Cours de

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE

par

Lucien GODEAUX
Professeur à l'Université de Liége,
Correspondant de l'Académie royale de Belgique.

Fascicule 1.

Points singuliers des courbes et des surfaces algébriques.

Liége,
Librairie BOURGUIGNON,
16, rue des Dominicains,
1937.

Du même auteur.

Leçons élémentaires sur les équations différentielles et le calcul des variations. Bruxelles, Ecole Militaire, 1926.

Les transformations birationnelles du plan. Paris, Gauthier-Villars, 1926.

La Géométrie. Liège, Thone, 1931.

Leçons de Géométrie projective. Liège, Thone, 1933.

Leçons de Géométrie supérieure. Liège, Bourguignon, 1933.

Questions non résolues de Géométrie algébrique. Les involutions de l'espace et les variétés algébriques à trois dimensions. Paris, Hermann, 1933.

Leçons de Géométrie infinitésimale. Liège, Pholien, 1933.

La théorie des surfaces et l'espace réglé. Paris, Hermann, 1934.

Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls. Paris, Hermann, 1934.

Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Paris, Hermann, 1935.

Les Géométries. Paris, Colin, 1937.

Cours de géométrie analytique à trois dimensions. Liège, Pholien, 1937.

Chapitre I

Points singuliers des courbes planes.

§ 1. Transformations quadratiques.

1.— **Définition.** Considérons, dans un plan ϖ, un réseau de coniques d'équation

$$\lambda_1 f_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 f_2(x_1, x_2, x_3) + \lambda_3 f_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad (1)$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1°) La courbe générique du réseau est irréductible ;

2°) Les coniques $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ n'appartiennent pas à un même faisceau ;

3°) En dehors des points-base du réseau, deux courbes de celui-ci ne se rencontrent plus qu'en un point (variable avec ces courbes).

Posons

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = f_1 : f_2 : f_3. \qquad (2)$$

A un point x de ϖ correspond un point x' d'un plan ϖ', en général unique et bien déterminé. La transformation (2) est appelée transformation quadratique.

2.— **Classification.** Il existe trois espèces de réseaux de coniques satisfaisant aux conditions imposées.

1°) Réseau formé par les coniques passant par trois points distincts.

2°) Réseau formé par les coniques passant par deux points distincts et ayant une tangente fixe en l'un de ceux-ci.

3°) Réseau formé par les coniques s'osculant en un point fixe.

Il y aura par conséquent trois espèces de transformations quadratiques.

3. **Transformations de première espèce.** — En prenant les trois points-base du réseau (1) comme sommets du triangle de référence, les équations (2) s'écrivent

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2. \qquad (I)$$

On en déduit

$$x_1 : x_2 : x_3 = x'_2 x'_3 : x'_3 x'_1 : x'_1 x'_2 \qquad (II)$$

Les plans ϖ, ϖ' jouent des rôles symétriques et la transformation est généralement biunivoque. Il y a exception pour les sommets des triangles de référence, dont les points homologues sont indéterminés.

. A une droite du plan ϖ (ou ϖ') correspond une conique C' (ou C) de ϖ' (ou de ϖ) circonscrite au triangle de référence $O'_1 O'_2 O'_3$ (ou $O_1 O_2 O_3$).

Considérons une droite
$$a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \qquad (1)$$
passant par O_1 et les coniques C, d'équations
$$x_1 (a_2 x_2 + a_3 x_3) + \lambda x_2 x_3 = 0$$
touchant cette droite en O_1. Il leur correspond, dans ϖ', les droites
$$a_2 x'_3 + a_3 x'_2 + \lambda x'_1 = 0$$
passant par le point
$$x'_1 = 0 \quad , \quad a_2 x'_3 + a_3 x'_2 = 0. \qquad (2)$$
Nous conviendrons de dire qu'au point infiniment voisin de O_1 sur la droite (1) correspond le point (2) de la droite $x'_1 = 0$. Celle-ci est appelée <u>droite fondamentale</u> associée au <u>point fondamental</u> O_1. Remarquons que la droite (1) et le point (2) engendrent des formes projectives.

On voit de même qu'aux points fondamentaux $O_2, O_3, O'_1, O'_2, O'_3$ sont respectivement associées les droites fondamentales $x'_2 = 0$, $x'_3 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

<u>Aux points infiniment voisins d'un point fondamental correspondent projectivement les points de la droite fondamentale associée.</u>

4.. <u>Transformée d'une courbe algébrique</u>.. Soit Γ une courbe d'ordre n d'équation
$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0 ;$$
sa transformée Γ' a pour équation
$$\varphi(x'_2 x'_3, x'_3 x'_1, x'_1 x'_2) = 0$$
et est d'ordre $2n$.

Supposons que la courbe Γ ait un point s-uple en O_3 et soit
$$x_3^{n-s} \varphi_s(x_1, x_2) + x_3^{n-s-1} \varphi_{s+1}(x_1, x_2) + \dots + \varphi_n(x_1, x_2) = 0 \qquad (1)$$
son équation. Sa transformée a pour équation
$$x_3'^{s} \left[(x'_1 x'_2)^{n-s} \varphi_s(x'_2, x'_1) + \dots + x_3'^{n-s} \varphi_n(x'_2, x'_1) \right] = 0.$$
On convient de supprimer le facteur $x_3'^{s}$ provenant du passage de la courbe (1) par le point O_3. La transformée de la courbe (1) sera donc la courbe d'équation
$$(x'_1 x'_2)^{n-s} \varphi_s(x'_2, x'_1) + \dots + x_3'^{n-s} \varphi_n(x'_2, x'_1) = 0. \qquad (2)$$
La courbe (2) est d'ordre $2n-s$; elle a la multiplicité n en O'_3, la multiplicité $n-s$ en chacun des points O'_1, O'_2. En dehors de ces points, elle coupe la droite fondamentale $x'_3 = 0$ associée au point O_3 aux points
$$x'_3 = 0 \quad , \quad \varphi_s(x'_2, x'_1) = 0$$

qui correspondent aux points infiniment voisins de O_3 sur les tangentes $\varphi_s(x_1, x_2) = 0$ à la courbe (1) en ce point.

Plus généralement, à une courbe Γ d'ordre n ayant les multiplicités s_1, s_2, s_3 en O_1, O_2, O_3 correspond une courbe Γ' d'ordre $2n - s_1 - s_2 - s_3$ ayant en O'_1, O'_2, O'_3 respectivement les multiplicités $n - s_2 - s_3$, $n - s_3 - s_1$, $n - s_1 - s_2$.

D'ailleurs, aux points de rencontre de Γ' et d'une droite correspondent les points de rencontre de Γ et d'une conique C, en dehors de O_1, O_2, O_3.

5.-. Transformations de seconde espèce. - Les coniques C passant par les points O_1, O_2 et touchant la droite $x_2 = 0$ au point O_1 ont pour équation

$$\lambda_1 x_2 x_3 + \lambda_2 x_3^2 + \lambda_3 x_1 x_2 = 0$$

et forment un réseau de seconde espèce. Les équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_2 x_3 : x_3^2 : x_1 x_2 \qquad (I)$$

sont donc celles d'une transformation quadratique de seconde espèce. On en déduit

$$x_1 : x_2 : x_3 = x'_2 x'_3 : x'^2_1 : x'_1 x'_2 . \qquad (II)$$

La transformation est donc généralement biunivoque et aux droites du plan ϖ correspondent dans ϖ' des coniques C' passant par O'_2, O'_3 et touchant $x'_2 = 0$ en O'_3.

Les coniques C tangentes en O_2 à la droite

$$a_1 x_1 + a_3 x_3 = 0 \qquad (1)$$

ont pour équation

$$x_2 (a_1 x_1 + a_3 x_3) + \lambda x_3^2 = 0 ;$$

il leur correspond les droites

$$a_1 x'_3 + a_3 x'_1 + \lambda x'_2 = 0,$$

passant par le point

$$x'_2 = 0 \ , \ a_1 x'_3 + a_3 x'_1 = 0 . \qquad (2)$$

Au point infiniment voisin de O_2 sur la droite (1) correspond donc le point (2) et aux points infiniment voisins de O_2 correspondent, projectivement, les points de la droite fondamentale $x'_2 = 0$. On établirait de même qu'aux points infiniment voisins de O'_2 correspondent les points de la droite fondamentale $x_2 = 0$.

