ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

270

EXPOSÉS DE GÉOMÉTRIE

Publiés sous la direction de

M. E. CARTAN

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne

VII

# LES INVOLUTIONS CYCLIQUES
## appartenant à une Surface Algébrique

PAR

Lucien GODEAUX

Professeur à l'Université de Liège
Correspondant de l'Académie royale de Belgique

PARIS
HERMANN & C^IE, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6

1935

Dans ses profondes recherches sur les surfaces hyperelliptiques, M. E. Picard s'est particulièrement attaché aux surfaces dont les coordonnées des points s'expriment en fonctions abéliennes de deux paramètres, de telle manière qu'à tout point de la surface corresponde un seul système de valeurs de ces paramètres, aux périodes près. Ces surfaces ont été appelées *surfaces de Picard* par H. Poincaré. Plus tard, G. Humbert a considéré certaines surfaces hyperelliptiques, et particulièrement les surfaces de Kummer, telles qu'à tout point de la surface correspondent deux systèmes de valeurs des paramètres, aux périodes près. En 1907, l'Académie des Sciences proposa d'étudier les surfaces hyperelliptiques telles qu'à un point de la surface correspondent plusieurs systèmes de valeurs des paramètres. Dans le Mémoire qui fut couronné (Prix Bordin, 1907), MM. Enriques et Severi ont démontré que toute surface répondant à la question est l'image d'une involution appartenant à une surface de Jacobi, c'est-à-dire à une surface qui représente les couples de points d'une courbe de genre deux et qui est une surface de Picard particulière. Si l'on écarte les surfaces rationnelles et les surfaces réglées (ou référables par des transformations birationnelles à des réglées), ces involutions ne présentent qu'un nombre fini de points unis et sont engendrées par des groupes finis de transformations birationnelles de la surface en elle-même. Vers la même époque, la question fut également étudiée avec succès par Bagnera et M. De Franchis, dont un mémoire fut couronné deux ans plus tard par l'Académie (Prix Bordin, 1909).

De ces travaux, retenons l'intérêt que présentent les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique.

Considérons les surfaces de genres un, surfaces que l'on peut toujours ramener, par des transformations birationnelles, à des surfaces d'ordre $2\pi - 2$, à sections hyperplanes de genre $\pi$, appartenant à un espace linéaire à $\pi$ dimensions (pour $\pi = 3$, on obtient les surfaces du quatrième ordre). Les correspondances rationnelles entre deux surfaces de ce type conduisent égalcment à des involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis ; sur les conseils de M. Enriques, nous en avons fait l'étude. Nous sommes ensuite passé à des recherches plus générales sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique quelconque et nous avons plus particulièrement étudié les involutions cycliques. Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'exposer les résultats que nous avons obtenus dans cette voie. Cet exposé est le développement d'une conférence que nous avons eu l'honneur de faire à l'Université de Poitiers, en mai 1934 (1).

Nous avons fait suivre notre travail d'une liste aussi complète que possible des travaux consacrés aux correspondances entre deux surfaces algébriques (2) ; nous avons également indiqué dans quels ouvrages le lecteur pourra trouver l'exposé des théories de géométrie algébrique dont nous faisons usage.

Liége, le 14 septembre 1934.

---

(1) Nous saisissons cette occasion de remercier M. le Recteur Martino, M. Billard, Doyen de la Faculté des Sciences et notre excellent Collègue M. Bouligand, qui ont eu l'amabilité de nous inviter à faire des conférences à l'Université de Poitiers. Nous tenons également à remercier M. Cartan d'avoir accepté le présent travail dans la collection qu'il dirige.

(2) Les nombres en caractères gras, placés dans le texte, renvoient à cette liste bibliographique.

1. **Préliminaires**. — Soit F une surface algébrique possédant une transformation birationnelle T en elle-même, de période $p$, où $p$ est un nombre premier. Il existe, sur la surface F, $\infty^2$ groupes de $p$ points tels qu'un groupe contenant un point contient les $p-1$ points que T, $T^2$, ..., $T^{p-1}$ lui font correspondre ; l'ensemble de ces $\infty^2$ groupes de $p$ points constitue une involution $I_p$, d'ordre $p$.

En général, un point de la surface F appartient à un et un seul groupe de l'involution $I_p$ ; il peut cependant exister un nombre fini de points, fondamentaux par la transformation T, appartenant à $\infty^1$ groupes.

On appelle surface image de l'involution $I_p$ une surface $\Phi$ dont les points correspondent birationnellement aux groupes de l'involution. Entre les surfaces $\Phi$ et F, on a donc une correspondance $(1, p)$.

Il peut exister, sur la surface F, des points transformés en eux-mêmes par T et par suite par les puissances de T ; un tel point, compté $p$ fois, forme un groupe de l'involution $I_p$ ; nous dirons que c'est un point uni de l'involution $I_p$. Le point de la surface $\Phi$ qui correspond à un point uni, sera appelé point de diramation. Les points unis de l'involution $I_p$ peuvent être en nombre fini ou infini et dans ce dernier cas ils forment une courbe algébrique : la courbe unie de l'involution. Dans ce qui va suivre, nous ne considérerons que les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Il peut sembler à première vue que nous nous limitons ainsi à un cas très particulier ; il convient cependant d'observer que si F est un plan et T une homographie cyclique de période $p > 2$, le cas général est celui où T est non homologique, $I_p$ possédant alors trois points unis.

**2. Construction d'un modèle projectif de la surface F.** — Nous commencerons par construire une surface de la classe de F (c'est-à-dire en correspondance birationnelle avec F) sur laquelle la transformation T soit déterminée par une homographie de l'espace ambiant. A cet effet nous démontrerons l'existence, sur F, de systèmes linéaires de courbes transformés en eux-mêmes par T, sans que chaque courbe du système soit transformée en elle-même par T.

Considérons, sur la surface F, un système linéaire simple $|C_1'|$, $\infty^2$ au moins, dépourvu de points-base (par exemple le système des sections planes ou hyperplanes de F). Les transformations T, $T^2$, ..., $T^{p-1}$ font correspondre à $|C_1'|$ des systèmes linéaires $|C_2'|$, $|C_3'|$, ..., $|C_p'|$ (qui peuvent éventuellement coïncider avec $|C_1'|$). Le système linéaire complet

$$|C| = |C_1' + C_2' + \ldots + C_p'|$$

est transformé en lui-même par T en ce sens qu'une courbe C est transformée par T en une courbe C distincte ou non de la première.

Supposons que le système $|C|$ soit composé au moyen de l'involution $I_p$, c'est-à-dire que les courbes C passant par un point de F passent en conséquence par les $p-1$ qui, avec le point considéré, forment un groupe de $I_p$. Dans ce cas, chaque courbe C est transformée en elle-même par T. Nous allons montrer que l'on peut trouver un entier positif $\lambda$ tel que le système $|\lambda C|$ ne soit pas composé au moyen de $I_p$. Dans l'hypothèse envisagée, aux courbes C correspondent sur $\Phi$ des courbes $\Gamma$ formant un système linéaire complet $|\Gamma|$ de même dimension que $|C|$. Si $n$ est le degré et $\pi$ le genre de $|\Gamma|$, le système $|C|$ a le degré $pn$ et, d'après la formule de Zeuthen, le genre $p(\pi-1)+1$. Considérons les systèmes $|\lambda C|$ et $|\lambda\Gamma|$. Le système $|\lambda\Gamma|$ a le degré et le genre respectivement égaux à

$$\lambda^2 n \ , \ \lambda(\pi-1) + \frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)\,n + 1$$

et le système $|\lambda C|$, le degré et le genre respectivement égaux à

$$\lambda^2 pn, \quad \lambda p(\pi-1) + \frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)\,pn + 1 \, .$$

On peut supposer $\lambda$ assez grand pour que les systèmes $|\lambda C|$,

$|\lambda\Gamma|$ soient réguliers. Les dimensions $R_\lambda$, $r_\lambda$ de ces systèmes sont alors données par le théorème de Riemann-Roch et respectivement égales à

$$R_\lambda = p_a + \frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)pn - \lambda p(\pi - 1),$$

$$r_\lambda = \pi_a + \frac{1}{2}\lambda(\lambda+1)n - \lambda(\pi - 1),$$

$p_a$ étant le genre arithmétique de F, $\pi_a$ celui de $\Phi$. Il est bien évident que l'on peut prendre $\lambda$ suffisamment grand pour que $R_\lambda$ soit supérieur à $r_\lambda$. Pour cette valeur de $\lambda$ (et pour les valeurs supérieures), le système $|\lambda C|$ n'est pas composé au moyen de $I_p$, car autrement chaque courbe de $|\lambda C|$ serait la transformée d'une courbe de $|\lambda\Gamma|$. Par contre, $|\lambda C|$ est transformé en lui-même par T.

En résumé, nous pouvons toujours former, sur F, un système linéaire non composé au moyen de $I_p$, mais transformé en lui-même par T. Soient $|C|$ un tel système, R sa dimension. Rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire $S_R$ à R dimensions ; à la surface F correspond birationnellement une surface de $S_R$ que nous désignerons toujours par F. Les sections hyperplanes de cette nouvelle surface F correspondent aux courbes C ; nous les désignerons encore par C. A la transformation C correspond une transformation birationnelle de la nouvelle surface F en elle-même, échangeant entre elles les sections hyperplanes de cette surface ; cette transformation est donc une homographie (cyclique, de période $p$); nous la désignerons encore par T.

L'homographie T étant cyclique, est générale. On peut supposer, quitte à remplacer éventuellement dans les raisonnements précédents $|C|$ par un de ses multiples convenablement choisi, que l'homographie T possède $p$ axes ponctuels (espaces linéaires formés de points unis) que nous désignerons par $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, ..., $S^{(p-1)}$. Les hyperplans passant par $p-1$ de ces axes sont unis pour T et découpent, sur F, des courbes C transformées en elles-mêmes par T. Nous désignerons par $\Sigma_i$ le système des hyperplans passant par les axes de T, $S^{(i)}$ excepté. La dimension de $\Sigma_i$ est égale à celle, $r_i$, de l'espace $S^{(i)}$. Les systèmes $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{p-1}$ découpent, sur F, des systèmes partiels composés au moyen de l'involution $I_p$.

*On peut prendre, comme modèle projectif de la surface F, une* *surface sur laquelle l'involution $I_p$ est engendrée par une homographie cyclique, le système des sections hyperplanes contenant* p *systèmes partiels composés au moyen de l'involution.*

3. **Position des points unis de l'involution**. — La courbe réductible $C_1' + C_2' + \dots + C_p'$ est transformée en elle-même par T, elle appartient donc à un hyperplan de l'un des systèmes $\Sigma_0, \dots, \Sigma_{p-1}$ ; pour fixer les idées, nous supposerons que c'est au système $\Sigma_0$ et nous désignerons par $|C_0|$ le système partiel découpé sur F par les hyperplans de $\Sigma_0$. La courbe réductible envisagée est donc une courbe $C_0$ particulière.

Soit A un point uni de $I_p$ ; supposons en premier lieu qu'il ne soit pas fondamental pour T. D'après les hypothèses faites sur $|C_1'|$, la courbe $C_1' + \dots + C_p'$ ne passe pas par A, par suite A ne peut être un point-base de $|C_0|$. D'autre part, A appartient à un des axes de T ; cet axe est nécessairement $S^{(0)}$.

Supposons maintenant que le point uni A soit fondamental pour T. Aux points de la surface F primitive, infiniment voisins de A, T fait correspondre les points d'une courbe $a_1$, passant un certain nombre de fois par A. Parmi les points de $a_1$ infiniment voisins de A, se trouvent des points unis de T. A la courbe $a_1$, T fait correspondre une courbe $a_2$ ; à celle-ci une courbe $a_3$ et ainsi de suite jusqu'à une courbe $a_{p-1}$ aux points de laquelle T fait correspondre les points infiniment voisins de A. Les courbes $a_2$, $a_3$, ..., $a_{p-1}$ passent par les points infiniment voisins de A, situés sur $a_1$, unis pour T.

La courbe $C_1'$ rencontre les courbes $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ en des points variables et par suite la courbe $C_1' + \dots + C_p'$ passera un certain nombre de fois par A, mais les tangentes à cette courbe en ce point seront toutes variables avec $C_1'$. Il en résulte que les courbes $C_0$ ont en A un point multiple à tangentes variables. Par suite, à l'ensemble de A et des courbes $a_1, \dots, a_{p-1}$ correspondra, sur la nouvelle surface F de $S_n$, un ensemble de $p$ courbes rationnelles ayant en commun des points qui correspondent aux points unis infiniment voisins de A. Ces points n'appartiennent pas en général aux courbes $C_0$ et par suite sont des points communs à F et à l'axe $S^{(0)}$.

Sur le modèle projectif de la surface F construit plus haut, les points unis de l'involution $I_p$ appartiennent à l'espace $S^{(0)}$ et sont simples pour la surface. Il en résulte que seul le système partiel $|C_0|$ est dépourvu de points-base. Les systèmes partiels découpés sur F par les hyperplans de $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_{p-1}$, ont pour points-base les points unis de $I_p$.

