Extrait des »Annales de la Soc. Polonaise de Mathématique«, t. XX (1947)

REMARQUES SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES POSSÉDANT UNE INVOLUTION CYCLIQUE PRIVÉE DE POINTS UNIS

Par LUCIEN GODEAUX (Liége)

A diverses reprises, nous avons étudié les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique[1]). En particulier, nous avons considéré les involutions privées de points unis, ce qui nous a permis de construire une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 2$, $P_3 = 4$ [2]). Dans cette note, nous nous proposons de reprendre l'étude des involutions cycliques d'ordre p, privées de points unis, appartenant à une surface algébrique possédant ∞^1 courbes canoniques effectives au moins et dont les systèmes pluricanoniques ne sont pas composés au moyen d'un faisceau. Nous établissons notamment que le système canonique d'une telle surface contient p systèmes linéaires appartenant à l'involution, que la surface support de celle-ci soit régulière ou non. Nous complètons en outre, sur divers points, les résultats que nous avons obtenus antérieurement, dans les notes citées.

1. Commençons par rappeler une propriété des courbes algébriques de genre supérieur à l'unité, contenant une involution cyclique d'ordre premier, privée de points unis.

---

[1]) Voir par exemple notre exposé: *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

[2]) *Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux* (Rend. Accad. dei Lincei, 2e sem. 1931); *Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro, dont le genre linéaire est égal à deux* (Bull. Acad. de Belgique, 1932); *Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une surface algébrique régulière* (Idem., 1932).

Soit C une courbe algébrique de genre $\pi > 1$, contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier p, privée de points unis. Désignons par T la transformation birationnelle de C en soi, génératrice de I_p, et par C' une courbe image de cette involution. Si π' est le genre de C', on a, par la formule de ZEUTHEN,

$$p(\pi' - 1) = \pi - 1.$$

La série canonique $|K|$ de C est transformée en elle-même par T et contient un certain nombre ν de séries linéaires partielles appartenant à I_p. Désignons par $|K_1|, |K_2|, \ldots, |K_\nu|$ ces séries partielles. L'une d'elles, par exemple la première $|K_1|$, est, d'après l'interprétation géométrique de la formule de ZEUTHEN donnée par M. CASTELNUOVO, la transformée de la série canonique de C', de dimension $\pi' - 1$.

Les séries $|K_2|, |K_3|, \ldots, |K_\nu|$ ont pour homologues, sur C', des séries d'ordre $2\pi' - 2$, qui sont nécessairement des séries paracanoniques de C', de dimensions $\pi' - 2$.

La transformation T agit sur les groupes de $|K|$ comme une homographie sur les points d'un espace linéaire à $\pi - 1$ dimensions et par conséquent on a

$$\pi' - 1 + (\nu - 1)(\pi' - 2) + \nu = \pi.$$

En utilisant la formule de ZEUTHEN, on en déduit $\nu = p$.

Donc, *la série canonique $|K|$ de C contient p séries linéaires partielles appartenant à l'involution I_p, l'une de dimension $\pi' - 1$, les $p - 1$ autres de dimension $\pi' - 2$.*

2. Soit F une surface algébrique régulière, de genre arithmétique $p_a > 1$, contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier p, privée de points unis. Désignons par T la transformation birationnelle de F en soi, génératrice de l'involution I_p. Nous désignerons par Φ une surface image de l'involution I_p et par p'_a son genre arithmétique.

Nous ferons les hypothèses suivantes:

1) Le genre arithmétique p'_a de Φ est supérieur à zéro;

2) Les systèmes pluricanoniques de F ne sont pas composés au moyen d'un faisceau.

La surface Φ est, comme la surface F, régulière et entre les genres arithmétiques p_a de F et p'_a de Φ, on a la relation[3])

$$p_a + 1 = p(p'_a + 1). \tag{1}$$

Il en résulte que, p étant supérieur à l'unité, on a $p_a > p'_a$.

Le système canonique $|C|$ de F est transformé en lui-même par T. Il ne peut cependant appartenir à l'involution I_p, car alors il lui correspondrait sur Φ le système canonique de cette surface et on aurait $p_a = p'_a$, ce qui est impossible.

Il en résulte que le système $|C|$ contient un certain nombre ν de systèmes linéaires partiels

$$|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_\nu|,$$

appartenant à l'involution I_p. A ces systèmes correspondent sur Φ des systèmes linéaires complets

$$|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_\nu|,$$

dont l'un, par exemple $|\Gamma_1|$, est le système canonique de Φ d'après un théorème classique d'ENRIQUES.

