*Acta Científica Compostelana*, IX (1-2), 89-109 (1972).

# LE DEVELOPPEMENT DE LA GEOMETRIE ALGEBRIQUE DEPUIS CREMONA

PAR

LUCIEN GODEAUX

Profesor «éméritus» de la Universidad de Liège (Bélgica)

La Géométrie algébrique a subi depuis un siècle de nombreux accroissements et il nous a paru intéressant d'en dresser le bilan à grands traits. Nous avons commencé cette étude à l'époque où Cremona bâtit la théorie des transformations birationnelles. Le développement de la Géométrie avant cette époque a été décrit par Michel Chasles dans son *Aperçu Historique* et dans le Rapport qu'il écrivit en 1870. D'austre part on doit à Brill et Noether une étude très fouillée sur la théorie des fonctions algébriques.

M. Chasles, «Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne». Bruselles, Mémoires de l'Académie royale de Belgique, 1837, 2e éd. en 1875. «Rapport sur les progrè de la Géométrie». Paris, Imprimerie Nationale, 1870.

Brill et Noether «Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit». Leipzing, Teubner. 1894.

## Transformations birationnelles ou cremoniennes

1. On appelle transformation birationnelle entre deux plans une correspondance généralement biunivoque entre les points de ces plans telle que les coordonnées d'un point de chacun des plans s'expriment en fonctions rationnelles des coordonnées du point homologue de l'austre plan.

Dans une transformation birationnelle T entre les points de deux plans $\sigma$, $\sigma'$, aux points d'une droite a de $\sigma$ correspondent les point d'une courbe rationnelle A' de $\sigma'$ et aux points d'une droite a' de $\sigma$, correspondent ceux d'une courbe A de $\sigma$. Les courbes A et A' ont le même ordre n. Ces courbes forment des réseaux $|A|$, $|A'|$.

Au point commun à deux droites a' de $\sigma'$ correspond un point commun oux courbes A homologues (donc deux courbes A se rencontrent en un seul point, variable avec les courbes). Les courbes A ont en commun un certain nombre de points $O_1, O_2, \ldots, O_\nu$ respectivement multiples d'ordres $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$. En exprimant que le réseau $|A|$ est de degré un et que les courbes A sont rationnelles, on a (Cremona)

$$\left.\begin{array}{l} s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_\nu^2 = n^2 - 1 \\ s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu = 3 (n-1) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

De même, les courbes A' ont en commun le même nombre $\nu$ de points $O'_1, O'_2, \ldots, O_\nu'$, multiples d'ordres $s'_1, s'_2, \ldots, s_\nu'$, nombres liés par des relations analogues aux (1).

Les réseaux $|A|$, $|A'|$ sont appelés *réseaux homaloïdaux*. Entre le réseau $|A|$ (ou $|A'|$) et l'ensemble des droites du plan $\sigma'$ (ou $\sigma$), on a une projectivité en ce sens qu'à un faisceau de courbes A (ou A') correspond un faisceau de droites de $\sigma'$ (ou de $\sigma$).

La connaissance de l'un des réseaux homaloïdaux $|A|$, $|A'|$ suffit pour déterminer la transformation T. Il convient de remarquer qu'une solution en nombres entiers positifs des équations (1) ne donne pas toujours un réseau homaloïdal formé de courbes irréductibles.

Les points-base des réseaux $|A|$, $|A'|$ sont appelés *points fondamentaux* de T.

2. Supposons qu'en chacun des points-base du réseau $|A|$, les courbes A aient des tangentes variables. L'homologue du point $O_1$, par exemple, est indéterminé. On lève cette indétermination de la manière suivantes:

Considérons une droite p passant par $O_1$ et les courbes A qui touchent cette en ce point. Elles forment un faisceau auquel correspond dans $\sigma'$ un faisceau de droites de sommet P'. On convient de dire que le point P' est l'homologue du point (fictif) P' infiniment voisin de $O_1$ sur p. Lorsque la droite p tourne autour de $O_1$, le point P' décrit une courbe rationnelle $\Omega'_1$, d'ordre $s_1$, appelée *courbe fondamentales* associée au point $O_1$.

Dans le plan $\sigma'$, on a $\nu$ courbes fondamentales $\Omega'_1, \Omega'_2, \ldots, \Omega'_\nu$ d'ordres $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$. Chacune de ces courbes ne peut être rencontrée par les courbes A' en dehors des points-base et deux de ces courbes ne peuvent se rencontrer en dehors des mêmes points.

La jacobienne du réseau $|A'|$ estfformée des courbes $\Omega'_1$, $\Omega'_2, \ldots, \Omega'_\nu$.

Si de même les courbes $A'$ ont des tangentes variables aux points-base de $|A'|$, on a, dans $\sigma$, $\nu$ courbes fondamentales $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\nu$, d'ordres $s'_1, s'_2, \ldots, s'_\nu$. La multiplicité $\alpha_{ik}$ du point $O_i$ pour la courbe $\Omega_k$, est égale à celle du point $O'_k$ pour la courbe $\Omega'_i$.

On peut construire une surface F, d'ordre $2n+2$, appartenant à un espace à $n+4$ dimensions, dont les sections hyperplanes correspondent projectivement aux courbes des systèmes complets $|a+A|$, $|a'+A'|$. A l'ensemble d'un point fondamental $O_i$ et de la courbe fondamentale associée $\Omega'_i$ correspond une courbe rationnelle $G_i$ d'ordre $s_i$ et à l'ensemble $O'_k$, $\Omega_k$ correspond une courbe $G'_k$ d'ordre $s'_k$. Si l'on désigne par C, C' les courbes qui correspondent sur F aux droites et aux courbes A de $\sigma$, on a les ralations fonctionnelles

$$C' \equiv nC - s_1 G_1 - s_2 G_2 - \ldots - s_\nu G_\nu,$$
$$G'_i \equiv s'_i C - \alpha_{1i} G_1 - \alpha_{2i} G_2 - \ldots - \alpha_{\nu i} G_{\nu i} \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

et des relations analogues en intervertissant les rôles des plans $\sigma$, $\sigma'$. De ces relations, on déduit facilement les relations existant entre les entiers $n$, $s$, $s'$, $\alpha$.

Les points-base des réseaux $|A|$, $|A'|$ peuvent être infiniment voisins. La détermination des courbes fondamentales se fait de la manière suivante: supposons que $O_2$ soit infiniment voisin de $O_1$. On considère une courbe $\gamma$ passant simplement par $O_1$, $O_2$ et les courbes A rencontrant $\gamma$ en $s_1+s_2+1$ points confondus en ces points, c'est-à-dire les courbes A passant par le point P infiniment voisin de $O_2$ sur $\gamma$. Ces courbes forment un faisceau auquel correspond un faisceau de droites de sommet P', l'homologue de P. Lorsque $\gamma$ varie, le point P' décrit une courbe fondamentale $\Omega'$.

