ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

123

EXPOSÉS DE GÉOMÉTRIE

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE

M. E. CARTAN

Professeur à la Sorbonne
Membre de l'Institut

IV

LES SURFACES ALGEBRIQUES NON RATIONNELLES

DE GENRES ARITHMÉTIQUE ET GÉOMÉTRIQUE NULS

PAR

Lucien GODEAUX

Professeur à l'Université de Liège
Correspondant de l'Académie Royale de Belgique

PARIS
HERMANN & C^{IE}, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6

—

1934

On sait que Clebsch a démontré, en 1864, qu'une courbe algébrique de genre zéro est rationnelle. Le théorème analogue, concernant les surfaces algébriques, est beaucoup plus récent. Ce n'est qu'après que M. Enriques eut introduit la notion de plurigenres d'une surface algébrique que M. Castelnuovo put établir que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface algébrique soit rationnelle, sont que son genre arithmétique et son bigenre soient nuls (1896). On déduit de ce théorème que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface algébrique d'ordre n, ne possédant que des courbes multiples ordinaires et des points multiples ordinaires soit rationnelle, sont que :

a) Les surfaces d'ordre $n-3$ passant $i-1$ fois par une courbe multiple d'ordre i et $j-2$ fois par un point multiple d'ordre j de la surface, découpent, sur un plan général de l'espace, toutes les courbes adjointes à la section de la surface par ce plan ;

b) Il n'existe pas de surfaces d'ordre $2n-8$ passant $2i-2$ fois par une courbe multiple d'ordre i et $2j-4$ fois par un point multiple d'ordre j de la surface (en dehors des surfaces qui contiennent la surface donnée comme partie).

Ces conditions entraînent comme conséquence que :

c) Les surfaces d'ordre $n-4$ passant $i-1$ fois par une courbe multiple d'ordre i et $j-2$ fois par un point multiple d'ordre j, n'existent pas. En d'autres termes, le genre géométrique de la surface est nul.

Ces résultats suggèrent la question suivante : Construire les surfaces algébriques satisfaisant aux conditions *a*) et *c*), mais non à la condition *b*). En d'autres termes, déterminer les surfaces non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls.

MM. Castelnuovo et Enriques ont donné des exemples de surfaces satisfaisant à ces conditions ; l'exemple donné par M. Enriques est particulièrement simple, c'est une surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre. Plus tard, M. Enriques a encore construit deux types de surfaces répondant à la question et enfin, tout récemment, M. Campedelli et nous-même en avons ajouté d'autres. C'est à l'exposé de ces travaux que sont consacrées les pages qui suivent. Nous y avons indiqué un procédé permettant de construire des surfaces du type envisagé ; il nous a effectivement fourni une des solutions du problème posé et sans doute pourra-t-il en fournir d'autres.

Notre travail débute par un bref rappel des propriétés des surfaces algébriques qui nous sont nécessaires pour notre exposé. Nous renvoyons, pour la démonstration de ces propriétés, au magistral *Traité des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* de MM. Picard et Simart (1) et aux belles *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* de M. Enriques (2).

Liège, le 10 septembre 1933.

---

(1) Paris, t. I, 1897, t. II, 1906.

(2) Rédigées par M. Campedelli, Padoue, 1932.

On peut également consulter l'article de MM. Castelnuovo et Enriques dans l'*Encyklopädie der mathem. Wissenschaften*, B. III², 6e cahier (Leipzig, 1915) et un article de M. Severi dans le *Pascals Repertorium der höheren Mathematik*, B. II² (Leipzig, 1932). Voir en outre notre exposé *Questions non résolues de Géométrie algébrique* (Paris, Hermann, 1933).

1. Préliminaires. — Deux surfaces algébriques sont dites birationnellement équivalentes lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle, cette transformation ne pouvant pas nécessairement s'étendre, en tant que transformation birationnelle, aux espaces contenant les surfaces. L'ensemble des surfaces deux à deux birationnellement équivalentes constitue une classe ; on peut toujours prendre, pour modèle projectif d'une classe, soit une surface dépourvue de points multiples appartenant à un espace linéaire ayant au moins cinq dimensions, soit une surface de l'espace ordinaire ayant comme seules singularités une courbe double et des points triples, également triples pour la courbe double.

Dans le passage d'une surface à une autre surface de la même classe, il peut se faire qu'à un point simple de l'une correspondent les points d'une courbe (rationnelle) de l'autre ; une telle courbe est appelée courbe exceptionnelle.

2. Systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface. — Soit F une surface algébrique appartenant à une espace linéaire S_ρ à ρ dimensions. On appelle système linéaire de courbes tracées sur F l'ensemble des courbes découpées sur cette surface par les variétés algébriques à $\rho - 1$ dimensions d'un système linéaire, en dehors éventuellement de certaines courbes de F faisant partie de la base de ce système de variétés. Deux courbes tracées sur F et appartenant à un même système linéaire sont dites linéairement équivalentes. L'ensemble des courbes tracées sur F et linéairement équivalentes à une courbe C donnée, constitue un système linéaire complet $|C|$. Les courbes d'un certain ordre, suffisamment élevé,

tracées sur la surface F, se distribuent en un système continu ∞^q de systèmes linéaires complets. Si $q > 0$, la surface est dite irrégulière et possède q intégrales de Picard de première espèce linéairement indépendantes. Si $q = 0$, la surface est dite régulière. Dans le premier cas, q est appelé irrégularité de la surface.

Les caractères d'un système linéaire complet $|C|$ sont : le degré n, nombre de points variables communs à deux courbes C ; le genre π, genre de la courbe générale du système ; la dimension r. Le développement de la théorie a conduit à faire certaines conventions sur les points-base d'un système linéaire. Supposons que le système $|C|$ possède un point-base de multiplicité effective i et que l'on convienne de considérer ce point comme étant de multiplicité (virtuelle) $j < i$. Le degré virtuel de $|C|$ sera $n + i^2 - j^2$ et son genre virtuel $\pi + \frac{1}{2} i(i-1) - \frac{1}{2} j(j-1)$, n et π étant le degré effectif et le genre effectif du système.

Etant donnés sur F deux systèmes linéaires $|C_1|$, $|C_2|$, les courbes $C_1 + C_2$ appartiennent à un système linéaire $|C|$ appelé somme des précédents. On écrit

$$|C| = |C_1 + C_2|.$$

Si au contraire on se donne les systèmes $|C|$, $|C_1|$ et s'il existe une courbe réductible C comprenant comme partie une courbe C_1, la partie résiduelle C_2 détermine un système linéaire $|C_2|$ appelé différence $|C - C_1|$, des systèmes $|C|$, $|C_1|$. Toute courbe de $|C_1|$ appartient comme partie à une courbe C et la partie résiduelle est toujours une courbe de $|C_2|$ (théorème du reste).

Soient n_1, n_2 les degrés virtuels de $|C_1|$, $|C_2|$, π_1, π_2 leurs genres virtuels, i le nombre (virtuel) de points communs à une courbe C_1 et à une courbe C_2. Le degré et le genre virtuels de $|C|$ sont :

$$n = n_1 + n_2 + 2i, \qquad \pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1.$$

Tous les concepts qui viennent d'être introduits sont invariants vis-à-vis des transformations birationnelles de la surface.

3. Systèmes canonique et pluricanoniques d'une surface. — Soit, sur une surface algébrique F, un système linéaire $|C|$, ∞^2 au moins, dont les courbes sont irréductibles. Appelons jacobienne C_j d'un réseau de courbes C le lieu d'un point simple de la surface,

double pour une courbe du réseau. Les jacobiennes des différents réseaux tirés de $|C|$ sont linéairement équivalentes et appartiennent à un système linéaire $|C_j|$ appelé jacobien de $|C|$. Si C_1 est une courbe tracée sur F, on a :

$$|(C+C_1)_j|=|C_j+3\,C_1|$$

et par suite, si C_1 appartient à un système linéaire ∞^2 au moins de courbes irréductibles,

$$|C_j+3\,C_1|=|C_{1j}+3\,C|.$$

Le système $|C_j-3\,C|$, s'il existe, comprend les courbes exceptionnelles éventuelles de F; débarrassé de ces composantes, il donne un système linéaire $|K|$, appelé système canonique de F, invariant pour les transformations birationnelles de la surface.