Considérons la courbe

$$x_1^{n-1}(a_2 x_2 + a_3 x_3) + x_1^{n-2} \varphi_2 (x_2, x_3) + \dots + \varphi_n (x_2, x_3) = 0$$

touchant en O_1 la droite

$$a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 , \qquad (3)$$

distincte de la droite $x_2 = 0$ ($a_3 \neq 0$). Il lui correspond la courbe

$$(x'_2 x'_3)^{n-1}(a_2 x'_1 + a_3 x'_2) + (x'_2 x'_3)^{n-2} x'_1 \varphi_2 (x'_1, x'_2) + \dots + x'^{n-1}_1 \varphi_n (x'_1, x'_2) = 0,$$

tangente en O'_3 à la droite

$$a_2 x'_1 + a_3 x'_2 = 0. \qquad (4)$$

D'autre part, aux points de la droite (3) correspondent ceux de la droite (4). Au point infiniment voisin de O_1 sur la droite (3) correspond donc le point infiniment voisin de O'_3 sur la droite (4). Les droites (3) et (4) engendrent deux faisceaux projectifs de sommets respectifs O_1, O'_3. Donc <u>aux points infiniment voisins de O_1 correspondent, projectivement, les points infiniment voisins de O'_3.</u>

Considérons enfin un faisceau de coniques **C**,

$$a_2 x_3^2 + a_3 x_1 x_2 + \lambda x_2 x_3 = 0 \qquad (5)$$

osculatrices en O_1. Il leur correspond les droites

$$a_2 x'_2 + a_3 x'_3 + \lambda x'_1 = 0,$$

passant par le point

$$a_2 x'_2 + a_3 x'_3 = 0 \quad , \quad x'_1 = 0. \qquad (6)$$

Appelons O_{11} le point de $x_2 = 0$ infiniment voisin de O_1. D'après nos conventions de langage, les coniques C passent par O_{11}. Convenons de dire que les coniques (5), osculatrices en O_1, ont en commun, outre O_1, O_{11}, un point infiniment voisin de O_{11}. A ce point correspond le point (6) et nous pouvons dire qu'<u>aux points infiniment voisins de O_{11} correspondent les points de la droite fondamentale $x'_1 = 0$.</u>

On établit de même que si O'_{33} désigne le point infiniment voisin de O'_3 sur la droite $x'_2 = 0$, aux points infiniment voisins de O'_{33} correspondent les points de la droite $x_3 = 0$.

6.- <u>**Transformée d'une courbe algébrique**</u>.- Considérons une courbe Γ d'ordre n ayant en O_1 la multiplicité s, $s' \leqslant s$ des tangentes à cette courbe en O_1 coïncidant avec la droite $x_2 = 0$. L'équation de cette courbe Γ sera de la forme

$$x_1^{n-s} x_2^{s'} \varphi_{s-s'}(x_2, x_3) + x_1^{n-s-1} \varphi_{s+1}(x_2, x_3) + \dots + \varphi_n(x_2, x_3) = 0.$$

Sa transformée Γ' aura pour équation

$$(x'_2 x'_3)^{n-s} x_1'^{\,s'-1} \varphi_{s-s'}(x'_1, x'_2) + (x'_2 x'_3)^{n-s-1} \varphi_{s+1}(x'_1, x'_2) + \dots + x_1'^{\,n-s-1} \varphi_n(x'_1, x'_2) = 0.$$

La courbe Γ' est d'ordre $2n-s-1$; elle a la multiplicité $n-s-1$ en O'_2 et la multiplicité $n-1$ en O'_3. En ce point, $n-s$ des tangentes à Γ' sont confondues en $x'_2 = 0$, $s'-1$ avec $x'_1 = 0$ et $s-s'$ sont distinctes de ces deux droites.

On remarque que la droite $x_2 = 0$ coupe la courbe Γ en $s+1$ points confondus en O_1. Lorsque ce nombre est supérieur à $s+1$, le résultat précédent doit être modifié.

Lorsque la courbe Γ a la multiplicité s_2 en O_2, la courbe Γ' a l'ordre $2n-s-s_2-1$ et la droite $x'_2 = 0$ doit être défalquée s_2 fois de la courbe trouvée plus haut.

Considérons une courbe Γ d'ordre n ayant en O_1 la multiplicité s_1 et en O_2 la multiplicité s_2. Supposons qu'en O_1 s'_1 des tangentes à Γ soient confondues avec $x_2 = 0$ et que cette droite coupe la courbe en $s_1 + s''_1$ points confondus avec O_1 ($s''_1 \leqslant s'_1$). Une conique C coupe la courbe Γ en $2n - s_1 - s''_1 - s_2$ points variables et la transformée Γ' de Γ a donc ce nombre pour ordre.

La droite $x_2 = 0$ coupe Γ en $n - s_1 - s''_1$ points en dehors de O_1. A ces points correspondent des points infiniments voisins de O'_2, donc O'_2 est multiple d'ordre $n - s_1 - s''_1$ pour la courbe Γ'. La courbe Γ possède $s_1 - s'_1$ points infiniment voisins de O_1 non situés sur $x_2 = 0$, donc la courbe Γ' possède en O'_3 $s_1 - s'_1$ tangentes distinctes de $x'_2 = 0$ et de $x'_1 = 0$. Une droite passant par O_1 coupe Γ, en dehors de ce point, en $n - s_1$ points. A ceux-ci correspondent les points de Γ', situés sur la droite homologue passant par O'_3, en dehors de ce point, donc le point O'_3 est multiple d'ordre $n - s''_1 - s_2$ pour Γ'.

La droite $x_3 = 0$ coupe Γ en $n - s_1 - s_2$ points en dehors de O_1, O_2, donc Γ' possède autant de points infiniment voisins de O'_{33}. En d'autres termes, il y a $n - s_1 - s_2$ coniques C' osculant la courbe Γ' en O'_3, ou encore, il y a $n - s_1 - s_2$ tangentes à Γ' en O'_3 confondues avec la droite $x'_2 = 0$. Par conséquent, $s'_1 - s''_1$ des tangentes à Γ' en O'_3 sont confondues en $x'_1 = 0$. Enfin, le point O_2 étant multiple d'ordre s_2 pour Γ, la droite $x'_2 = 0$ ne coupe Γ' qu'en s_2 points en dehors de O'_3; cette droite coupe donc Γ' en $2n - s_1 - s''_1 - 2s_2$ points confondus en O'_3.

7.– **Transformations de troisième espèce**. – Supposons que les coniques C passent par O_3 en y touchant la droite $x_1 = 0$ et en ayant un contact du second ordre en ce point. Elles ont pour équation

$$\lambda_1 x_1 x_2 + \lambda_2 x_1^2 + \lambda_3 (x_2^2 - x_1 x_3) = 0 .$$

Posons

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 x_2 : x_1^2 : x_2^2 - x_1 x_3 \qquad (I)$$

On en déduit

$$x_1 : x_2 : x_3 = x'^2_2 : x'_1 x'_2 : x'^2_1 - x'_2 x'_3 . \qquad (II)$$

Aux droites du plan ϖ correspondent les coniques C'

$$\lambda_1 x'^2_2 + \lambda_2 x'_1 x'_2 + \lambda_3 (x'^2_1 - x'_2 x'_3) = 0$$

passant par O'_3, y touchant la droite $x'_2 = 0$ et ayant en ce point un contact du second ordre. La transformation (I) est généralement biunivoque.

Considérons la courbe

$$x_3^{n-1} (a_1 x_1 + a_2 x_2) + x_3^{n-2} \varphi_2 (x_1, x_2) + \dots + \varphi_n (x_1, x_2) = 0,$$

tangente en O_3 à la droite

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \qquad (1)$$

distincte de $x_1 = 0$ ($a_2 \neq 0$). La courbe a pour transformée une courbe d'ordre $2n-1$,

$$(x_1'^2 - x_2' x_3')^{n-1} (a_1 x_2' + a_2 x_1') + (x_1'^2 - x_2' x_3')^{n-2} x_1' \varphi_2(x_2', x_1') + \dots + x_1'^{n-1} \varphi_n(x_2', x_1') = 0,$$

tangente en O_3' à la droite

$$a_1 x_2' + a_2 x_1' = 0. \qquad (2)$$

Aux points de la droite (1) correspondent ceux de la droite (2) et au point infiniment voisin de O_3 situé sur la droite (1) correspond le point infiniment voisin de O_3' situé sur la droite (2). De plus, les droites (1) et (2) engendrent deux faisceaux projectifs. Par suite, <u>aux points infiniment voisins de O_3 correspondent projectivement les points infiniment voisins de O_3'</u>.

Considérons le faisceau de coniques

$$x_3 x_1 + a_0 x_1^2 + a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \lambda (b_1 x_1 + b_2 x_2) x_1 = 0,$$

tangentes en O_3 à la droite $x_1 = 0$ et ayant un contact du second ordre en ce point. Ce faisceau n'appartient pas au réseau des courbes C. Il lui correspond le faisceau

$$x_1'^2 - x_2' x_3' + a_0 x_2'^2 + a_1 x_1' x_2' + a_2 x_1'^2 + \lambda (b_1 x_2' + b_2 x_1') x_2' = 0,$$

formé de coniques ayant un contact du second ordre en O_3', la tangente commune étant $x_2' = 0$. Si nous désignons par O_{31} le point infiniment voisin de O_3 sur $x_1 = 0$ et par O_{32}' le point infiniment voisin de O_3' sur $x_2' = 0$, nous pouvons écrire qu'<u>aux points infiniment voisins de O_{31} correspondent les points infiniment voisins de O_{32}'</u>.

Considérons enfin le faisceau de coniques C ayant un contact du troisième ordre en O_3, d'équation

$$a_1 x_1 x_2 + a_2 x_1^2 + a_3 (x_2^2 - x_1 x_3) + \lambda x_1^2 = 0. \qquad (3)$$

Il lui correspond le faisceau de droites

$$a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3' + \lambda x_2' = 0,$$

le sommet

$$a_1 x_1' + a_3 x_3' = 0 \quad , x_2' = 0. \qquad (4)$$

Si nous désignons par O_{311} le point infiniment voisin de O_{31} commun à toutes les coniques C, nous voyons qu'au point infiniment voisin de O_{311} sur les coniques (3) correspond le point (4). Par suite, <u>aux points infiniment voisins de O_{311} correspondent les points de la droite fondamentale $x_2' = 0$</u>.