3. Les transformations birationnelles les plus simples, en dehors de l'homographie, sont les transformations quadratiques, définies en partant d'un réseau homaloïdal de coniques (coniques passant par trois points, ou par deus points avec une tangente déterminée en l'un de ceux-ci, ou coniques osculant l'une d'entre elles en un point). Les réseaux sont même nature dans les deux plans.

Si l'on range les nombres $s_1, s_2, \ldots$ en ordre non décroissant, on a $s_1+s_2+s_3 > n$. Noether en a déduit que par un nombre fini de transformations quadratiques, on peut transformer un réseau homaloïdal quelconque en le réseau des droites. Ou encore que toute transformations birationnelle est le produit d'un nombre fini de transformations quadratiques (à trois points fondamentaux). La démonstration rigoureuse du théorème de Noether est due à Castelnuovo et à Chisini.

4. La définition d'une transformation birationnelle se transporte immédiatement à l'espace. Une transformation birationnelle entre deux espaces $\Sigma$, $\Sigma'$ est une correspondance généralement biunivoque telle que les coordonnées d'un point d'un des espaces s'expriment en fonctions rationnelles des coordonnées du point homologue et réciproquement.

Aux points d'un plan $\alpha$ de $\Sigma$ correspondent les points d'une surface A' d'ordre n'et aux points d'un plan $\alpha'$ de $\Sigma'$ correspondent les points d'une surface A d'ordre n, qui peut être distinct de n'. Les surfaces A forment un système linéaire de dimensión 3 et trois surfaces n'appartenant pas à un même faisceau se rencontrent en un seul point, variable avec les surfaces. Ce système est appelé *systéme homaloïdal.* Les surfaces $|A'|$ forment également un système homaloïdal.

Les plans de $\Sigma$ et les surfaces A', les plans de $\Sigma'$ et les surfaces A se correspondent projectivement. A une droite a de $\Sigma$, T fait correspondre une courbe d'ordre n, intersection variable de deux surfaces A'. A une droite de $\Sigma'$, correspond dans $\Sigma$ une courbe d'ordre n', intersectión de deux surfaces A en dehors de la base.

La base des systèmes $|A|$, $|A'|$ est constituée de points multiples et de courbes multiples; ce sont les *éléments fondamentaux* de la transformation.

La connaissance d'un des systèmes $|A|$, $|A'|$ suffit pour déterminer la transformation.

5. Considérons un point O multiple d'ordre r pour les surfaces A et supposons que les cônes tangents en ce point à ces surfaces soient variables. Les surfaces A touchant en O une droite p forment un réseau auquel correspond une gerbe de plans de sommet P'. Ce point est l'homologue du point P infiniment voisin de O su P. Lorsque p varie, P' décrit une surface fondamentale, rationnelle, $\Omega'$ dont l'ordre est égal à la multiplicité du point O pour les courbes homologues des droites de $\Sigma'$.

Considérons une courbe $\Gamma$ d'ordre $\nu$, multiple d'ordre s pour les surfaces A. Supposons que les plans tangents aux surfaces A en un point de $\Gamma$ soient variables. Les surfaces A tangentes en un point P de $\Gamma$ à un plan $\varpi$ tangent en P à $\Gamma$, forment un réseau auquel correspond une gerbe de plans de sommet P'. Celui-ci est l'homologue des points du plan $\varpi$ infiniment voisins de P. Lorsque le plan $\varpi$

tourne autour de la tangente à $\Gamma$ en P, le point P' décrit une courbe rationnelle $\Gamma'$. Lorsque le point P décrit la courbe $\Gamma$, ou bien la courbe $\Gamma'$ varie et décrit une surface fondamentale $\Phi'$, ou bien cette courbe reste fixe. Dans le premier cas, la courbe $\Gamma$ est fondamentale de première espèce, dans le second, de seconde espèce.

Lorsque la courbe $\Gamma$ est fondamentale de première espèce, la courbe $\Gamma'$ est d'ordre s et engendre un faisceau sur la surface $\Phi'$. L'ordre de celle-ci est égal au nombre de points d'appui de transformées des droites de $\Sigma'$ sur la courbe $\Gamma$, variables avec les droites.

Lorsque la courbe $\Gamma$ est fondamentale de seconde espèce, aux plans passant par un point $P'$ de $\Gamma'$ correspondent des surfaces A ayant, en chaque point de $\Gamma'$, $\lambda$ plans tangents communs. On a $s = \lambda\nu'$, $\nu'$ étant l'ordre de $\Gamma'$. La multiplicité de $\Gamma'$ pour les surfaces A' est $s' = \lambda\nu$ et $\Gamma'$ est à son tour fondamentale de seconde espèce.

La jacobienne de $|A'|$ est formée des surfaces fondamentales $\Omega'$, $\Phi'$, les première étant comptées deux fois.

On peut représenter les couples de points homologues dans une transformation T par les points d'une variété à trois dimensions V dont les sections hyperplanes correspondent aux surfaces de systèmes complets $|\alpha+A|$ et $|\alpha'+A'|$. Aux éléments fondamentaux correspondent sur V des surfaces et on peut trouver facilement les relations entre les entiers intervenant dans la définition des systèmes $|A|$ et $|A'|$.

Si h est le nombre des points fondamentaux de $|A|$ et k celui des courbes fondamentales, et si h', k' ont la même signification pour $|A'|$, on a $h+k=h'+k'$.

6. Les systèmes homaloïdaux formés de quadriques sont: le système des quadriques passant par un point et une conique dont le plan ne passe pas par le point, le système des quadriques passant par une droite et par trois points, le système des quadriques passant par quatre points et touchant un plan en l'un d'eux. Dans le second espace, le système homaloïdal est formé de quadriques, de surfaces cubiques et de surfaces du quatrième ordre.

Il ne peut exister, pour les transformations birationnelles de l'espace, un théorème analogue à celui de Noether pour les transformations du plan.

## BIBLIOGRAPHIE

Enriques - Chisini, « Courbes et fonctions algébriques d'une variable ». (Paris, Gauthier - Villars, 1926).

L. Godeux, «Les transformations birationnelles du plan». Memorial des Sciences Mathématiques, N.° CXXII (Paris, Gauthier-Villars, 1953).

L. Godeaux, « Les transformations birationnelles de l'espace ». Mémorial des Sciences Mathématiques, N.° LXVII (Paris, Gauthier-Villars, 1934).