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ les dimensions des systèmes précédents. T opère sur les courbes de $|C|$ comme une homographie sur les points d'un espace linéaire à $p_a - 1$ dimensions, donc on a

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_\nu + \nu = p_a. \tag{2}$$

On a d'ailleurs, puisque $|\Gamma_1|$ est le système canonique de Φ, $r_1 = p'_a - 1$.

Désignons par π le genre linéaire de la surface F, par π' celui de la surface Φ. Les courbes C_1 sont donc de genre π et les courbes Γ_1 de genre π'. Entre une courbe Γ_1 et la courbe C_1 homologue, on a une correspondance $(1, p)$ privée de points unis, donc, d'après la formule de ZEUTHEN,

$$\pi - 1 = p(\pi' - 1). \tag{3}$$

La même formule s'applique également à la correspondance entre une courbe $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$, ou Γ_ν et la courbe $C_2, C_3, \ldots$, ou C_ν homologue, par conséquent les courbes $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_\nu$ sont de genre π'.

---

[3]) *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique* (Bull. Soc. Math. de France, 1919); *Les involutions*... (loc. cit.).

3. L'adjoint $|C'|$ à $|C|$, c'est-à-dire le système bicanonique de F, est transformé en lui-même par T. D'autre part, comme F est régulière, il découpe sur une courbe C la série canonique complète de celle-ci. Si cette courbe est transformée en elle-même par T, c'est-à-dire est une courbe $C_1, C_2, \ldots$ ou C_ν, la série canonique de cette courbe contient p séries linéaires partielles dont les groupes sont transformés en eux-mêmes par T.

Soit G un de ces groupes. La dimension du système $|C'|$ étant égale à $p_a + \pi - 1$, il passe certainement des courbes C' par G et ces courbes sont transformées les unes dans les autres par T. Il en résulte qu'il existe au moins une courbe C', transformée en elle-même par T, passant par le groupe G. Par conséquent, $|C'|$ contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p et découpant, sur chacune des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$ les p séries linéaires appartenant à I_p.

A ces p systèmes linéaires correspondent sur Φ des systèmes linéaires complets parmi lesquels se trouvent les adjoints $|\Gamma_1'|, |\Gamma_2'|, \ldots, |\Gamma_\nu'|$ aux systèmes $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_\nu|$.

Puisque la surface Φ est régulière, l'adjoint $|\Gamma_1'|$ au système $|\Gamma_1|$ découpe, sur une courbe Γ_1, la série canonique complète, de dimension $\pi'-1$. Si r est la dimension de $|\Gamma_1'|$, la dimension du système canonique de Φ est donc $r - \pi' = p_a' - 1$, donc $|\Gamma_1'|$ a la dimension $p_a' + \pi' - 1$.

Sur une courbe Γ_2, le système $|\Gamma_1'|$ découpe une série linéaire d'ordre $2\pi'-2$, paracanonique. Cette série est complète, car autrement, il existerait sur la courbe C_2, homologue, des groupes canoniques appartenant à I_p et non situés sur des courbes C' transformées en elles-mêmes par T. Il en résulte que cette série a la dimension $\pi'-2$ et que le système $|\Gamma_1' - \Gamma_2|$ a la dimension p_a'. Il en est de même des systèmes

$$|\Gamma_1' - \Gamma_3|, |\Gamma_1' - \Gamma_4|, \ldots, |\Gamma_1' - \Gamma_\nu|.$$

Observons maintenant que les systèmes

$$|\Gamma_1' - \Gamma_2|, |\Gamma_1' - \Gamma_3|, \ldots, |\Gamma_1' - \Gamma_\nu|$$

coincident, dans un certain ordre, avec les systèmes

$$|\Gamma_2|, |\Gamma_3|, \ldots, |\Gamma_\nu|.$$

On a donc

$$r_1 = p'_a - 1,\ r_2 = r_3 = \ldots = r_\nu = p'_a .$$

Les relations (1) et (2) donnent

$$(p'_a + 1) - 1 = p_a = p(p'_a + 1) - 1,$$

d'où $\nu = p$.

On voit donc que:

Si une surface régulière F de genre arithmétique $p_a > 1$ et dont les systèmes pluricanoniques ne sont pas composés au moyen d'un faisceau, contient une involution cyclique d'ordre premier p, privée de points unis et dont l'image est une surface Φ de genre arithmétique $p'_a > 0$, le système canonique $|C|$ de F contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution; l'un a la dimension $p'_a - 1$ et est le transformé du système canonique de Φ, les autres ont la dimension p'_a.