On démontrerait de même qu'aux points infiniment voisins du point O_{322}', infiniment voisin de O_{32}' et commun à toutes les coniques C', correspondent les points de la droite $x_1 = 0$.

3.- <u>Transformée d'une courbe algébrique</u>. - Soit Γ une courbe algébrique d'ordre n ayant la multiplicité s en O_3. Supposons que la droite $x_1 = 0$, qui est comprise parmi les tangentes à Γ en O_3, coupe cette courbe en $s + s_1$ points confondus en O_3 et que les coniques C coupent la courbe en $s + s_1 + s_2$ points confondus en O_3.

Une conique C rencontre Γ en $2n - s - s_1 - s_2$ points variables, donc la courbe Γ', transformée de Γ, est d'ordre $2n - s - s_1 - s_2$.

Une droite passant par O_3 coupe encore Γ en $n - s$ points, donc une droite passant par O'_3 coupe encore Γ' en $n - s$ points et O'_3 est multiple d'ordre $n - s_1 - s_2$ pour Γ'.

Une conique passant par O_3, touchant $x_1 = 0$ en ce point mais n'appartenant pas au réseau des courbes C, coupe Γ en $2n - s - s_1$ points en dehors de O_3, donc la conique correspondante coupe encore Γ' en $2n - s - s_1$ points en dehors de O'_3. On en conclut que la droite $x'_2 = 0$ coupe Γ' en $2n - s - s_1 - 2s_2$ points confondus en O'_3.

Enfin, une conique C' coupe Γ' en $3n - 2s - 2s_1 - 2s_2$ points confondus en O'_3.

9.-. Remarque I.-. Les réseaux de coniques considérés dans la définition des transformations quadratiques sont appelés réseaux homaloïdaux de coniques. Si $|C|$ est un réseau homaloïdal de coniques dans un plan ϖ, on obtient une transformation quadratique entre ce plan ϖ et un plan ϖ' en établissant une projectivité entre les coniques du réseau et les droites du plan ϖ'. Aux droites de ϖ correspondent alors dans une projectivité les coniques d'un réseau homaloïdal $|C'|$ de ϖ'.

10.- Remarque II.-. Soient $\varpi, \varpi', \varpi''$ trois plans, T une transformation quadratique entre ϖ et ϖ', T' une transformation quadratique entre ϖ' et ϖ''. A un point P de ϖ, T fait correspondre un point P' de ϖ' et à ce point, T' fait correspondre un point P'' de ϖ''. Il existe donc une transformation biunivoque (birationnelle) θ entre les plans ϖ, ϖ'', faisant passer de P à P''. Nous dirons que θ est le produit de T par T' et nous écrirons $\theta = T'T$. Observons que θ n'est pas en général une transformation quadratique.

Supposons que T soit une transformation quadratique de seconde espèce, faisant correspondre aux droites de ϖ des coniques C' passant par deux points A'_1, A'_2 et touchant une droite a'_1 en A'_1. Soit A'_3 un point de ϖ' n'appartenant pas à l'une des droites $a'_1, A'_1A'_2$. Établissons une projectivité entre les coniques C'_1 passant par A'_1, A'_2, A'_3 et les droites du plan ϖ''. Nous définissons ainsi une transformation quadratique T' de première espèce entre ϖ' et ϖ''. Aux droites de ϖ' correspondent dans ϖ'' des coniques C''_1 passant par trois points A''_1, A''_2, A''_3. Aux coniques C', T' fait correspondre des coniques C'' passant par A''_1, A''_2 et par un point A'' de la droite $A''_2 A''_3$. A une droite de ϖ, $\theta = T'T$ fait correspondre une conique C'' et θ est donc une transformation quadratique de première espèce. On a

$$\theta = T'T \quad , \quad T = T'^{-1}\theta ,$$

donc <u>une transformation quadratique de seconde espèce est le produit de deux transformations quadratiques de première espèce.</u>

Supposons maintenant que T soit une transformation quadratique de troisième espèce, les coniques C' s'osculant en un point A'_1. Pour définir T', prenons les coniques C'_1 passant par A'_1 et par deux autres points A'_2, A'_3 dont aucun n'appartient à la tangente commune aux coniques C' en A'_1. Il est facile de voir que θ est une transformation de seconde espèce. Par suite <u>une transformation quadratique de troisième espèce est le produit de trois transformations quadratiques de première espèce.</u>

§2.-- Concept de points infiniment voisins successifs.

11. <u>Préliminaires</u>.- Nous avons déjà utilisé à plusieurs reprises la notion de points infiniment voisins, convention de langage que nous allons préciser et étendre.

Considérons une courbe C ayant un point simple en M et soit m la tangente en ce point à cette courbe. La courbe C et la droite m ont en général deux points d'intersection confondus en M. Convenons d'énoncer cette propriété en disant que la courbe C et la droite m ont en commun le point M et un point, <u>fictif</u>, infiniment voisin de M. Lorsque C et m tournent autour de M, on obtient l'ensemble des points infiniment voisins de M ; ils constituent ce que l'on appelle le <u>domaine du premier ordre</u> de M

D'après notre convention, deux courbes tangentes en M ont en commun un point du domaine du premier ordre de M ; une courbe ayant un point double ordinaire en M contient deux points du domaine du premier ordre de M.

Soit T une transformation quadratique dont M soit un point fondamental en lequel les coniques du réseau n'ont pas une tangente fixe. T est donc une transformation quadratique de première ou de seconde espèce. Soit m' la droite fondamentale associée au point M. Aux points (fictifs) du domaine du premier ordre de M correspondent les points de la droite m'.

Considérons un point M' de m' et son domaine du premier ordre. Aux points, fictifs, de ce domaine, T^{-1} fait correspondre des points

-tictifs. L'ensemble de ceux-ci, lorsque M' décrit la droite m', constitue le <u>domaine du second ordre du point M.</u>

De proche en proche, on peut ainsi définir les domaines du troisième, du quatrième, ... ordres du point M. Aux points du domaine du $n^{ième}$ ordre de M', T^{-1} fait correspondre des points du domaine du $(n+1)$-ième ordre de M.

12.-. <u>Equations cartésiennes d'une transformation quadratique.</u>-. Considérons les paraboles passant par l'origine O de deux axes cartésiens Ox, Oy et ayant Oy comme diamètre. Elles ont comme équation

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y + \lambda_3 x = 0$$

et forment un réseau homoloïdal. En posant

$$X : Y : 1 = x^2 : y : x,$$

d'où

$$X = x, \quad xY = y \quad ; \quad x = X, \; y = XY,$$

nous définissons une transformation quadratique de seconde espèce.

Aux droites du premier plan correspondent les hyperboles

$$\mu_1 X + \mu_2 XY + \mu_3 = 0$$

ayant $O'Y$ comme asymptote et $O'X$ comme direction asymptotique.

Aux points du domaine du premier ordre de O correspondent les points de la droite $O'Y$. En particulier, au point infiniment voisin de O situé sur Ox correspond le point O'.

Considérons en effet une courbe algébrique quelconque tangente à Ox en O,

$$y + \varphi_2(x,y) + \varphi_3(x,y) + \dots + \varphi_n(x,y) = 0.$$

Sa transformée a pour équation

$$Y + X\varphi_2(1,Y) + X^2\varphi_3(1,Y) + \dots + X^{n-1}\varphi_n(1,Y) = 0;$$

cette courbe passe par O' et a pour tangente en ce point la droite

$$Y + X\varphi_2(1,0) = 0.$$

13.-. <u>**Théorème**</u>.-. <u>Si deux courbes ont en un point simple un contact d'ordre n, elles ont en commun n points infiniment voisins de ce point.</u>

Soient

$$\varphi(x,y) = 0 \quad , \quad \psi(x,y) = 0 \qquad (1)$$

les équations de deux courbes ayant un contact d'ordre n en O. Pour $x = 0$, les valeurs

$$y_0 = 0 \;, \; y'_0 \;, \; y''_0 \;, \dots , \; y_0^{(n)}$$

des dérivées de y par rapport à x tirées des équations (1) sont donc égales, tandis que les valeurs de $y_0^{(n+1)}$ sont différentes.

Aux courbes (1), la transformation quadratique $x = X$, $y = XY$ fait correspondre les courbes

$$\varphi(X, XY) = 0 \quad , \quad \psi(X, XY) = 0. \qquad (2)$$

On a

$$y' = Y + x Y' , \quad y'' = 2Y' + xY'' , \dots , y^{(n)} = nY^{(n-1)} + xY^{(n)} , \quad y^{(n+1)} = (n+1)Y^{(n)} + xY^{(n+1)} .$$

Pour $x = X = 0$, les quantités $Y_0, Y'_0, \dots, Y_0^{(n-1)}$ tirées des équations (2) seront égales, tandis que les quantités $Y_0^{(n)}$ seront différentes. Les courbes (2) ont donc un contact d'ordre $n-1$ au point $X=0$, $Y=y'_0$.

Opérons sur les courbes (2) comme nous l'avons fait pour les courbes (1), et ainsi de suite. Après n transformations quadratiques, on parviendra à deux courbes ne se touchant plus. Cela signifie que les courbes (1) ont en commun le point O, un point du domaine du premier ordre du point O, ..., un point du domaine du n ième ordre de O, mais ont des points distincts dans le domaine $(n+1)$-ième ordre. On traduit cette propriété en disant que les courbes (1) ont en O n points infiniment voisins successifs de O (le qualificatif successif indique qu'il s'agit de points appartenant à des domaines successifs).