4. **Construction d'un modèle projectif de la surface $\Phi$.** — Désignons par $r = r_0$ la dimension du système partiel, composé au moyen de $I_p$, $|C_0|$. Rapportons projectivement les courbes $C_0$ aux hyperplans d'un espace linéaire $S_r$ à $r$ dimensions. A la surface F correspond une surface de $S_r$ qui représente les groupes de $I_p$ et qui est par suite un modèle projectif de la surface $\Phi$, modèle projectif normal.

Soient $\Gamma$ les sections hyperplanes de la surface $\Phi$ qui vient d'être construite, $\pi$ leur genre, $n$ l'ordre de $\Phi$ (degré de $|\Gamma|$). La surface F est d'ordre $pn$ et, d'après la formule de Zeuthen, les courbes $C_0$ et par suite les courbes C, ont le genre $p(\pi - 1) + 1$.

Appelons $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{p-1}|$ les systèmes linéaires partiels, composés au moyen de $I_p$, découpés sur F par les hyperplans de $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{p-1}$ ; par $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_{p-1}|$ les systèmes linéaires (nécessairement complets) qui leur correspondent sur $\Phi$. Les courbes de ces derniers systèmes passent par les points de diramation de la surface $\Phi$ et leurs caractères (degré, genre) dépendent de leurs comportements en ces points. Les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-1}$ sont d'ordre $n$ et les systèmes $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_{p-1}|$ ont les dimensions respectives $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$. On a d'ailleurs, d'après la théorie des homographies,

$$r + r_1 + \cdots + r_{p-1} + p = R + 1 .$$

5. **Classification des points unis.** — Soit A un point uni de $I_p$, appartenant par conséquent à $S^{(0)}$. Le plan tangent $\alpha$ à F en A est également uni pour T. Deux cas peuvent se présenter :

*a*) A toute courbe tracée sur F et passant simplement par A, T fait correspondre une courbe tangente à la première en A. Le point A est dit *point uni parfait* de l'involution. Tous les points de F infiniment voisins de A sont unis pour $I_p$, ou encore, T détermine, dans le plan $\alpha$, une homologie de centre A ;

*b*) A une courbe tracée sur F et passant simplement par A, T fait correspondre une courbe ne touchant pas en général la première en A. Le point A est appelé *point uni non parfait* de l'involution. Dans le domaine du premier ordre de A sur F, T détermine une involution d'ordre $p$ ayant par suite deux points unis.

Désignons par $C_0^{(1)}$ les courbes $C_0$ passant par le point uni A. Si les courbes $C_0^{(1)}$ avaient un point simple en A, il y aurait, sur chacune de ces courbes, une involution d'ordre $p$ n'ayant qu'un point uni, ce qui est impossible d'après la formule de Zeuthen. Les courbes $C_0^{(1)}$ ont donc un point au moins double en A et par suite, les hyperplans de $\Sigma_0$ passant par A contiennent le plan $\alpha$ tangent à F en A. Ce plan ne peut donc avoir en commun avec $S^{(0)}$ que le point A ; il s'appuie donc soit suivant une droite sur un des espaces $S^{(1)}, \ldots, S^{(p-1)}$, soit suivant un point sur deux de ces espaces. Dans le premier cas, A est un point uni parfait, dans le second cas un point uni non parfait.

En particulier, si $p = 2$, le plan $\alpha$ s'appuie nécessairement suivant une droite sur l'espace $S^{(1)}$ et A est nécessairement un point uni parfait. On retrouve ainsi un théorème de M. Severi (**52**) : *Une involution du second ordre (n'ayant qu'un nombre fini de points unis) ne possède que des points unis parfaits.*

6. **Points unis parfaits.** — Supposons que A soit un point uni parfait de l'involution $I_p$. Reprenons les systèmes $|C_1'|$, $|C_2'|$, ..., $|C_p'|$ considérés plus haut. Considérons une courbe $C_1'$ passant simplement par A ; T et ses puissances successives lui font correspondre des courbes $C_2'$, $C_3'$, ..., $C_p'$ tangentes en A à la courbe $C_1'$. Nous avons donc construit une courbe $C_0$ particulière, ayant en A un point multiple d'ordre $p$ à tangentes confondues. Nous pouvons construire d'autres courbes $C_0$ possédant la même propriété, mais dont les tangentes en A sont distinctes de la tangente à la première. Ces différentes courbes $C_0$ appartiennent à un système linéaire dont les courbes ont un point multiple d'ordre $p$, à tangentes variables, en A. Nous désignerons ces courbes par $C_0^*$.

De ce qui précède, on conclut que les courbes $C_0$, assujetties à passer par A, acquièrent en ce point une multiplicité $s$ telle que $r \leqslant s \leqslant p$. Ces courbes, que nous avons désignées par $C_0^{(1)}$, forment un système linéaire et ont des tangentes variables en A.

Désignons par A′ le point de diramation de $\Phi$ qui correspond à A, par $\Gamma^{(1)}$ les courbes $\Gamma$ de $\Phi$ qui correspondent aux courbes

$C_0^{(1)}$. Sur une courbe $C_0^{(1)}$ se trouvent $s$ groupes de $I_p$ formés par les $s$ points unis infiniment voisins de A, comptés chacun $p$ fois. Par conséquent, les courbes $\Gamma^{(1)}$ ont un point $s$-uple en A′. Mais les courbes $\Gamma^{(1)}$ ne sont autres que les sections de $\Phi$ par les hyperplans passant par A′, donc $\Phi$ a un point $s$-uple en A′.

Une courbe $C_0^{(1)}$ a le genre $p(\pi - 1) + 1 - \frac{1}{2}s(s-1)$; elle contient une involution d'ordre $p$ ayant $s$ points unis ; par conséquent, d'après la formule de Zeuthen, le genre $x$ de la courbe $\Gamma^{(1)}$ correspondante est donné par

$$2\,p\,(x-1) + s\,(p-1) = 2\,p\,(\pi - 1) - s\,(s-1).$$

On en déduit que $s(s-2)$ est multiple de $p$ et comme $s \leqslant p$, on a $s = p$, $x = \pi - p + 1$.

Il y a une correspondance birationnelle entre les tangentes à F en A et les tangentes à $\Phi$ en A′, par conséquent le cône tangent à $\Phi$ en A′ est irréductible. Le système $|C_0^*|$ coïncide avec le système $|C_0^{(1)}|$; il a le degré $pn - p^2$ et par suite $|\Gamma^{(1)}|$ a le degré $n - p$. On en conclut que le point $p$-uple A′ de $\Phi$ équivaut, au point de vue des transformations birationnelles à une courbe rationnelle de degré $-p$.

D'autre part, s'il existe sur la surface $\Phi$ une courbe canonique K′, elle doit rencontrer une courbe $\Gamma$ en $2\pi - 2 - p$ points et une courbe $\Gamma^{(1)}$ en $2\pi - n - p$ points ; par conséquent K′ rencontre la courbe rationnelle équivalente au point $p$-uple A′ en $p - 2$ points.

*A un point uni parfait correspond un point de diramation multiple d'ordre* p *pour la surface* $\Phi$. *Ce point équivaut à une courbe rationnelle irréductible de degré* — p, *rencontrée en* p — 2 *points par les courbes canoniques éventuelles de* $\Phi$.

7. **Exemple d'une involution possédant des points unis parfaits.** — Considérons, dans l'espace ordinaire, l'homographie de période $p > 2$,

$$\frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{x_3'}{\varepsilon x_3} = \frac{x_4'}{\varepsilon^{p-1} x_4}\,, \tag{1}$$

où $\varepsilon$ est une racine primitive d'ordre $p$ de l'unité. La surface F d'équation

$$ax_3^{p+1}x_4 + bx_4^{p+1}x_3 + x_3^p\alpha_2(x_1 x_2) + x_3^p\beta_2(x_1, x_2)$$
$$+ x_3^{n+1}x_4^{n+1}\varphi_1(x_1, x_2) + \cdots + x_3^i x_4^i \varphi_{p+2-2i}(x_1 x_2) + \cdots$$
$$+ x_3 x_5 \varphi_p(x_1, x_2) + \varphi_{p+2}(x_1, x_2) = 0,$$

où $\alpha$, $\beta$, $\varphi$ sont des formes binaires dont le degré est donné par l'indice et où $p = 2\ n + 1$, est transformée en elle-même par l'homographie (1). Celle-ci détermine donc, sur F, une involution $I_p$ d'ordre $p$, possédant $p + 4$ points unis :

*a*) Les points $O_3$ (0, 0, 1, 0) et $O_4$ (0, 0, 0, 1), qui sont des points unis parfaits, car dans le plan $x_4 = 0$ tangent à F en $O_3$, par exemple, l'homographie (1) détermine une homologie ;

*b*) Les $p + 2$ points

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad \varphi_{p+2}(x_1, x_2) = 0,$$

qui sont des points unis non parfaits.

Pour construire un système $|C|$, on peut partir du système $|C_1'|$ des sections planes de F ; le système $|C|$ obtenu est découpé sur F par les surfaces d'ordre $p$. Le système $|C_0|$ est découpé sur F par les surfaces.

$$\lambda_1 x_3^p + \lambda_2 x_4^p + \lambda_3 x_3^n x_4^n x_1 + \lambda_4 x_3^n x_4^n x_2 + \cdots \lambda_r x_2^p = 0,$$

où $r = n^2 + 3\ n + 3$. En rapportant projectivement ces surfaces aux hyperplans d'un espace $S_r$, on obtiendra sans difficulté les équations de la surface $\Phi$.

8. **Classification des points unis non parfaits.** — Considérons maintenant un point uni non parfait A. Dans le faisceau des tangentes à F en A, T détermine une homographie de période $p$, non identique, possédant deux éléments unis. En d'autres termes, il existe, dans le domaine du premier ordre de A sur F, deux points unis $A_1$, $A_2$ et deux seulement.

Transformons birationnellement F en une surface F′ de telle sorte qu'au point A corresponde une courbe exceptionnelle $a'$ de F′. A la transformation T correspond une transformation birationnelle T′ de F′ en elle-même, engendrant une involution $I_p'$ d'ordre $p$, transformée de $I_p$. T′ transforme la courbe $a'$ en elle-même et possède sur cette courbe deux points unis $A_1'$, $A_2'$, transformés de $A_1$, $A_2$. Les points $A_1'$, $A_2'$, peuvent être unis parfaits ou non parfaits pour $I_p'$. Si le point $A_1'$, par exemple, est uni non parfait pour $I_p'$, on transformera F′, birationnellement, en une surface F″

de telle sorte qu'à $A_1'$ corresponde sur $F''$ une courbe exceptionnelle $a_1'$. Sur cette courbe, l'involution $I_p''$ transformée de $I_p'$ possédera deux points unis $A_1''$, $A_2''$, qui pourront être unis parfaits ou non. Et ainsi de suite.

Les points unis non parfaits d'une involution peuvent donc être classés d'après la manière dont opère la transformation T dans les domaines des premier, second, ... ordres du point considéré sur la surface F. Nous verrons plus loin que cette classification est essentielle et a sa répercussion sur la singularité de la surface $\Phi$ au point de diramation correspondant.

9. **Etude des points unis non parfaits**. — Soient A un point uni non parfait de $I_p$ ; $A_1$, $A_2$ les points infiniment voisins de A, unis pour $I_p$ ; $a_1$, $a_2$ les tangentes à F en A passant respectivement par $A_1$, $A_2$. Les droites $a_1$, $a_2$ s'appuient chacune sur un des espaces $S^{(1)}$, ..., $S^{(p-1)}$ ; pour fixer les idées, nous supposerons que $a_1$ s'appuie sur $S^{(1)}$ et $a_2$ sur $S^{(2)}$.

Considérons une courbe $C_1'$ tangente à $a_1$ en A ; ses transformées $C_2'$, ..., $C_p'$ touchent $a_1$ en A et par conséquent la courbe $C_1' + C_2' + \dots + C_p'$ ainsi construite a en A un point $p$-uple et au point infiniment voisin $A_1$, un point également $p$-uple. Dans le système $|C_0|$, il existe donc un système linéaire de courbes ayant en A un point $p$-uple et un second point $p$-uple $A_1$ infiniment voisin de A. De même, il existe, dans $|C_0|$, un système linéaire de courbes ayant deux points $p$-uples infiniment voisins successifs A, $A_2$. Ces deux systèmes linéaires appartiennent à un même système $|C_0^*|$, compris dans $|C_0|$ et dont les courbes $C_0^*$ ont en A un point $p$-uple à tangentes variables.

Si un point P de F tend vers A sur une courbe $C_0^*$, les $p-1$ points qui, avec le point considéré, forment un groupe de $I_p$, tendent vers A sur les $p-1$ autres branches d'origine A de la courbe. En d'autres termes, il existe un groupe de $I_p$, formé de points distincts, infiniment voisin de A sur une courbe $C_0^*$.