Les courbes du système

$$|C'|=|C_j-2\,C|'$$

découpent, sur une courbe C, supposée de genre π, des groupes de $2\pi-2$ points appartenant à la série canonique de cette courbe C(1) et cette propriété détermine complètement le système $|C'|$; ce système est appelé système adjoint à $|C|$.

Lorsque la surface F n'appartient pas à la classe des surfaces rationnelles ou réglées, elle ne contient qu'un nombre fini de courbes exceptionnelles et l'on peut toujours trouver une surface birationnellement équivalente à F, dépourvue de courbes exceptionnelles. Pour plus de simplicité dans l'exposé, supposons que F soit dépourvue de courbes exceptionnelles. On a alors

$$|K|=|C_j-3\,C|=|C'-C|.$$

Appelons $|C''|$ l'adjoint de $|C'|$, $|C'''|$ l'adjoint de $|C''|$, ... ; les systèmes

$$|C''-C|=|2\,C'-2\,C|=|2\,K|=|K'|,$$
$$|C'''-C|=|3\,C'-3\,C|=|3\,K|=|(2\,K)'|,\ \ldots$$

sont des systèmes invariants pour les transformations biration-

(1) Si l'on transforme birationnellement la courbe C en une courbe plane d'ordre m, les groupes canoniques sont découpés sur cette dernière par les adjointes d'ordre $m-3$.

nelles de la surface ; ils sont appelés systèmes bicanonique, tricanonique, ... de F.

Les nombres p_g, P_2, P_3, ... des courbes canoniques, bicanoniques, tricanoniques, ... linéairement indépendantes sont appelés genre géométrique, bigenre, trigenre, ... de F ; ce sont des invariants vis-à-vis des transformations birationnelles de la surface.

Si n et π sont le degré et le genre virtuels de $|C|$, n' et π' ceux de $|C'|$, le nombre

$$p^{(1)} = \pi' - 3(\pi - 1) + n = n' - 4(\pi - 1) + n + 1$$

est invariant; il est appelé genre linéaire de F. Si le système canonique $|K|$ existe, son genre est $p^{(1)}$ et son degré est $p^{(1)} - 1$.

La série canonique d'une courbe C a la dimension $\pi - 1$, mais les courbes adjointes C′ peuvent ne pas donner tous les groupes de cette série. Si le système $|C'|$ découpe sur une courbe C les groupes canoniques d'une série de dimension $\pi - 1 - \delta$, le défaut δ est précisément égal à l'irrégularité q de la surface F. Le nombre invariant $p_a = p_g - q = p_g - \delta$ est appelé genre arithmétique de F. Pour les surfaces régulières, on a $q = \delta = p_g - p_a = 0$.

Lorsque la surface F est une surface d'ordre m de l'espace ordinaire, possédant une courbe double et des points triples pour la surface et la courbe double, le système canonique, augmenté éventuellement des courbes exceptionnelles, est découpé sur la surface par les surfaces d'ordre $m - 4$ passant par la courbe double (surfaces adjointes d'ordre $m - 4$), le système bicanonique, augmenté éventuellement des courbes exceptionnelles comptées deux fois, est découpé par les surfaces d'ordre $2m - 8$ passant doublement par la courbe double (surfaces biadjointes), etc.

4. Théorème de Riemann-Roch. — Soit $|C|$ un système linéaire de courbes de degré virtuel n et de genre virtuel π. S'il existe i courbes canoniques de F linéairement indépendantes contenant une courbe C, i est appelé indice de spécialité de $|C|$. Si $i = 0$, $|C|$ est dit non spécial.

Si les courbes C sont irréductibles, la dimension r de $|C|$ satisfait à l'inégalité

$$r \geqslant p_a + n - \pi + 1 - i.$$

C'est le théorème de Riemann-Roch pour les surfaces. L'inégalité précédente subsiste pour les systèmes dont les courbes sont réductibles, pourvu que l'on ait (Severi)

$$p_a + n - \pi + 1 - i \geqslant 0.$$

Lorsque l'égalité a lieu, le système est dit régulier. Le système adjoint à une courbe susceptible de décrire un système continu, est régulier (théorème de Picard-Severi).

5. Surfaces rationnelles et surfaces réglées. — Considérons, sur une surface F, un système linéaire irréductible (c'est-à-dire formé de courbes irréductibles) $|C|$, son adjoint $|C'|$, l'adjoint $|C''|$ de $|C'|$, ... ou, en d'autres termes, les adjoints successifs $|C'|$, $|C''|$, ... à $|C|$. Si la suite des adjoints s'arrête après un nombre fini d'opérations, il existe sur la surface un système linéaire de degré n et de genre π, tel que $n > 2\pi - 2$, qui fait d'ailleurs partie de la suite. Inversement, le procédé d'adjonction appliqué à un système linéaire de degré n et de genre π, tel que $n > 2\pi - 2$, s'arrête après un nombre fini d'opérations. MM. Castelnuovo et Enriques ont démontré que la surface F était alors rationnelle ou appartenait à la classe des surfaces réglées [1]. Sur toute autre surface, on a donc entre le degré n et le genre π d'un système linéaire, la relation $n \leqslant 2\pi - 2$. Sur une surface rationnelle ou appartenant à la classe des réglées, les systèmes canoniques et pluricanoniques ne peuvent exister. On a donc $p_g = P_2 = P_3 = \ldots = 0$. Une surface réglée à sections planes de genre p a le genre arithmétique $p_a = -p$, par conséquent, pour une surface rationnelle, on a $p_a = 0$. M. Castelnuovo a démontré que [2]

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit rationnelle s'exprime par

$$p_a = P_2 = 0.$$

(1) *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* (*Annali di Matematica*, 1901, 3e s., t. VI, pp. 165-226).

(2) *Sulle superficie di genere zero* (*Memorie della Soc. Ital. delle Scienze*, detta dei XL, 1896, 3e s., t. X, pp. 103-123).

6. Plans doubles. — Considérons, sur une surface algébrique F, une involution I_n, d'ordre n, c'est-à-dire un ensemble ∞^2 de groupes de n points tel qu'un point de la surface n'appartienne en général qu'à un seul groupe. Soit Φ une surface image de l'involution I_n, c'est-à-dire une surface dont les points et les groupes de I_n sont en correspondance birationnelle.

Il existe en général sur la surface Φ certains points auxquels correspondent des groupes de I_n dont les points ne sont pas tous distincts. Ces points forment en général une courbe D appelée courbe de diramation pour la correspondance $(1, n)$ existant entre Φ et F.

On peut considérer la surface Φ comme formée de n feuillets superposés, réunis d'une manière appropriée le long de la courbe D. On obtient ainsi une surface multiple d'ordre n, Φ, birationnellement identique à F.

Considérons plus particulièrement le cas où n est égal à 2 et où Φ est un plan ; on obtient ainsi un plan double de courbe de diramation D. La surface F pourra toujours être représentée par une équation

$$z^2 = f(x, y)$$

et par des transformations birationnelles, on pourra toujours supposer que la courbe D,

$$z = 0, \; f(x, y) = 0$$

est dépourvue de parties multiples et est d'ordre pair $2m$. Un plan double sera représenté par le symbole

$$\{ x, y, \sqrt{f(x, y)} \}$$

Considérons une courbe C′ tracée sur F. Ou bien cette courbe comprend ∞^1 groupes de l'involution I_2 et il lui correspond sur le plan double une courbe double C rencontrant en un nombre pair de points la courbe D, ou bien C′ ne contient qu'un nombre fini de groupes de I_2. Dans le second cas, lorsqu'un point de F parcourt C′, son conjugué dans l'involution I_2 parcourt une seconde courbe C″ et à la courbe C′ + C″ correspond dans le plan double Φ une courbe double C. Les points communs à C′, C″ sont des points unis de l'involution I_2 ou des points formant des couples de I_2. Aux premiers correspondent des points de Φ en lesquels C touche la courbe D et en tout point de rencontre des courbes C, D, celles-ci se touchent. D'autre part, à un couple de I_2 commun à C′, C″, correspond un point double de la courbe C. Lorsque la courbe C′ engendre un système linéaire, la courbe C engendre un système continu non linéaire.