L. Godeaux, «Géométrie algébrique», Tome I (Paris, Masson, 1948).

**Proprietes projectives des courbes algébriques**

1. Une courbe algébrique plane peut être définie comme l'ensemble des points dont les coordonnées homogènes satisfont à une équation $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ où f est un polynome entier, rationnel et homogène. L'ordre d'une courbe C est le nombre de ses points de rencontre avec une droite (degré de f), sa classe est le nombre des tangentes que l'on peut mener par un point. On peut attacher à la courbe C ses *premières polaires* $\Sigma y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, ses polaires d'ordre k, obtenues en appliquant k fois l'opération précédente, la *hessienne*, lieu des points doubles pour les premières polaires, la *steinerienne,* lieu des points dont les premières polaires ont un point double, la *cayleyenne,* enveloppe des droites joignant les points homologues de la hessienne et de la steinerienne. La hessienne passe par les points d'inflexion de C. Les propriétés de C sont les interprétations géométriques de de la théorie des formes algébriques.

Si la courbe C est d'ordre n et de classe m, possède d points doubles ordinaires *(nodes)*, r points de rebroussement *(cuspides),* i points d'inflexion et t tangentes doubles, on a les formules de Plücker

$$m = n(n-1) - 2d - 3r, \quad i = 3n(n-2) - 6d - 8r,$$
$$n = m(m-1) - 2t - 3i, \quad r = 3m(m-2) - 6t - 8i.$$

Un système linéaire de dimension r de courbes est l'ensemble des courbes dont les coefficients dépendent linéairement de r paramètres non homogènes. Si r=1, c'est un faisceau, si r=2, c'est un réseau. Par r points du plan passe une courbe du système et en général une seule.

La *jacobienne* d'un réseau est le lieu des points tels que les courbes passant par un de ces points y ont même tangente. Une de ces courbes possède un point double au point considéré.

2. Considérons la transformation birationnelle T,

$$x = x', \ y = x'y'.$$

Elle fait correspondre à deux courbes algébriques

$$y = ax + f_2(x, y) + f_3(x, y) + \dots, \quad y = ax + g_2(x, y) + g_3(x, y) + \dots \qquad (1)$$

se touchant à l'origine, les f et les g étant des polynomes homogènes dont le degré est indiqué par l'indice, les courbes

$$\left.\begin{aligned} y' &= a + x'f_2(1, y') + x'^2 f_3(1, y') + \dots, \\ y' &= a + x'g_2(1, y') + x'^2 g_3(1, y') + \dots \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

se coupant au point $x'=0$, $y'=a$. On convient de dire que les courbes (1) ont en commun un *point* fictif *infiniment voisin* de O sur la droite $y=ax$ et que T fait correspondre à ce point fictif le point proprement dit $x'=O$, $y'=a$. L'ensemble des points fictifs infiniment voisins de O est le *domaine du premier ordre* de O, il correspond à la ponctuelle $x'=O$.

Soit $O_1$ un point infiniment voisin de O et $O'_1$ le point que T lui fait correspondre sur $x'=O$. Au domaine du premier ordre de $O'_1$, $T^{-1}$ fait correspondre des points fictifs dits infiniment voisins de $O_1$. L'ensemble des points infiniment voisins des points du domaine du premier ordre de O constitue *le domaine du second ordre* de O. On définit de même les domaines du troisième, quatrième,... ordres du point O.

Soit C une courbe algébrique ayant en O un point multiple d'ordre s,

$$f_s(x, y) + f_{s+1}(x, y) + \dots = O. \qquad (1)$$

T lui fait correspondre la courbe

$$f_s(1, y') + x' f_{s+1}(1, y') + \dots = O. \qquad (2)$$

Supposons que les points $x'=O$, $f_s(1, y')=O$ se répartissent en t points multiples d'ordres $s_1, s_2, \dots, s_t$ pour la courbe (2). On a $s_1+s_2+\dots+s_t \leq s$, car la courbe (2) peut toucher la droite $x'=O$ en certains points de rencontre. On dit que la courbe C possède, dans son domaine du premier ordre, des points $O_1, O_2, \dots, O_t$ multiples d'ordres, $s_1, s_2, \dots, s_t$. On obtiendra les points du domaine du second ordre de O et leurs multiplicités en opérant des transformations analogues à T en chacun des points $x'=O$, $f_s(1, y')=O$, et ainsi de suite. Il existe un domaine d'ordre fini du point O dans lequel la courbe C n'a plus que des points simples. Supposons que l'on ait trouvé une suite de points $O_1$, $O_{11}$,... infiniment voisins successifs de O, le dernier étant simple pour C. S'il est possible de trouver une courbe ayant des points simples en O, $O_1$, $O_{11}$,..., on dit que ces points appartiennent à une *branche linéaire* d'origine O de la coube. C. Dans le cas opposé, on dit que cette suite de points appartient à une *branche superlinéaire* de la courbe C. Un point double ordinaire est l'origine de deux branches linéaires. Un point de rebroussement est l'origine d'une branche superlinéaire, la transformée de la courbe par T touchant la courbe $x'=O$.

Par un nombre fini de transformations quadratiques, on peut transformer une courbe en une courbe n'ayant que des points doubles ordinaires (nodes). Si n est l'ordre de la courbe et d le nombre des points doubles, le genre p de cette courbe est défini par $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d$.

3. Une courbe algébrique gauche ou plus généralement une courbe appartenant à un espace linéaire àrdimensions, se définit comme une transformée rationnelle d'une courbe algébrique plane. On a, en coordonnées homogènes,

$$x_i = f_i(u_1, u_2, u_3), \ (i=O, 1, \ldots, r), \ g(u_1, u_2, u_3) = O,$$

Pour r=3, *l'ordre* n d'une courbe C est le nombre de ses points de rencontre avec un plan, son *rang* r est le nombre de ses plans tangents passant par une droite. Le lieu des tangentes à C *(développable* circonscrite) est l'enveloppe de ses plans osculateurs, son ordre est r et sa classe est égale au nombre de plans osculateurs passant par un point.

Le nombre h des cordes ou bisécantes d'une courbe gauche C passant par un point est appelé nombre de *points doubles apparents*. La projection de C sur un plan à partir d'un point est une courbe d'ordre n possédant h points doubles. Le genre p de cette courbe est le genre de C. Halphen a introduit le nombre k, ordre minimum du cône contenant les cordes de C passant par un point. Les nombres n, h, k ne suffisent pas pour caractériser une famille de courbes.

Dans une famille de courbes algébriques hyperspatiales, il existe des courbes limites formées de droites dont la configuration est caractéristique, configuration déterminée par M. Severi.