Les courbes $C_0^*$ appartiennent au système $|C_0^{(1)}|$ formé par les courbes $C_0$ passent par A, mais les systèmes $|C_0^{(1)}|$, $|C_0^*|$ ne peuvent coïncider. En effet, si $A'$ est le point de diramation de $\Phi$ homologue de A, les courbes $\Gamma$ homologues des courbes $C_0^{(1)}$ auraient un point simple en $A'$ ; ce point serait simple pour $\Phi$ et ne serait pas un point de diramation effectif.

Cela étant, les courbes $C_0^{(1)}$ ne peuvent avoir une tangente variable en A, car alors elles en auraient $p-1$ autres et coïncideraient avec les courbes $C_0^*$. Les courbes $C_0^{(1)}$ doivent donc avoir en A la multiplicité $s_1 (2 \leqslant s_1 < p)$, les tangentes à ces courbes étant confondues avec les droites $a_1$, $a_2$.

Désignons par $C_0^{(2)}$ les courbes $C_0^{(1)}$ assujetties à avoir en A une tangente distincte de $a_1$, $a_2$. Ces courbes ont en A la multiplicité $s_2 > s_1$. Si les courbes $C_0^{(2)}$ ne coïncident pas avec les courbes $C_0^*$, elles ont en A des tangentes coïncidant avec $a_1$, $a_2$ et on a $s_2 < p$. Désignons par $C_0^{(3)}$ les courbes $C_0^{(2)}$ assujetties à toucher en A une droite distincte de $a_1$, $a_2$, et ainsi de suite. On forme ainsi une suite de systèmes linéaires

$$|C_0^{(1)}|, |C_0^{(2)}|, \ldots, |C_0^{(\nu)}|,$$

de dimensions respectives $r-1$, $r-2$, ..., $r-\nu$, dont les courbes ont en A les multiplicités $s_1$, $s_2$, ...,

$$s_\nu = p \, (2 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_{\nu-1} < p).$$

Les courbes des $\nu - 1$ premiers systèmes ont leurs tangentes en A confondues avec $a_1$, $a_2$ ; les courbes $C_0^{(\nu)}$ ont des tangentes variables en A et coïncident avec les courbes $C_0^*$.

Rapportons projectivement les courbes $C_0^{(1)}$ aux hyperplans d'un espace $S_{r-1}$ à $r-1$ dimensions ; nous obtenons ainsi une surface $\Phi_1$, image de $I_p$ et par suite birationnellement identique à $\Phi$, transformée homographique de la projection de $\Phi$, à partir de A', sur un hyperplan de l'espace ambiant ne passent pas par A'. Nous désignerons par $\Gamma^{(1)}$ les courbes qui correspondent sur $\Phi$ ou sur $\Phi_1$, aux courbes $C_0^{(1)}$. Sur $\Phi$, les courbes $\Gamma^{(1)}$ sont les sections de la surface par les hyperplans passant par A' ; sur $\Phi_1$, ce sont les sections hyperplanes.

Aux courbes $C_0^{(2)}$ correspondent, sur $\Phi$ et $\Phi_1$ des courbes que nous désignerons par $\Gamma^{(2)}$ ; sur $\Phi_1$, ces courbes sont découpées par les hyperplans passant par un certain point $A_1'$ de la surface.

En rapportant projectivement les courbes $C_0^{(2)}$ aux hyperplans d'un espace $S_{r-2}$, on obtient une surface $\Phi_2$, transformée homographique de la projection de $\Phi_1$, à partir de $A_1'$, sur un hyperplan de l'espace ambiant ne passant pas par $A_1'$. Les sections hyperplanes de $\Phi_2$ sont les courbes $\Gamma^{(2)}$.

Aux courbes $C_0^{(3)}$ correspondent, sur $\Phi$, $\Phi_1$, $\Phi_2$, des courbes $\Gamma^{(3)}$ qui, sur $\Phi_2$, sont découpées par les hyperplans passant par un certain point $A_2'$ de la surface.

En continuant de la sorte, on formera une suite de surfaces

$$\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\nu ,$$

dont les ordres vont en décroissant, qui sont toutes des images de $I_p$. Le problème à résoudre est la détermination des singularités des $\nu$ premières de ces surfaces aux points $A', A_1', \ldots, A'_{\nu-1}$.

10. **La surface $\Phi_\nu$** — Le système $|C_0^{(\nu)}|$ a le degré $pn - p^2$ et le genre $p(\pi-1)+1-\frac{1}{2}p(p-1)$, par conséquent la surface $\Phi_\nu$ a l'ordre $n-p$ et ses sections hyperplanes $\Gamma^{(\nu)}$ ont le genre égal, d'après la formule de Zeuthen, à $\pi - \frac{1}{2}(p-1)$.

Sur chaque courbe $C_0^{(\nu)}$ se trouve un groupe de $I_p$ infiniment voisin de A ; à ce groupe correspond un point simple de $\Phi_\nu$, dont le lieu est une droite $a'_\nu$, simple pour la surface. En particulier, aux groupes de $I_p$ formés du point $A_1$ ou du point $A_2$ comptés $p$ fois correspondent sur $a'_\nu$ des points $A'_{\nu 1}, A'_{\nu 2}$. Mais ces points sont singuliers pour la surface. Les courbes $C_0^{(\nu)}$ ayant leurs $p$ tangentes en A confondues avec $a_1$ par exemple, forment un système de dimension $r-\nu-1$ et il leur correspond sur $\Phi_\nu$ les sections de la surface par les hyperplans passent par $A'_{\nu 1}$. Les courbes $C_0^{(\nu)}$ envisagées forment un système linéaire de degré $pn-2p^2$, donc les sections de $\Phi$ par les hyperplans passant par $A'_{\nu 1}$ forment un système de degré $n-2p$. Le point $A'_{\nu 1}$, et de même le point $A'_\nu$, est multiple d'ordre $p$ pour la surface $\Phi_\nu$.

Si le point $A_1$ est uni parfait pour $I_p$, il existe sur chaque courbe $C_0^{(\nu)}$ ayant en A les $p$ tangentes coïncidant avec $a_1$, $p$ groupes de $I_p$ formés par les points infiniment voisins de $A_1$, comptés chacun $p$ fois. Dans ce cas, le point $A'_{\nu 1}$ est $p$-uple conique pour $\Phi_\nu$. Si au contraire $A_1$ n'est pas uni parfait pour $I_p$, il existe sur chacune des courbes $C_0^{(\nu)}$ envisagées, un seul groupe de $I_p$ formé des $p$ points infiniment voisins de $A_1$ ; le point $A'_{\nu 1}$ est $p$-uple uniplanaire pour $\Phi_\nu$. Et de même pour $A'_{\nu 2}$.

La surface $\Phi_\nu$ est une transformée homographique de la projection de $\Phi_{\nu-1}$, à partir de $A'_{\nu-1}$, sur un hyperplan ne passant pas par $A'_{\nu-1}$ de l'espace $S_{r-\nu-1}$ contenant $\Phi_{\nu-1}$. Aux points de

$\Phi_{\nu-1}$ infiniment voisins de $A'_{\nu-1}$ correspondent les points de la droite $a'_{\nu}$ de $\Phi_{\nu}$. Aux sections de $\Phi_{\nu}$ par les hyperplans passant par $A'_{\nu 1}$ (ou par $A'_{\nu 2}$) correspondent sur $\Phi_{\nu-1}$ les courbes découpées sur cette surface par les hyperplans contenant une droite $a'_{\nu-1,1}$ (ou $a'_{\nu-1,2}$) de la surface, passant par $A'_{\nu-1}$. On en conclut que le point $A'_{\nu-1}$ est simple pour la surface $\Phi_{\nu-1}$.

Si l'on remonte à la surface $\Phi_{\nu-2}$, on remarquera que le point $A'_{\nu-2}$ peut être, pour cette surface, soit un point double biplanaire, soit un point simple.

11. **Examen de deux cas particuliers.** — Nous avons résolu le problème de la détermination des singularités des points $A'$, $A'_1$, ... pour les surfaces $\Phi$, $\Phi_1$, ... dans deux cas (**29**).

1° Le point $A_1$ est uni parfait pour $I_p$.

Posons $p = 2m + 1$. On a $\nu = m + 1$ ; les courbes $C_0^{(1)}$ ont en A la multiplicité $m + 1$, $m$ tangentes coïncidant avec $a_1$ et une avec $a_2$ ; les courbes $C_0^{(2)}$ ont en A la multiplicité $m + 2$, $m - 1$ tangentes coïncidant avec $a_1$ et trois avec $a_2$ ; ... les courbes $C_0^{(m)}$ ont la multiplicité $2m$ en A, une tangente coïncidant avec $a_1$ et $2m - 1$ avec $a_2$.

En $A'$, la surface $\Phi$ a la multiplicité $m + 1$, le cône tangent étant formé d'un cône irréductible d'ordre $m$ et d'un plan coupant le cône suivant une seule droite. Les points $A'_1$, $A'_2$... sont simples pour les surfaces $\Phi_1$, $\Phi_2$, ...

Au point de vue des transformations birationnelles, le point $A'$ est équivalent à l'ensemble de deux courbes rationnelles ayant un point commun, l'une de degré $-(m+1)$, l'autre de degré $-2$. Si la surface $\Phi$ possède des courbes canoniques, celles-ci rencontrent la première des courbes rationnelles en $m - 1$ points, mais ne rencontrent pas la seconde (**33**) ;

2° Les points $A'$, $A'_1$, ... $A'_{\nu-2}$ sont doubles biplanaires pour les surfaces $\Phi$, $\Phi_1$, ..., $\Phi_{\nu-2}$. Posons encore $p = 2m + 1$ ; on a $\nu = m + 1$.

Les courbes $C_0^{(1)}$ ont en A un point double dont les tangentes sont $a_1$, $a_2$ ; les courbes $C_0^{(2)}$, un point quadruple avec deux tangentes coïncidant avec $a_1$, les deux autres avec $a_2$ ; les courbes $C_0^{(m-1)}$ ont en A la multiplicité $2m$, $m$ tangentes coïncidant avec $a_1$ et $m$ avec $a_2$.

12. **Multiplicité du point A′ pour la surface Φ.** — Retournons au cas général. Les courbes $C_0^{(1)}$ ont en A la multiplicité $s_1 < p$, les tangentes étant $a_1$, $a_2$. Considérons une de ces courbes et une de ses transformées birationnelles Δ privée de points multiples. La courbe Δ est transformée en elle-même par une certaine transformation birationnelle $\tau$ de période $p$. Les points unis de $\tau$ sur Δ correspondent aux différentes branches de la courbe $C_0^{(1)}$ ayant pour origine A ; le nombre de ces branches $s_1'$ est inférieur à $s$, et par suite à $p$. De plus, toute branche d'origine A de $C_0^{(1)}$ a pour homologue sur Δ un point uni de $\tau$. La courbe $\Gamma^{(1)}$ homologue sur Φ de la courbe $C_0^{(1)}$ considérée a donc $s_1'$ points infiniment voisins de A′. Comme les courbes $\Gamma^{(1)}$ ont des tangentes variables en A′, il en résulte que la multiplicité de A′ pour la surface Φ est au moins égale au nombre $s_1'$ des branches des courbes $C_0^{(1)}$ d'origine A. D'une manière précise, le cône tangent à la surface Φ en A′ a l'ordre $s_1'$, mais certaines parties de ce cône peuvent éventuellement être multiples, de telle sorte que la multiplicité de A′ pour Φ peut être supérieure à $s_1'$.

13. **Les homographies planes cycliques.** — Les homographies cycliques du plan fournissent des exemples intéressants de points de diramation, mais même dans ce cas, la résolution complète du problème posé plus haut est extrêmement compliquée (**28**).

Considérons l'homographie T d'équations

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^\alpha x_3 ,$$

où $\varepsilon$ est une racine primitive d'ordre $p$ $(p > 2)$ de l'unité et où $\alpha$ est un nombre compris entre 2 et $p-1$ $(2 \leqslant \alpha \leqslant p-1)$. T engendre une involution d'ordre $p$, $I_p$, possédant trois points unis $O_1$ (1, 0, 0), $O_2$ (0, 1, 0), $O_3$ (0, 0, 1). Chacun de ces points unis est non parfait et les tangentes unies issues de chacun des points sont les côtés du triangle de référence.