14.-. **Remarque**. On peut arriver au même résultat en utilisant la transformation quadratique de première espèce

$$X = x \quad , \quad Yy = x ,$$

mais les calculs sont un peu plus longs.

§ 3.-. Composition des points singuliers d'une courbe algébrique.

15.-. Points multiples infiniment voisins successifs d'une courbe. Soit C une courbe algébrique ayant en O un point multiple d'ordre s et τ tangentes distinctes comptant respectivement pour $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\tau$ tangentes. On a

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_\tau = s .$$

Considérons une transformation quadratique T ayant O comme point fondamental et faisant correspondre au domaine du premier ordre de O les points d'une droite a'. A C, T fait correspondre une courbe C'; désignons par $O'_1, O'_2, \dots, O'_\tau$ les points de a' qui correspondent aux points du domaine du premier ordre de O situés sur les tangentes à la courbe C. En dehors des points fondamentaux de T appartenant à a', C' ne peut rencontrer cette droite qu'en $O'_1, O'_2, \dots, O'_\tau$ et ces points absorbent respectivement $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\tau$ points d'intersection.

Soient $s_1, s_2, \dots, s_\tau$ les multiplicités respectives de $O'_1, O'_2, \dots, O'_\tau$ pour C'. On a

$$s_1 \leqslant \sigma_1 \quad , \quad s_2 \leqslant \sigma_2 , \dots , \quad s_\tau \leqslant \sigma_\tau .$$

Désignons par $O_1, O_2, \dots, O_\tau$ les points (fictifs) du domaine du premier ordre de O que T^{-1} fait correspondre à $O'_1, O'_2, \dots, O'_\tau$. On dira que la courbe C possède dans τ directions différentes, τ points infiniment voisins de O respectivement multiples d'ordre $s_1, s_2, \dots, s_\tau$.

Recommençons pour chacun des points $O'_1, O'_2, \dots, O'_\tau$ le raisonnement qui vient d'être fait. Supposons que la courbe C' possède τ_i points infiniment voisins de O'_i, dans des directions différentes, multiples d'ordres $s_{i1}, s_{i2}, \dots$ A ces points, T^{-1} fait correspondre τ_i points (fictifs) du domaine du second ordre de O, infiniment voisins de O_i, que l'on dira être respectivement multiples d'ordre $s_{i1}, s_{i2}, \dots$ de C.

Et ainsi de suite.

On démontrera plus loin qu'il existe un domaine d'ordre fini de O dans lequel la courbe C n'a plus que des points simples.

16.- <u>Exemples</u>. <u>Points de rebroussement d'une courbe plane</u>. Soit C une courbe plane ayant un point double en O. - Si la courbe a des tangentes distinctes en ce point, elle contient deux points simples infiniment voisins de O, dans des directions différentes.

Supposons que C possède un point de rebroussement en O et prenons la tangente de rebroussement pour axe Ox. L'équation de C s'écrit

$$y^2 + \varphi_3(x,y) + \varphi_4(x,y) + \dots\dots = 0 \qquad (1)$$

Appliquons la transformation $x = X$, $y = XY$. A la courbe C correspond la courbe C' d'équation

$$Y^2 + X\varphi_3(1,Y) + X^2\varphi_4(1,Y) + \dots\dots = 0 \qquad (2)$$

Cette courbe possède en général un point simple en O', la tangente étant la droite fondamentale O'Y. La courbe C possède un point de rebroussement de première espèce ou cuspide en O, ou encore, un point simple infiniment voisin de O (sur Ox). La tangente de rebroussement Ox coupe C en trois points confondus en O.

La condition nécessaire et suffisante pour que O' soit double pour C' est que le terme en X disparaisse dans l'équation (2), c'est-à-dire que $\varphi_3(x,y)$ ne contienne pas de terme en x^3. Posons

$$\varphi_3(x,y) \equiv y\,\varphi_2(x,y).$$

L'équation (2) devient

$$Y^2 + XY\varphi_2(1,Y) + X^2\varphi_4(1,Y) + \dots\dots = 0. \qquad (3)$$

Les tangentes à C' en O' sont données par l'équation

$$Y^2 + XY\varphi_2(1,0) + X^2\varphi_4(1,0) = 0.$$

Si ces tangentes sont distinctes, le point O est un point de rebroussement de seconde espèce ou tacnode pour la courbe C. Celle-ci possède un point double ordinaire infiniment voisin de O (sur Ox). La tangente de rebroussement Ox coupe C en quatre points confondus en O.

Le point O' peut à son tour être un cuspide ou un tacnode pour la courbe C'. On analysera cette singularité en opérant une seconde transformation quadratique.

Posons

$$\varphi_3(x,y) \equiv y\,(a_0 y^2 + a_1 yx + a_2 x^2),$$
$$\varphi_4(x,y) \equiv b_0 y^4 + b_1 y^3 x + b_2 y^2 x^2 + b_3 y x^3 + b_4 x^4.$$

La condition pour que O' soit un cuspide ou un tacnode pour C' se traduit par

$$a_2^2 - 4\,b_4 = 0$$

et l'équation (3) s'écrit alors sous la forme

$$(2Y + a_2 X)^2 + 4XY^2(a_0 Y + a_1) + 4X^2Y(b_0Y^3 + b_1Y^2 + b_2Y + b_3) + \ldots\ldots = 0.$$

Opérons sur cette courbe la transformation $X = X'$, $Y = X'Y'$. On obtient la courbe

$$(2Y' + a_2)^2 + 4X'Y'^2(a_0X'Y' + a_1) + 4X'Y'(b_0X'^3Y'^3 + \ldots\ldots + b_3) + \ldots\ldots = 0. \quad (4)$$

Au point de C' infiniment voisin de O' correspond le point $X' = 0$, $Y' = -\frac{a_2}{2}$. En général la courbe (4) touche en ce point la droite fondamentale $X' = 0$. Pour que ce point soit double pour la courbe, on doit avoir $a_1 a_2 - 2b_3 = 0$.

On pourra alors, par une transformation quadratique, étudier ce point double de la courbe (4), et ainsi de suite.

On voit qu'une courbe algébrique peut posséder <u>un point double auquel sont infiniment voisins successifs n points doubles et, dans le domaine du $(n+1)$-ième ordre, un ou deux points simples.</u>

17. — <u>Intersections de deux courbes absorbées en un point multiple commun.</u> Soient C, D deux courbes sans partie commune, ayant en un point O les multiplicités respectives r et s. Supposons que, dans le domaine du premier ordre de O, les courbes C, D aient en commun des points multiples d'ordres $r_1, r_2, \ldots$ pour C et d'ordres $s_1, s_2, \ldots$ pour D ; dans le domaine du second ordre de O, des points multiples d'ordres $r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{21}, \ldots$ pour C, d'ordres $s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{21}, \ldots$ pour D ; etc.

Soit I le nombre des points d'intersection de C, D absorbés en O. On a

$$I = rs + I_1, \qquad (I_1 \geqslant 0).$$

Opérons une transformation quadratique de première espèce ayant O comme point fondamental et soient a' la droite fondamentale associée à O, $O'_1, O'_2, \ldots\ldots$ les points de cette droite communs aux transformées C', D' de C, D, en dehors des points fondamentaux appartenant à a'.

Construisons un faisceau de courbes de même ordre que C, ayant en O un point multiple d'ordre r à tangentes variables, et contenant C. Soit $\bar{C}$ une courbe générique de ce faisceau. Lorsque $\bar{C}$ tend vers C, la transformée $\bar{C}'$, de $\bar{C}$ tend vers C'. Les courbes $\bar{C}$, D ont, lorsque $\bar{C}$ tend vers C, I_1 points communs tendant vers O, donc $\bar{C}'$ et D' ont I_1 points communs tendant vers les points $O'_1, O'_2, \ldots$ On a donc

$$I_1 = r_1 s_1 + r_2 s_2 + \ldots + I_2, \qquad (I_2 \geqslant 0).$$

En répétant ce raisonnement, on a

$$I_2 = r_{11} s_{11} + \ldots + I_3, \qquad (I_3 \geqslant 0)$$

et finalement

$$I = rs + \Sigma r_i s_i + \Sigma r_{ik} s_{ik} + \ldots$$

Le second membre comprend un nombre fini de termes, puisque I est fini.

18.- **Lemme.** Soient a, a' deux ponctuelles projectives,

$$x'_1 : x'_2 = \alpha x_1 + \beta x_2 : \gamma x_1 + \delta x_2, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

la projectivité, $f(x_1, x_2) = 0$ un groupe de n points de a,

$$f'(x'_1, x'_2) = f'(\alpha x_1 + \beta x_2, \gamma x_1 + \delta x_2) = \rho f(x_1, x_2) = 0$$

la transformée de $f = 0$ sur a'.