Dans l'espace ordinaire, une courbe C d'ordre n peut être représentée par les équations:

$$f_n(x_1, x_2, x_3) = O, \ x_4 g_{m-1}(x_1, x_2, x_3) = g_m(x_1, x_2, x_3),$$

$f_n = O$ représentant le cône projetant la courbe du point (0, 0, 0, 1) supposé ne pas appartenir à la courbe et la seconde étant un *monoïde* (surface d'ordre m ayant un point multiple d'ordre m - 1). Les deux surfaces ont en commun, en dehors de la courbe C, n (m-1) droites (representation de Cayley). Cette représentation s'étend aux courbes hyperspatiales.

4. Les droites s'appuyant en trois points sur une courbe gauche C *(trisécantes)* forment une réglée d'ordre $\frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3) - p(n-2)$, passant $\frac{1}{2}(n-2)(n-3) - p$ fois par la courbe, n étant l'ordre et p le genre de celle-ci.

Il existe en général un nombre fini de droites s'appuyant en quatre points sur une courbe gauche *(tétrasécantes)*. Ce nombre est égal à

$$\sum_{i=0}^{2} (-1)^{i} \frac{1}{3-i} \binom{n-2-i}{2-i} \binom{n-3-i}{2-i} \binom{p}{i}$$

5. L'étude des points singuliers d'une courbe gauche peut se faire par une méthode analogue à celle qui a été utilisée pour les courbes planes. La transformation T doit être remplacée par

$$x = x', \ y = x'y', \ z = x'z',$$

qui fait correspondre aux points (fictifs) infiniment voisins de O les points du plan $x' = O$. On définira de la même manière les domaines des différents ordres du point O et l'analyse de la singularité d'une courbe en O.

6. Les propriétés de certaines courbes ont été étudiées d'une manière approfondie.

Une cubique plane C sans point double possède neuf points d'inflexion, situés sur la hessienne H, qui est également une cubique. Les courbes C et H déterminent un faisceau contenant quatre courbes dégénérées en trois droites. Chacune de ces douze droites passe par trois points d'inflexion et cette configuration est caractéristique.

Une quartique plane sans points double posséde 24 points d'inflexion et 28 bitangentes. Elle est l'enveloppe de 63 systèmes de coniques, de dimension un et d'indice deux, chaque conique touchant la courbe en quatre points. Les 56 points de contact des bitangentes appartiennent huit par huit à 315 coniques.

Une quintique gauche rationnelle possède une tétrasécante ou elle en possède une infinité. Dans ce cas, ces tétrasécantes sont les génératrices d'une quadrique.

## BIBLIOGRAPHIE


Clebsch - Lindeman, « Leçons sur la Géométrie » (traduction Benoist), tome II, Paris, Gauthier - Villars, 1880.

Comessatti, «Sur la classification des courbes algébriques et sur le théorème d'existence de Riemann» (à propos d'un ouvrage de M. Severi). Bulletin des Sciences Mathématiques, 1922.

Enriques - Chisini, «Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche». Bologne, Zanichelli, 1915, 1918, 1924.

L. Godeaux, « Introduction à la Géométrie supérieure ». Liège, Thone, 1946. «Géométrie algébrique», tome I, Paris, Masson, 1948.

Halphen, «Classification des courbes gauches algébriques». Oeuvres, tome III, Paris, Gauthier - Villars, 1921.

Severi, «Vorlesungen ueber algebraische Geometrie». Leipzig, Teubner, 1921.

## Proprietes projectives des surfaces algébriques

1. Une surface algébrique F est l'ensemble des points dont les coordonnées homogènes, réelles ou imaginaires, satisfont à une équation $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = O$ où F est un polynome entier, rationnel et homogène. L'ordre n de F est le nombre de ses points de rencontre avec une droite, sa classe m est le nombre de ses plans tangents passant par une droite. A la surface F on attache ses premières *polaires* $\Sigma y \frac{\partial F}{\partial x} = O$, ses polaires d'ordre k, $\left(\Sigma y \frac{\partial}{\partial x}\right)^k F = O$, sa *hessienne,* lieu des points doubles des premières polaires.

Le plan tangent à F en un point P coupe F suivant une courbe C ayant un point double en P, les tangentes étant les tangentes asymptotiques. Si le point P est de rebroussement, le point est dit parabolique. La courbe parabolique de F se trouve sur la hessienne.

Une surface F peut posséder des points multiples isolés, les tangentes en un point multiple formant un cône, ou des courbes multiples. En un point d'une courbe multiple d'ordre s, la surface possède s plans tangents, tangents également à la courbe multiple.

Une surface réglée est le lieu d'une droite. Une surface *développable* est une surface engendrée par les tangents à une courbe, appelée *arête de rebroussement* (ou en particulier un cône ou un cylindre). Une surface réglée non développable est une *réglée gauche*. Son ordre n est égal à sa classe. Une réglée gauche possède nécessairement une courbe double rencontrant les génératrices en n - 2 points.

2. Considérons la transformation birationnelle T d'équations

$$x = x', \; y = x'y', \; z = x'z'$$

et deux surfaces

$$\begin{aligned} y &= ax + f_2(x, y, z) + f_3(x, y, z) + \ldots, \\ z &= bx + g_2(x, y, z) + g_3(x, y, z) + \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

ayant une tangente commune en O, les f et les g étant des polynomes homogènes dont le degré est indiqué par l'indice.

T transforme ces surfaces en

$$\begin{aligned} y' &= a + x' f_2(1, y', z') + x'^2 f_3(1, y', z') + \ldots, \\ z' &= b + x' g_2(1, y', z' + x'^2 g_3(1, y', z') + \ldots \end{aligned}$$

passant par le point $x' = O$, $y' = a$, $z' = b$. On convient de dire qu'à ce point, $T^{-1}$ fait correspondre un point fictif infiniment voisin de O sur la droite $y=ax$, $z=bx$, commun aux surfaces (1). Aux points du plan $x'=O$, $T^{-1}$ fait correspondre tous les points fictifs infiniment voisins de O, formant le domaine du premier ordre de O. On définit le domaine du second ordre de O comme l'ensemble des points fictifs que $T^{-1}$ fait correspondre aux domaines du premier ordre des points du plan $x'=O$, et ainsi de suite.

Si l'on applique T à une surface

$$f_s(x, y, z) + f_{s+1}(x, y, z) + \ldots = O$$

ayant un point multiple d'ordre s en O, on obtient une surface F' coupant le plan $x' = O$ suivant une courbe $x' = O$, $f_s(1, y', z') = O$. Celleci peut contenir des points isolés multiples pour la surface F' et des parties multiples pour la surface F'. On connaîtra ainsi les singularités de F dans le domaine du premier ordre du point O. Ce point peut donc contenir, dans son domaine du premier ordre, des courbes simples ou multiples, infiniment voisines de O. On obtiendra les singularités de F dans le domaine du second ordre de O en effectuant sur la surface F' des transformations analogues à T aux différents points de la courbe $x'=O$, $f_s(1, y', z')=O$. Et ainsi de suite.