Nous pouvons prendre pour système |C| celui des courbes d'ordre $p$. Le système $|C_0|$ a alors pour équation

$$\sum \lambda_{ik}\, x_1^{i(\alpha-1)-(k-1)p}\, x_2^{kp-\alpha i}\, x_3^{i} = 0 ,$$

$k$ étant un entier pouvant prendre les valeurs 0, 1, 2, ... $\alpha$ et $i$

un entier satisfaisant, pour chaque valeur de $k$, à la double inégalité

$$(k-1)\frac{p}{\alpha-1} \leqslant i \leqslant k\frac{p}{\alpha}.$$

Etudions par exemple le point $O_1$. Désignons par $O_{12}$ le point (uni) infiniment voisin de $O_1$ sur la droite $O_1 O_2$, par $O_{13}$ le point (uni) infiniment voisin de $O_1$ sur la droite $O_1 O_3$. Effectuons la transformation quadrique

$$x_1 : x_2 : x_3 = y_1^2 : y_1 y_2 : y_2 y_3 , \qquad (\theta_1)$$

qui fait correspondre le point $O_1'$ (1, 0, 0) au point $O_{12}$. A T correspond l'homographie

$$y_1' : y_2' : y_3' = y_1 : \varepsilon y_2 : \varepsilon^{\alpha-1} y_3 .$$

Le point $O_{12}$ est donc uni parfait si $\alpha = 2$, il est uni non parfait si $\alpha > 2$.

Pour étudier $O_{13}$, on effectuera la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 = z_1^2 : z_2 z_3 : z_1 z_3 , \qquad (\theta_2)$$

qui fait correspondre $O_1''$ (1, 0, 0) au point $O_{13}$ et l'homographie

$$z'_1 : z'_2 : z'_3 = z_1 : \varepsilon^{p-\alpha+1} z_2 : \varepsilon^{\alpha} z_3.$$

à l'homographie T. Pour $\alpha = \frac{1}{2}(p+1)$, $O_{13}$ est donc uni parfait.

En rapportant projectivement les courbes $C_0$ aux hyperplans d'un espace linéaire à $\frac{1}{2}(p+3)$ dimensions, on obtient un modèle projectif de la surface $\Phi$ image de l'involution $I_p$, et il est aisé de déterminer la singularité de cette surface au point de diramation homologue du point $O_1$. Pour fixer les idées, nous traiterons rapidement un exemple, choisi de manière que la singularité de la surface $\Phi$ au point de diramation envisagé soit un point quadruple dont le cône tangent soit formé de trois parties.

Supposons $p = 23$, $\alpha = 9$. Le système $|C_0|$ a alors pour équation

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_0 x_1^{23} + \lambda_1 x_1^{17} x_2 x_3^5 + \lambda_2 x_1^{16} x_2^5 x_3^2 + \lambda_3 x_1^{11} x_2^2 x_3^{10} \\ + \lambda_4 x_1^{10} x_2^6 x_3^7 + \lambda_5 x_1^9 x_2^{10} x_3^4 + \lambda_6 x_1^8 x_2^{14} x_3 + \lambda_7 x_1^5 x_2^3 x_3^{15} \\ + \lambda_8 x_1^4 x_2^7 x_3^{12} + \lambda_9 x_1^3 x_2^{11} x_3^9 + \lambda_{10} x_1^2 x_2^{15} x_3^6 \\ + \lambda_{11} x_1 x_2^{19} x_3^3 + \lambda_{12} x_2^{23} + \lambda_{13} x_3^{23} = 0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Ecrivons cette équation sous la forme

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_{13} X_{13} = 0 \tag{2}$$

et interprétons les quantités $X_0$, ..., $X_{13}$ comme coordonnées ponctuelles d'un espace $S_{13}$ à 13 dimensions. Cela revient à rapporter projectivement les courbes $C_0$ aux hyperplans de cet espace. Les équations de la surface $\Phi$ s'obtiendront en éliminant les $x$ entre les équations exprimant la proportionnalité des coefficients des $\lambda$ dans les équations (1) et (2). Au point uni $O_1$ de $I_{23}$ correspond le point de diramation $O_0'$ ($X_0 = 1$, $X_1 = \ldots = X_{13} = 0$) de $\Phi$.

Le système $|C^{(1)}{}_0|$ s'obtiendra en faisant $\lambda_0 = 0$ dans l'équation (1). Les courbes $C_0^{(1)}$ ont en $O_1$ un point sextuple à tangentes fixes. Effectuons une fois la transformation $\theta_1$ sur les courbes $C_0^{(1)}$. Nous obtenons

$$\lambda_1 y_1^{35} y_3^5 + \lambda_2 y_1^{37} y_2 y_3^2 + \lambda_3 y_1^{24} y_2^6 y_3^{10} + \cdots + \lambda_{13} y_2^{17} y_3^{23} = 0 \,. \tag{3}$$

Les courbes $C_0^{(1)}$ ont donc en $O_{13}$ un point triple à tangentes fixes. Opérons de nouveau sept fois la transformation $\theta_1$ sur les courbes (3) ; nous avons

$$\left.\begin{aligned} & y_1^{184} (\lambda_2 y_3^2 + \lambda^6 y_2 y_3 + \lambda_{12} y_2^2) + y_1^{161} y_2^{20} y_3^3 (\lambda_1 y_3^2 + \lambda_5 y_2 y_3 \\ & + \lambda_9 y_2^2) + y_1^{138} y_2^{41} y_3^6 (\lambda_4 y_3 + \lambda_{10} y_2) + y_1^{115} y_2^{61} y_3^9 (\lambda_3 y_3 \\ & + \lambda_9 y_2) + \lambda_8 y_1^{92} y_2^{82} y_3^{12} + \lambda_7 y_1^{69} y_2^{102} y_3^{15} + \lambda_{13} y_2^{163} y_3^{23} = 0 \,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Les courbes $C_0^{(1)}$ ont donc sept points doubles fixes infiniment voisins successifs de $O_{13}$, le dernier de ces points étant uni parfait pour $I_{23}$.

Pour voir ce qui correspond sur la surface $\Phi$ au domaine du dernier de ces points doubles, faisons $y_3 = \lambda y_2$ dans l'équation (4), puis dans les équations

$$\frac{X_1}{y_1^{164} y_2^{20} y_3^5} = \cdots = \frac{X_{13}}{y_2^{163} y_2^{23}}$$

obtenues après cette substitution, faisons tendre $y_2$ vers 0. On obtient ainsi

$$\frac{X_2}{\lambda^2} = \frac{X_6}{\lambda} = \frac{X_{12}}{1} \,, \quad X_1 = 0 \,, \; X_3 = X_4 = X_5 = 8 \,, \; X_7 = \cdots$$
$$= X_{11} = 0 \,, \; X_{13} = 0 \,.$$

Aux points envisagés, correspondent donc les points de la surface $\Phi$, infiniment voisins de $O_0'$ situés sur le cône quadratique

$$X_6^2 - X_2 X_{12} = 0 \,, \quad X_1 = 0 \,, \cdots, X_{13} = 0 \,.$$

Opérons maintenant deux fois la transformation $\theta_2$ sur les courbes (3). Il vient

$$z_1^{69}(\lambda_1 z_3 + \lambda_2 z_2) + z_1^{46} z_2^6 z_3^{15}(\lambda_3 z_3^3 + \lambda_4 z_2 z_3^2 + \lambda_5 z_2^2 z_3 + \lambda_6 z_2^3) + z_1^{23} z_2^{12} z_3^{30}(\lambda_7 z_3^5 + \lambda_8 z_2 z_3^4 + \lambda_9 z_2^2 z_3^3 + \lambda_{10} z_2^3 z_2^3 + \lambda_{11} z_2^4 z_3 + \lambda_{12} z_2^5) + \lambda_{13} z_2^{17} z_3^{53} = 0 .$$

Les courbes $C_0^{(1)}$ ont donc deux points simples fixes, infiniment voisins successifs de $O_{13}$, dont le dernier est uni parfait pour $I_{23}$. En opérant comme précédemment, on trouve qu'au domaine de ce point correspondent, sur $\Phi$, les points infiniment voisins de $O_0'$, situés dans le plan $X_3 = X_4 = \dots = X_{13} = 0$.

Opérons enfin 17 fois la transformation $\theta_2$ sur les courbes $C_0^{(1)}$; nous obtenons

$$z_1^{391}(\lambda_1 z_2 + \lambda_{13} z_3) + \lambda_3 z_1^{368} z_2^2 z_3^{22} + \cdots = 0.$$

Les courbes $C_0^{(1)}$ ont donc une suite de 17 points simples fixes, infiniment voisins successifs de $O_1$, le premier étant $O_{12}$ et le dernier étant uni parfait pour $I_{23}$. Au domaine de ce dernier point correspondent sur $\Phi$ les points infiniment voisins de $O_0'$ situés dans le plan $X_2 = \dots = X_{12} = 0$.

La surface $\Phi$ a l'ordre 23, le système $|C_0^{(1)}|$ a le degré $23 \times 19$, donc $O_0'$ est un point quadruple de la surface $\Phi$, le cône tangent étant constitué par le cône quadratique et par les deux plans rencontrés plus haut.

Au point de vue des transformations birationnelles, la singularité de $\Phi$ en $O_0'$ est équivalente à l'ensemble d'une conique et de deux droites, l'une de celles-ci s'appuyant sur la conique et sur l'autre droite.

La détermination des singularités des points $A_1'$, $A_2'$, ... pour les surfaces $\Phi_1$, $\Phi_2$, ... dans le cas actuel s'achèverait sans autre difficulté que la longueur des calculs.

14. **Les points unis non parfaits des involutions du troisième ordre.** — Nous allons montrer que, si A est un point uni non parfait d'une involution cubique $I_3$ existant sur une surface F quelconque, les deux points du domaine du premier ordre de A, unis pour $I_3$, sont unis parfaits pour cette involution (**27**).

Reprenons les notations utilisées plus haut dans le cas général. Actuellement, l'homographie T de S possède trois axes $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$.

Le plan tangent $\alpha$ à F en A (point qui appartient à $S^{(0)}$ s'appuie en un point $B_1$ sur $S^{(1)}$ et en un point $B_2$ sur $S^{(2)}$. Les tangentes $AB_1$, $AB_2$ sont unies pour T et les points infiniment voisins $A_1$, $A_2$ de A, unis pour $I_3$, appartiennent l'un à la tangente $a_1 = AB_1$, l'autre à la tangente $a_2 = AB_2$. Il est aisé de voir que les courbes $C_0^{(1)}$ ont nécessairement un point double en A, les tangentes en ce point étant $a_1$, $a_2$, et que les courbes $C_0^{(2)}$ ont un point triple à tangentes variables en A.

Sur la surface $\Phi$, les courbes $\Gamma^{(1)}$ ont un point double au point de diramation A′ homologue de A et par suite, A′ est double pour $\Phi$. D'après ce que nous avons vu, le point $A_1'$ est simple pour la surface $\Phi_1$. Il en résulte que le point A′ est un point double biplanaire de la surface $\Phi$. Au domaine du point A′ sur $\Phi$ correspond, sur $\Phi_1$, l'ensemble des droites $a_{11}'$, $a_{12}'$, se coupant en $A_1'$ et simples pour la surface. Les points de $a_{11}'$ (ou $a_{12}'$) correspondent aux groupes de $I_3$ infiniment voisins de $A_1$ (ou de $A_2$) et par suite $A_1$ (et $A_2$) sont unis parfaits pour $I_3$.

Observons d'ailleurs que la surface $\Phi_1$ est d'ordre $n-2$ et que par conséquent, le degré de $|C_0^{(1)}|$ est égal à $3n-6$. Par suite, le point A absorbe six intersections de deux courbes $C_0^{(1)}$. Il en résulte que le plan osculateur à la branche d'une courbe $C_0^{(1)}$ ayant $a_1$ comme tangente, par exemple, est variable avec cette courbe (et passe par $a_1$). Cela étant, soit $S_{R-1}$ un hyperplan de $\Sigma_0$ ne passant pas par A et projetons F à partir de A sur cet hyperplan. A F correspond une surface $F_1$ contenant la droite $a = B_1B_2$ et au domaine de A sur F correspond cette droite $a$. Sur $F_1$, il correspond à $I_3$ une involution $I_3'$ ayant comme points unis (simples pour la surface $F_1$) les points $B_1$, $B_2$ et engendrée par T. Le plan $\beta_1$, tangent à $F_1$ en $B_1$, est uni pour T ; il passe par la droite $a$. A une courbe $C_0^{(1)}$ correspond sur $F_1$ une courbe $\overline{C}$ passant simplement par $B_1$, $B_2$ ; la tangente à cette courbe en $B_1$ est l'intersection de $\beta_1$ et du plan osculateur en A à la branche de la courbe $C_0^{(1)}$ envisagée tangente à $a_1$. Cette tangente en $B_1$ à la courbe $\overline{C}$ est unie pour T et par suite, dans $\beta_1$, T détermine une homologie de centre $B_1$. Il en est de même pour $B_2$ et par suite $B_1$, $B_2$ sont unis parfaits pour $I_3'$. Par conséquent, $A_1$, $A_2$ sont unis parfaits pour $I_3$.

Inversement, si A est un point uni non parfait d'une involution $I_p$ d'ordre premier $p$, et s'il existe deux points unis parfaits pour $I_p$ dans le domaine du premier ordre de A, on a $p=3$ (11,1°).