4. Supposons maintenant que la surface Φ ait le genre arithmétique $p'_a = 0$. On a alors

$$p_a = p - 1.$$

Le raisonnement précédent n'est plus applicable sans modification, le système canonique de Φ n'existant pas et aucun des systèmes $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_\nu|$ ne coïncidant donc avec le système canonique de Φ.

On prouve encore, comme plus haut, que l'adjoint $|C'|$ à $|C|$ contient p systèmes linéaires appartenant à l'involution I_p et auxquels correspondent sur Φ des systèmes linéaires complets parmi lesquels se trouvent les adjoints

$$|\Gamma'_1|, |\Gamma'_2|, \ldots, |\Gamma'_\nu| \text{ à } |\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_\nu| .$$

Le système canonique $|\Gamma'_1 - \Gamma_1|$ n'existant pas, $|\Gamma'_1|$ a la dimension $\pi' - 1$ et il en est de même des systèmes $|\Gamma'_2|, \ldots, |\Gamma'_\nu|$.

Le système $|\Gamma'_1|$ découpe, sur une courbe Γ_2, une série paracanonique complète, de dimension $\pi' - 2$ et par conséquent, il existe une courbe $\Gamma'_1 - \Gamma_2$. De même, il existe une courbe $\Gamma'_1 - \Gamma_3, \ldots,$ une courbe $\Gamma'_1 - \Gamma_\nu$, une courbe $\Gamma'_2 - \Gamma_1$, une courbe $\Gamma'_2 - \Gamma_3, \ldots,$ une courbe $\Gamma'_\nu - \Gamma_{\nu-1}$. Ces différentes courbes coïncident nécessairement avec les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\nu$, qui sont isolées (chaque courbe étant obtenue plusieurs fois). On a

$$r_1 = r_2 = \dots = r_\nu = 0$$

et la formule (2) donne

$$\nu = p_a = p - 1 .$$

Si une surface algébrique régulière F, de genre arithmétique $p_a > 1$ et dont les systèmes pluricanoniques ne sont pas composés au moyen d'un faisceau, contient une involution cyclique d'ordre premier p, privée de points unis et de genre arithmétique $p'_a = 0$, le système canonique $|C|$ de F contient $p-1$ courbes isolées, appartenant à l'involution. On a $p_a = p - 1$.

5. Nous allons maintenant construire le système bicanonique de Φ.

Le système canonique $|C|$ de F, de dimension

$$p_a - 1 = p - 2 > 0 ,$$

contient $p-1$ courbes isolées

$$C_1, C_2, \dots, C_{p-1} ,$$

transformées en elles-mêmes par T. On peut choisir une racine primitive ε d'ordre p de l'unité, de manière à attacher à ces courbes respectivement les racines

$$\varepsilon^0 = 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p-2} .$$

Le système bicanonique $|C'| = |2C|$ de F contient p systèmes linéaires partiels appartenant à I_p et qui contiennent respectivement les courbes

$$2C_1,\ C_1 + C_2,\ C_1 + C_3, \dots, C_1 + C_{p-1},\ C_2 + C_{p-1} ,$$

auxquelles sont respectivement attachées les racines

$$\varepsilon^0 = 1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p-2},\ \varepsilon^{p-1} .$$

A ces systèmes correspondent sur Φ les systèmes

$$|2\Gamma_1|, |\Gamma_1 + \Gamma_2|, \dots, |\Gamma_1 + \Gamma_{p-1}|, |\Gamma_2 + \Gamma_{p-1}| . \tag{4}$$

Parmi ces systèmes se trouvent les $p-1$ systèmes

$$|\Gamma'_1|, |\Gamma'_2|, \dots, |\Gamma'_{p-1}| .$$

Le système $|\Gamma_1' - \Gamma_1|$ n'existant pas, $|\Gamma_1'|$ ne peut coïncider avec un des $p-1$ premiers systèmes (4) et on a

$$|\Gamma_1'| = |\Gamma_2 + \Gamma_{p-1}|.$$

Observons que les systèmes (4) peuvent s'écrire, dans un autre ordre,

$$|\Gamma_1 + \Gamma_2|, |2\Gamma_2|, |\Gamma_2 + \Gamma_3|, \ldots, |\Gamma_2 + \Gamma_{p-1}|, |\Gamma_3 + \Gamma_{p-1}|.$$