Il n'existe pas nécessairement un domaine d'ordre fini du point O dans lequel la surface F n'a que des points simples.

En un point double d'une surface où le cône tangent se réduit à un plan compté deux fois *(point double uniplanaire),* cette surface possède dans le domaine du premier ordre du point une droite simple sur laquelle se trouvent trois points doubles, ou une droite double *(tacnodes).*

3. Une surface algébrique appartenant à un espace projectif à $r > 3$ dimensions est une transformée rationnelle d'une surface de l'espace ordinaire. On a, en coordonnées homogènes,

$$x_i = f_i(u_0, u_1, u_2, u_3),\ (i=O, 1, 2, \ldots, r),\ g(u_0, u_1, u_2, u_3)=O.$$

L'ordre de la surface est le nombre de ses points appartenant à un espace à r-2 dimensions. Si la surface n'appartient pas à un espace ayant moins de r dimensions, on a $r \leq n + 1$, n étant l'ordre de la surface.

Une surface F, d'ordre n, admet une représentation monoïdale (Halphen). Appelons $\alpha$ l'espace à r-4 dimensions $x_0=x_1=x_2=x_3=O$ et supposons qu'il n'ait aucune relation avec F et en particulier qu'il ne la rencontre pas. Soit $f(x_0, x_1, x_2, x_3)=O$ l'équation du cône projetant F de $\alpha$. La surface F est représentée par les équations

$$f = O, \; x_i \, g(x_0, x_1, x_2, x_3) = g_i(x_0, x_1, x_2, x_3), \; (i = 4, 5, \ldots, r). \quad (2)$$

où g est un polynome de degré m-1 et les $g_i$ des polynomes de degré m. Les variétés (2) ont en commun, en dehors de la surface F, une variété à r-2 dimensions, lieu des espaces linéaires à r-3 dimensions passant par $\alpha$ et par les points de la courbe $f = O$, $g = O$ de l'espace $x_4 = x_5 = \ldots = x_r = O$. La *représentation monoïdale* est utile dans la recherche des points communs à F et à une variété algébrique à r-2 dimensions (Halphen et Noether).

4. Une surface rationnelle F est donnée par

$$x_i = f_i(O, u_1, u_2, u_3), \; (i = O, 1, \ldots, r), \; u_0 = O.$$

A un point du plan $u_0 = O$ correspond un point de la surface, mais ce point peut correspondre à k points du plan. On peut toujours, en remplaçant les u par des fonctions rationnelles $v_1$, $v_2$, $v_3$ des u, supposer que l'on a $k = 1$ (Castelnuovo). On obtient ainsi une représentation biunivoque de la surface sur un plan. Aux sections hyperplanes de F correspondent dans le plan des courbes C formant un système linéaire à r dimensions. La connaissance du systéme $|C|$ entraîne celle de la surface.

Une surface rationnelle admet une infinité de représentations planes, les systèmes $|C|$ correspondant se réduisant l'un à l'autre par des transformations birationnelles. On peut donc supposer que les *points-base* de $|C|$ (points communs à toutes les courbes C) sont des points multiples à tangentes variables. Deux courbes C se rencontrent en n points en dehors des points-base.

A un point-base de $|C|$, ou mieux à son domaine du premier ordre, correspond sur F une courbe rationnelle. A une *courbe fondamentale* de C, c'est-à-dire à une courbe qui n'est pas rencontrée par les courbes C en dehors des points-base, correspond un point en général multiple de F.

Un système linéaire $|C'|$ contenu dans $|C|$ et de dimension r', représente une surface F' projection de F à partir d'un espace à r - r'-1 dimensions, sur un espace à r' dimensions.

Si F est une quadrique, $|C|$ est le système des coniques passant par deux points. (Si la quadrique est un cône, les deux points sont infiniment voisins). Si F est une surface cubique de l'espace ordinaire, $|C|$ est le système des cubiques planes passant par six points. Si F est une surface cubique de l'espace à quatre dimensions, $|C|$ est le système des coniques passant par un point. Aux droites passant par ce point, correspondent des droites tracées sur F, qui est réglée.

BIBLIOGRAPHIE

Bertini, «Introduzione ella Geometria proiettiva degli iperspazi». Pisa, Spoerri, 1907. «Complementi di Geometria proiettiva». Bologna, Zanichelli, 1928.

Enriques - Chisini, «Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche». Bologna, Zanichelli, 1915, 1918, 1824.

Godeaux, «Introduction à la Géométrie supérieure». Liège, Thone, 1946. «Géométrie algébrique», tome I. Paris, Masson, 1948.

Segre C., « Sullas composizione dei punti singolari delle superficie algebriche ». Opere, tome I, Roma, Cremonese, 1957.


## Géométrie sur une courbe algébrique

1. Le but de cette géométrie est de déterminer les conditions pour que deux courbes algébriques soient transformées birationnelles l'une de l'autre. (Sans que cette transformation puisse s'étendre, en tant que transformation birationnelle, aux espaces ambiants).

Soit C une courbe algébrique irréductible. Une *série linéaire* de groupes de points sur C est un ensemble de groupes G de n points tel que: 1°) r points de la courbe appartiennent à un groupe G et en général à un seul; 2°) on puisse établir une correspondance biunivoque entre les groupes G et les points d'un espace linéaire à r dimensions. La série est dite d'ordre n et de dimension r; on la représente par $g^r_n$ ou par $|G|$. Lorsque $r > 1$, la seconde condition est superflue.

Deux groupes $G_1$, $G_2$ appartenant à une même serie linéaire sont dits équivalents; on écrit $G_1 \equiv G_2$. Deux séries linéaires de même ordre ayant un groupe en commun appartiennent à une même série linéaire. Une série linéaire est dite *complète* s'il n'existe en dehors de la série aucun groupe de points équivalent aux groupes de la série.

La somme $|G+H|$ de deux séries $|G|$, $|H|$ est l'ensemble des groupes de points équivalents à un groupe de $|G|$ joint à un groupe de $|H|$.

S'il existe des groupes d'une série $|G|$ contenant des groupes d'une série $|G_1|$, la série $|G\text{-}G_1|$ existe et est unique.

Le concept de série linéaire et les propriétés de ces séries sont invariants pour les transformations birationnelles de la courbe C.

2. Dans une $g^1_n$, il existe un certain nombre de groupes possédant un point double; l'ensemble de ces points doubles est le *groupe jacobien* de la série. Les groupes jacobiens $G_j$ des séries de dimension un tirées d'une série $|G|$ appartiennent à une série linéaire $|G_j|$, la *série jacobienne* de $|G|$.