*Dans une involution du troisième ordre, un point uni non parfait possède deux points unis parfaits dans son domaine du premier ordre. Inversement, si une involution d'ordre premier possède un point uni non parfait ayant, dans son domaine du premier ordre, deux points unis parfaits, l'ordre de cette involution est égal à trois.*

Nous avons en outre établi la propriété suivante : désignons par $\alpha_1$ l'espace linéaire lieu des plans osculateurs en A aux courbes tracées sur F et passant par A. L'espace $\alpha_1$ a cinq dimensions, il est uni par T et s'appuie suivant une droite sur chacun des axes $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ de T. Les hyperplans de $\Sigma_0$ découpant sur F les courbes $C_0^{(2)}$ contiennent $\alpha_1$ et réciproquement, les hyperplans des $\Sigma_0$ contenant $\alpha_1$ découpent sur F les courbes $C_0^{(2)}$.

15. **Relations fonctionnelles entre les courbes tracées sur $\Phi$.** — En partant du système $|C|$, nous avons construit, sur $\Phi$, $p$ systèmes linéaires complets $|\Gamma|$, $|\Gamma_1|$, $\ldots|\Gamma_{p-1}|$. Les courbes $\Gamma_i$ correspondent aux courbes $C_i$ découpées sur F par les hyperplans de $\Sigma_i$. Observons que les hyperplans des systèmes $\Sigma_1, \ldots \Sigma_{p-1}$ passent tous par $S^{(0)}$, par conséquent les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_{p-1}$ passent par tous les points de diramation de la surface $\Phi$.

A une courbe C de F, non transformée en elle-même par T, correspond sur $\Phi$ une courbe $\overline{\Gamma}$ ; à cette courbe $\overline{\Gamma}$ correspondent inversement, sur F, $p$ courbes C transformées les unes dans les autres par T. La courbe $\overline{\Gamma}$ a le genre $p\,(\pi-1)+1$ et possède $\frac{1}{2}\,p(p-1)n$ points doubles variables, correspondant aux couples de points de la courbe C envisagée qui appartiennent à des groupes de $I_p$. La courbe $\Gamma$ appartient donc à un système linéaire $|\overline{\Gamma}|$, de genre virtuel $p(\pi-1)+\frac{1}{2}\,p(p-1)n+1$, dont la courbe générale est dépourvue de points doubles.

Faisons varier d'une manière continue C dans le système $|C|$ jusqu'à ce qu'elle coïncide avec une courbe $C_0$. La courbe $\Gamma$ varie d'une manière continue dans $|\overline{\Gamma}|$, et se réduit à une courbe $p\Gamma$. On a donc

$$|\,\overline{\Gamma}\,| = |\,p\Gamma\,|\,.$$

Faisons d'autre part varier d'une manière continue C dans $|C|$ jusqu'à ce qu'elle vienne coïncider avec une courbe $C_1$. La courbe $\overline{\Gamma}$ se réduit à une courbe $p\Gamma_1$, à laquelle il faut cependant ajouter certaines composantes. Les courbes $\Gamma_1$ passent en effet par les points de diramation de $\Phi$ et ceux-ci sont équivalents, au point de vue des transformations birationnelles, à des ensembles de courbes rationnelles. On devra donc écrire

$$|\overline{\Gamma}| = |p\Gamma_1 + X_1|,$$

où $X_1$ est une courbe formée de composantes provenant des points de diramation de $\Phi$.

En introduisant des notations analogues pour $|\Gamma_2|$, ..., on aura donc

$$|p\Gamma| = |p\Gamma_1 + X_1| = \cdots = |p\Gamma_{p-1} + X_{p-1}|.$$

Projectivement, cette propriété s'interprète de la manière suivante : désignons par $|V|$ le système linéaire des hypersurfaces de $S_r$ découpant, sur $\Phi$, le système complet $|p\Gamma|$. (Ce système $|V|$ comprend comme partie le système des hypersurfaces d'ordre $p$ ou coïncide avec ce système). Le long de chacune des courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-1}$, il existe une hypersurface V ayant un contact d'ordre $p-1$ avec la surface $\Phi$.

Appliquons ce qui précède au cas $p = 2$. Un point de diramation est un point double conique de $\Phi$ ; il est équivalent à une courbe rationnelle de degré $-2$. Une courbe $\Gamma_1$ rencontre une telle courbe en un point, car une courbe $C_1$ passe simplement (avec une tangente variable) par le point uni correspondant. Si l'on désigne par $k$ le nombre de points unis de l'involution $I_2$, par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ les courbes rationnelles équivalentes aux points de diramation correspondants, on a (**16**)

$$|2\Gamma| = |2\Gamma_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k|.$$

16. **Involutions dépourvues de points unis.** — Les involutions privées de points unis appartenant à une surface algébrique, ont comme surfaces images des surfaces dont le diviseur de Severi (*) $\sigma$ est supérieur à l'unité (**18**).

(1) F. Severi, *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica* (*Math. Annalen*, 1906, t. 62, pp. 194-225); *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*

Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique $I_p$, d'ordre premier $p$, dépourvue de points unis. Construisons un système $|C|$ invariant pour la transformation T génératrice de $I_p$ et contenant $p$ systèmes partiels $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ composés au moyen de $I_p$. Les systèmes linéaires distincts $|\Gamma|$, $|\Gamma_1|$, ..., $|\Gamma_{p-1}|$ qui leur correspondent sur la surface $\Phi$ image de $I_p$, donnent lieu à la relation fonctionnelle

$$| p\Gamma | = | p\Gamma_1 | = \cdots = | p\Gamma_{p-1} | .$$

Il en résulte que le diviseur $\tau$ de la surface $\Phi$ admet $p$ comme facteur.

Il est aisé de construire par ce procédé des surfaces dont le diviseur de Severi est un nombre quelconque. Il suffit de considérer dans l'espace $S_3$ une homographie cyclique de période $p > 3$, ayant quatre points unis, et une surface F d'ordre $\lambda p$ transformée en elle-même par cette homographie, ne passant par aucun des points unis de l'homographie.

On observera que la construction précédente de surfaces de diviseur quelconque est encore valable si $p$ n'est pas un nombre premier, l'involution étant toujours privée de points unis.

17. **Relations entre les invariants des surfaces F et $\Phi$.** — Considérons une surface F contenant une involution $I_p$ ne possédant qu'un nombre fini de points unis $A_1$, $A_2$, ..., $A_\tau$ et soient $A_1'$, $A_2'$, ..., $A'_\tau$ les points de diramation correspondants sur $\Phi$.

Supposons qu'en chacun des points $A_1'$, ..., $A'_\tau$, la surface $\Phi$ ait une singularité abaissant la classe respectivement de $\rho_1'$, $\rho_2'$, ..., $\rho'_\tau$ unités. Si $\delta$ est la classe de $\Phi$, l'invariant de Zeuthen-Segre $I'$ de $\Phi$, calculé au moyen d'un faisceau de sections hyperplanes $\Gamma$, a pour valeur

$$I' = \delta + \rho_1' + \rho_2' + \cdots + \rho_\tau' - n - 4\pi .$$

Calculons l'invariant de Zeuthen-Segre I de F en partant du faisceau des courbes $C_0$ homologue du faisceau de courbes $\Gamma$ qui vient d'être considéré. A une courbe $\Gamma$ ayant un point double

(*Annales de l'Ecole norm. sup.*, 1908, pp. 449-468) ; *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica* (*Rend. Circolo Matematico di Palermo*, 2e sem. 1910, pp. 265-288).

en un point simple de $\Phi$, correspond une courbe $C_0$ ayant $p$ points doubles. Soit d'autre part $\rho_i$ le nombre de points doubles qui équivaut à la singularité en $A_i$ d'une courbe $C_0$ passant par ce point. On a

$$I = p\delta + \rho_1 + \rho_2 + \cdots \rho_\tau - pn - 4\,p\,(\pi - 1) - 4\,\cdot$$

En éliminant $\delta$ entre ces formules, on obtient la relation

$$I + 4 = p\,(I' + 4) + \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_\tau - p\,(\rho_1' + \rho_2' + \cdots + \rho_\tau')$$

Soient maintenant $p^{(1)}$ et $\pi^{(1)}$ les genres linéaires de F et de $\Phi$. Désignons par $|\Gamma'|$ le système linéaire adjoint à $|\Gamma|$ sur $\Phi$ ; son transformé sur F appartient au système $|C'|$ adjoint à $|C|$. Le degré de $|\Gamma'|$ est égal à $\pi^{(1)} - 1 + 4(\pi - 1) - n$. Le degré effectif du système formé par les courbes C′ transformées des courbes de $|\Gamma'|$ est donc égal à

$$p\,(\pi^{(1)} - 1) + 4\,p\,(\pi - 1) - pn\;.$$

Lorsque la multiplicité d'un des points $A_p'$, ..., $A\ '$ pour la surface $\Phi$ dépasse deux, les courbes $\Gamma'$ passent par ces points et les courbes C′ correspondantes ont des point multiples aux points unis correspondants. Soit $\sigma_i$ le nombre d'intersection de deux de ces courbes C′ absorbés au point $A_i$. Le degré effectif du système de ces courbes C′ est donc

$$p^{(1)} - 1 + 4\,p\,(\pi - 1) - pn - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_\tau)\;.$$

On a donc, en comparant les deux relations,

$$p^{(1)} - 1 = p\,(\pi^{(1)}) - 1) + \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_\tau.$$

De la relation classique

$$p^{(1)} + I = 12\,p_a + 9\,,$$

on déduit alors, en désignant par $p_a$, $\pi_a$ les genres arithmétiques de F, $\Phi$,

$$12\,(p_a + 1) = 12\,p\,(\pi_a + 1) + \rho_1 + \cdots + \rho_\tau - p\,(\rho_1' + \cdots + \rho_\tau') \\ + \sigma_1 + \cdots + \sigma_\tau.$$

Si par exemple l'involution $I_p$ possède $\tau_1$ points unis parfaits et $\tau_2$ points unis non parfaits donnant naissance à des points doubles de $\Phi$ (11, 2°), les relations précédentes deviennent (**17**)

$$I + 4 = p\,(I' + 4) - (2\,p - 1)\,\tau_1 - (p^2 - 1)\,\tau_2\,,$$
$$p^{(1)} - 1 = q\,(\pi^{(1)} - 1) + (p - 2)^2\,\tau_1\,,$$

$$12\,(p_a+1)=12\,p\,(\pi_a+1)+(p-1)\,(p-5)\,\tau_1-(p^2-1)\,\tau_2\,.$$

En particulier, pour $p=2$, on a $(\tau_2=0)$.

$$\mathrm{I}+4=2\,(\mathrm{I}'+4)-3\,\tau\,,\quad p^{(1)}-1=2\,(\pi^{(1)}-1)\,,$$
$$4\,(p_a+1)=8\,(\pi_a+1)-\tau\,.$$

Ces différentes formules pourraient d'ailleurs se déduire des relations très générales données par M. Severi (**51**) pour les correspondances $(n,\ n')$ entre deux surfaces algébriques.

18. **Involutions régulières appartenant à une surface irrégulière.** — Supposons que la surface F soit irrégulière et l'involution $\mathrm{I}_p$ qu'elle contient régulière. Soit $q>1$ l'irrégularité de F. Construisons sur F le système $|\mathrm{C}|$, que l'on peut supposer régulier en le remplaçant éventuellement par un de ses multiples. Le système $|\mathrm{C}|$ appartient à un système continu complet $\{\mathrm{C}\}$ formé de $\infty^q$ systèmes linéaires analogues à $|\mathrm{C}|$.

Soit $|\overline{\mathrm{C}}|$ un système linéaire, distinct de $|\mathrm{C}|$, appartenant au système $\{\mathrm{C}\}$. L'homographie T lui fait correspondre un système linéaire $|\overline{\overline{\mathrm{C}}}|$. Lorsque le système $|\overline{\mathrm{C}}|$ varie d'une manière continue dans $\{\mathrm{C}\}$ et vient coïncider avec $|\mathrm{C}|$, le système $|\overline{\overline{\mathrm{C}}}|$ varie d'une manière continue et vient également coïncider avec $|\mathrm{C}|$. Par suite, $|\overline{\overline{\mathrm{C}}}|$ appartient au système continu $\{\mathrm{C}\}$ et ce dernier est transformé en lui-même par T.

Supposons que le système $\{\mathrm{C}\}$ contienne, outre $|\mathrm{C}|$, un second système linéaire $|\overline{\mathrm{C}_1}|$, transformé en lui-même par T. On peut supposer sans restriction que le système $|\overline{\mathrm{C}_1}|$ contient $p$ systèmes linéaires partiels $|\mathrm{C}_{10}|$, $|\mathrm{C}_{11}|$, ..., $|\mathrm{C}_{1\,p-1}|$ composés au moyen de $\mathrm{I}_p$, car s'il en était autrement, il suffirait de remplacer $|\mathrm{C}|$ et par suite $\{\mathrm{C}\}$ par un multiple convenablement choisi. Observons qu'il n'existe pas nécessairement, parmi les systèmes $|\mathrm{C}_{10}|$, ..., $|\mathrm{C}_{1p-1}|$, un système n'ayant pas pour points-base des points unis de $\mathrm{I}_p$. Nous désignerons par $|\Gamma_{10}|$, ..., $|\Gamma_{1p-1}|$ les systèmes complets de courbes d'ordre $n$ qui correspondent sur la surface régulière $\Phi$ aux systèmes $|\mathrm{C}_{10}|$, ..., $|\mathrm{C}_{1\,p-1}|$.