Inversement, considérons dans le plan Φ une courbe irréductible C touchant D en chaque point de rencontre. Pour que la courbe qui lui correspond sur F se scinde en deux courbes C′, C″, il faut que sur C, la série linéaire de groupes de points déterminée par le groupe des points de rencontre de C avec D, soit découpée par des courbes d'ordre m (moitié de l'ordre $2m$ de D).

Pour déterminer les courbes canoniques K du plan double Φ, considérons les droites doubles de ce plan ; il leur correspond sur F des courbes hyperelliptiques de genre $m-1$, dont la série canonique d'ordre $2(m-2)$ est composée avec l'involution I_2. Par conséquent les adjointes aux droites doubles du plan Φ sont des courbes doubles d'ordre $m-2$ et les courbes canoniques K sont donc des courbes doubles d'ordre $m-3$.

Le système bicanonique $|2K|$ est formé des courbes d'ordre $4m-12$ touchant la courbe D en chaque point d'intersection. Ce système comprend en particulier des courbes doubles d'ordre $2m-6$ et des courbes formées de la courbe D et de courbes doubles d'ordre $m-6$.

Les points multiples de la courbe de diramation D imposent des conditions aux courbes canoniques ou pluricanoniques du plan double Φ. Si la courbe D possède un point quadruple, les courbes canoniques passent simplement par ce point ; il impose en outre deux conditions aux courbes bicanoniques. Par contre, un point double ou un point triple isolé de D n'impose aucune condition aux courbes canoniques ou pluricanoniques. Mais si la courbe D possède un point triple M auquel est infiniment voisin un point triple M′, les courbes canoniques doivent passer par M et les courbes bicanoniques doivent passer par M et M′. Nous nous limiterons à ces singularités, les seules qui nous seront utiles dans la suite et nous renverrons, pour l'étude détaillée des plans doubles, aux *Lezioni* déjà citées de M. Enriques.

Ajoutons cependant que, d'après un théorème de M. De Franchis (¹), les plans doubles irréguliers possèdent un faisceau irrationnel de courbes et que leur courbe de diramation se compose alors de $2q+2$ courbes simples d'un même faisceau. L'irrégularité du plan est égale à q.

7. Surfaces de genres arithmétique et géométrique nuls. — Soit F une surface algébrique non rationnelle privée de courbes exceptionnelles pour laquelle on a $p_a=p_g=0$. On a par suite $P_2>0$. Si $|C|$ est un système linéaire irréductible tracé sur F, $|C'|$ son adjoint, $|C''|$ l'adjoint à $|C'|$, le système $|C'-C|$ n'existe pas, mais le système

$$|C''-C|=|2C'-2C|$$

existe et a la dimension $P_2-1\geqslant 0$. De plus, si n et π sont le degré et le genre virtuels de $|C|$, on a

$$n\leqslant 2\pi-2.$$

La dimension r_1 du système $|2C'|$ est au moins égale à $p_a+p^{(1)}+6(\pi-1)-n-1$. D'autre part, les courbes $2C'$ rencontrent une courbe $2C$, de genre $2\pi+n-1$, suivant des groupes de $8(\pi-1)$ points, formant, sur C, une série non spéciale et dont la dimension ρ est donc au plus égale à $6(\pi-1)-n-1$. Le nombre des courbes $2C'-2C$ linéairement indépendantes, c'est-à-dire P_2, est égal à $r_1-\rho-1$. On a donc

$$P_2\geqslant p_a+p^{(1)} \quad \text{ou} \quad P_2\geqslant p^{(1)}.$$

Le système bicanonique $|2C'-2C|$ a le degré $4(p^{(1)}-1)$ et le genre $3p^{(1)}-2$. On en déduit $p^{(1)}\geqslant 1$.

Si le système tricanonique

$$|C'''-C'|=|3C'-3C|$$

existe, il a le degré $9(p^{(1)}-1)$, le genre $6p^{(1)}-5$ et on a

$$P_3\geqslant 3p^{(1)}-2.$$

D'une manière générale, si le système i — canonique existe,

(¹) *Sulle superficie algebriche le quali contengono un fascio irrazionale di curve* (*Rend. Circ. Matem. di Palermo*, 1905, t. XX, pp. 49-54), *I piani doppi dotati di due o più differenziali totali di prima specie* (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1904, pp. 688-695).

son degré est égal à $i^2(p^{(1)}-1)$, son genre à $\frac{1}{2}\, i(i+1)(p^{(1)}-1)$ $+1$ et on a

$$P_i \geqslant \frac{1}{2}\, i\,(i-1)\,(p^{(1)}-1)+1.$$

Le système i-canonique est l'adjoint du système $(i-1)$-canonique, par suite si celui-ci est au moins ∞^1, c'est-à-dire si l'on a $P_{i-1}>1$, le système i-canonique est régulier et P_i prend sa valeur minimum.

8. La surface d'Enriques. — M. Enriques, auquel est due l'introduction des plurigenres d'une surface, avait dès le début montré qu'une surface dépourvue de courbe canonique pouvait avoir une courbe bicanonique (1). Telle est la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre. Si f, φ sont des formes quadratiques quaternaires, l'équation de cette surface peut s'écrire

$$f(x_2 x_3 x_4,\ x_3 x_4 x_1,\ x_4 x_1 x_2,\ x_1 x_2 x_3)+x_1 x_2 x_3 x_4\, \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)=0.$$

Les adjointes d'ordre $6-4=2$ sont des quadriques passant par les arêtes du tétraèdre ; de telles surfaces n'existent pas et on a $p_g=0$. Les bi-adjointes sont des surfaces du quatrième ordre, passant doublement par les arêtes du tétraèdre ; il existe une seule de ces surfaces, constituée par les quatre faces du tétraèdre. On a donc $P_2=1$ et il existe une courbe bicanonique. Observons que les faces du tétraèdre ne rencontrent plus la surface en dehors des arêtes, par conséquent, la courbe bicanonique est d'ordre zéro. On trouve d'autre part, par exemple en considérant la série découpée sur une section plane par ses adjointes, que la surface est régulière, d'où $p_a=0$.

M. Enriques a montré plus tard que toute surface algébrique de genres $p_a=p_g=0$, $P_2=1$, possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro, est birationnellement identique à la surface précédente (2).

(1) *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (*Mem. Soc. Ital. delle Scienze,* detta dei XL, 1896, 3e s., t. X, pp. 1-81).

(2) *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno* (*Mem. Soc. Ital. delle Scienze,* detta dei XL, 1906, 3e s., t. XIV, pp. 327-352).

Soit F une surface, privée de courbes exceptionnelles, de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$, dont la courbe bicanonique est d'ordre zéro. On a $P_2 \geqslant p^{(1)} \geqslant 1$, d'où $p^{(1)} = 1$. Puisque la courbe bicanonique a l'ordre zéro, on a

$$|C''| = |C| \quad \text{ou} \quad |2\,C'| = |2\,C|.$$

Par suite, le degré virtuel n et le genre virtuel π de tout système linéaire $|C|$ tracé sur la surface, satisfont à la relation $n = 2\pi - 2$. Les degré et genre virtuels du système adjoint $|C'|$ sont $n' = 2\pi - 2$ et $\pi' = \pi$. D'après le théorème de Riemann-Roch, la dimension r de $|C|$ satisfait à $r \geqslant \pi - 1$. D'autre part, si $\pi > 1$, $|C'|$ et $|C''|$ sont réguliers et on a $r = \pi - 1$.

En considérant la suite des adjoints de $|C|$, on a

$$|C| = |C''| = |C^{(4)}| = \ldots = |C^{(2i)}| = \ldots,$$
$$|C'| = |C'''| = \ldots = |C^{(2i+1)}| = \ldots,$$

donc $P_2 = P_4 = \ldots = P_{2i} = \ldots = 1$, $p_g = P_3 = \ldots = P_{2i+4} = \ldots = 0$.

Observons que si l'on avait $n < 2\pi - 2$, $P_2 = 1$, il existerait une courbe bicanonique d'ordre $4\pi - 4 - 2n$; il existerait par suite au moins une courbe tricanonique ($P_3 \geqslant 1$) et on aurait $P_6 > 1$. La condition $n = 2\pi - 2$ (courbe bicanonique d'ordre zéro) se traduit donc soit par $P_3 = 0$, soit par $P_6 = 1$.