Le groupe polaire d'un point y', transformé d'un point y, par rapport à $f' = 0$, a pour équation

$$y'_1 \frac{\partial f'}{\partial x'_1} + y'_2 \frac{\partial f'}{\partial x'_2} = (\alpha y_1 + \beta y_2)\frac{\partial f'}{\partial x'_1} + (\gamma y_1 + \delta y_2)\frac{\partial f'}{\partial x'_2} = 0.$$

Or, on a

$$\frac{\partial f'}{\partial x_1} = \alpha \frac{\partial f'}{\partial x'_1} + \gamma \frac{\partial f'}{\partial x'_2}, \quad \frac{\partial f'}{\partial x_2} = \beta \frac{\partial f'}{\partial x'_1} + \delta \frac{\partial f'}{\partial x'_2},$$

donc $$y'_1 \frac{\partial f'}{\partial x'_1} + y'_2 \frac{\partial f'}{\partial x'_2} = y_1 \frac{\partial f'}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f'}{\partial x_2} = \rho\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right).$$

Par conséquent, <u>dans une projectivité entre deux ponctuelles, un groupe polaire d'un point par rapport à un groupe de points donné, correspond le groupe polaire du point homologue par rapport au groupe de points homologue.</u>

19.- **Comportement des premières polaires d'une courbe en un point singulier.** Les premières polaires d'une courbe C d'ordre n passent $s-1$ fois par un point multiple d'ordre s de la courbe. Nous nous proposons d'étudier le comportement des premières polaires aux points singuliers infiniment voisins d'un point multiple de C.

Soit O un point multiple d'ordre s pour la courbe C. Choisissons deux points P, Q n'appartenant pas à C et tels que les côtés du triangle OPQ ne touchent pas C. Opérons la transformation quadratique T obtenue en rapportant projectivement les coniques passant par O, P, Q aux droites d'un plan. A C correspond une courbe C' d'ordre $2n-s$ ayant la multiplicité n en O' et la multiplicité $n-s$ en P', Q', les points O', P', Q' étant les points fondamentaux de T ~~dans~~

le second plan.

Soient a, a' deux droites homologues passant par P, P'. Les ponctuelles a, a' sont projectives. Désignons par Γ la polaire de P par rapport à C, par Γ' sa transformée. Sur a, Γ découpe le groupe polaire de P par rapport au groupe $(C\,a)$, donc sur a', Γ' découpe le groupe polaire du point $(a', O'Q')$ par rapport au groupe $(C'a')$, le point P' étant exclu de ce groupe.

Prenons le triangle $O'P'Q'$ comme triangle de référence, les sommets ayant pour coordonnées $O'(0,0,1)$, $P'(1,0,0)$, $Q'(0,1,0)$. L'équation de C' est de la forme

$$f \equiv x_1^n \varphi_{n-s}(x_2, x_3) + x_1^{n-1} \varphi_{n-s+1}(x_2, x_3) + \cdots + \varphi_{2n-s} = 0.$$

Si l'équation de la droite a' est

$$x_3 = \lambda x_2,$$

le groupe (C', a') est donné par

$$x_1^n \varphi_{n-s}(1, \lambda) + x_1^{n-1} x_2 \varphi_{n-s+1}(1, \lambda) + \cdots + x_2^n \varphi_{2n-s}(1, \lambda) = 0.$$

Le point $(a', O'Q')$ a pour coordonnées $(0, 1, \lambda)$ et son groupe polaire par rapport au groupe précédent est donné par

$$x_1^{n-1} \varphi_{n-s+1}(1, \lambda) + \cdots + n x_2^{n-1} \varphi_{2n-s}(1, \lambda) = 0.$$

L'équation de Γ' s'obtiendra en éliminant λ entre cette équation et celle de a', ce sera donc

$$\psi_1 \equiv x_1^{n-1} \varphi_{n-s+1}(x_2, x_3) + \cdots + n\, \varphi_{2n-s}(x_2, x_3) = 0.$$

La polaire de P' par rapport à C' a pour équation

$$\psi_2 \equiv n x_1^{n-1} \varphi_{n-s}(x_2, x_3) + (n-1) x_1^{n-2} \varphi_{n-s+1}(x_2, x_3) + \cdots + \varphi_{2n-s-1}(x_2, x_3) = 0.$$

On a donc identiquement

$$x_1 \psi_1 + \psi_2 \equiv n f.$$

A un point O_1 infiniment voisin de O, s_1-uple pour C, correspond un point O'_1, de $x_3 = 0$, s_1-uple pour C'. Ce point est multiple d'ordre $s_1 - 1$ au moins pour ψ_2, donc également pour ψ_1. On en conclut que:

<u>Les premières polaires d'une courbe passent $s-1$ fois au moins par un point multiple d'ordre s de la courbe, effectif ou fictif.</u>

20.— Application à l'étude des points singuliers. Soit C une courbe irréductible possédant en O un point multiple d'ordre s, auquel sont infiniment voisins, dans le domaine du premier ordre, des points multiples d'ordres $s_1, s_2, \dots$; dans le domaine du second ordre des points multiples d'ordres $s_{11}, s_{12}, \dots$; etc.

La première polaire d'un point quelconque par rapport à C passe par tout point fictif du domaine de O qui est au moins double pour C. D'autre part cette courbe rencontre C en $n(n-1)$ points, n étant l'ordre de C. On a donc

$$s(s-1) + \Sigma s_i(s_i - 1) + \Sigma s_{ik}(s_{ik} - 1) + \cdots < n(n-1).$$

Le nombre de termes du premier membre est fini et par suite les points infiniment voisins de O multiples pour C sont en nombre fini.

Il existe un domaine d'ordre fini d'un point multiple d'une courbe algébrique ne contenant plus que des points simples de cette courbe.

La démonstration de ce théorème exposé ici est empruntée à M. F. Severi (Algebraische Geometrie, Leipzig, 1921).

21.-. **Théorème de Noether**. Toute courbe algébrique irréductible peut être transformée, par un nombre fini de transformations quadratiques, en une courbe n'ayant que des points multiples ordinaires (à tangentes distinctes).

Soit C une courbe algébrique. Si O est un point singulier de cette courbe, opérons une transformation quadratique ayant pour points fondamentaux O et deux points P, Q n'appartenant pas à C et tels que les côtés du triangle OPQ coupent C, au dehors de O, en des points distincts. Soient O', P', Q' les points fondamentaux du second plan.

1°) Les points O', P', Q' sont multiples ordinaires pour la transformée C' de C.

2°) Un point non fondamental, singulier pour C, se transforme en un point singulier de même nature pour C'.

3°) Les points du domaine du premier ordre de O, multiples pour C, se transforment en des points multiples de C' situés sur la droite P'Q'.

En opérant sur ces points comme on a opéré sur O, et ainsi de suite, on arrivera, d'après le théorème précédent, après un nombre fini de transformations quadratiques, à une transformée de C ne possédant plus que des points multiples ordinaires, en dehors des transformés des points singuliers éventuels de C distincts de O. On opérera sur ceux-ci comme on l'a fait sur O et on arrivera finalement à une courbe ne possédant plus que des points multiples ordinaires.

22.-. **Théorème de Halphen**.-. Toute courbe algébrique plane irréductible peut être transformée en une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires, la correspondance entre les points des deux courbes étant biunivoque.

Toute courbe algébrique plane irréductible pouvant être transformée, d'après le théorème de Noether, en une courbe n'ayant que des points multiples ordinaires, la correspondance entre les deux courbes étant biunivoque, nous démontrerons le théorème de Halphen en partant d'une courbe C n'ayant que des points multiples ordinaires $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Soient $B_1, B_2, \ldots, B_5$ cinq points du plan ϖ de la courbe C, distincts des points $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tels que :

1°) Les droites passant par deux des points $A_1, B_1, \ldots, B_5$ soient toutes distinctes, aucune d'elles ne passant par un des points $A_2, A_3, \ldots, A_k$ et n'étant tangente à la courbe C.

2°) Les coniques passant par cinq des points $A_1, B_1, \ldots, B_5$ soient distinctes, aucune d'elles ne passant par un des points $A_2, A_3, \ldots, A_k$ et n'étant tangente à la courbe C.

Rapportons projectivement les cubiques passant par les points $A_1, B_1, \ldots, B_5$ aux plans de l'espace. Aux points du plan ϖ correspondent ceux d'une surface cubique F, dépourvue de points doubles. Aux points de ϖ infiniment voisins de A_1 correspondent sur F ceux d'une droite a_1. A la courbe C correspond sur F, point par point, une courbe $\bar{C}$ rencontrant la droite a_1 en s points, s étant la multiplicité de A_1 pour C. Aux points $A_2, \ldots, A_k$ correspondent sur F des points $\bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_k$ ayant pour la courbe $\bar{C}$ chacun la même multiplicité que le point correspondant pour la courbe C.

Soit O un point de l'espace n'appartenant pas à F, ni aux plans tangents à cette surface aux points $\bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_k$, ni à la développable lieu des tangentes à la courbe $\bar{C}$, ni à la surface lieu des trisécantes de la courbe $\bar{C}$, ni enfin à la surface lieu des cordes de la courbe $\bar{C}$ telles que les tangentes à cette courbe aux points d'appui de chacune de ces cordes soient coplanaires. Projetons la courbe $\bar{C}$ à partir du point O sur un plan ϖ', nous obtenons une courbe C', correspondant point par point à la courbe C. Aux points $\bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_k$, correspondent des points multiples ordinaires $A'_2, \ldots, A'_k$ de C'. Cette courbe possède de plus un certain nombre de points doubles ordinaires provenant des cordes de $\bar{C}$ passant par O.