Il ne peut exister, dans le système $\{\mathrm{C}\}$, une infinité de systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T, car ces systèmes formeraient alors une série continue et on aurait, sur $\Phi$, une série continue de systèmes linéaires de courbes d'ordre $n$, ayant le même comportement aux points de diramation, ce qui est impossible puisque la surface $\Phi$ est régulière. Cela étant, soit $V_q$ la variété de Picard attachée à la surface F, c'est-à-dire la variété abélienne à $q$ dimensions dont les points représentent les systèmes linéaires de $\{C\}$. D'après ce qui précède, il correspond à T une transformation birationnelle $T_1$ de $V_q$ en elle-même, de période $p$, n'ayant qu'un nombre fini de points unis (correspondant aux systèmes linéaires de $\{C\}$ transformés en eux-mêmes par T). Il existe donc, sur la surface $\Phi$, un nombre fini, multiple de $p$, de systèmes linéaires de courbes d'ordre $n$, dont les homologues sur la surface F sont des systèmes linéaires (partiels) appartenant au système continu $\{C\}$.

Nous avons particulièrement étudié les cas $q=2$ (**22**, **23**) et $q=3$ (**24**) ; nous reviendrons plus loin sur le premier de ces cas.

19. **Construction d'involutions irrégulières appartenant à une surface irrégulière.** — Soit L une courbe de genre $\rho$ contenant une involution cyclique $i_p$ d'ordre $p$, premier. Désignons par L' la courbe image de cette involution, par $\rho'$ son genre. Considérons la surface F qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L[1] et la surface F' représentant les couples de points non ordonnés de la courbe L'. La surface F a les genres

$$p_g=\frac{1}{2}\rho(\rho-1), \quad p_a=\frac{1}{2}\rho(\rho-1)-\rho, \quad p^{(1)}=(\rho-2)(4\rho-5);$$

son irrégularité est donc égale à $\rho$. La surface F' a les genres

$$p_g'=\frac{1}{2}\rho'(\rho'-1), \quad p_a'=\frac{1}{2}\rho'(\rho'-1)-\rho', \quad p'^{(1)}=\rho'-2)(4\rho'-5);$$

son irrégularité est égale à $\rho'$.

Soit P un point de F représentant le couple de points $P_1$, $P_2$

---

[1] SEVERI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica et sopra certe classi di superficie* (*Mem. R. Accad. di Torino*, 1903, pp. 1-49); *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (*Atti R. Accad. di Torino*, 1902-1903, pp. 185-200); DE FRANCHIS, *Sulle varietà $\infty^2$ delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica* (*Rend. Circ. matem. di Palermo*, 1903, pp. 104-121); MARONI, *Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecantisi* (*Atti R. Accad. di Torino*, 1902-1903, pp. 149-154).

de L. Soient $P_1'$, $P_2'$ les points que la transformation birationnelle de L en elle-même, génératrice de $i_p$, fait correspondre à $P_1$, $P_2$ ; $P'$ le point de F représentant le couple $P_1'$ $P_2'$. Le point $P'$ correspond à P dans une transformation birationnelle de F en elle-même, de période $p$, engendrant une involution $I_p$ d'ordre $p$.

Considérons d'autre part, un point Q de F', les points $Q_1$, $Q_2$ de L' représentés par Q et les deux groupes de $i_p$ de L homologues de $Q_1$, $Q_2$. Il existe $p^2$ points de F représentant les couples de L dont un point appartient à chacun des groupes de $i_p$ considérés. Au point Q, faisons correspondre ces $p^2$ points. Les groupes de $p^2$ points ainsi obtenus forment sur F une involution J, d'ordre $p^2$, ayant F' comme image. Il est facile de voir qu'un groupe de J est formé de $p$ groupes de $I_p$ ; par suite la surface $\Phi$, image de $I_p$, possède à son tour une involution J', d'ordre $p$, ayant F' comme image.

Si $p = 2$, la courbe lieu des points de F qui représentent les couples de l'involution $i_2$ est une courbe unie de l'involution $I_2$. Par contre, si $p > 2$, l'involution $I_p$ ne possède qu'un nombre fini de points unis ; ceux-ci sont les points de F qui représentent les couples de points unis (distincts ou non) de $i_p$. Si l'involution $i_p$ possède $\delta$ points unis, l'involution $I_p$ possède $\frac{1}{2}\delta(\delta+1)$ points unis. On a d'ailleurs, d'après la formule de Zeuthen,

$$2p(\rho'-1)+(p-1)\delta = 2(\rho-1)\,.$$

L'involution J possède toujours une courbe unie : la courbe de F qui représente les couples de points appartenant à un même groupe de $i_p$. La courbe correspondante sur $\Phi$ est unie par J'.

Si $\rho' > 0$, la surface F' est irrégulière et il en est de même de la surface $\Phi$. Dans le cas où l'involution $i_p$ est dépourvue de points unis ($\delta = 0$), nous avons pu démontrer que l'irrégularité de $\Phi$ est égale à $\rho'$ (**35**). Ce résultat peut d'ailleurs s'étendre au cas $\delta > 0$. Nous avons également étudié le cas où L est une courbe de genre $\rho = 3$ non hyperelliptique (**19**). Le cas $\rho = 2$ conduit aux surfaces hyperelliptiques, il en sera question plus loin.

20. **Conditions pour qu'une surface représente une involution.** — Une surface normale $\Phi$ étant donnée, dans quelles conditions est-elle l'image d'une involution d'ordre $p$ apparte-

nant à une surface F et n'ayant qu'un nombre fini de points unis?

Soient $x_1$, $x_2$, ..., $x_r$ les coordonnées non homogènes des points de l'espace $S_r$ auquel appartient la surface $\Phi$, est

$$\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_r) = 0, \varphi_2 = 0, \cdots, \varphi_{r-2} = 0$$

les équations de $\Phi$. Supposons qu'il existe une hypersurface

$$\psi(x_1, x_2, \cdots, x_r) = 0$$

appartenant au système linéaire des hypersurfaces découpant sur $\Phi$ le système $p$-uple de celui des sections hyperplanes, et ayant un contact d'ordre $p - 1$ avec $\Phi$ en chaque point d'intersection (en dehors des courbes multiples éventuelles de $\Phi$). Considérons, dans un espace $S_{r+1}$, les équations

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \cdots, \varphi_{r-2} = 0, x^p_{r+1} = \psi.$$

Si ces équations représentent une surface irréductible F, celle-ci possède une involution $I_p$ d'ordre $p$, engendrée par l'homographie

$$x_1' = x_1, x_2' = x_2, \cdots, x_r' = x_r, x'_{r+1} = \varepsilon x_{r+1},$$

$\varepsilon$ étant une racine primitive d'ordre $p$ de l'unité. Cette involution présente un nombre fini de points unis, éventuellement nul.

S'il existe effectivement des points unis, la surface $\Phi$ doit présenter les singularités appropriées aux points de diramation correspondants, points qui doivent appartenir à la section de $\Phi$ par l'hypersurface $\psi = 0$. Dans ce cas, la surface F est certainement irréductible, et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

*Si une surface normale $\Phi$ possède un certain nombre de points singuliers, dont les singularités sont celles de points de diramation et si, parmi les hypersurfaces découpant sur $\Phi$ le système* p-uple *de celui des sections hyperplanes, il en existe une passant par tous les points singuliers et ayant un contact d'ordre* p — 1 *avec la surface en tout point d'intersection, cette surface représente une involution d'ordre* p, *n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique.*

En d'autres termes, il faut qu'il existe sur $\Phi$, en plus des points de diramation, une des courbes $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, ..., ou $\Gamma_{p-1}$.

Le cas où il n'existe pas de points de diramation a donné lieu à d'intéressantes recherches de M. Comessatti (6).

21. **Involutions régulières du second ordre appartenant à une surface irrégulière.** — Soit F une surface d'irrégularité $q > 1$, contenant une involution $I_2$ d'ordre deux possédant $\tau$ points unis. Construisons comme plus haut le système $|C|$ et la surface normale $\Phi$, image de $I_2$, régulière par hypothèse. Cette surface possède $\tau$ points doubles coniques équivalents à $\tau$ courbes rationnelles de degré $-2$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\tau$, et $\tau$ est d'ailleurs multiple de quatre (n° 17).

Le système $|C|$ appartient à un système continu complet $\{C\}_2$ formé de $\infty^q$ systèmes linéaires, transformé en lui-même par T et contenant $k = 2^q$ systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T. L'un de ces systèmes est $|C|$ et donne naissance, sur $\Phi$, au système des sections hyperplanes $|\Gamma|$ et à un système $|\Gamma_1|$ dont les courbes, d'ordre $n$, passent par les $\tau$ points de diramation. Désignons par $|\overline{C}_1|, |\overline{C}_2|, \ldots, |\overline{C}_{k-1}|$ les autres systèmes de $\{C\}$ transformés en eux-mêmes par T.

Fixons l'attention sur le système $|\overline{C}_1|$. Il contient deux systèmes linéaires partiels $|C_{11}|$, $|C_{12}|$ composés au moyen de $I_2$. Soient $|\Gamma_{11}|$, $|\Gamma_{12}|$ les systèmes linéaires complets qui leur correspondent sur $\Phi$. Supposons que les courbes $C_{11}$ passent par $\tau_{11}$ des points unis de $I_2$ et soit $\pi_{11}$ le genre des courbes $\Gamma_{11}$. Les courbes C étant de genre $2\pi - 1$, on a, d'après la formule de Zeuthen,

$$4(\pi_{11} - 1) + \tau_{11} = 2(2\pi - 2).$$

On en conclut que $\tau_{11}$ est multiple de 4. Les courbes $\Gamma_{11}$ passent par $\tau_{11}$ points de diramation de $\Phi$ ; désignons par $X_{11}$ la somme des courbes $\gamma$ équivalentes à ces points.

Considérons une courbe $\overline{C}$ arbitraire de $\{C\}$ et soit $\overline{\Gamma}$ la courbe qui lui correspond sur $\Phi$. Puisque cette surface est régulière, la courbe $\overline{\Gamma}$ varie, lorsque $\overline{C}$ décrit $\{C\}$, dans un système linéaire $|\overline{\Gamma}|$. En faisant varier $\overline{C}$ d'une manière continue dans $\{C\}$ et en la faisant tendre vers une courbe $C_0$, puis vers une courbe $C_{11}$, on obtient la relation fonctionnelle

$$|\overline{\Gamma}| = |2\Gamma| = |2\Gamma_{11} + X_{11}|.$$

En considérant les systèmes $|\overline{C}_2|$, ... et en introduisant des notations analogues, on trouvera, sur $\Phi$, $2^{q+1}$ systèmes linéaires $|\Gamma|$, $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_{11}|$, $|\Gamma_{12}|$, $|\Gamma_{21}|$, ... tels que

$$|2\,\Gamma| = |2\,\Gamma_{i1} + X_{i1}| = |2\,\Gamma_{i2} + X_{i2}|\,, \qquad (i = 1, 2, \cdots, k-1)$$

avec

$$X_{i1} + X_{i2} = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\tau .$$

Observons maintenant que si le diviseur $\sigma$ de $\Phi$ est impair, il n'existe, parmi les systèmes $|\Gamma_{11}|$, $|\Gamma_{12}|$, ... aucun système dont les courbes ne passent par aucun des points de diramation de $\Phi$ ; si $\sigma$ est pair, il en existe un. Comme par hypothèse on a $q \geqslant 2$, on a $2^{\,q} \geqslant 4$ et par conséquent, on peut dans tous les cas supposer que l'on a par exemple $0 < \tau_{11} < \tau$. Cela étant, l'existence de $|\Gamma_{11}|$ conduit à celle d'une surface $\Phi_1$ contenant une involution d'ordre deux ayant $\tau_{11}$ points unis, dont $\Phi$ est l'image. De même, l'existence de $|\Gamma_{12}|$ entraîne celle d'une surface $\Phi_2$ contenant une involution d'ordre deux ayant $\tau_{12} = \tau - \tau_{11}$ points unis, dont $\Phi$ est l'image. Entre $\Phi_1$, $\Phi_2$, existe donc une correspondance (2,2). Désignons par $F_1$ la surface représentant les couples de points homologues dans cette correspondance. La surface $F_1$ possède deux involutions d'ordre deux, permutables ; l'une possède $2\,\tau_{12}$ points unis et a $\Phi_1$ comme image, l'autre possède $2\,\tau_{11}$ points unis et a $\Phi_2$ comme image. Le produit des transformations génératrices de ces involutions engendre à son tour une involution du second ordre, privée de points unis, ayant F comme image. On arrive ainsi au théorème suivant (**23**).