On en déduit

$$|\Gamma_2'| = |\Gamma_3 + \Gamma_{p-1}|$$

et par conséquent

$$|\Gamma_1''| = |\Gamma_2' + \Gamma_{p-1}| = |\Gamma_3 + 2\Gamma_{q-1}|.$$

Or, les courbes $2\Gamma_{p-1}$ et $\Gamma_1 + \Gamma_{p-3}$ appartiennent au même système linéaire et on a donc

$$|\Gamma_1''| = |\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_{p-3}|.$$

Par conséquent,

$$|\Gamma_1'' - \Gamma_1| = |\Gamma_3 + \Gamma_{p-3}|.$$

Le système bicanonique de Φ correspond donc à la racine ε^{p-2} et par conséquent, si nous posons

$$p = 2\lambda + 1,$$

il comprend les courbes

$$\Gamma_1 + \Gamma_{p-1}, \Gamma_2 + \Gamma_{p-2}, \Gamma_3 + \Gamma_{p-3}, \ldots, \Gamma_\lambda + \Gamma_{\lambda+1}.$$

Le bigenre de Φ est d'ailleurs $P_2' = \pi'$.

Observons que les λ courbes précédentes sont linéairement indépendantes et que par suite on a $\pi' \geqslant \lambda$, c'est-à-dire

$$p \leqslant 2\pi' + 1.$$

6. Supposons maintenant que la surface F ait l'irrégularité

$$q = p_g - p_a > 0$$

et la surface Φ, l'irrégularité

$$q' = p_g' - p_a' \leqslant q.$$

Nous supposerons $p_g > 1$, $p_g' \geqslant p_a' > 0$ et que les systèmes pluricanoniques de F ne sont pas composés au moyen d'un faisceau.

La relation (1) liant les genres arithmétiques de F, Φ est toujours valable et par conséquent on a $p_a' < p_a$, donc $p_g > p_g'$.

Soient encore $|C_1|, |C_2|, \dots, |C_\nu|$ les systèmes compris dans le système canonique $|C|$ de F, appartenant à l'involution I_p et $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \dots, |\Gamma_\nu|$ les systèmes correspondant sur Φ. La relation (2) s'écrit maintenant

$$r_1 + r_2 + \dots + r_\nu + \nu = p_g. \tag{5}$$

Le système $|\Gamma_1|$ sera, par hypothèse, le système canonique de Φ, de dimension $p_g' - 1$.

Sur Φ, l'adjoint $|\Gamma_1'|$ à $|\Gamma_1|$ découpe sur une courbe Γ_1, d'après le théorème de PICARD, une série de défaut q' appartenant à la série canonique, c'est-à-dire une série de dimension $\pi' - q' - 1$. Il en résulte que $|\Gamma_1'|$ a la dimension

$$p_g' - 1 + \pi' - q' = p_a' + \pi' - 1.$$

Il en est de même, pour la même raison, des systèmes $|\Gamma_2'|, \dots, |\Gamma_\nu'|$, respectivement adjoints à $|\Gamma_2|, \dots, |\Gamma_\nu|$.

Sur une courbe Γ_1, les courbes Γ_2' découpent des groupes de $2\pi' - 2$ points appartenant à une série paracanonique; la dimension de cette série est donc au plus égale à $\pi' - 2$. Nous supposerons qu'elle a la dimension $\pi' - 2 - \delta_2$.

De même, nous désignerons par $\pi' - 2 - \delta_3, \dots, \pi' - 2 - \delta_\nu$ les dimensions des séries découpées sur une courbe Γ_1 par les courbes $\Gamma_3', \dots, \Gamma_\nu'$. Ces séries appartiennent à des séries paracanoniques.

Les courbes $\Gamma_2' - \Gamma_1$ forment un système linéaire de dimension

$$p_a' + \pi' - 1 - (\pi' - 1 - \delta_2) = p_a' + \delta_2.$$

De même, les systèmes $|\Gamma_3' - \Gamma_1|, \dots, |\Gamma_\nu' - \Gamma_1|$ ont les dimensions $p_a' + \delta_3, \dots, p_a' + \delta_\nu$.