Considérons un système irréductible $|C|$ de genre $\pi > 1$. Le système $|2\,C| = |2\,C'|$ a le genre $4\pi - 3$ et la dimension $4\pi - 4$. Dans ce système, il y a $\infty^{2\pi-2}$ courbes dégénérées en deux courbes C et $\infty^{2\pi-2}$ courbes décomposées en deux courbes C'; il y a donc, dans $|2\,C|$, des courbes décomposées d'une part en deux courbes C, d'autre part en deux courbes C'. Soit K une de ces courbes. Puisque $p_g = 0$, les systèmes $|C|$, $|C'|$ sont distincts et par suite les deux courbes C et les deux courbes C' composant K doivent être dégénérées. Cette remarque permet à M. Enriques de construire, sur la surface F, un réseau $|L|$ de courbes hyperelliptiques de genre trois, de degré effectif deux, ayant deux points-base qui sont doubles pour la série linéaire d'ordre deux existant sur chaque courbe L. En rapportant projectivement les courbes L aux droites d'un plan, on transforme la surface F en *un plan double ayant une courbe de diramation du huitième ordre formée d'une courbe K_6 du sixième ordre ayant deux tac-*

nodes M, N, et un point double au point de rencontre des tangentes m, n *en ces tacnodes, et des deux droites* m, n.

Cette courbe de diramation a donc un point quadruple en mn et deux points triples M, N auxquels sont infiniment voisins des points triples M', N' situés respectivement sur m, n. Les courbes canoniques sont des droites doubles devant passer par les points M, N, mn, par suite $p_g = 0$. Il existe une seule courbe bicanonique, la conique dégénérée $m + n$.

Les courbes du sixième ordre ayant en M, N des tacnodes de tangentes tacnodales m, n ; un point double au point mn ; un point double variable et touchant la courbe K_6 en huit points simples variables, ont pour homologues sur F les courbes d'un système linéaire de degré effectif 6 et de genre 4, de dimension trois. En rapportant projectivement ces courbes aux plans de l'espace, on transforme birationnellement F en une surface F_6, d'ordre six, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre.

La surface F contient des courbes elliptiques et précisément des faisceaux de courbes elliptiques irréductibles $|E|$ admettant une seule adjointe formée de deux courbes elliptiques isolées E_1, E_2, adjointes l'une de l'autre, et telles que ces courbes E_1, E_2 comptées deux fois, soient des courbes de $|E|$.

9. La surface d'Enriques et les surfaces de genres un. — Les surfaces de genres un ont les invariants $p^{(1)} = p_a = p_g = \ldots = P_4 = \ldots = 1$ et ont une courbe canonique et des courbes pluricanoniques d'ordre zéro. Tout système linéaire de genre π tracé sur une telle surface, a le degré $2\pi - 2$ et la dimension π. On peut donc toujours transformer une surface de genres un en une surface de l'espace S_π, d'ordre $2\pi - 2$, à sections de genre π, dépourvue de courbes exceptionnelles. En particulier, pour $\pi = 2$, on a un plan double dont la courbe de diramation est du sixième ordre; pour $\pi = 3$, on a une surface du quatrième ordre (ayant au plus un nombre fini de points doubles) ou une quadrique double dont la courbe de diramation est du huitième ordre.

Dans leur *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (1), MM. Enriques et Severi ont remarqué incidemment que si une sur-

(1) *Acta Mathematica*, 1909, t. 32, pp. 283-392, t. 33, pp. 321-403.

face de genres un possède une involution du second ordre privée de points unis, l'image de cette involution est une surface de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$. Soit, en effet, une surface de genres un possédant une transformation birationnelle involutive T en elle-même, dépourvue de points unis. La somme d'un système linéaire tracé sur F et du système linéaire que T lui fait correspondre, est un système linéaire $|C|$ transformé en lui-même par T. Cette transformation agit sur $|C|$ comme une homographie involutive (éventuellement identique) et par suite ou bien $|C|$ est composé au moyen de l'involution I_2 engendrée par T ,ou bien il y a dans $|C|$ deux systèmes linéaires partiels $|C_1|$, $|C_2|$ composés au moyen de I_2.

Le genre p_a' de la surface Φ image de I_2 est lié au genre $p_a = 1$ de F par la relation [1]

$$p_a + 1 = 2\,(p_a' + 1),$$

par suite $p_a' = 0$. D'autre part, la surface F étant régulière, il en est de même de Φ et le genre géométrique de cette surface est $p_g = 0$.

Soit π le genre d'une courbe de Φ qui correspond à une courbe C de F transformée en elle-même par T ; d'après la formule de Zeuthen, le système $|C|$ est de genre $2\pi - 1$. Si $|C|$ est composé au moyen de I_2, il lui correspond, sur Φ, un système $|\Gamma|$ de genre π et comme $|C|$ est son propre adjoint (puisque la condition pour que F ait une courbe canonique d'ordre zéro est $|C'| = |C|$), $|\Gamma|$ sera également son propre adjoint, ce qui est absurde puisque pour Φ, $p_g = 0$. Par suite, $|C|$ contient deux systèmes partiels $|C_1|$, $|C_2|$ composés au moyen de I_2; soient $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ les systèmes correspondants sur Φ. Ces systèmes ne peuvent être chacun son propre adjoint, mais les points communs à deux courbes C_1, C_2 formant un groupe canonique de chacune de ces courbes, les points communs à deux courbes Γ_1, Γ_2 forment un

(1) Voir Severi, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica* (*Rend. R. Ist. Lomb.*, 1903, pp. 495-511) et pour le cas particulier envisagé ici, L. Godeaux, *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique* (*Bull. Soc. Math. France*, 1919, pp. 1-16).

groupe canonique sur chacune d'elles. Par suite $|\Gamma_1|$ est l'adjoint de $|\Gamma_2|$ et $|\Gamma_2|$ celui $|\Gamma_1|$.

A une courbe C quelconque correspond sur Φ une courbe de genre $2\pi-1$, ayant $2\pi-2$ points doubles variables avec la courbe. Lorsque C tend d'une manière continue, dans $|C|$, vers une courbe C_1 (ou C_2), la courbe correspondante tend vers $2\,\Gamma_1$ (ou $2\,\Gamma_2$). Par suite, on a

$$|2\Gamma_1| = |2\Gamma_2|.$$

Il en résulte que Φ a une courbe bicanonique d'ordre zéro et que, pour cette surface, $p_a = p_g = P_3 = 0$, $P_2 = 1$; c'est donc une surface d'Enriques.

M. Enriques est ensuite parvenu à intervertir le résultat précédent [1] ; d'une manière précise, il a démontré que *toute surface de genres* $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$ *représente une involution d'ordre deux, privée de points unis, appartenant à une quadrique double de genres un.* Nous avons ajouté que cette quadrique double possède en outre une involution d'ordre deux ayant huit points unis, dont l'image est une surface de genre un [2]. Nous établirons ces propriétés de la manière suivante [3] :

Soit un plan double de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, ayant pour courbe de diramation une courbe K_6 d'ordre 6, ayant deux tacnodes M, N, et un point double à l'intersection des deux tangentes tacnodales m, n, jointe aux droites m, n. Pour la facilité de l'exposé, transformons ce plan double au moyen d'une transformation quadratique ayant pour points fondamentaux M, N et un troisième point n'appartenant ni à K_6, ni à m ou n. Nous obtenons un nouveau plan double Φ ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) dont la courbe de diramation est formée de :

1° Les quatre côtés a_1, a_2, a_3, a_4 d'un quadrilatère complet ;

2° Une courbe K_8 d'ordre huit ayant des points quadruples en deux sommets opposés du quadrilatère complet et des points doubles aux quatre autres sommets du quadrilatère.

---

[1] *Un' osservazione relativa alle superficie di bigenere 1* (*Rend. R. Accad. Bologna*, 1907-1908, pp. 40-45).

[2] *Sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un* (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1914, pp. 682-686).

[3] *Sur un théorème de M. Enriques concernant les surfaces de bigenre un* (*Bull. Soc. roy. des Sc. de Liège*, 1933, pp. 154-156).

