CONSTRUCTION DE VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES DÉPOURVUES DE VARIÉTÉ CANONIQUE

Nota (*) di LUCIEN GODEAUX
Accademico Corrispondente straniero
(Liége - Belgique)

RIASSUNTO - Costruzione di varietà algebriche senza varietà canonica ma aventi un'infinità di varietà bicanoniche.

Dans une note déjà ancienne [1], nous avons construit une surface non rationnelle privée de courbe canonique mais possédant des courbes bicanoniques, précisément une surface du septième ordre possédant quatre droites doubles tacnodales, côtés d'un quadrilatère gauche, ayant les genres $P_g = 0$, $P_2 = 2$, $P_3 = 4$, les sections planes formant le système tricanonique. Repensant récemment à cette question, nous nous sommes aperçu qu'en utilisant une propriété que nous avions établie ultérieurement, on pouvait simplifier cette construction et que celle-ci pouvait être étendue aux variétés à plusieurs dimensions. C'est l'objet de cette note. Précisément, nous établissons le théorème suivant:

Si une hypersurface algébrique d'ordre premier $p = 2\nu + 1$ ($\nu > 1$) dans un espace S_{p-2} à $p - 2$ dimensions contient une involution cyclique d'ordre p privée de points unis, engendrée par une homographie de l'espace, l'image de cette involution est une variété algébrique à $p - 3$ dimensions privée de variété canonique mais possédant une infinité de variétés bicanoniques. On a précisément $P_g = 0$, $P_2 = \nu$, $P_3 = 2\nu(\nu + 1):3$.

(*) Trasmessa dall'Accademico Benedettino Prof. MARIO VILLA e presentata per mezzo del Segretario perpetuo nella seduta del 28 maggio 1972.

[1] *Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux* (Rendiconti della Accademia dei Lincei, 2° sem. 1931, pp. 470-481). C'était la première surface irréductible non rationnelle privée de courbe canonique trouvée depuis les surfaces de CASTELNUOVO et d'ENRIQUES (1896). Ajoutons qu'à la même époque, M. CAMPEDELLI a établi l'existence de plans doubles non rationnels privés de courbe canonique *Sui piani doppi con curva di diramazione dell'ottavo ordine* (Rendiconti della Accademia dei Lincei, 1° sem. 1932, pp. 203-208); *Sui piani doppi con curva di diramazione del decimo ordine* (Idem., pp. 358-362); *Sopra alcuni piani doppi notevoli con curva di diramazione del decimo ordine* (Idem., pp. 536-542).

1. – Soit dans un espace S_{p-1} à $p-1$ dimensions une homographie H de période $p = 2\nu + 1$, p étant premier et $\nu > 1$, d'équations

$$x'_0 : x'_1 : \ldots x'_i : \ldots : x'_{p-1} = x_0 : \varepsilon x_1 : \ldots : \varepsilon^i x_i : \ldots : \varepsilon^{p-1} x_{p-1} \,,$$

où ε est una racine primitive d'ordre p de l'unité. L'homographie H possède p points unis, sommets de la figure de référence.

Les hyperquadriques de S_{p-1} transformées en elles-mêmes par H et dont l'équation se reproduit multipliée par $\varepsilon^0 = 1$ quand on effectue H, sont représentées par

$$\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1 x_{p-1} + \ldots + \lambda_i x_i x_{p-i} + \ldots + \lambda_\nu x_\nu x_{\nu+1} = 0 \,.$$

Cette équation contient $\nu+1$ termes et représente un système linéaire $|Q_0|$ de dimension ν. On observera que chacune des variables $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$ figure dans un seul terme de l'équation.

Effectuons sur l'équation de Q_0 la transformation

$$T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & & x_{p-1} & x_0 \\ x_0 & x_1 & x_2 & & x_{p-2} & x_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Elle donne une équation contenant $\nu+1$ termes tous distincts qui, lorsque l'on applique H, se reproduisent multipliés par ε^2. Cette équation représente une système linéaire $|Q_2|$ de dimension ν.

En effectuant sur l'équation de $|Q_2|$ la transformation T, nous obtenons une équation représentant un système linéaire $|Q_4|$ de dimension ν. Et ainsi de suite. On obtient finalement p systèmes linéaires d'hyperquadriques transformés en eux-mêmes par H,

$$|Q_0|, |Q_1|, \ldots, |Q_{p-1}|$$

tous de dimension ν qui, lorsque l'on effectue H sur leurs équations, celles-ci se reproduisent multipliées par $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-1}$. Chacune des variables $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$ intervient une et une seule fois dans les termes d'une des équations des systèmes.

