda_1 + \lambda_2) = 0$$

Se obtienen inmediatamente dos soluciones

$$\lambda = \lambda_1 = -\lambda_2 = 1, \qquad \lambda = -\lambda_1 = \lambda_2 = 1,$$

es decir, dos curvas E_1, E_2 que pertenecen a los haces

$$|E_1| = |C + K_1 - K_2|, \qquad |E_2| = |C - K_1 + K_2|$$

Las curvas E_1, E_2 son cuárticas alabeadas elípticas que se cortan en ocho puntos. Además, se verifica

$$E_1 + E_2 \equiv 2C,$$

de suerte que las cuádricas que pasan por una curva E_1 (o E_2) cortan aún a la superficie F, según las curvas E_2 (o E_1).

Una curva E_1 corta a K_1 en un punto y a K_2 en cinco puntos.

Escribamos

$$E_1 \equiv C + (2C - C_1) - C_2 \equiv 3C - C_1 - C_2$$

Las curvas E_1 están, pues, determinadas sobre F por las superficies cúbicas que pasan por una curva de quinto orden, C_1 de género dos y por la cúbica alabeada K_2. Estas superficies cúbicas satisfacen a 18 condiciones (14 por pasar por C_1, y 4 por pasar por K_2, sobre la cual, C_1 se apoya en seis puntos); forman, por tanto, un haz cuya base está constituída por las curvas C_1, K_2 y la única bisecante común a estas dos curvas.

Este último punto puede establecerse del modo siguiente: Sea Φ una de las superficies cúbicas en cuestión. Una cuádrica pasando por K_2, corta aún a Φ según una cúbica alabeada K. Refiramos proyectivamente las cuádricas que pasan por K a las rectas de un plano ω. Obtenemos así una representación punto por punto de Φ sobre este plano. Designemos por $A_1, A_2, \ldots, A_6$ los puntos fundamentales de esta representación de Φ en el plano ω. A la cúbica alabeada K_2 corresponde en ω una recta r.

La curva C_1 corta a K en cuatro puntos; la cuádrica, lugar de las trisecantes de C_1, corta a K en dos puntos fuera de C_1 y estos puntos, están necesariamente sobre la trisecante de C_1 perteneciente a Φ. Resulta de aquí, que a C_1 corresponde en el plano ω una séxtica γ que tiene un punto triple A_1 y cinco puntos dobles A_2, A_3, ..., A_6. Una superficie cúbica pasando por C_1 y K_2, corta aún a Φ según una curva cuya homólogas en ω, se compone de la recta r, de la curva γ y de la cónica que pasa por los puntos A_2, ..., A_6. A esta cónica corresponde una bisecante común a C_1, K_2; esta bisecante pertenece a todas las superficies cúbicas que pasan por C_1 y K_2; es necesariamente única.

5. Las curvas C, K_1, E_1 constituyen una base de determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 52,$$

es decir, una base mínima. La curva elíptica E puede, pues, ser representada por

$$E \equiv \mu C + \mu_1 K_1 + \mu_2 E_1,$$

siendo μ, μ_1, μ_2 enteros que verifican la ecuación

$$2\mu^2 - \mu_1^2 + 3\mu\mu_1 + 4\mu\mu_2 + \mu_1\mu_2 = 0 \qquad [1]$$

Se obtiene, pues,

$$\mu_2 = \frac{\mu_1^2 - 3\mu\mu_1 - 2\mu^2}{\mu_1 + 4\mu}$$

y las soluciones enteras de la ecuación (1), vienen dadas por

$$\mu = k\,u\,(4u + v), \qquad \mu_1 = k\,v\,(4u + v), \qquad \mu_2 = k\,(v - 3uv - 2u),$$

con u, v enteros y k un número racional. Se tiene, en consecuencia

$$E \equiv k\,[(4u + v)(u\,C + v\,K_1) + (v^2 - 3uv + 2u^2)\,E_1],$$

es decir

$$E \equiv k\,[(2u^2 - 2uv + v^2)\,C + (2v^2 + uv - 2u^2)\,K_1 + (2u^2 + 3uv - v^2)\,E_1]$$

La curva E_1 se obtiene para $u=1$, $v=-4$, $26\,k=1$; la E_2 para $u=1$, $v=0$, $2\,k=1$.

6. Vamos ahora a determinar las transformaciones birracionales de F en sí, que conservan las curvas E_1. Una transformación tal puede ser representada por

$$\begin{aligned} C' &\equiv \lambda\, C + \lambda_1\, K_1 + \lambda_2\, E_1, \\ K'_1 &\equiv \mu\, C + \mu_1\, K_1 + \mu_2\, E_1, \\ E'_1 &\equiv E \end{aligned}$$

A esta transformación corresponde una sustitución de módulo $+1$, que transforma en sí mismo el primer miembro de la ecuación (1). Se tiene, pues

$$\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu = \pm 1.$$

La curva C′ debe cortar a E_1 en cuatro puntos, luego

$$4\,\lambda + \lambda_1 = 4.$$

Esta curva es de género tres, por tanto

$$2\,\lambda^2 - \lambda_1^2 + 3\,\lambda\lambda_1 + \lambda_2\,(4\,\lambda + \lambda_1) = 2.$$