Si l'on considère deux séries linéaires $|G|$, $|H|$, on a

$$(G + H)_j \equiv G_j + 2H \equiv H_j + 2G.$$

La série linéaire $|G_j - 2G|$, lorsqu'elle existe, est la *série canonique* $|K|$ de C. Elle ne dépend pas du choix de la série $|G|$ et si deux courbes sont transformées birationnelles l'une de l'austre, les séries canoniques se correspondent.

Prenons pour modèle projectif de C une courbe plane d'ordre n possédant d points doubles ordinaires, pour $|G|$ la série contenant la série $g^2_n$ découpée sur C par le droites du plan. La polaire d'un point P par rapport à C passe par les points doubles et par les points de contact des tangentes menées par P à C, c'est-à-dire par le groupe jacobien de la série $g^1_n$ découpé sur C par les droites passant par P. Les polaires, d'ordre n-1, découpent donc sur C des groupes jacobiens $C_j$ de $|G|$. Il en résulte que les courbes d'ordre n-3 passant par les points doubles de C découpent sur celle-ci les groupes canoniques K. On obtient précisément la série canonique complète de C. Si $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d$ est le genre de la courbe C, la série canonique est d'ordre $2p-2$ et de dimension $p-1$. La série jacobienne $|G_j|$ d'une série $|G|$ d'ordre n est d'ordre $2(n+p-1)$. Si $p = 0$ (courbes rationnelles), la série canonique n'existe pas. Si $p = 1$ (courbes elliptiques), la série canonique existe et est d'ordre zéro.

Le nombre *d'intégrales abéliennes* de première espèce linéairement indépendantes est égal à p et on peut prendre pour surface de Riemann attachée à C un disque à p trous.

Deux séries $g^1_m$, $g^1_n$ étant données, il existe $(m-1)(n-1)-p$ couples de points appartenant à la fois à des groupes de chacune des séries.

Si les groupes de la série canonique $|K|$ passant par un point $P_1$ passent en conséquence par k-1 points $P_2, P_3, \ldots, P_k$, on a $k = 2$ et les couples $P_1$, $P_2$ appartiennent à un série linéaires $g^1_2$. La courbe est hyperelliptique et chaque groupe K est formé de $p-1$ groupes de la série $g^1_2$.

3. Si une série $|G|$ contient un groupe appartenant à un groupe de la série canonique K, il en est de même de tous le groupes de la série et celle-ci est *spéciale*. Le nombre i des groupes K linéairement indépendants contenant un groupe G est l'*indice de spécialité* de $|G|$ et la dimension de cette série est $r = n - p + i$ (théorème de Riemann-Roch). On a $n \geq 2r$ (Clifford). Si aucun groupe de la série $|G|$ n'appartient à un groupe canonique, la série est non-spéciale.

On a $i=O$ et $r=n-p$. Une série linéaire d'ordre $2p-2$ distincte de la série canonique à la dimension $p-2$.

Supposons $n>2p-2$. Il existe sur $C\infty^n$ groupes de n points qui se distribuent en $\infty^p$ séries linéaires $g_n^{n-p}$. La variété. V, à p dimensions, dont les points représentent ces $\infty^p$ séries linéaires est une variété abélienne appelée *variété de Jacobi* attachée à la courbe C.

4. Pour que l'on puisse passer d'une courbe C à une courbe C' par une transformation birationnelle, il faut qu'elles aient même genre p et que certaines expressions, appelées *modules,* soient égales. Le nombre des modules d'une courbe de genre p, non hyperelliptique, est égal à 3p-3, si la courbe est hyperelliptique, ce nombre est 2p-1 ($p\geq 2$), si la courbe est elliptique, ce nombre est 1.

On peut prendre comme modèle projectif d'une courbe de genre p non hyperelliptique, une courbe d'ordre 2p-2 d'un espace linéaire $S_{p-1}$ à p-1 dimensions dont les sections hyperplanes sont les groupes canoniques, appelée *modéle canonique*. Les modules de la courbe sont les *invariants projectifs* de ce modèle, c'est-à-dire les expressions qui sont conservées lorsque l'on passe d'une courbe d'ordre 2p-2 à une courbe du même ordre par une homographie.

Une courbe hyperelliptique peut être représentée par l'équation $y^2=f(x)$, f étant un polynome de degré $2p+2$. Le nombre des modules est égal au nombre des conditions pour que deux groupes de $2p+2$ points sur une ponctuelle soient projectifs.

5. Considérons sur une courbe C de genre p une opération T qui fait correspondre à un point a un groupe B de $\beta$ points, $T^{-1}$ faisant correspondre à un point b un groupe A de $\alpha$ points, c'est-à-dire une correspondance $(\alpha, \beta)$.

S'il existe un entier positif $\gamma$ tel que les groupes $\gamma a+B$, $\gamma a'+B'$ soient équivalents, ou un nombre positif $\gamma'$ tel que les groupes $\gamma' a+B'$, $\gamma' a'+B$ soient équivalents, on dit que la correspondance a une *valence* $\gamma$ en posant dans le second cas $\gamma'=-\gamma$. La valence $\gamma$ d'une correspondance est un entier positif, nul ou négatif. Il existe des correspondances sans valence, mais la courbe C est alors à modules particulares.

Le nombre des points unis d'une correspondance à valence est (formule de Cayley - Brill)

$$u=\alpha+\beta+2\gamma p.$$

Considérons, sur la courbe C, une série simplement infinie de groupes de m points, d'indice $\nu$. Le nombre des points doubles de cette série est au plus égal à $2\nu\,(m-p+1)$. Si ce maximum est atteint, formant des groupes de $\nu m$ points équivalents, il en est de même des de la série (Severi).


BIBLIOGRAPHIE

Enriques - Chisini, «Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche». Tomes III et IV. Bologne, Zanichelli, 1924, 1934.
«Courbes et fonctions algébriques d'une variable». Paris, Gauthier - Villars, 1926.

Godeaux, «Géométrie algébrique», tome II. Paris, Masson, 1949. «Correspondances entre deux courbes algébriques». Mémorial des sciences mathématiques, fasc. CXI. Paris, Gauthier - Villars, 1949.

Severi, « Vorlesungen ueber algebraische Geometrie ». Leipzing, Teubner, 1921. «Trattato di Geometria algebrica», tome I. Bologne, Zanichelli, 1926.


## Géométrie sur une surface algébrique

1. Le but de cette géométrie est de déterminer les conditions dans lesquelles deux surfaces sont liées par une correspondance birationnelle (sans que cette correspondance puisse s'étendre en tant que correspondance birationnelle aux espaces ambiants). En d'autres termes si l'on place dans une même classe les surfaces qui se correspondent dans des transformations birationnelles, de déterminer les caractères de chaque classe. Ce problème est loin d'être résolu.