Recommençons le raisonnement précédent en partant de la courbe C' et du point A'_2, et ainsi de suite ; nous parviendrons finalement à une courbe $C^{(k)}$ n'ayant plus que des points doubles ordinaires, ce qui démontre le théorème.

On observera, que les relations entre les coordonnées de deux points homologues des courbes C et $C^{(k)}$ sont algébriques.

§4.-. Genre d'une courbe algébrique plane.

23.-. *Définition*.-. On appelle genre d'une courbe algébrique plane d'ordre n le nombre

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}\Sigma s(s-1),$$

la sommation étant étendue à tous les points multiples, effectifs ou fictifs, de la courbe.

24.-. *Théorème*. *Une transformation quadratique n'altère pas le genre d'une courbe.*

Soit C une courbe d'ordre n possédant en un point O un point multiple d'ordre s. Opérons une transformation quadratique ayant pour points fondamentaux O, P, Q, le triangle OPQ n'ayant aucune relation avec la courbe. Soient C' la transformée de C et O', P', Q' les points fondamentaux de la transformation dans le second plan.

Le genre de C est

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}s(s-1) - \varphi,$$

φ étant le terme qui provient des points multiples de C distincts de O.

En tenant compte des multiplicités de C' en O', P', Q', le genre p' de cette courbe est

$$p' = \frac{1}{2}(2n-s-1)(2n-s-2) - \frac{1}{2}n(n-1) - (n-s)(n-s-1) - \varphi,$$

d'où $p' = p$.

Le théorème est démontré par une transformation quadratique de première espèce. Comme les autres transformations quadratiques sont des produits de transformations de première espèce, le théorème est complètement démontré.

25.-. *Théorème*. *Le genre d'une courbe plane irréductible ne peut être négatif.*

On peut tout d'abord raisonner sur une courbe C d'ordre n n'ayant que des points multiples ordinaires. Supposons que le genre de cette courbe soit $p < 0$. Considérons les courbes d'ordre $n-1$ passant $s-1$ fois par les points s-uples de C; elles forment un système linéaire de dimension au moins égale à

$$\frac{1}{2}(n-1)(n+2) - \frac{1}{2}\Sigma s(s-1) = 2(n-1) + p.$$

Ces courbes coupent C, en dehors des points multiples, en

$$n(n-1) - \Sigma s(s-1) = 2(n-1) + 2p.$$

points. Il existe au moins une de ces courbes passant par

$$2(n-1) + 2p + 1 \leq 2(n-1) + p.$$

points simples arbitraires de C. Mais alors C doit comprendre cette courbe comme partie et est donc réductible, contrairement à l'hypothèse.

26. **Théorème de Clebsch.** — *Une courbe irréductible de genre $p = 0$ est rationnelle.*

Reprenons le raisonnement précédent en supposant $p = 0$. Par $2n-3$ points simples de C passant ∞^1 courbes d'ordre $n-1$ et non plus, puisque C est irréductible. Ces courbes forment un faisceau et rencontrent C en un seul point variable. Les coordonnées de celui-ci sont donc des fonctions rationnelles du paramètre fixant la courbe dans le faisceau.

Chapitre II

Points singuliers des surfaces.

§ 1 – Transformations quadratiques de l'espace.

27. **Définition.** – Soient O un point et Γ une conique dont le plan ne passe pas par O. Les quadriques Q passant par O et par Γ forment un système linéaire triplement infini. Deux quadriques Q ont en commun, outre Γ, une conique Γ'. Une troisième quadrique Q, n'appartenant pas au faisceau déterminé par les deux premières, coupe Γ' en un seul point en dehors de O et de Γ. Trois quadriques Q n'appartenant pas à un même faisceau ont donc en commun un seul point en dehors de la base du système $|Q|$.

Soient $(0,0,0,1)$ les coordonnées du point Q et

$$x_4 = 0, \qquad f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

les équations de Γ. Les quadriques Q ont pour équation

$$x_4(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) + \lambda_4 f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

Posons

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 x_4 : x_2 x_4 : x_3 x_4 : f(x_1, x_2, x_3). \qquad (I)$$

On en déduit

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1' x_4' : x_2' x_4' : x_3' x_4' : f(x_1', x_2', x_3'). \qquad (II)$$

Les équations (I) ou (II) établissent une correspondance birationnelle entre les points x, x', appelée correspondance ou transformation quadratique.

Les formules (II) font correspondre aux plans de l'espace les quadriques Q'

$$x_4'(\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3') + \lambda_4 f(x_1', x_2', x_3') = 0,$$

passant par le point $O'(0,0,0,1)$ et par la conique Γ',

$$x_4' = 0, \qquad f(x_1', x_2', x_3') = 0.$$

28.-. <u>Propriétés des points O, O'</u>. Comme dans le cas du plan, nous dirons que deux courbes passant par O et y ayant même tangente, ont en commun un point infiniment voisin de O. L'ensemble de ces points constitue le domaine du premier ordre de O.

Les équations (I) ou (II) établissent une projectivité entre les gerbes de sommets O, O'. Soient α un plan passant par O, α' le plan homologue passant par O'. Les points des plans α, α' se correspondent dans une transformation quadratique de première espèce. Aux points infiniment voisins de O dans α correspondent projectivement les points de la droite commune au plan α' et au plan σ' de la conique Γ'. Par suite :

<u>Aux points infiniment voisins de O correspondent, dans une projectivité, les points du plan σ' de la conique Γ'.</u>

De même, aux points infiniment voisins de O' correspondent projectivement les points du plan σ de la conique Γ.

29.-. <u>Propriétés de la conique Γ</u>. Soit A un point de la conique Γ. A la droite $a = OA$, la projectivité entre les gerbes de sommets O, O' fait correspondre une droite a' passant par O' et coupant Γ' en un point A'.

Considérons un plan α passant par a et le plan homologue α', passant par a'. Dans la transformation quadratique induite par les équations (I) ou (II) entre ces plans, aux points de α infiniment voisins de A correspondent les points de la droite a' ou les points de la seconde droite commune à α' et au cône projetant Γ' de O'. Plaçons-nous dans cette seconde hypothèse. Lorsque α tourne autour de a, α' tourne autour de a' et aux points de l'espace infiniment voisins de A correspondent tous les points du cône projetant Γ' de O'. Cette conclusion est absurde, car elle serait valable pour tout point de la conique Γ. Il faut donc qu'aux points infiniment voisins de A correspondent les points de la droite a'.

<u>Aux points infiniment voisins d'un point de la conique Γ correspondent les points d'une droite passant par O' et s'appuyant sur Γ'.</u>

On arrive à la même conclusion en intervertissant les rôles des coniques Γ, Γ'.

30.-. <u>Transformation d'une surface</u>. Soit F une surface d'ordre n ayant en O un point multiple d'ordre s et pour laquelle la conique Γ soit multiple d'ordre r.

L'ordre de la transformée F' de F est égal au nombre des intersections de F et d'une conique R passant par O et s'appuyant en deux points sur Γ, en dehors de ces points. En effet, aux points d'une droite r', les formules (II) font correspondre les points d'une conique R commune aux quadriques Q homologues des plans passant par r'. L'ordre de la surface F' est donc égal à $2n-s-2r=n'$.

Une droite passant par O coupe encore F en $n-s$ autres points. La droite homologue passant par O' doit donc encore couper F' en $n-s$ points. Donc O' est multiple d'ordre $n-2r=s'$ pour F'.

Une droite passant par O et s'appuyant sur Γ coupe encore F en $n-s-r$ points, donc la conique Γ' est multiple d'ordre $n-s-r$ pour F'.

Aux points de F infiniment voisins de O correspondent les points de F' situés dans le plan σ', en dehors de Γ'. Aux points de F situés dans le plan σ en dehors de Γ correspondent les points de F' infiniment voisins de O'.

31... <u>Transformation d'une courbe.</u>- Soit C une courbe d'ordre n ayant en O la multiplicité s et s'appuyant en r points sur Γ.

L'ordre de la transformée C' de C est égal au nombre de points de rencontre de C avec une quadrique Q, en dehors de Γ et de O, c'est-à-dire à $2n-s-r$.

Un plan passant par O coupe encore C en $n-s$ points, donc un plan passant par O' doit couper C' en $n-s$ points également. Le point O' est multiple d'ordre $n-r$ pour C'. Les points de cette courbe infiniment voisins de O' correspondent aux $n-r$ points de rencontre de C et de σ en dehors de Γ.

En dehors de O et de Γ, C coupe le cône projetant Γ de O en $2n-2s-r$ points, donc C' s'appuie en $2n-2s-r$ points sur Γ'.

32... <u>Dégénérescences de la conique Γ.</u>- Des cas particuliers de la transformation quadratique peuvent être obtenus en supposant que la conique Γ dégénère en deux droites ou en une droite comptée deux fois.

Dans le premier cas, nous pouvons poser par exemple

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv x_2 x_3 .$$

Aux points infiniment voisins d'un point A de la droite $x_2=x_4=0$ correspondent les points d'une droite a' du plan $x_2'=0$, passant par O'. De même, aux points infiniment voisins d'un point de la droite $x_3=x_4=0$ correspondent les points d'une droite du plan $x_3'=0$ passant par O'.

Aux points infiniment voisins de O situés dans le plan $x_1=0$ correspondent les points de la droite $x_1'=x_4'=0$.

Dans le second cas, nous pouvons poser

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv x_3^2.$$

Les quadriques Q touchent le plan $x_4 = 0$ le long de la droite $x_3 = x_4 = 0$; ce sont donc des cônes.