*Si une surface algébrique d'irrégularité* q $> 2$ *contient une involution régulière d'ordre deux, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, elle est à son tour l'image d'une involution d'ordre deux, privée de points unis, appartenant à une surface algébrique.*

Nous avons en outre démontré que la surface $F_1$ avait la même irrégularité que F.

22. **Surface irrégulière contenant une involution de même irrégularité**. — Soit F une surface d'irrégularité $q$ contenant une involution $I_p$ d'irrégularité $q$ également et n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Construisons comme précédemment le système $|C|$ sur F et sur la surface $\Phi$ image de $I_p$, les systèmes $|\Gamma|$, $|\Gamma_1|$, ..., $|\Gamma_{p-1}|$.

Le système $|\Gamma|$ appartient à un système continu complet $\}\Gamma\{$, formé de $\infty^q$ systèmes linéaires. A ces systèmes correspondent, sur F, $\infty^q$ systèmes formant le système complet $\}C\{$ déterminé par $|C|$.

Les courbes des systèmes linéaires de $\}\Gamma\{$ ne passent pas en général par les points de diramation de $\Phi$ et par conséquent, chaque système linéaire de $\}C\{$ contient $p$ systèmes linéaires partiels composés au moyen de $I_p$ ; les courbes de l'un de ces systèmes ne passent pas par les points unis de $I_p$, mais s'il existe de tels points, les courbes des $p-1$ autres systèmes les contiennent. On en conclut que si $I_p$ possède effectivement des points unis, les surfaces F, $\Phi$ ont même variété de Picard.

Supposons maintenant que $I_p$ soit dépourvue de points unis. Dans chacun des systèmes linéaires de $\}C\{$, il y a $p$ systèmes linéaires composés au moyen de $I_p$. Les systèmes linéaires correspondant sur $\Phi$ appartiendront, dans un certain ordre, aux systèmes continus complets $\}\Gamma\{, \}\Gamma_1\{, \cdots, \}\Gamma_{p-1}\{$.

Si les systèmes $\}\Gamma\{, \}\Gamma_1\{$ sont distincts, on a une relation fonctionnelle

$$\} p\Gamma \{ = \} p\Gamma_1 \{$$

et le diviseur de Severi $\sigma$ de $\Phi$ est multiple de $p$. Les surfaces F, $\Phi$ ont même variété de Picard. Si le diviseur $\sigma$ de $\Phi$ n'est pas multiple de $p$, les systèmes $\}\Gamma\{, \cdots, \}\Gamma_{p-1}\{$ coïncident. Soient alors $V_q$, $V_q'$ les variétés de Picard de F, $\Phi$. A un point de $V_q$ correspondent $p$ points de $V_q'$ et on a, sur cette variété, une involution $I_p'$, d'ordre $p$, dont $V_q$ est l'image. Comme chaque système $|C|$ de $\}C\{$ contient $p$ systèmes linéaires composés au moyen de $I_p$, l'involution $I_p'$ est privée de points unis.

On en conclut que (**25, 36**).

*Si une surface* F *irrégulière contient une involution d'ordre* p, *n'ayant qu'un nombre fini de points unis, de même irrégularité ; si l'involution* $I_p$ *possède effectivement des points unis, la surface* F *et la surface* $\Phi$ *image de* $I_p$ *ont même variété de Picard ; si* $I_p$ *est dépourvue de points unis et si le diviseur de* $\Phi$ *étant multiple de* p, *les surfaces* F, $\Phi$ *peuvent avoir même variété de Picard ; dans les autres cas la variété de Picard de* $\Phi$ *contient une involution d'ordre* p, *privée de points unis, dont l'image est la variété de Picard de* F.

23. **Involutions d'ordre quelconque**. — Considérons

maintenant, sur F, une involution cyclique $I_m$, d'ordre $m$ quelconque, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Désignons encore par T la transformation birationnelle génératrice de $I_m$.

Les points unis de l'involution $I_m$ ne sont pas nécessairement des points unis de T. Si $p$ est un facteur de $m$, il peut exister des groupes de $\frac{m}{p}$ points dont chacun est transformé en lui-même par $T^p$, mais non par T.

Pour construire une surface image de l'involution $I_m$, on procédera de la manière suivante : soient $p$ un facteur premier de $m$, $I_p$ l'involution engendrée sur F par la transformation $T^q$, où $m = pq$. Chaque groupe de $I_m$ sera composé de $q$ groupes de $I_p$. Construisons une surface normale $\Phi_1$, image de $I_p$. A l'involution $I_m$ correspond sur $\Phi_1$ une involution $I_q$, d'ordre $q$, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Soit alors $\Phi_1'$ une transformée birationnelle de $\Phi$, dépourvue de points singuliers. Si $p_1$ est un facteur premier de $q$, on recommencera l'opération précédente sur la surface $\Phi_1'$. Et ainsi de suite.

Le même procédé peut servir pour construire une surface image d'une involution $I_m$ d'ordre $m$, n'yant qu'un nombre fini de points unis, engendrée par un groupe de transformations de la surface F en elle-même.

On remarquera que, dans tous les cas, on peut construire sur F un système linéaire $|C|$, transformé en lui-même par les transformations génératrices de $I_m$, et contenant un système linéaire partiel $|C_0|$ composé au moyen de $I_m$, dont les courbes n'ont pas pour points-base des points unis de l'involution. Il suffit de reprendre le raisonnement fait au début de cet exposé, en appliquant au système $|C_1'|$ toutes les transformations génératrices de $I_m$ et leurs différentes puissances. En rapportant projectivement les courbes $C_0$ aux hyperplans d'un espace convenablement choisi, on obtiendra une surface normale $\Phi$ image de $I_m$. Il s'agira alors de déterminer les singularités de $\Phi$ aux points de diramation.

Observons d'ailleurs qu'en étendant un théorème de MM. Enriques et Severi relatif aux surfaces hyperelliptiques, nous avons pu démontrer que toute involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique, est engendré par un groupe de transformations birationnelles de cette surface en elle-même (**17**).

24. **Application aux surfaces ayant une courbe canonique ou pluricanonique d'ordre zéro.** — Les premières recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique ont porté sur le cas où la surface contenant l'involution et la surface image ont des courbes canoniques ou pluricanoniques d'ordre zéro. Ces surfaces sont :

1° Les surfaces hyperelliptiques (surfaces de Picard et surface de Jacobi), de genres $p_g = P_4 = 1$, $p_a = -1$. Ces surfaces possèdent une courbe canonique d'ordre zéro (et par suite une courbe $i$-canonique d'ordre zéro). Tout système linéaire de genre $\pi$ tracé sur la surface a le degré $2\pi - 2$ et la division $\pi - 2$ ; il appartient à un système continu $\infty^2$ ;

2° Les surfaces de genres un, caractérisées par $p_a = P_4 = 1$. Ces surfaces possèdent une courbe canonique d'ordre zéro (et par suite une courbe $i$-canonique d'ordre zéro). Toute courbe de genre $\pi$ tracée sur la surface appartient à un système linéaire complet de degré $2\pi - 2$ et de dimension $\pi$ ;

3° Les surfaces de bigenre un, caractérisées par $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$. Ces surfaces possèdent une courbe bicanonique et une courbe $2i$-canonique d'ordre zéro, mais sont dépourvues de courbes canonique et $(2i+1)$-canoniques. Une courbe de genre $\pi$ tracée sur la surface appartient à un système linéaire complet de degré $2\pi - 2$ et de dimension $\pi - 1$.

Considérons une correspondance rationnelle $(1, m)$ entre deux surfaces $\Phi$, F appartenant à l'une des catégories précédentes, en tenant compte du fait, dans le choix de $\Phi$, que le genre géométrique $p_g$ et l'irrégularité $p_g - p_a$ de $\Phi$ sont respectivement au plus égaux au genre géométrique et à l'irrégularité de F. L'involution $I_m$, d'ordre $m$, ainsi déterminée sur F, ne peut avoir une courbe unie, car celle-ci appartiendrait à la courbe canonique de la surface. Cette involution ne possède donc qu'un nombre fini de points unis et par suite elle est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface F en elle-même. Ce théorême a été démontré par MM. Enriques et Severi (**11**) dans le cas où la surface F est hyperelliptique, par M. Enriques (**10**) dans le cas où la surface F est de genres un, par nous (**14**) lorsque F est de bigenre un.

Le problème de la détermination des singularités de la surface $\Phi$ aux points de diramation est simplifié dans le cas actuel par le fait que cette surface (supposée normale) ne peut posséder de point de multiplicité supérieure à deux. Par conséquent, si $m$ est premier, un point de diramation est un point double conique ($m = 2$) de la surface $\Phi$ ou un point double biplanaire ($m > 2$) auquel sont infiniment voisins successifs une suite de $\frac{1}{2}(m - 3)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire.

Supposons $m = p$ premier impair et reprenons les notations du cas général. La surface normale $\Phi$ a l'ordre $n = 2\pi - 2$ ; la surface normale F a l'ordre $2p(\pi - 1)$. Un point A de F, uni pour l'involution $I_p$, est nécessairement, d'après ce qui précède, un point uni non parfait. Il convient ici de faire une observation. Supposons pour plus de simplicité $p = 3$ ; dans le domaine du point A, il existe deux points $A_1$, $A_2$, unis parfaits pour $I_2$. Si l'on projette la surface F à partir de A sur un hyperplan de $\Sigma_0$ ne passant pas par A, on obtient une surface F', contenant une involution $I_3'$, projection de $I_3$, possédant deux points unis parfaits $B_1$, $B_2$, projections de $A_1$, $A_2$. Il semble donc qu'il y ait ici une contradiction. Il n'en est cependant rien, car la surface F' n'est pas une surface normale, puisque le système des sections hyperplanes de cette surface n'est pas complet.

Les involutions appartenant aux surfaces envisagées ici ont été étudiées en détail. Le cas où la surface F est hyperelliptique a été considéré par MM. Enriques et Severi (**11**) d'une part, par Bagnera et M. De Franchis (**2**) d'autre part, en utilisant le fait que les coordonnées d'un point d'une telle surface s'expriment en fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres. En particulier, parmi ces surfaces se trouve la surface de Jacobi, représentant les couples de points d'une courbe de genre deux. Et les involutions appartenant à une surface de Jacobi dérivent des involutions appartenant à une courbe de genre deux.

Nous avons étudié les cas où F et $\Phi$ sont de genres un (**12**), ou de genres zéro et de bigenre un (**14**), et enfin le cas où F est de genres un, $\Phi$ étant de genres zéro et de bigenre un (**15**).

## BIBLIOGRAPHIE


*Ouvrages concernant la géométrie algébrique*

I. Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Paris, 1897, 1906.
II. Severi, *Lezioni di Geometria algebrica*, Padoue, 1908.
III. Castelnuovo et Enriques, *Die algebraischen Flächen vom Gesichtpunkte der birationalen Transformations aus, Encyklopädie der mathem. Wissenschaften*, Leipzig, 1915.
IV. Enriques et Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Bologne, 1915, 1918, 1924, 1934.
V. Severi, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Leipzig, 1921.
VI. Lefschetz, *L'*Analysis situs *et la géométrie algébrique*, Paris, 1924.
VII. Enriques et Chisini, *Courbes et fonctions algébriques d'une variable* (trad. Légaut), Paris, 1927.
VIII. Severi, *Trattato di Geometria algebrica*, Bologne, 1927.
IX. Lefschetz, *Géométrie sur les surfaces et les variétés algébriques*, Paris, 1929.
X. Severi, *Conferenze di Geometria algebrica*, Rome, 1930.
XI. Picard, *Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques*, Paris, 1931.
XII. Enriques et Campedelli, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, Padoue, 1932.

*Mémoires*

1. Albanese, G., *Corrispondenze algebriche fra i punti di due superficie algebriche* (*Boll. dell' Unione matematica Italiana*, 1932, pp. 131-138 ; *Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa*, 1934, pp. 1-26, 149-182).
2. Bagnera, G. et De Franchis, M., *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellitiche di due argomenti* (*Mem. R. Soc. Italiana delle Scienze*, 1908, pp. 251-343).
— *Le nombre ρ de M. Picard pour les surfaces hyperelliptiques et pour les surfaces irrégulières de genre zéro* (*Rend. Circolo matematico di Palermo*, 1910, t. XXX, pp. 185-238).
3. Chillemi, G., *Sulle superficie iperellittiche* (*Rend. Circolo matematico di Palermo*, 1910, t. XIX, pp. 164-168).
4. Comessatti, A., *Sulle superficie di Jacobi semplicements singolari* (*Mem. R. Soc. italiana delle Scienze*, 1919, pp. 5-31).
5. — *Sulle trasformazioni involutorie delle varietà algebriche* (*Atti R. Istituto Veneto*, 1925-1926, pp. 471-494).
6. — *Sulle superficie multiple cicliche* (*Rend. Seminario matematico di Padova*, 1930, pp. 1-45).
7. Cotty, G., *Les fonctions abéliennes et la théorie des nombres* (*Annales de la Fac. des Sciences de Toulouse*, 1912, pp. 209-376).