Le plan double Φ_1 ayant comme courbe de diramation K_8 est de genres un (1). Le plan double Φ_2 ayant comme courbe de diramation $a_1+a_2+a_3+a_4$ est rationnel, il représente l'involution engendrée dans un plan α par la transformation quadratique involutive

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2\ x_3 : x_3\ x_1 : x_1\ x_2. \tag{1}$$

Les quatre points unis de cette transformation correspondent aux droites a_1, a_2, a_3, a_4 et les points fondamentaux aux côtés du triangle diagonal du quadrilatère complet formé par ces droites. A la courbe K_8 correspond, dans le plan α, une courbe K_8', d'ordre huit, ayant des points quadruples en deux points fondamentaux de la transformation (1), mais ne passant pas par les points unis de cette transformation, ni par le troisième point fondamental.

Entre les surfaces Φ_1, Φ_2, nous avons une correspondance (2,2), deux points homologues correspondant au même point du plan support de Φ. La surface F, qui représente les couples de points homologues de cette correspondance, coïncide avec le plan double ayant K'_8 pour courbe de diramation. Ce plan double est birationnellement équivalent à une quadrique double de genre un (2). Sur F, existent trois involutions d'ordre deux, deux à deux permutables : L'une, rationnelle a pour image Φ_2 ; la seconde a pour image Φ et est de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$; la dernière est de genres un et a pour image Φ_1, ses huit points unis correspondent sur F aux quatre points unis de la transformation (1) du plan α.

10. Congruence des rayons principaux d'un système linéaire ∞^3 de quadriques. — Reye a considéré la congruence lieu des droites (qu'il appelle rayons principaux) appartenant chacune à ∞^1 quadriques d'un système linéaire ∞^3, $|Q|$, de quadriques. Si ce système est dépourvu de points-base, cette congruence est d'ordre sept et de classe trois. Reprenant l'étude de cette congruence, M. Fano a fait voir qu'elle était de genres zéro et de bigenre un (3). D'une manière précise, la surface F_{10} d'ordre dix,

(1) F. Enriques, *Sui piani doppî di genere uno* (*Mem. Soc. ital. Scienze*, dei XL, 1896, 3e s., t. X, pp. 201-221).

(2) F. Enriques, *Sui piani doppî*... (loc. cit.).

(3) *Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare* (*Mem. R. Accad. Torino*, 1901, pp. 1-79).

appartenant à une hyperquadrique de l'espace S_5, qui constitue la représentation Kleinéenne de cette congruence, est un nouveau modèle projectif de la surface d'Enriques. Ces considérations ont permis plus tard [1] à M. Fano d'approfondir l'étude de la surface F et notamment d'étudier les cas particuliers où les faces du tétraèdre des arêtes doubles du modèle du sixième ordre ne sont pas toutes distinctes. M. Enriques (*loc. cit.*) avait déjà considéré le cas particulier d'une surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un angle tétraèdre complet (dont le sommet est quadruple pour la surface).

On peut montrer que la surface F_{10} est une surface d'Enriques de la manière suivante [2]:

Considérons, dans le système linéaire de quadriques $|Q|$, ∞^3, dépourvu de points-base, un réseau $|Q_0|$ ayant huit points-base distincts. Les couples de points conjugués par rapport à toutes les quadriques de $|Q_0|$ forment une involution I_2 ayant pour points unis les points-base de $|Q_0|$. Les droites qui joignent les points des couples de I_2 appartiennent aux quadriques de $|Q_0|$ et forment un complexe cubique. Enfin, la courbe fondamentale de l'involution est une sextique gauche de genre trois, H_6. Les surfaces du quatrième ordre, passant par H_6, comprenant ∞^2 groupes de I_2, sont de deux sortes : les premières sont formées des groupes de I_2 dont les points sont conjugués par rapport à une quadrique n'appartenant pas à $|Q_0|$; les secondes sont formées de groupes de I_2 dont les points sont conjugués par rapport à un complexe linéaire. Une surface F' de la première catégorie ne passe pas par les points unis de I_2 et on a donc, sur F', une involution I_2' privée de points unis. On voit sans peine que les rayons principaux du système $|Q|$ sont les droites joignant les points conjugés par rapport à toutes les quadriques du système ; ces couples de points conjugués engendrent une surface du quatrième ordre, jacobienne de $|Q|$, et par suite de genres un. La congruence de Reye et par suite la surface F_{10} représentent une involution privée de points unis, appartenant

---

(1) *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari* (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1er sem. 1910, pp. 98-118).

(2) L. Godeaux, *Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1926, pp. 726-741, 892-904 ; 1927, pp. 114-133).

à une surface de genres un, c'est par conséquent une surface d'Enriques.

Revenons aux propriétés générales de la surface d'Enriques. M. Enriques avait montré que cette surface possède un groupe discontinu de transformations birationnelles en elle-même, groupe dont l'étude a été poursuivie par M. Fano. Celui-ci a également étudié la base pour les courbes tracées sur la surface (¹). Le système $|Q|$ contient en général dix quadriques dégénérées en deux plans et chacun de ces vingt plans contient ∞^1 droites de la congruence (7,3), enveloppant une cubique. Sur la surface F_{10}, on a en correspondance 20 cubiques planes (elliptiques) et deux cubiques provenant d'une même quadrique dégénérée sont adjointes l'une à l'autre. Si l'on prend dix cubiques $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{10}$ parmi ces vingt courbes, deux de ces dix cubiques n'étant pas adjointes l'une à l'autre, on obtient une base de la surface, c'est-à-dire que toute courbe Γ tracée sur la surface donne lieu à une relation

$$|\lambda\Gamma| = |\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \ldots + \lambda_{10}\gamma_{10}|,$$

où les λ sont des entiers positifs, négatifs ou nuls. Tout système linéaire $|\Gamma|$ tracé sur F_{10} a un adjoint $|\Gamma'|$ tel que

$$|2\Gamma| = |2\Gamma'|,$$

par suite le diviseur de Severi de la surface d'Enriques est $\sigma = 2$. Si C est une section hyperplane de F_{10}, on a, quelle que soit Γ

$$|\Gamma| = |\mu_1\gamma_1 + \mu_2\gamma_2 + \ldots + \mu_{10}\gamma_{10} + \mu C|,$$

les μ étant entiers. Les courbes $\gamma_1, \ldots, \gamma_{10}$, C constituent une base-minima de F_{10}.

11. La surface de Castelnuovo. — Une seconde surface pour laquelle $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$ mais $P_2 = 2$, a été construite par M. Castelnuovo (²). D'une manière précise,

(¹) Voir Severi, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* (*Math. Annalen*, 1906, t. 62, pp. 194-225), *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* (*Annales Ecole norm. sup.*, 1908, pp. 449-468), *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica* (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 2ᵉ sem. 1910, pp. 265-288).

(²) *Sulle superficie di genere zero* (*Mem. Soc. ital. Scienze*, dei XL, 1896, 3ᵉ s., t. X, pp. 103-123).

Une surface du septième ordre ayant une droite triple r, *une conique double* γ *ne rencontrant pas* r, *et trois tacnodes A, B, C dont les plans tacnodaux passent par la droite* r, *est de genres* $\mathrm{p_a}=\mathrm{p_g}=0$, $\mathrm{p}^{(1)}=1$, $\mathrm{P_2}=2$ *et les courbes bicanoniques sont les quartiques elliptiques découpées sur la surface par les plans passant par* r.

Soit F une telle surface. Pour prouver son existence, désignons par $f_3=0$ l'équation d'une surface cubique et prenons sur celle-ci la droite r et la conique γ (ne rencontrant pas r); par r passent cinq plans tangents à $f_3=0$, soient $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ trois de ces plans et A, B, C leurs points de contact. Soit alors $f_4=0$ l'équation d'une surface du quatrième ordre ayant la conique double γ et touchant les plans $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ respectivement en A, B, C, Soit enfin $\varphi=0$ l'équation du plan de γ. L'équation

$$f_3^2\varphi+\lambda f_4\alpha\beta\gamma=0$$

représente une surface irréductible, d'ordre sept, satisfaisant aux conditions imposées à F, dont l'existence est ainsi démontrée.

Les adjointes d'ordre $7-4=3$ à la surface F doivent avoir la droite double r, passer par la conique γ et par les trois tacnodes A, B, C [1]; une telle surface devrait être formée du plan de γ et de deux plans passant par r et par les points A, B, C, ce qui est impossible. Par suite, $p_g=0$.