Considérons un plan α passant par O et coupant la droite $x_3 = x_4 = 0$ en un point A. Soit α' le plan homologue, coupant la droite $x_3' = x_4' = 0$ en un point A'. Entre les plans α, α', la transformation détermine une transformation quadratique de seconde espèce. Aux points infiniment voisins de A dans α correspondent les points infiniment voisins de A' dans α'. Si A_1 est le point infiniment voisin de A situé dans α et dans $x_1 = 0$, aux points infiniment voisins de A_1 dans α correspondent les points de la droite $O'A'$.

Au point infiniment voisin de O sur la droite $x_1 = x_2 = 0$ correspond le point $x_1' = x_2' = x_4' = 0$.

Nous utiliserons plus loin ces deux transformations particulières.

33... <u>Autres cas particuliers de la transformation quadratique.</u>

Nous indiquerons ici la construction de deux transformations quadratiques particulières.

Considérons les quadriques Q passant par une conique Γ et ayant un plan tangent fixe en un point de cette conique. Soient

$$x_4 = 0 \quad , \quad x_3 x_1 + x_2^2 = 0$$

les équations de Γ et supposons que les quadriques Q touchent, au point $O\,(0,0,1,0)$, le plan $x_1 = 0$. Elles ont pour équation

$$x_4\,(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_4) + \lambda(x_3 x_1 + x_2^2) = 0. \qquad (1)$$

Posons

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 x_4 : x_2 x_4 : x_3 x_1 + x_2^2 : x_4^2,$$

d'où

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1'^2 : x_1' x_2' : x_3' x_4' - x_2'^2 : x_1' x_4'. \qquad (2)$$

On obtient donc une transformation birationnelle. Aux plans, les formules (2) font correspondre des quadriques Q' passant par la conique Γ' d'équations

$$x_1' = 0 \quad , \quad x_3' x_4' - x_2'^2 = 0,$$

et touchant le plan $x_4' = 0$ en $O'(0,0,1,0)$.

Entre les gerbes de sommets O, O', les équations (1), (2) déterminent une homographie. Entre deux plans homologues existe une transformation quadratique de seconde espèce, des propriétés de laquelle on peut déduire facilement les propriétés de la transformation (1).

On peut d'ailleurs également considérer une conique Γ dégénérée en deux droites distinctes, le point O appartenant à une seule de ces droites.

Le second cas particulier est obtenu en considérant les quadriques Q passant par deux droites et ayant un contact du second ordre au point commun à ces deux droites. Si ces droites ont pour équations

$$x_2 = x_4 = 0 \quad , \quad x_3 = x_4 = 0,$$

les quadriques Q sont données par

$$x_4(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) + \lambda_4(x_1 x_4 - x_2 x_3) = 0.$$

En posant

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 x_4 : x_2 x_4 : x_3 x_4 : x_1 x_4 - x_2 x_3 , \qquad (3)$$

on obtient

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1' x_4' : x_2' x_4' : x_3' x_4' : x_1' x_4' + x_2' x_3' . \qquad (4)$$

On obtient donc une correspondance biunivoque. Aux plans, les équations (4) font correspondre les quadriques

$$x_4'(\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \lambda_3 x_3') + \lambda_4(x_1' x_4' + x_2' x_3') = 0 ,$$

formant un système analogue au système $|Q|$.

Entre les gerbes de sommets $O(1,0,0,0)$, $O'(1,0,0,0)$, les équations (3), (4) établissent une homographie et entre deux plans homologues dans celle-ci, une transformation quadratique de troisième espèce. Cette remarque permet d'étudier les propriétés de la transformation (1).

§2.. Composition des points singuliers d'une surface algébrique.

34.. Préliminaires. — Soient F une surface algébrique, O un point simple de cette surface, Γ une conique irréductible ou non dont le plan σ ne passe pas par O. Soit T la transformation quadratique obtenue en rapportant projectivement aux plans de l'espace les quadriques passant par O et Γ. Aux plans de l'espace, la transformation inverse T^{-1} fait correspondre les quadriques Q' passant par un point O' et par une conique Γ' dont le plan σ' ne passe pas par O'. A F, T fait correspondre une surface F'.

Aux points infiniment voisins de O, constituant le domaine du premier ordre de ce point, T fait correspondre les points de σ'. Aux points de F appartenant au domaine du premier ordre de O, correspondent les points de la courbe γ', intersection de F' et de σ' en dehors de Γ'. Si la courbe γ' contient un point O_1' multiple d'ordre s_1 pour la surface F', le point O_1, infiniment voisin de O, homologue de O_1', est dit multiple d'ordre s_1 pour la surface F.

Si la courbe γ' contient une partie γ_1' multiple d'ordre s_1 pour la surface F', la courbe homologue γ_1, du domaine du premier ordre de O, est appelée courbe multiple d'ordre s_1, infiniment voisine de O.

Comme dans le cas du plan, les domaines du premier ordre des points de σ auront pour homologues les points du domaine du second ordre de O et on pourra définir les points multiples de F dans ce domaine du second ordre.

Et ainsi de suite.

35. Équations cartésiennes d'une transformation quadratique.

Considérons les cylindres paraboliques passant par l'origine O des coordonnées et ayant pour plan diamétral le plan des xy; ils ont comme équation

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda_4 z^2 = 0.$$

Posons

$$x' : y' : 1 : z' = x : y : z : z^2.$$

On en déduit

$$x = x'z', \quad y = y'z', \quad z = z'.$$

Dans la transformation quadratique ainsi définie, au point infiniment voisin de O sur l'axe Oz correspond l'origine O' du système d'axes $O'x'y'z'$. On peut d'ailleurs le vérifier aisément. A la droite

$$\frac{x'}{a} = \frac{y'}{b} = \frac{z'}{c}$$

correspond la conique

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z^2}{c},$$

tangente à Oz en O.

36. Points coniques des surfaces. L'équation d'une surface ayant un point conique en O peut s'écrire

$$\varphi_s(x,y,z) + \varphi_{s+1}(x,y,z) + \dots + \varphi_n(x,y,z) = 0.$$

Sa transformée F' a pour équation

$$\varphi_s(x',y',1) + z'\varphi_{s+1}(x',y',1) + \dots + z'^{n-s}\varphi_n(x',y',1) = 0.$$

Au domaine du premier ordre de O sur F correspond la courbe

$$z' = 0, \quad \varphi_s(x',y',1) = 0.$$

Si cette courbe est irréductible et simple pour la surface F', le point O est appelé point conique de la surface F.

37. Points doubles biplanaires. L'équation d'une surface F ayant un point double biplanaire en O peut s'écrire

$$xy + \varphi_3(x,y,z) + \dots = 0.$$

Sa transformée F' a pour équation

$$x'y' + z'\varphi_3(x',y',1) + \dots = 0.$$

En général, le point O' est simple pour F', donc le domaine du premier ordre d'un point double biplanaire ordinaire est constitué par deux droites simples infiniment petites, se coupant en un point simple.

La condition nécessaire et suffisante pour que O' soit double pour F' est $\varphi_3(0,0,1)=0$.

Posons

$$\varphi_3(x,y,z) = z^2\psi_1(x,y) + z\,\psi_2(x,y) + \psi_3(x,y).$$

Opérons sur F' la transformation quadratique

$$x' = x''z'' \quad , \quad y' = y''z'' \quad , \quad z' = z''.$$

La transformée F'' a pour équation

$$x''y'' + \psi_1(x'',y'') + z''\psi_2(x'',y'') + z''^2\psi_3(x'',y'') + \varphi_4(x''z'',y''z'',1) + \dots = 0.$$

Aux points de F', infiniment voisins de O', correspondent les points de la conique

$$x''y'' + \psi_1(x'',y'') + \varphi_4(0,0,1) = 0. \qquad (1)$$

Le point O' est donc en général double conique pour F' et la surface F possède un point biplanaire particulier, le point commun aux deux droites du domaine du premier ordre étant double pour F.

En exprimant que la conique (1) dégénère en deux droites, on aura un nouveau cas particulier. On pourra ensuite exprimer que le point commun à ces deux droites est double pour F''. La surface F possèdera ainsi en O un point double biplanaire auxquels sont infiniment voisins successifs deux points doubles: un dans le domaine du premier ordre, un dans le domaine du second ordre.

Observons que la condition nécessaire et suffisante pour que la conique (1) dégénère s'écrit

$$\varphi_4(0,0,1) = \psi_1(1,0)\,\psi_1(0,1)\,;$$

les deux droites formant la conique ont pour équations, dans $z''=0$,

$$x'' + \psi_1(0,1) = 0 \quad , \quad y'' + \psi_1(1,0) = 0.$$

Ces droites sont toujours distinctes, donc un point double biplanaire ne peut posséder, dans son domaine du premier ordre, un point double uniplanaire.