2. – Considérons dans l'hyperplan $x_{p-1} = 0$ une hypersurface V d'ordre p, irréductible et ne passant pas par les points unis de l'homographie H, transformée en soi par celle-ci. Cette homographie engendre sur V une involution cyclique I d'ordre p privée de points unis. Nous désignerons par Ω une variété à $p-2$ dimensions image de cette involution.

Le système canonique de la variété V, d'ordre p, dans un espace à $p-2$ dimensions, est découpé par les hypersurfaces d'ordre $p - (p-1) = 1$, c'est-à-dire par les hyperplans. Nous désignerons par W ces variétés canoniques. Le genre géométrique de V est donc $P_g = p-1$.

Dans le système canonique $|W|$ de V, il y a $p-1$ sections hyperplanes transformées en elles-mêmes par H, ce sont les sections de V par les faces de la figure de référence. Nous les désignerons par $W_0, W_1, \ldots, W_{p-1}$ et sur la variété Ω, il leur correspond des variétés $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{p-1}$:

Les hyperquadriques des systèmes $|Q_0|, |Q_1|, \ldots, |Q_{p-1}|$ découpent sur l'hyperplan $x_{p-1} = 0$ des systèmes d'hyperquadriques que nous appelerons $|Q'_0|, |Q'_1|, \ldots, |Q'_{p-1}|$ et qui ont tous la dimension $\nu - 1$ puisque x_{p-1} figure dans un seul terme des équations de chacune des huperquadriques $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{p-1}$.

3. – Une variété canonique de Ω, si elle existe, a pour homologue sur V une variété canonique appartenant à l'involution I, c'est-à-dire une des variétés $W_0, W_1, \ldots, W_{p-1}$.

Les variétés bicanoniques de Ω ont pour transformées sur V des variétés bicanoniques, c'est-à-dire des variétés découpées par des hyperquadriques de $x_{p-1} = 0$.

Observons que les hyperquadriques linéairement indépendantes de S_{p-2} sont au nombre de $p\nu$. Parmi ces hyperquadriques, il y a p systèmes linéaires de dimension $\nu - 1$ appartenant à l'involution I et d'après la théorie des homographies, on doit avoir $p(\nu-1) + p = p\nu$, donc il n'existe aucune hyperquadrique de S_{p-1} transformée en soi par H qui n'appartienne pas à l'un des systèmes $|Q'_0|, |Q'_1|, \ldots, |Q'_{p-1}|$. Il en résulte que les transformées des variétés bicanoniques de Ω appartiennent à l'un de ces systèmes.

4. – Le système canonique complet de V étant celui de ses sections hyperplanes, le système canonique d'une de celles-ci est découpé par les hyperquadriques. En particulier sur la section hyperplane W_0, le système canonique complet est découpé par les hyperquadriques et ce système contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I. Ce sont les systèmes découpés par les hyperquadriques $Q'_0, Q'_1, \ldots, Q'_{p-1}$. Comme chacune des équations de ces hyperquadriques contient un terme et un seul contenant x_0, les systèmes découpés sur W_0 par ces hyperquadriques ont tous la dimension $\nu - 2$ sauf cependant le système découpé par les hyperquadriques Q'_{p-1} car dans l'équation de Q_{p-1} figure le terme $x_0 x_{p-1}$ et l'équation de Q'_{p-1} ne contient donc plus de terme en x_0.

Nous avons démontré (²) que si une variété à un nombre impair de dimensions contient une involution cyclique privée de points unis, le système canonique de cette variété contient autant de systèmes appartenant à l'involution qu'il y a d'unités dans l'ordre de l'involution et que ces systèmes ont tous la même dimension sauf l'un d'eux qui a une dimensions supérieure d'une unité et qui est le transformé du système canonique de la variété image de l'involution.

Actuellement, le nombre de dimensions de la variété W_0 est $p-4$, nombre impair et le système découpé par les hyperquadriques $Q'_{\nu-1}$ a la dimension $\nu-1$, alors que ceux découpés par les hyperquadriques $Q'_0, Q'_1, \dots, Q'_{\nu-2}$ ont la dimension $\nu-2$. Le transformé du système canonique de la variété Ω_0 est donc le système découpé par les hyperquadriques $Q'_{\nu-1}$. Si la variété Ω possédait une variété canonique, l'adjoint à Ω_0 contiendrait cette variété, mais alors le système $|Q'_{\nu-1}|$ contiendrait W_0, ce qui est impossible. Par conséquent:

La variété Ω est dépourvue de variété canonique.