Les surfaces biadjointes sont d'ordre six et doivent avoir γ comme conique double, passer par la droite r de manière à ce que cette droite compte pour 12 unités dans l'intersection de ces surfaces et de F, enfin toucher F aux points A, B, C. De telles surfaces se décomposent nécessairement en cinq plans : le plan $\varphi=0$ de γ compté deux fois, les plans α, β, γ et un dernier plan, variable, passant par la droite r. Ces derniers plans coupent F suivant des quartiques elliptiques K, ayant deux points doubles sur γ. Les courbes K sont donc les courbes bicanoniques et on a $\mathrm{P}_2=2$. D'autre part, le genre des courbes bicanoniques étant $3p^{(1)}-2=1$, on a $p^{(1)}=1$.

---

[1] En un point double tacnodal, une surface possède une singularité formée d'un point double et d'une droite double infiniment voisine ; cette droite double est mise en évidence par une transformation quadratique ayant le point double comme point fondamental. Les adjointes d'une surface passent par un point double tacnodal et les biadjointes touchent la surface en ce point.

Les sections planes C de F forment un système $|C|$ de degré 7 et de genre 10. Son adjoint $|C'|$ est découpé sur F par les surfaces du quatrième ordre passant doublement par r, simplement par γ et par A, B, C. Ces surfaces du quatrième ordre sont en nombre ∞^9 et par suite découpent, sur une courbe C, la série canonique complète de cette courbe. La surface F est donc régulière et on a $p_a = 0$.

12. Les plans doubles de Campedelli. — Jusqu'en ces derniers temps, on ne connaissait comme surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, non rationnelles, que les surfaces d'Enriques et de Castelnuovo, et un plan double construit incidemment par M. Enriques et dont il sera question plus loin. Dans le but de combler cette lacune, M. Campedelli a entrepris l'étude systématique des plans doubles dont la courbe de diramation est du huitième ou du dixième ordre.

Les plans doubles ayant une courbe de diramation du huitième ordre [1], de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 0$, n'ont donné que la surface d'Enriques ou des cas particuliers. Au contraire, les plans doubles ayant une courbe de diramation du dixième ordre ont conduit à des types nouveaux [2].

A) Plan double ayant une courbe de diramation formée des composantes suivantes :

1° Une courbe K_7 d'ordre sept ayant trois tacnodes A_1, A_2, A_3, les tangentes tacnodales a_1, a_2, a_3, concourant en un point O triple pour la courbe ;

2° Les trois droites a_1, a_2, a_3.

Les courbes canoniques doivent être des coniques doubles passant deux fois par O et une fois par chacun des points A_1, A_2, A_3. De telles coniques n'existent pas et on a $p_g = 0$. Les courbes bicanoniques sont des quartiques passant quatre fois par O et tangentes à la courbe K_7 en A_1, A_2, A_3 ; elles sont donc formées des droites a_1, a_2, a_3 et d'une droite variable passant par O. On a $P_2 = 2$,

(1) Campedelli, *Sui piani doppi con curva di diramazione dell' ottavo ordine* (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1932, pp. 203-208).

(2) Campedelli, *Sui piani doppi con curva di diramazione del decimo ordine* (*Rend. R. Accad. N. dei Lincei*, 1er sem. 1932, pp. 358-362), *Sopra alcuni piani doppi notevoli con curva di diramazione del decimo ordine* (*Idem*, pp. 536-542).

$p^{(1)}=1$. Le plan double est d'autre part régulier, puisque la courbe de diramation n'est pas composée de courbes d'un faisceau (théorème de De Franchis).

Le plan double obtenu est birationnellement équivalent à la surface de Castelnuovo dans le cas où la conique double γ dégénère en deux droites. Il conduit par généralisation à un plan double dont la courbe de diramation est formée de la manière suivante :

1° Une courbe K_{n+2}, d'ordre $n+2$, ayant $n-2$ tacnodes, les tangentes tacnodales $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$ concourant en un point O multiple d'ordre $n-2$ pour la courbe ;

2° Les $n-2$ droites $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$.

On a $p_a=p_g=0$, $p^{(1)}=1$, $P_2=n-3$. Ce plan double avait déjà été rencontré par M. Enriques [1], qui avait remarqué que la courbe K_{n+2} existe certainement pour $n \leqslant 16$. Observons que pour $n=4$, on retrouve le plan double de genres $p_a=p_g=0$, $P_2=1$, équivalent à la surface d'Enriques.

B) Plan double ayant une courbe de diramation formée de la manière suivante :

1° Une droite a ;

2° Une courbe K_9 d'ordre 9 ayant trois couples de points triples infiniment voisins A_1 et A_1', A_2 et A_2', A_3 et A_3' et trois points triples distincts B_1, B_2, B_3 situés sur la droite a.

La courbe K_9 appartient à un faisceau de Halphen de courbes du neuvième ordre ayant neuf points triples A_1, A_1', ..., B_3. On supposera que les trois points A_1, A_2, A_3 ne sont pas en ligne droite.

Les courbes canoniques sont des coniques doubles passant par A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 et par conséquent ne peuvent exister ; on a donc $p_g=0$. Les courbes bicanoniques sont des quartiques doubles ayant des points doubles en B_1, B_2, B_3 et passant par A_1, A_2, A_3 en y touchant K_9 ; ces courbes comprennent donc la droite a comme partie et sont complétées par des cubiques Γ passant par B_1, B_2, B_3 et touchant K_9 en A_1, A_2, A_3. Si la courbe K_9 est irréductible, ou si elle est formée d'une cubique et d'une sextique, cette cubique Γ est unique et on a $P_2=1$. Mais si K_9 se compose de trois cubi-

(1) F. Enriques, *Sui piani doppi di genere lineare* p (1) = 1 (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1898, pp. 234-240, 253-257).

ques, appartenant nécessairement à un même faisceau, ce faisceau est formé de cubiques Γ et on a $P_2=2$. Dans tous les cas, le plan double est régulier et on a $p_a=0$. En outre, $p^{(1)}=1$.

Dans le cas où la courbe K_9 est irréductible, le plan double avait été rencontré par M. Enriques (¹).

C) Plan double dont la courbe de diramation D est d'ordre dix et possède six points triples à chacun desquels est infiniment voisin un point triple, ces six points triples n'étant pas situés sur une même conique.

Les courbes canoniques sont des coniques doubles devant passer par les six points triples, elles n'existent donc pas et on a $p_g=0$. Le plan double est régulier et on a $p_a=0$. Les courbes bicanoniques sont des quartiques touchant la courbe D aux six points triples ; ces courbes forment un réseau et on a $P_2=3$. Les courbes bicanoniques sont de genre 7 et par suite $p^{(1)}=3$.

Il existe certainement des plans doubles de ce type ; il suffit de supposer que la courbe D est formée de trois coniques se touchant deux à deux en des points distincts et d'une quartique touchant les trois coniques en chacun des points de contact de deux d'entre elles. Il reste à examiner si la courbe D peut être irréductible.

D) Plan double dont la courbe de diramation D, du dixième ordre, possède un point quadruple et cinq points triples à chacun desquels est infiniment voisin un point triple, les six points singuliers n'étant pas situés sur une conique.

Les courbes canoniques n'existent pas et le plan double est régulier, donc $p_g=p_a=0$. Les courbes bicanoniques sont représentées par les quartiques ayant un point double au point quadruple et touchant la courbe D en chacun des cinq points triples. Ces courbes forment un faisceau et on a $P_2=2$. Les courbes bicanoniques sont de genre 4 et on a $p^{(1)}=2$.

Ici aussi il resterait à voir si la courbe D peut être irréductible. On prouve l'existence de plans doubles du type envisagé en supposant que D se compose de trois coniques dont deux sont bitangentes à la troisième et se touchent en un point, et d'une quartique ayant un point double en un des deux points de rencontre ordinaire des deux dernières coniques et passant par les cinq points

(¹) *Superficie di bigenere uno...* (*loc. cit.*).

de contact de deux des trois coniques en y ayant même tangente que celles-ci.

13. Involutions cycliques, dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique. — Le fait qu'une involution d'ordre deux, privée de points unis, appartenant à une surface de genres un, a pour image une surface d'Enriques nous a conduit à nous demander si les involutions cycliques privées de points unis, appartenant à une surface, ne pouvait avoir pour image une surface non rationnelle de genre $p_a = p_g = 0$ [1]. La réponse est affirmative.