Appliquons la relation (5); on a

$$p_g' - 1 + (\nu - 1) p_a' + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_\nu + \nu = p_g.$$

On en déduit, en utilisant la relation (1),

$$\delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_\nu = q - q' + (p - \nu)(p_a' + 1). \tag{6}$$

7. Aux systèmes $|\Gamma_1'|, |\Gamma_2'|, \dots, |\Gamma_\nu'|$ correspondent sur F des systèmes linéaires appartenant à l'involution I_p et compris dans le système $|C'|$ adjoint à $|C|$.

Le système $|C'|$ découpe, sur une courbe C, d'après le théorème de PICARD, une série linéaire de dimension $\pi - 1 - q$, appartenant à la série canonique. Les séries découpées sur une courbe C par les transformées des courbes $\Gamma_1', \Gamma_2', \dots, \Gamma_\nu'$ appartiennent à une série comprise dans la précédente. Cette série a la dimension

$$\pi' - q' + (\nu - 1)(\pi' - 1) + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_\nu + \nu - 1.$$

On a donc

$$\nu(\pi' - 1) + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_\nu \leqslant \pi - 1 + q - q'.$$

En tenant compte de (3), on en déduit

$$\delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_\nu \leqslant (p - \nu)(\pi' - 1) + q - q'.$$

En rapprochant cette inégalité de la relation (6), on a

$$(p - \nu)(p_a' - \pi' + 2) \leqslant 0.$$

On peut donc affirmer que $\nu = p$ si le genre linéaire π' de Φ est inférieur à $p_a' + 2$.

8. On peut, par une autre voie, montrer que l'on a toujours $\nu = p$.

Dans le système bicanonique $|C'|$ de F, adjoint à $|C|$, de dimension $P_2 - 1 = p_a + \pi - 1$, il existe un certain nombre μ de systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p. Parmi ceux-ci se trouvent les transformés des systèmes $|\Gamma_1'|, |\Gamma_2'|, \dots, |\Gamma_\nu'|$, de dimension $p_a' + \pi' - 1$.

Supposons en premier lieu $\mu = \nu$. En appliquant la théorie des homographies au système $|C'|$, on a

$$\nu(p_a' + \pi' - 1) + \nu = p_a + \pi,$$

d'où

$$\nu(p_a' + \pi') = p(p_a' + \pi')$$

et $\nu = p$.

Supposons maintenant $\mu > \nu$ et soient $|\Gamma_{\nu+1}'|, \dots, |\Gamma_\mu'|$ les $\mu - \nu$ systèmes de Φ correspondant aux $\mu - \nu$ nouveaux systèmes.

Les systèmes $|\Gamma'_{\nu+1}-\Gamma_1|, |\Gamma'_{\nu+2}-\Gamma_1|, \dots, |\Gamma'_\mu-\Gamma_1|$ ne peuvent exister et ont donc des dimensions $r_{\nu+1}, \dots, r_\mu$ au plus égales à $\pi'-2$. En appliquant la théorie des homographies, on a actuellement

$$\nu(p'_a+\pi')+r_{\nu+1}+\dots+r_\mu+\mu-\nu=p_a+\pi\,,$$

d'où

$$r_{\nu+1}+\dots+r_\mu=(p-\nu)(p'_a+\pi')-(\mu-\nu).$$

Par conséquent, on a

$$(p-\nu)p'_a+(p-\mu)\pi'+\mu-\nu\leqq 0\,.$$

Cette inégalité entraîne l'égalité et on a

$$p=\nu=\mu\,,$$

contrairement à l'hypothèse.

On a donc toujours $\nu=p$ et par conséquent:

Si une surface d'irrégularité q, de genre arithmétique $p_a>1$, dont les systèmes pluricanoniques ne sont pas composés au moyen d'un faisceau, contient une involution cyclique d'ordre premier p, privée de points unis, d'irrégularité q' et de genre arithmétique $p'_a>0$, le système canonique de F contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution, dont l'un est le transformé du système canonique de la surface image de l'involution.

En vertu de (6), on a

$$\delta_2+\delta_3+\dots+\delta_p=q-q',$$

c'est-à-dire que la somme des défauts découpés sur une courbe Γ_1 par les adjoints $|\Gamma'_1|, \dots, |\Gamma'_p|$ aux systèmes $|\Gamma_1|, \dots, |\Gamma_p|$, est égale à l'irrégularité de la surface F.

En particulier, si $q=q'$, on a

$$\delta_2=\delta_3=\dots=\delta_p=0\,.$$

Il est aisé de voir que si $p'_a=0$, on a $\nu=p-1$.

Liége, le 26 août 1947.