Soit F une surface algébrique irréductible. Un système linéaire de courbes tracées sur la surface est un ensemble $\infty^r$ de courbes algébriques tel que: 1°) par r points de F passe une courbe de l'ensemble et en général une seule; 2°) on peut établir une correspondance biunivoque entre les courbes de l'ensemble et les points d'un espace linéaire à r dimensions. Si $r>1$, la seconde condition est superflue, mais il existe des surfaces contenant un faisceau irrationnel de courbes (exemple des réglées de genre supérieur à zéro). Un systéme linéaire est représenté par $|C|$. Ses caractères sont la *dimension* r, le *degré effectif* n', nombre de points communs à deux courbes variables avec ces courbes, le *genre effectif* $\pi'$ de la courbe C générale. Si le système $|C|$ possède des points-base multiples d'ordre $i_1, i_2, \ldots$, le *degré virtuel* et le *genre virtuel* sont

$$n = n' + \Sigma i^2, \quad \pi = \pi' + \frac{1}{2}\Sigma i\,(i-1),$$

les points - base étant considérés comme virtuellement inexistants. Cette convention permet de donner plus de généralité aux formules.

Deux courbes $C_1$, $C_2$ appartenant à un même système linéaire sont dites équivalentes; on écrit $C_1 \equiv C_2$. Un système linéaire est complet s'il n'existe aucune courbe équivalente à une courbe du système et ne lui appartenant pas.

La somme de deux systèmes linéaires $|C_1|$, $|C_2|$, distincts ou non, est le système complet des courbes équivalentes à une courbe $C_1$ joint à une courbe $C_2$. On le représente par $|C_1+C_2|$. Si $n_1$, $n_2$ sont les degrés et $\pi_1$, $\pi_2$ les genres respectifs de $|C_1|$, $|C_2|$ et si $\nu$ est le nombre des points de rencontre d'une courbe $C_1$ et d'une courbe $C_2$, le degré n et le genre $\pi$ de $|C_1+C_2|$ sont

$$n = n_1 + n_2 + 2\nu, \pi = \pi_1 + \pi_2 + \nu - 1.$$

Si quelques courbes d'un système $|C|$ contiennent des courbes d'un système $|D|$, le système $|C-D|$ existe et est unique.

Une courbe tracée sur F et qui n'est pas rencontrée en des points variables par les courbes d'un système $|C|$, est une *courbe fondamentale* de ce système.

Si les courbes d'un système linéaire sont réductibles en parties variables, ces courbes sont composées au moyen des courbes d'un faisceau (Bertini).

Ces définitions sont invariantes pour les transformations birationnelles.

Dans une classe de surfaces algébriques, il existe une surface d'un espace linéaire à cinq dimensions privée de points multiples et une surface de l'espace à trois dimensions ayant comme seules singularités une courbe double et des points triples pour la courbe et la surface (Beppo Levi).

2. On appelle *jacobienne* $C_j$ d'un réseau $|C|$ le lieu d'un point P tel que les courbes C passant par ce point y ont même tangente; parmi ces courbes, il y en a une qui a un point double en P. Etant donné un système linéaire $|C|$, les jacobiennes des différents réseaux tirés de $|C|$ appartiennent à un système linéaire $|C_j|$ appelé *jacobien* de $|C|$. Si $|C|$, $|D|$ sont deux systèmes linéaires de dimensions au moins égales à deux, on a

$$(C + D)_j \equiv C_j + 3D \equiv D_j + 3C.$$

Le système $|C_j - 3C|$, s'il existe, ne dépend pas du choix de $|C|$; c'est le système canonique $|K|$ de F. Les systèmes canoniques de deux surfaces d'une même classe se correspondent.

Les courbes du système $|C_j - 2C|$ découpent, sur une courbe, C, des groupes canoniques de cette courbe. Il est appelé l'adjoint à $|C|$, et désigné par $|C'|$.

La dimension $p_g - 1$ du système canonique $|K|$ de F est un invariant. $p_g$ est appelé *genre géométrique* de F.

Si l'on prend comme modèle projectif de F une surface d'ordre n ayant une courbe double et des points triples pour la surface et la courbe, le système canonique est découpé par les surfaces d'ordre $n - 4$ adjointes, c'est-à-dire passant simplement par la courbe double. Si l'on *calcule* cette dimensions, on trouve un nombre $p_a - 1 \leq p_g - 1$. Le nombre $p_a$ est le *genre arithmétique* de F.

Si $p_a < p_g$, la série découpée sur une courbe C par les adjointes C' et $|C|$ n'est pas complète. Le nombre des groupes de la série canonique de C linéairement indépendants qui ne sont pas découpés par des courbes C' est $q = p_g - p_a$, nombre appelé defaut de la série (théorème de Picard). Le genre arithmétique $p_a$ est un invariant.

Le genre $p^{(1)}$ d'une courbe canonique K est appelé *genre linéaire* de F. Le degré du système $|K|$ est $p^{(1)} - 1$.

Si l'on désigne par $|C''|$ l'adjoint à $|C'|$, par $|C'''|$ l'adjoint à $|C''|$,..., les systèmes

$$|K_2| = |C'' - C|, \ |K_3| = |C''' - C|, \ldots$$

s'ils existent, sont appelés *systéme bicanonique, systeme tricanonique,...* de la surface F. On a

$$|C'' - C'| = |C' - C| = |K_1|, \text{ d'où } |C'' - C| = |2(C' - C)| = |2K|,$$

d'où $|K_2| = |2K|$ si $|K|$ existe, $|K_3| = |3K|, \ldots$. Les nombres de courbes linéairement indépendantes des systèmes $|K_2|$, $|K_3|, \ldots$ sont le *bigenre* $P_2$, le *trigenre* $P_3, \ldots$. On a $p_g \leq P_2 \leq P_3 \leq \ldots$

Il existe des surfaces pour lesquelles $P_g = O$, $P_2 \geq 1$.

3. Si $F_1$, $F_2$ sont deux surfaces d'une même classe, il existe entre elles une correspondance birationnelle T. Il peut se faire qu'il existe des points dont les homologues sont indéterminés. Si P est un tel point appartenant à $F_1$ par exemple, les points qui lui correspondent sur $F_2$ engendrent une courbe rationnelle p appelée *courbe exceptionnelle*. Si les surfaces $F_1$, $F_2$ appartiennent à la classe des réglées, il existe sur p un point P' auquel correspond sur $F_1$ une courbe exceptionnelle passant par P. Il n'en est pas de même pour les surfaces des autres classes. Si une surface F n'appartient pas à la classe des réglées, le nombre de ses courbes exceptionnelles est fini et il existe dans sa classe une surface dépourvue de courbes exceptionnelles (Enriques).