Soit F une surface algébrique régulière de genres $p_a = p_g > 2$, $p^{(1)} > 1$, possédant une transformation birationnelle T en elle-même, de période p, engendrant une involution I_p, d'ordre p, dépourvue de points unis. Une surface Φ, image de l'involution I_p, est régulière et son genre arithmétique π_a est lié à celui p_a de F par la relation [2]

$$p_a + 1 = p(\pi_a + 1).$$

Par conséquent, si $p = p_a + 1$, on a $\pi_a = 0$ et la surface Φ est dépourvue de courbes canoniques.

Soit $|C|$ le système canonique de F. Il ne peut être composé au moyen de I_p, car alors il lui correspondrait sur Φ le système canonique de cette surface. Nous supposerons en outre que $|C|$ n'est pas composé au moyen d'un faisceau. Sur les éléments de $|C|$, T opère comme une homographie et il y a par suite un certain nombre ν de systèmes partiels $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_\nu|$, linéaires, compris dans $|C|$, composés au moyen de I_p. Les dimensions r_1, $r_2, \ldots, r_\nu$ de ces systèmes sont liés par la relation

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_\nu + \nu = p_g.$$

Comme $p_g = p_a = p - 1$, on a donc

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_\nu = p - \nu - 1,$$

d'où $\nu \leqslant p - 1$. Et puisque $\nu \geqslant 2$, on a $p > 2$.

---

[1] *Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique régulière* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1932, pp. 672-679).

[2] Severi, *Sulle relazioni...* (*loc. cit.*) ou L. Godeaux, *Recherches...* (*loc. cit.*).

Désignons par $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, ..., $|\Gamma_\nu|$ les systèmes linéaires de courbes correspondant, sur Φ, aux systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_\nu|$. Les genres linéaires $p^{(1)}$, $\pi^{(1)}$ de F et Φ sont liés par la relation

$$p^{(1)}-1=p(\pi^{(1)}-1)$$

et les systèmes $|\Gamma_1|$, ..., $|\Gamma_\nu|$ sont de genre $\pi^{(1)}$ et de degré $\pi^{(1)}-1$. Puisque $p^{(1)}>1$, on a $\pi^{(1)}>1$.

Le bigenre P_2' de Φ est au moins égal à $\pi_a+\pi^{(1)}$, c'est-à-dire à $\pi^{(1)}>1$; il existe donc, sur Φ, un système bicanonique $|\Delta|$. Aux courbes Δ correspondent, sur F, des courbes bicanoniques 2 C, par suite les courbes Δ découpent, sur une courbe Γ_1, une série linéaire d'ordre $2\pi^{(1)}-2$ qui ne peut faire partie de la série canonique de Γ_1, car alors $|\Delta|$ serait l'adjoint de $|\Gamma_1|$ et ce système serait le système canonique de Φ. La série en question a donc la dimension au plus égale à $\pi^{(1)}-2$ et comme la dimension de $|\Delta|$ est au moins égale à $\pi^{(1)}-1$, il y a au moins une courbe Δ comprenant une courbe Γ_1 comme partie. Une courbe $\Delta-\Gamma_1$ a pour transformée sur F une courbe de $|C|$, par conséquent, en choisissant convenablement les indices, on pourra écrire

$$|\Delta|=|\Gamma_1+\Gamma_2|=|\Gamma_3+\Gamma_4|=\ldots=|\Gamma_{\nu-1}+\Gamma_\nu|.$$

On en déduit en particulier que ν est pair.

Observons encore que la surface Φ étant régulière et les courbes Δ étant de genre $3\pi^{(1)}-2>1$, les courbes Δ découpent sur l'une d'entre elles une série complète (série caractéristique), on a $P_2'=\pi^{(1)}$.

Les courbes adjointes Γ_1' à $|\Gamma_1|$ ont pour transformées, sur F, des courbes adjointes aux courbes C_1, donc des courbes de $|2C|$. Il en résulte que le système $|\Gamma_1'|$ a le degré $4(\pi^{(1)}-1)$ et le genre $3\pi^{(1)}-2$. D'après le théorème de Riemann-Roch, la dimension de $|\Gamma_1'|$ est au moins égale à $\pi^{(1)}-1$. Mais, d'autre part, elle ne peut dépasser $\pi^{(1)}-1$, car autrement, il y aurait des courbes Γ_1' contenant des courbes Γ_1 et on aurait $\pi_g>0$. Cela étant, il existe au moins une courbe Γ_1' contenant une courbe Γ_2 par exemple, et la différence $\Gamma_1'-\Gamma_2$ est nécessairement une des courbes Γ_3, Γ_4, ..., Γ_ν. Les systèmes adjoints $|\Gamma_2'|$, ..., $|\Gamma_\nu'|$ à $|\Gamma_2|$, ..., $|\Gamma\ |$ donnent lieu à des conclusions analogues.

Cela étant, considérons le système $|2C|$; il contient un certain nombre de systèmes partiels composés au moyen de I_2, nous en connaissons $\nu+1$, les transformés de $|\Delta|$, $|\Gamma_1'|$, ..., $|\Gamma_\nu'|$ et ces systèmes ont tous la dimension $\pi^{(1)}-1$. Il ne peut exister un autre système composé au moyen de I_2, appartenant à $|2C|$, car à un tel système correspondrait, sur Φ, un système de dimension au moins égale à $\pi^{(1)}-1$, rencontrant les courbes Γ_1, ..., Γ_ν en des groupes de $2\pi^{(1)}-2$ points non canoniques et par suite dans ce système, il y aurait des courbes formées d'une courbe Γ_1 et d'une courbe Γ_1, Γ_2, ... ou Γ_ν. Mais alors ce système coïnciderait avec $|\Delta|$, $|\Gamma_1'|$, ... ou $|\Gamma_\nu'|$, ce qui est impossible.

Le système $|2C|$, adjoint à $|C|$, est régulier et par suite de dimension

$$P_2-1=p_a+p^{(1)}-1.$$

D'après la théorie des homographies, on doit avoir

$$(\nu+1)(\pi^{(1)}-1)+\nu+1=p_a+p^{(1)}-1=p-1+p(\pi^{(1)}-1),$$

d'où $\nu=p-1$. Mais alors, on a

$$r_1+r_2+\ldots+r_\nu=0,$$

donc les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_\nu|$ sont ∞^0. De plus, ν étant pair, p doit être impair.

Si p *est un nombre impair et s'il existe une involution cyclique* I_p *d'ordre* p *sur une surface F régulière de genres* $p_a=p-1$, $p^{(1)}>1$, *dont le système canonique* $|C|$ *n'est pas composé au moyen d'un faisceau, une surface* Φ *image de cette involution a les genres* $p_a=p_g=0$, $P_2=\frac{1}{2}(p^{(1)}-1)+1$. *Il existe, dans le système* $|C|$, $p-1$ *courbes isolées* $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$ *contenant chacune* ∞^1 *groupes de* I_p *et on peut les ranger dans un ordre tel qu'aux courbes* C_1+C_2, C_3+C_4, ..., $C_{p-2}+C_{p-1}$ *correspondent des courbes bicanoniques de la surface* Φ.

Par ce théorème, la construction des surfaces non rationnelles de genre $p_a=p_g=0$ est ramenée à un autre problème ; nous allons utiliser ce procédé pour construire une surface de genres $p_a=p_g=0$, $P_2=2$, $P_3=4$.

Observons que le diviseur de Severi de la surface Φ est certainement multiple de p [1].

14. Construction d'une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = p^{(1)} = 2$, $P_3 = 4$. — Considérons une surface F du cinquième ordre, ne passant pas par les sommets du tétraèdre de référence transformée en elle-même par l'homographie de période cinq

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^3 x_4,$$

ε étant une racine primitive cinquième de l'unité. L'équation de la surface F peut s'écrire

$$\begin{aligned} & a_1 x_1^5 + a_2 x_2^5 + a_3 x_3^5 + a_4 x_4^5 \\ + & b_1 x_2^2 x_3 x_4^2 + b_2 x_1 x_3^2 x_4^2 + b_3 x_1^2 x_2^2 x_4 + b_4 x_1^2 x_2 x_3^2 \\ + & c_1 x_1^3 x_3 x_4 + c_2 x_2^3 x_1 x_3 + c_3 x_3^3 x_2 x_4 + c_4 x_4^3 x_1 x_2 = 0. \end{aligned}$$

Sur F, l'homographie T engendre une involution I_5, d'ordre cinq, dépourvue de points unis.