La curva K_1 corta a E_1 en un punto, y lo mismo sucede con K'_1, por tanto, se tiene

$$4\,\mu + \mu_1 = 1.$$

Además, K'_1 es racional, luego

$$2\,\mu^2 - \mu_1^2 + 3\,\mu\mu_1 + \mu_2\,(4\,\mu + \mu_1) = -1.$$

De estas dos últimas relaciones, se deduce

$$\mu_1 = 1 - 4\,\mu, \qquad \mu_2 = 26\,\mu^2 - 11\,\mu$$

y

$$K'_1 \equiv \mu\, C + (1 - 4\,\mu)\, K_1 + (26\,\mu^2 - 11\,\mu)\, E_1$$

Igualmente se obtiene, siendo ε un entero,

$$\lambda = 1 - 2\,\varepsilon, \qquad \lambda_1 = 8\,\varepsilon, \qquad \lambda_2 = 2\,(13\,\varepsilon^2 - 2\,\varepsilon$$

Debe tenerse

$$(1-2\,\varepsilon)\,(1-4\,\mu)-8\,\mu\varepsilon=\pm 1,$$

es decir,

$$\varepsilon=-2\,\mu \quad \text{o} \quad \varepsilon=1-2\,\mu.$$

Se obtiene, pues, dos clases de transformaciones :

$$\left.\begin{aligned} C' &\equiv (4\,\mu+1)\,C-16\,\mu\,K_1+8\,(13\,\mu^2+\mu)\,E_1, \\ K'_1 &\equiv \mu\,C-(4\,\mu-1)\,K_1+26\,\mu^2-11\,\mu)\,E_1, \\ E'_1 &\equiv E_1; \end{aligned}\right\} \quad (S_1)$$

$$\left.\begin{aligned} C' &\equiv (4\,\mu-1)\,C-8\,(2\,\mu-1)\,K_1+2\,(52\,\mu^2-48\,\mu+11)\,E_1, \\ K'_1 &\equiv \mu\,C-(4\,\mu-1)\,K_1+(26\,\mu^2-11\,\mu)\,E_1, \\ E'_1 &\equiv E_1 \end{aligned}\right\} \quad (S_2)$$

7. Se ve que las transformaciones S_2 son involutivas.

Observemos que el sistema lineal

$$|\mu C-2\,(2\,\mu-1)\,K_1+\nu E_1|\ .$$

es transformado en sí mismo por S_2. Para que este sistema sea irreducible, se debe tener

$$\nu-13\,\mu^2+11\,\mu-3>0.$$

Sus curvas tienen precisamente por género

$$\pi=2\,\nu-26\,\mu^2+22\,\mu-3.$$

Si se toma $\nu=13\,\mu^2-11\,\mu+3$, se obtiene el sistema

$$|\mu C-2\,(2\,\mu-1)\,K_1+(13\,\mu^2-11\,\mu+3)E_1|, \qquad (1)$$

de género tres, invariante mediante S_2. Las curvas elípticas E_1

y $$E_1^* \equiv \mu\,C-2\,(2\,\mu-1)\,K_1+(13\,\mu^2-11\,\mu+2)\,E_1$$

son transformadas en sí mismas por S_2. Estas curvas se cortan en dos puntos que forman un grupo de la involución engendrada por S_2.

Refiriendo proyectivamente las curvas del sistema (1) a los planos del espacio, se obtiene la representación de F sobre una cuádrica doble.

8. Entre las curvas elípticas trazadas sobre F, se encuentran las curvas

$$D_1 \equiv 5\,C - 2\,K_1 - K_2, \quad D_2 \equiv 5\,C - K_1 - 2\,K_2.$$

Las curvas D_1 son de orden 11, se apoyan en 19 puntos de K_1 y en 17 de K_2. Son marcadas sobre F por las superficies de quinto orden, que tienen a K_1 como curva doble y a K_2 como simple. Sea Ψ una tal superficie.

La superficie de quinto orden que contiene una cúbica alabeada doble, es representable punto por punto sobre un plano ω, por medio de las cuádricas que pasan por 11 puntos A_1, A_2, ..., A_{11} (Clebsch). Esta representación de Ψ_1 se obtiene refiriendo proyectivamente a las rectas del plano ω, las cuádricas que pasan por K_1. Sean γ_4 las cuárticas correspondientes a las secciones planas de Ψ_1. Los puntos A_1, A_2, ..., A_{11}, corresponden a las bisecantes de K_1, que pertenecen a la superficie.

La superficie Ψ_1 contiene la cúbica alabeada K_2 que no corta a K_1; a K_2 corresponde en ω una curva γ_6 de sexto orden. Observemos que la superficie Ψ_1 contiene las diez bisecantes comunes a las cúbicas K_1, K_2; estas diez bisecantes corresponden a diez de los puntos A_1, A_2, ..., A_{11}, por ejemplo, a los diez primeros, que son, pues, dobles para la curva γ_6. Al punto A_{11} corresponde una bisecante de K_1, que debe cortar en un punto a K_2, pues la curva γ_6 pasa por A_{11} (simplemente). Los puntos fundamentales A_1, A_2, ..., A_{11} de la representación ocupan, en el caso actual, una posición particular.

A la curva K_1 corresponde en ω una involución de segundo orden, perteneciente a una curva γ_7 de séptimo orden, que pasa doblemente por los puntos A_1, A_2, ..., A_{11}.