Si la surface F possède un système canonique (ce qui n'est pas le cas pour les réglées, les courbes exceptionnelles de la surface sont des composantes fixes du système canonique, mais les genres $p_a$, $p_g$, $P_2$, $P_3$,... ne sont pas modifiés, ce sont des *invariantes absolus.* Par contre $p^{(1)}$ est un *invariant relatif.*

Si $|C|$ est un faisceau linéaire de degré n et de genre $\pi$ possédant $\delta$ courbes ayant un point double, le nombre $I = \delta - n - 4\pi$ est un invariant relatif de la surface *(invariant de Zeuthen-Segre).* Il est idépendant du choix du faisceau $|C|$. On a $I + p^{(1)} = 12\,p_a + 9$ (formule de Noether).

4. On appelle série caractéristique d'un système linéaire $|C|$ la série de dimension $r-1$ découpée sur une courbe C par les austres courbes du système.

Une courbe C tracée sur une surface régulière F appartient en général à un système linéaire et sa série caracteristique est complète. Une courbe C tracée sur une surface d'irrégularité q appartient à un système continu $\{C\}$ en général formé de $\infty^q$ systèmes linéaires $|C|$ de mêmes caractères. La série caractéristique de chacun de ces systèmes linéaires a le défaut q. Une variété V à q dimensions dont les points représentent les $\infty^q$ systèmes linéaires $|C|$ d'un système continu $\{C\}$ est une variété abélienne appelée *variété de Picard* attachée à F.

Deux courbes appartenant à un même système continu sont dites algébriquement équivalentes, algébriquement indépendantes dans le cas opposé.

On appelle *série caractéristique* d'un système continu la série découpée sur une de ses courbes par les autres courbes du système. Cette série est en général complète.

Si la courbe générale C d'un système linéaire $|C|$ de degré n et de genre $\pi$ appartient à i courbes canoniques K linéairement indépendantes (i est l'*indice de spécialité* de C), la dimension r du système satisfait à l'inégalité (théorème de Riemann-Roch)

$$r \geq p + n - \pi + 1 - i$$

si le second membre est positif. Si $i > 0$, le système est dit *spécial.* Un système linéaire *non spécial* pour lequel l'égalité a lieu est dit régulier. Dans le cas opposé, le système est *surabondant.* La théorie de ces systèmes reste à faire.

5. Le genre géométrique $p_g$ d'une surface est égal au nombre d'intégrales doubles de première espèce attachées à la surface.

L'irrégularité q est égale au nombre d' *intégrales de Picard* (intégrales de différentielles totales) de première espèce attachées à la surface.

Des surfaces irrégulières de l'espace ordinaire ne peuvent former un système linéaire sauf si la courbe intersection variable de deux surfaces est réductible.

6. Sur une surface F il est possible de trouver $\rho$ courbes $C_1$, $C_2$,..., $C_\rho$ algèbriquement distinctes telle que si C est une courbe quelconque tracée sur la surface, il existe des entiers $\lambda$, $\lambda_1$, $\lambda_2$,..., $\lambda_\rho$ tels que les courbes $\lambda C$ et $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_\rho C_\rho$ appartiennent à un même système continu (Severi). Les courbes $C_1$, $C_2$,..., $C_\rho$ constituent une *base* sur la surface et $\rho$ est le *nombre-base*. Ce nombre est en relation avec un théorème de Picard. Il n'existe aucune intégrale de Picard de troisième espèce ayant pour courbes logarithmiques tout ou partie des $\rho$ courbes de la base, mais il existe une intégrale de Picard de troisième espèce ayant pour courbes logarithmiques tout ou partie des $\rho$ courbes précédentes et une courbe quelconque.

Sur certaines surfaces, il est possible de trouver des courbes $\Gamma_1$, $\Gamma_2$,..., $\Gamma_\sigma$ algébriquement distinctes telles que leurs multiples d'un certain ordre soient algébriquement équivalents. Le nombre t admet un maximum $\sigma$ appelé *diviseur de Severi* de la surface. Il existe des surfaces dont ce diviseurt est un nombre quelconque.

7. Dans certains cas, la valeur des genres d'une surface permet de la classer.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface soit rationnelle sont $p_a = P_2 = 0$ (Castelnuovo).

La condition pour qu'une surface appartienne à la classe des réglées est $P_{12} = 0$ (Enriques).

Une surface telle que $p_a = P_4 = 1$ possède une courbe canonique d'ordre zéro. Un système linéaire de courbes de genre $\pi$ a le degré $2\pi - 2$ et la dimension $\pi$.

Une surface de genres $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$ (surface de Picard) possède une courbe canonique d'ordre zéro. Une courbe de genre $\pi$ tracée sur F appartient à un système linéaire de degré $2\pi - 2$ et de dimension $\pi - 2$ et à un système continu de dimension $\pi$ formé de $\infty^2$ systèmes linéaires.

Le nombre des modules d'une surface algébrique reste à déterminer.

8. Severi a édifié une théorie des groupes de points appartenant à une surface algébrique.

Si $|C|$ et $|D|$ sont deux systèmes linéaires, l'ensemble des groupes (C, D) communs à une courbe C et à une courbe D est une série *d'équivalence élémentaire*. On définit la somme et la différence (quand ellg est possible) de deux séries élémentaires. Si $\Sigma_1$, $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_r$ sont des séries élémentaires, une somme algébrique $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_r$ est une *série d'équivalence* (non nécessairement élémentaire).

Soit $|C|$ un systême linéaire, $|C'|$ son adjoint, J le groupe de points doubles pour les courbes C d'un faisceau tiré de $|C|$. La série d'équivalence J-2 (C, C')−(C, C) est appelée *série d'equivalence de Severi:* elle se compose de groupes de I + 4 points. Dans le passage d'une surface à une autre de sa classe, la série de Severi dépend des courbes exceptionnelles.

## BIBLIOGRAPHIE


Castelnuovo, «Memorie scelte». Bologne, Zanichelli, 1937.

Enriques, «Le superficie algebriche». Bologne, Zanichelli, 1949. «Memorie scelt». Bologne, Zanichelli, 1956, 1959, 1966.

Godeaux, «Géométrie algébrique» (théorie des courbes et des surfaces). Paris, Centre de Documentation Universitaire, 1948.

Picard et Simart, «Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes». Paris, Gauthier-Villars, 1897, 1906.

Segre B., «Prodromidi Geometria algebrica». Roma, Cremonese, 1972.

Severi, «Fondamenti di Geometria algebraica». Padova, Cedam, 1948. «Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie o sopra una varietà algebrica». Roma, Cremonese, 1942, 1957, 1959.

Zariski, «Algebraic surfaces». Berlin, Springer, 1935, 2e éd., 1971.



Prof. L. GOLDEAUX, 37 quai Orban,—4000 Liège (Belgique).