La surface F étant dépourvue de points multiples, le système canonique $|C|$ de cette surface est le système des sections planes. La surface est régulière et a les genres $p_a = p_g = 4$, $p^{(1)} = 6$. Il existe quatre courbes canoniques transformées en elles-mêmes par T, ce sont les sections de la surface par les faces du tétraèdre de référence. Nous les désignerons par C_1, C_2, C_3, C_4, courbes que nous supposerons situées respectivement dans les plans $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Nous désignerons par Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 les courbes qui correspondent à C_1, C_2, C_3, C_4 sur la surface Φ, image de l'involution I_5. La surface Φ a, d'après ce qui précède les genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 2$.

Dans le système bicanonique $|2C|$ de F, il y a cinq faisceaux de courbes transformées en elles-mêmes par T ; ils sont déterminés respectivement par les courbes

$$2C_1 \text{ et } C_2 + C_4,\ 2C_2 \text{ et } C_1 + C_3,\ 2C_3 \text{ et } C_1 + C_4,$$
$$2C_4 \text{ et } C_2 + C_3,\ C_1 + C_2 \text{ et } C_3 + C_4.$$

Le système bicanonique de Φ est un faisceau déterminé par les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_2$ et $\Gamma_3 + \Gamma_4$. On a de plus

(1) L. Godeaux, *Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité* (*Bull. de l'Acad. de Cracovie*, 1914, pp. 362-368).

$|\Gamma_1'| = |2\,\Gamma_4| = |\Gamma_2 + \Gamma_3|$, $|\Gamma_2'| = |2\,\Gamma_3| = |\Gamma_1 + \Gamma_4|$, $|\Gamma_3'| = |2\,\Gamma_1|$ $= |\Gamma_2 + \Gamma_4|$, $|\Gamma_4'| = |2\,\Gamma_2| = |\Gamma_1 + \Gamma_3|$.

Le système tricanonique de Φ est l'adjoint au système bicanonique, c'est donc

$$|(\Gamma_1 + \Gamma_2)'| = |\Gamma_1' + \Gamma_2| = |\Gamma_2 + 2\,\Gamma_4|.$$

On a d'ailleurs $P_3 = 4$ et le système tricanonique comprend également les courbes $2\,\Gamma_2 + \Gamma_3$, $\Gamma_1 + 2\,\Gamma_3$, $2\,\Gamma_1 + \Gamma_4$. Par conséquent, au système tricanonique de Φ correspond sur F le système découpé par les surfaces cubiques

$$\lambda_1\, x_1^2\, x_3 + \lambda_2\, x_2^2\, x_1 + \lambda_3\, x_3^2\, x_4 + \lambda_4\, x_4^2\, x_2 = 0.$$

En rapportant projectivement ces surfaces aux plans de l'espace, nous obtiendrons un modèle projectif de Φ. Le système tricanonique de Φ ayant le degré $9(p^{(1)} - 1) = 9$, on pourrait s'attendre à ce que ce modèle projectif fût d'ordre neuf. Il n'en est rien cependant, car le système tricanonique a deux points-base : le point commun aux courbes Γ_1 et Γ_4 et le point commun aux courbes Γ_2 et Γ_3. Le système tricanonique de Φ a donc le degré virtuel 9 et le degré effectif 7 ; le modèle projectif envisagé sera donc une surface d'ordre sept, possédant deux courbes exceptionnelles (droites) correspondant aux deux points-base.

En posant

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_1^2\, x_3 : x_2^2\, x_1 : x_3^2\, x_4 : x_4^2\, x_2,$$

on obtient pour Φ l'équation

$$\begin{aligned} &a_1\, X_1^4\, X_2\, X_4^2 + a_2\, X_2^4\, X_4\, X_3^2 + a_3\, X_3^4\, X_1\, X_2^2 + a_4\, X_4^4\, X_3\, X_1^2 \\ &+ X_1\, X_2\, X_3\, X_4 [b_1\, X_2\, X_3\, X_4 + b_2\, X_3\, X_4\, X_1 + b_3\, X_4\, X_1\, X_2 + b_4\, X_1\, X_2\, X_3 + \\ &c_1\, X_1^2\, X_4 + c_2^2\, X_2\, X_3 + c_3\, X_3^2\, X_2 + c_4\, X_4^2\, X_1] = 0. \end{aligned}$$

Appelons O_1, O_2, O_3, O_4 les sommets du tétraèdre de référence et r_{ik} la droite $O_i O_k$. Il est facile de déterminer les singularités de la surface Φ.

En tout point de la droite r_{34}, qui est double pour la surface, les deux plans tangents sont confondus avec le plan $X_1 = 0$ et toute section plane de la surface a un tacnode en son point de rencontre avec r_{34}. La droite r_{34} est donc une droite double tacnodale (à laquelle est infiniment voisine, dans le plan $X_1 = 0$, une droite double). De même les droites r_{13}, r_{24}, r_{12} sont doubles tacnodales, les plans tangents étant respectivement $X_2=0$, $X_3=0$, $X_4=0$. Les droites r_{14}, r_{23} sont simples pour la surface, ce sont les droites exceptionnelles dont il a été question plus haut.

Les surfaces adjointes d'ordre $m-4=3$ sont des surfaces cubiques qui doivent passer par les droites doubles tacnodales et toucher le long de ces droites respectivement les plans $X_1=0$, $X_2=0$, $X_3=0$, $X_4=0$; de telles surfaces n'existent pas. Les surfaces biadjointes sont des surfaces du sixième ordre qui doivent passer par les droites doubles tacnodales de manière à ce que chacune de ces droites compte pour 8 dans l'intersection avec la surface. Ces biadjointes sont constituées par les faces du tétraèdre et par les quadriques

$$\mu_1 X_1 X_4 + \mu_2 X_2 X_3 = 0.$$

Les courbes bicanoniques sont des sextiques gauches de genre quatre.

Les surfaces triadjointes sont formées des faces du tétraèdre comptées deux fois et d'un plan variable.

La surface du septième ordre circonscrite à un tétraèdre et ayant comme droites doubles tacnodales quatre arêtes du tétraèdre formant un quadrilatère gauche, a les genres $p_a=p_g=0$, $p^{(1)}=P_2=2$, $P_3=4$ (¹).

15. Remarque. — Il convient de remarquer que le genre linéaire $p^{(1)}$ d'une surface de genres $p_a=p_g=0$ ne peut être choisi arbitrairement. M. Rosenblatt a en effet montré que le genre linéaire d'une surface algébrique était inférieur à une quantité dépendant du genre arithmétique de la surface (²). Dans le cas actuel, nous pouvons encore réduire la limite donnée par M. Ro-

(¹) Voir L. Godeaux, *Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux* (*Rend. R. Accad. N. dei Lincei*, 2ᵉ sem. 1931, pp. 479-481), *Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro dont le genre linéaire est égal à deux* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1933, pp. 26-37).

(²) *Sur quelques inégalités dans la théorie des surfaces algébriques* (*C. R.*, juin 1912, pp. 1494-1495), *Sur certaines classes de surfaces algébriques irrégulières et sur les transformations birationnelles de ces surfaces en elles-mêmes* (*Bull. de l'Acad. de Cracovie*, 1912, pp. 761-810).

senblatt en nous appuyant directement sur la relation de M. Picard (comme le fait d'ailleurs M. Rosenblatt).

Si ρ est le nombre-base d'une surface algébrique F, ρ_o le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce de F, p_a, p_g, $p^{(1)}$ les genres de cette surface, on a [relation de Picard (1)],

$$\rho + \rho_o = 12\,p_a + 11 - p^{(1)} + 4(p_g - p_a).$$

Cette formule devient actuellement

$$\rho + \rho_o = 11 - p^{(1)}.$$

Or, on a $\rho_o \geqslant 0$, $\rho \geqslant 1$, donc $p^{(1)} \leqslant 10$.

Le genre linéaire d'une surface de genres $\mathrm{p_a} = \mathrm{p_g} = 0$, $\mathrm{P_2} > 0$, *est au plus égal à dix.*

---

(1) PICARD, *Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce* (*C. R.*, déc. 1904, pp. 949-953 et *Annales de l'Ecole norm. sup.*, 1905, pp. 69-100) ; PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. II, chap. XII.

Imp. G. Thone, Liège (Belgique)