38.-. <u>Points doubles uniplanaires</u>. L'équation d'une surface possédant un point double uniplanaire en O peut s'écrire

$$y^2 + \varphi_3(x,y,z) + \varphi_4(x,y,z) + \dots = 0.$$

Sa transformée F' a pour équation

$$y'^2 + z'\varphi_3(x',y',1) + z'^2\varphi_4(x',y',1) + \dots = 0. \qquad (1)$$

Cette surface touche le plan $z'=0$ le long de la droite $y'=z'=0$. Les points

$$y'=0 \quad , z'=0 \quad , \varphi_3(x',y',1) = 0$$

sont doubles pour la surface. Pour examiner de plus près la nature de ces points doubles, déplaçons le trièdre de coordonnées Oxyz de manière que la courbe

$$y=0 \quad , \varphi_3(x,0,z) + \varphi_4(x,0,z) + \dots = 0 \qquad (2)$$

soit tangente à Oy. Cela revient à supposer que l'on a

$$\varphi_3(x,y,z) \equiv y\,\varphi_2(x,y,z) + x\,\varphi_2'(x,z).$$

L'équation de F' devient alors

$$y'^2 + y'z'\varphi_2(x',y',1) + x'z'\varphi_2'(x',1) + z'^2\varphi_4(x',y',1) + \dots = 0.$$

Le point O' est double pour F', le cône tangent à la surface en ce point ayant pour équation

$$y'^2 + y'z'\varphi_2(0,0,1) + x'z'\varphi_2'(0,1) + z'^2\varphi_4(0,0,1) = 0.$$

Ce cône ne peut dégénérer que si l'on a $\varphi_2'(0,1) = 0$, mais alors la courbe (2) a l'axe Oy comme tangente double.

Le domaine du premier ordre d'un point double uniplanaire ordinaire d'une surface algébrique est formé d'une droite simple infiniment petite sur laquelle se trouvent trois points doubles coniques.

Supposons maintenant que Oy soit tangente double à la courbe (2), c'est-à-dire que l'on ait

$$\varphi_3(x,y,z) \equiv y\,\varphi_2(x,y,z) + x^2\varphi_1(x,z).$$

L'équation de F' devient

$$y'^2 + y'z'\varphi_2(x',y',1) + x'^2z'\varphi_1(x',1) + z'^2\varphi_4(x',y',1) + \dots = 0. \qquad (3)$$

Le point O' est double biplanaire pour F', les plans tangents passant par la droite $y' = z' = 0$. Dans l'équation (3), intervertissons les rôles de x', z' ; on obtient :

$$y'^2 + x'y'\varphi_2(z',y',1) + x'z'^2\varphi_1(z',1) + x'^2\varphi_4(z',y',1) + x'^3\varphi_5(z',y',1) + \dots = 0,$$

et effectuons ensuite la transformation $x' = x''z''$, $y' = y''z''$, $z' = z''$. On obtient

$$y''^2 + x''y''\varphi_2(z'',y''z'',1) + x''z''\varphi_1(z'',1) + x''^2\varphi_4(z'',y''z'',1) + \dots = 0. \qquad (4)$$

Pour cette surface, le point O'' est double conique, le cône tangent étant

$$y''^2 + x''y''\varphi_2(0,0,1) + x''z''\varphi_1(0,1) + x''^2\varphi_4(0,0,1) = 0.$$

Ce cône ne peut dégénérer que si $\varphi_1(0,1) = 0$, c'est-à-dire si l'axe Oy est tangente triple à la courbe (2).

Convenons d'appeler point uniplanaire de seconde espèce un point tel que la courbe (2) ait une tangente double en O, point uniplanaire de troisième espèce un point tel que la courbe (2) ait une tangente triple en O.

Un point double uniplanaire de seconde espèce possède, dans son domaine de premier ordre, une droite simple sur laquelle se trouve un point double conique et un point double biplanaire auquel est infiniment voisin un point double conique.

On observera que ce dernier se trouve sur la droite simple, homologue de la droite $y' = z' = 0$ de la surface (3).

Supposons enfin que l'on ait un point de troisième espèce,

$$\varphi_3(x,y,z) \equiv y\,\psi_2(x,y,z) + x^3\psi_0.$$

Dans ce cas, l'équation (4) devient

$$y''^2 + x''y''\psi_2(z'', y''z'', 1) + x''z''^2\psi_0 + x''^2\varphi_4(z'', y''z'', 1) + \ldots\ldots = 0.$$

Le point O'' est double biplanaire. Effectuons la transformation $x'' = xz$, $y'' = yz$, $z'' = z$; nous obtenons

$$y^2 + xy\,\psi_2(z, yz^2, 1) + xz\,\psi_0 + x^2\varphi_4(z, yz^2, 1) + \ldots\ldots = 0.$$

Le point O est double conique, car ψ_0 n'est pas nul.

<u>Un point double uniplanaire de troisième espèce possède, dans son domaine du premier ordre, une droite simple sur laquelle se trouve un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs deux points doubles dont le premier est biplanaire et le second conique.</u>

39. <u>Tacnode</u>. — On appelle tacnode un point double uniplanaire possédant, dans son domaine du premier ordre, une droite double infiniment petite.

Reprenons la surface F dont il vient d'être question. La droite $y' = z' = 0$ doit être double pour sa transformée F'. Lorsque, dans l'équation (1), on fait $y' = 0$, on doit donc pouvoir mettre z'^2 en évidence; pour cela, il faut et il suffit que l'on ait

$$\varphi_3(x, 0, z) \equiv 0.$$

En d'autres termes, le plan tangent $y = 0$ à la surface F au point O doit couper cette surface suivant une courbe ayant un point quadruple en O.

40. — <u>Courbes multiples des surfaces algébriques</u>. — Si une courbe algébrique C est multiple d'ordre s pour une surface algébrique F, le cône tangent à la surface en un point de C se compose de s plans passant par la tangente à la courbe en ce point.

Pour étudier la singularité de C, coupons la surface F par un plan α et soit A un de ses points de rencontre avec C. La courbe (F, α) a en A un point s-uple que l'on peut étudier au moyen de transformations quadratiques du plan α (plan que l'on choisit naturellement non tangent à C).

Si, quel que soit le plan α, le point A possède toujours un point multiple d'ordre s_1 infiniment voisin, on dira que la surface F possède une courbe multiple d'ordre s_1, infiniment voisine de C.

Supposons que les s plans tangents en un point de C à la surface F soient en général distincts. En certains points de la courbe, deux de ces plans peuvent être confondus; ces points sont appelés points-pince.

§3.– Points singuliers des courbes gauches algébriques.

41.– Préliminaires. – Soit C une courbe gauche algébrique ayant en O un point multiple d'ordre s. Opérons une transformation quadratique et soient σ' le plan dont les points correspondent aux points infiniment voisins de O, Γ' la conique fondamentale de ce plan. Aux points de C appartenant au domaine du premier ordre de O, correspondent des points de σ' non situés sur Γ'. Si un de ces points est multiple d'ordre $s_1 \leq s$ pour la courbe C' transformée de la courbe C, son homologue dans le domaine du premier ordre de O est dit multiple d'ordre s_1 pour C.

En opérant sur les points multiples de C' appartenant à σ' et non situés sur Γ', comme on a opéré sur O, on définira de même les points multiples de C dans le domaine du second ordre de O, et ainsi de suite.

42.– Points doubles d'une courbe gauche. Supposons que O soit double pour la courbe C ($s=2$). Soit C' la transformée de C. Trois cas peuvent se présenter:

1°). La courbe C' coupe σ', en dehors de la conique Γ', en deux points distincts, nécessairement simples. Le point O est un point double ordinaire de la courbe C.

2°) La courbe C' touche σ' en un point simple, en dehors de Γ'. Le point O est un point de rebroussement ordinaire de C.

3°) La courbe C' possède un point double dans le plan σ', en dehors de Γ'. Le point O est un tacnode de C. On peut alors continuer l'étude du point double de C' par une nouvelle transformation quadratique.

Un point double d'une courbe C peut être:

a) Un point double auquel sont infiniment voisins successifs p points doubles dont le dernier est ordinaire (dans le domaine d'ordre $p+1$ du point double, la courbe possède deux points simples).

b). Un point double auquel sont infiniment voisins successifs p points doubles dont le dernier est un point de rebroussement (dans le domaine d'ordre $p+1$ du point double, la courbe possède un seul point simple).

43. Remarque.– Reprenons la courbe C ayant un point s-uple en O et soient Φ le cône projetant C de O, Φ' son homologue. Les cônes Φ, Φ' sont d'ailleurs projectivement identiques, puisqu'il

existe une homographie entre les gerbes de sommets O, O'.

La courbe C' est tracée sur Φ'; soient $O'_1, O'_2, \ldots$ ses points de rencontre avec σ' en dehors de Γ'. A la droite $O'O'_1$ correspond une droite passant par O et par le point O_1 du domaine du premier ordre de O homologue de O'_1, c'est-à-dire une tangente à la courbe C en O.

44.- <u>Intersections d'une courbe et d'une surface algébriques en un point singulier.</u>- Soient F une surface algébrique ayant la multiplicité s en O et C une courbe algébrique ayant la multiplicité r en ce point. Le point O absorbe $I = rs + I'$ points d'intersection de F et de C.

Opérons la transformation quadratique habituelle et supposons que dans le plan σ' on ait, en dehors de Γ', des points $O'_1, O'_2, \ldots$ multiples d'ordres de $s_1, s_2, \ldots$ pour F', d'ordres $r_1, r_2, \ldots$ pour C'. On a

$$I' = \Sigma r_i s_i + I'',$$

et ainsi de suite. On en conclut que pour calculer le nombre des points d'intersection absorbés en O, on raisonne comme si les points infiniment voisins de O, communs à F et à C, étaient des points effectifs.

Liège, le 27 juillet 1937.