8. ENRIQUES, F., *Ricerche di geometria sulla superficie algebriche* (*Memorie R. Accad.*, Torino, 1893, pp. 171-232).
9. — *Le superficie di genere uno* (*Rend. R. Accad. Bologna*, 1908-1909, pp. 25-28).
10. ENRIQUES, *Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno* (*Rend. R. Accad. Bologna*, 1909-1910, pp. 71-75).
11. ENRIQUES, F. et SEVERI, F., *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (*Acta Mathematica*, 1909, p. 32, pp. 283-392, t. 33, pp. 321-399).
12. GODEAUX, L., *Sur les transformations rationnelles entre deux surfaces de genres un* (*C. R.*, août 1912, pp. 421-423).
— *Classification des involutions de genres un appartenant à une surface de genres un* (*C. R.*, juin 1913, pp. 1737-1739).
— *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un* (*Annales de l'Ecole normale supérieure*, 1914, pp. 357-430 ; 1919, pp. 51-70).
— *Sur les surfaces de genres un, triples, douées d'un nombre fini de points de diramation* (*C. R.*, décembre 1914, pp. 1002-1004).
— *Sur les surfaces du quatrième ordre possédant six points doubles biplanaires ordinaires* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1922, pp. 443-456).
— *Sur les involutions cycliques d'ordre quatre appartenant à une surface de genres un* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1923, pp. 75-88, 360-379, 459-483).
— *Sur les involutions d'ordre huit appartenant à une surface de genrs un* (*Mém. Acad. roy. de Belgique*, 1924, pp. 1-33).
— *Recherches sur les correspondances rationnelles du sixième ordre entre deux surfaces de genres un* (*Mém. Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1928, pp. 1-42).
14. — *Sur les involutions appartenant à une surface de genres zéro et de bigenre un* (*C. R.*, avril 1913, pp. 1306-1308).
— *Sur les involutions appartenant à une surface de genres* $p_g = p_g = 0$, $P_6 = 1$ (*Bull. Soc. Mathém. de France*, 1913, pp. 178-194).
— *Mémoire sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un* (*Bull. Soc. Mathém. de France*, 1915, pp. 89-117).
15. — *Recherche des involutions de genres zéro, bigenre un, appartenant à une surface de genres un* (*Annaes da Acad. do Porto*, 1916, pp. 65-78).
16. — *Sur les surfaces algébriques doubles n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation* (*C. R.*, mai 1914, pp. 1263-1265).
— *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (*Annales de la Fac. des Sciences de Toulouse*, 1914, pp. 289-312).
17. — *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique* (*Rend. R. Accad. Lincei*, mars 1914, pp. 408-413).
— *Sur les involutions appartenant à une surface algébrique* (*C. R.*, sept. 1916, pp. 261-262).
— *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique* (*Bull. Soc. Mathém. de France*, 1919, pp. 1-16).
18. — *Sur certaines surfaces de diviseur supérieur à l'unité* (*Bull. Acad. de Cracovie*, 1914, pp. 362-368).
— *Exemples de surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité* (*Bull. des Sc. Mathém.*, 1915, pp. 182-185).
19. GODEAUX, L., *Mémoire sur les surfaces algébriques liées à une courbe de genre trois* (*Arxius de l'Institut de Ciencias*, Barcelone, 1917, pp. 89-107).

20. — *Recherches sur les involutions cubiques appartenant à une surface algébrique* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1921, pp. 105-124).
21. — *Sur une involution rationnelle, douée de trois points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique de genre trois* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1921, pp. 653-665, 694-702).
22. — *Sur les surfaces de Picard de diviseur deux* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1927, pp. 394-414).
23. *Sur une propriété des surfaces algébriques irrégulières contenant une involution régulière d'ordre deux* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1927, pp. 524-543).
24. — *Sur les involutions régulières d'ordre trois appartenant à une surface irrégulière* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1927, pp. 707-724).
25. — *Sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques ayant même irrégularité* (*Bull. Acad. Roumaine*, 1927, pp. 16-19).
26. *Sur les correspondances ponctuelles entre surfaces* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1929, pp. 408-420).
27. — *Sur les points unis des involutions cycliques d'ordre trois appartenant à une surface algébrique* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1929, pp. 553-560).
28. *Sur les homographies planes cycliques* (*Mém. Soc. roy. des Sciences de Liège*, 1929, pp. 1-26).
— *Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies cycliques* (*Mém. Soc. roy. des Sciences de Liège*, 1930, pp. 1-24).
— *Sur les courbes tracées sur la surface représentant l'involution engendrée par une homographie plane cyclique* (*Mém. Soc. roy. des Sciences de Liège*, 1931, pp. 1-14).
29. — *Sur les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*C. R.*, janvier 1930, pp. 154-155).
— *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1930, pp. 468-465 ; 1931, pp. 1131-1150 ; pp. 1356-1364).
30. — *Sur certaines involutions du sixième ordre appartenant à une surface de genres un* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1932, pp. 311-321).
31. *Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une surface algébrique régulière* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1932, pp. 672-679).
32. *Sur une quadrique double de genres un* (*Mathematica*, 1933, pp. 136-143).
33. — *Sur l'existence d'involutions rationnelles, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique* (*Bulletin des Sc. Mathématiques*, 1933, pp. 7-14).
34. — *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (Paris, Hermann, 1934, 33 p.).
35. — *Sur certaines surfaces algébriques irrégulières* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1933, pp. 674-680).
36. — *Sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques irrégulières* ( *Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1933, pp. 992-997).
37. HUMBERT, G., *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques* (*Journal de Math. pures et appliquées*, 1893, pp. 27-171, 361-475).
38. — *Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois* (*Journal de Math. pures et appliquées*, 1896, pp. 263-293).
39. — *Sur les fonctions abéliennes singulières* (*Journal de Math. pures et appliquées*, 1899, pp. 233-350 ; 1900, pp. 279-386 ; 1901, pp. 97-123, 395-417).
40. JOHNSON, R. F., *Involutions of order two associated with surfaces of*

*genera* $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$, $P_3 = 0$ (*Amer. Journal of Math.*, 1933, pp. 199-213).

41. Lefschetz, S., *On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to abelian varietes* (*Trans. Amer. math. Soc.*, 1921, pp. 327-482).
42. — *Intersections and transformations of complexes and manifolds* (*Trans. Amer. math. Soc.*, 1926, pp. 1-49).
43. Lo Voi, A., *Sui cicli lineari di una superficie algebrica dotata di torsione* (*Rend. R. Istituto Lomb.*, 1932, pp. 1038-1044).
44. Maroni, A., *Sistemi lineari speciali, sopra una superficie algebrica, composti con une involuzione di coppie di punti* (*Atti R. Istituto Veneto*, 1929-1930, pp. 559-565).
45. — *Su di una formula relativa a due superficie in corrispondenze algebrica, analoga a quella di Zeuthen per le curve algebriche* (*Rend. Seminario Matem. di Cagliari*, 1934, pp. 3-8).
46. Piazzolla-Beloch, M., *Sulle superficie iperellittiche del 4° ordine con 15 punti doppi* (*Rend. Circolo matem. di Palermo*, 1923, pp. 182-192).

— *Sulle superficie iperellittiche del 4° ordine con 14 punti doppi*, 1924, pp. 41-96.

— *Intorno alla iperellitticità di certe superficie del 4° ordine con 15 punti doppi* (*Rend. Circolo matem. di Palermo*, 1926, pp. 285-297).

— *Intorno alla iperellitticità di certe superficie del 4° ordine con 14 punti doppi* (*Rend. Circolo matem. di Palermo*, 1926, pp. 345-367).

— *Intorno alla iperellitticità di certe superficie del 4° ordine con 13 punti doppi* (*Rend. Circolo matem. di Palermo*, 1927, pp. 49-69).

— *Sulle imagine proiettive delle superficie iperellittiche di rango 2* (*Rend. Circolo matem. di Palermo*, 1927, pp. 70-76).

— *Sulle superficie iperellittiche di rango 3* (*Mem. R. Accad. Lincei*, 1931, pp. 136-166).

47. Painlevé, P., *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, Paris, 1897, p. 610, in-4°.
48. Picard, E., *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (*Journal de Math. pures et appliquées*, 1889, pp. 135-319).
49. Remy, L., *Sur certaines surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois* (*Journal de Math. pures et appliquées*, 1908, pp. 1-37).

— *Sur une classe de surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois* (*Annales de l'Ecole norm. sup.*, 1909, pp. 193-258).

50. Scorza, G., *Intorno alla teoria generale delle matrice di Riemann e ad alcune sue applicazioni* (*Rend. Circolo matem. di Palermo*, 1916, pp. 263-380).
51. Severi, F., *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica* (*Rend. R. Istituto Lomb.*, 1903, pp. 495-511).
52. — *Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continua permutabile a due parametri di trasformazioni birazionali* (*Atti R. Istituto Veneto*, 1907-1908, pp. 409-419).
53. *La serie canonica e la teoria delle serie principali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica* (*Commentarii Mathematici Helvetici*, 1932, pp. 268-326).

— *Un nuovo campo di ricerche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica* (*Mem. R. Acad. d'Italia*, 1932, pp. 5-52).

— *Nuovi contributi alla teoria delle serie di equivalenza sulle varietà algebriche* (*Mem. R. Accad. d'Italia*, 1933, pp. 71-129).

— *La teoria delle serie di equivalenza e delle corrispondenze a valenza* *sopra una superficie algebrica* (*Rend. R. Accad. Naz. dei Lincei*, 1° sem. 1933, pp. 419-425, 491-497, 597-600, 681-685, 759-764, 869-876, 876-881.

54. SPAMPINATO, N., *Le trasformazioni birazionali periodiche sulle superficie iperellittiche con due fasci di curve ellittiche* (*Annali di Matematica*, [3], XXX, 1921, pp. 257-274).

— *Intorno alle involuzioni situate sopra le superficie iperellittiche con due fasci di curve ellittiche* (*Annali di Matematica*, [3], XXXI, 1932, pp. 127-149).

55. — *Le involuzioni sulle superficie iperellittiche generate da gruppi di trasformazioni della superficie in sè* (*Note e Memorie del Circolo matem. di Catania*, 1922, pp. 355-370 ; 1923, pp. 1-23).

56. VERZI, M., *Sulla costruzione delle superficie iperellittiche cicliche* (*Rend. Circolo matem. Palermo*, 1922, pp. 263-307 ; 1924, pp. 209-266).

57. TRAYNARD, E., *Sur les fonctions thêta de deux variables et les surfaces hyperelliptiques* (*Annales de l'Ecole norm. sup.*, 1907, pp. 77-177).

58. ZEUTHEN, H. G., *Le principe de correspondance pour une surface algébrique* (*C. R.*, octobre 1906, pp. 491-496, 535-539).

## TABLE DES MATIÈRES


| | | |
|---|---|---|
| 1. | Préliminaires | 7 |
| 2. | Construction d'un modèle projectif de la surface F | 8 |
| 3. | Position des points unis de l'involution | 10 |
| 4. | Construction d'un modèle projectif de la surface $\Phi$ | 11 |
| 5. | Classification des points unis | 11 |
| 6. | Points unis parfaits | 12 |
| 7. | Exemple d'une involution possédant des points unis parfaits | 13 |
| 8. | Classification des points unis non parfaits | 14 |
| 9. | Etude des points unis non parfaits | 15 |
| 10. | La surface $\Phi_0$ | 17 |
| 11. | Examen de deux cas particuliers | 18 |
| 12. | Multiplicité du point A' pour la surface $\Phi$ | 19 |
| 13. | Les homographies planes cycliques | 19 |
| 14. | Les points unis non parfaits des involutions du troisième ordre | 22 |
| 15. | Relations fonctionnelles entre les courbes tracées sur $\Phi$ | 24 |
| 16. | Involutions dépourvues de points unis | 25 |
| 17. | Relations entre les invariants des surfaces F et $\Phi$ | 26 |
| 18. | Involutions régulières appartenant à une surface irrégulière | 28 |
| 19. | Construction d'involutions irrégulières appartenant à une surface irrégulière | 29 |
| 20. | Conditions pour qu'une surface représente une involution | 30 |
| 21. | Involutions régulières du second ordre appartenant à une surface irrégulière | 32 |
| 22. | Surface irrégulière contenant une involution de même irrégularité | 33 |
| 23. | Involutions d'ordre quelconque | 34 |
| 24. | Application aux surfaces ayant une courbe canonique ou pluricanonique d'ordre zéro | 36 |
| | Bibliographie | 39 |


Imp. G. Thone, Liège (Belgique)