5. – Considérons le système d'hyperquadriques $|Q_i|$. Son équation contient un terme en $x_{i+1}x_{\nu-1}$, donc l'equation de $|Q'_{i+1}|$ ne contient plus de terme en x_{i+1}. En reprenant le raisonnement précédent, on voit que les adjointes à la variété Ω_0 correspondent aux variétés découples par les hyperquadriques Q'_i. On voit donc que les systèmes $\Omega'_1, \Omega'_2, \dots, \Omega'_{\nu-2}$ respectivement adjoints à $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{\nu-2}$ ont pour homologues sur V les systèmes découples par $Q'_0, Q'_1, \dots, Q'_{\nu-3}$.

Si nous appliquons ceci au système $|\Omega'_0|$, on voit qu'il lui correspond sur V le système $|Q'_{\nu-1}|$, qui coïncide évidemment avec le système $|Q'_{\nu-1}|$.

Reste le système $|Q'_{\nu-2}|$.

Nous avons déjà observé que si Ω possède des variétés bicanoniques, il leur correspond sur V des variétés découples par $Q'_0, Q'_1, \dots, Q'_{\nu-1}$. Or, les biadjointes de Ω ne peuvent être adjointes à $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{\nu-1}$, c'est donc le système $|Q'_{\nu-2}|$ qui donne le transformé du système bicanoniques de Ω et inversement, aux variétés $Q'_{\nu-2}$ correspondent nécessairement des variétés bicanoniques de Ω.

La variété Ω a le bigenre $P_2 = \nu$.

Observons que le système découpé sur V par les hyperquadriques $Q'_{\nu-2}$ contient les variétés

$$W_0 + W_{\nu-2},\ W_1 + W_{\nu-3},\ \dots,\ W_{\gamma-2} + W_{\gamma+1},\ W_{\gamma-1} + W_{\gamma}\,.$$

(²) *Sur une propriété des correspondances rationnelles entre deux variétés algébriques* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1938, pp. 291-297).

Il en résulte que le système bicanonique de Ω contient les variétés

$$. \quad \Omega_0 + \Omega_{p-2},\ \Omega_1 + \Omega_{p-3},\ \dots,\ \Omega_{\nu-2} + \Omega_{\nu+1},\ \Omega_{\nu-1} + \Omega_\nu$$

et est d'ailleurs déterminé par ces variétés.

6. – Le système tricanonique de Ω est l'adjoint au système bicanonique. Or, le système adjoint à Ω_0 contient les variétés

$$\Omega_1 + \Omega_{p-2},\ \Omega_2 + \Omega_{p-3},\ \dots$$

et on a

$$(\Omega_0 + \Omega_{p-2})' \equiv \Omega_1 + 2\Omega_{p-2}\,.$$

A la variété du second membre correspond sur V la variété $W_1 + W_{p-2}$ et cette variété est découpée sur V par une hypersurface cubique de $x_{p-1} = 0$ transformée en elle-même par H, dont l'équation se reproduit multipliée par ε^{p-3} lorsque l'on effectue H sur cette équation. Le trigenre de Ω est donc égal au nombre de ces hypersurfaces cubiques linéairement indépendantes. Pour déterminer ce nombre, retournons à l'espace S_{p-1}.

Si nous écrivons l'équation d'une hypersurface cubique de S_{p-1} qui, lorsque l'on effectue H, se reproduit multipliée par 1, et si nous appliquons à cette équation successivement les transformations $T, T^2, \dots$, nous obtenons les équations d'hypersurfaces cubiques qui, lorsque l'on effectue H, se reprouisent multipliées par une puissance de ε. Toutes ces équations seront au nombre de p et contiendront toutes le même nombre de termes. Si r est ce nombre, on doit avoit d'après la théorie des homographies,

$$pr = \binom{p+2}{3},$$

c'est-à-dire

$$r = \tfrac{1}{3}(\nu+1)(2\nu+3)\,.$$

Remarquons que ce nombre est entier, car p étant premier, $\nu - 1$ ne peut être multiple de 3.

Dans ces équations, les termes contenant x_{p-1} sont au nombre de $\nu + 1$, donc le trigenre de Ω est

$$P_3 = r - (\nu+1) = \frac{2\nu(\nu+1)}{3}\,.$$

Le trigenre de la variété Ω est $P_3 = 2\nu(\nu+1):3$.