Bollettino U. M. I.
(4) **7** (1973), 76-78

Sur l'invariant de Mehmke-Segre.

LUCIEN GODEAUX (Liegi)

Sunto. – *Si richiama l'attenzione sopra un lavoro dimenticato d'un matematico belga, C. Servais, su certi invarianti proiettivi.*

Dans une note datant de 1897, Corrado Segre a établi que le rapport des courbures en un point de deux courbes tangentes en ce point est un invariant projectif. Cette propriété avait déjà été établie par Mehmke (²), mais comme Terracini le fait remarquer dans le préface au tome II des Opere de Corrado Segre, la propriété est obtenue comme limite d'un rapport anharmonique, ce qui montre le caractère projectif de l'invariant.

Le 5 février 1898, Clément Servais (1862-1935) présentait à l'académie royale de Belgique un mémoire sur *La courbure et la torsion dans la collinéation et la réciprocité* (³). Servais, qui ne connaissait certainement pas le travail de Corrado Segre, retrouve aussi le théorème de Mehmke comme limite d'un rapport anharmonique, mais aussi d'autres invariants projectifs. Il semble que le mémoire de Servais n'ait pas eu la diffusion qu'il méritait et l'objet de cette note est de le fair connaître.

Soient C une courbe et C_1 la courbe qu'une homographie H lui fait correspondre. Considérons deux points M, N de C et les points M_1 et N_1 de C_1 que H leur fait correspondre. Soient en outre deux points A', B' de la droite MN et A_1', B_1' leurs homologues sur M_1N_1.

(¹) C. SEGRE, *Su alcuni punti singolari delle curve e sulla linea parabolica di una superficie*, (Rendiconti della Accademia dei Lincei, 2° sem. 1897, Opere, tomo II, pp. 1-8); *Sugli elementi curvilinei che hanno comuni la tangente e il piano osculatore* (Idem, 1° sem. 1924, Opere, tomo II, pp. 181-191).

(²) R. MEHMKE, *Einige Sätze über die räumliche Collineation und Affinität welche sich auf die Krümmung von Curven und Flächen beziehen*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1891, pp. 56-60.

(³) Mémoire in-8° de l'Académie roy. de Belgique, 1898.

On a

$$MA'NB' \,\overline{\wedge}\, M_1A_1'N_1B_1' \,.$$

Lorsque N tend vers M sur la courbe C, N_1 tend vers M_1 sur la courbe C_1 et à la limite les rapports anharmoniques des quaternes restent égaux. Si A, B sont deux points de la tangente m en M à C et A_1, B_1 les points homologues sur la tangent m_1 à C_1 en M_1, on a

$$ds \frac{AB}{MA \cdot MB} = ds_1 \frac{A_1B_1}{M_1A_1 \cdot M_1B_1} \,.$$

Si a', b' sont deux droites du plan de C (ou du plan osculateur à C en M) passant par M et a_1', b_1' les droites que H leur fait correspondre, on a

$$ma'cb' \,\overline{\wedge}\, m_1a_1'c_1b_1' \,.$$

c étant la droite MN et c_1 la droite M_1N_1.

A la limite on obtient

$$\omega \frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\cdot\sin(mb)} = \omega_1 \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(m_1a_1)\cdot\sin(m_1b_1)} \,,$$

ω et ω_1 étant les angles de contingence de C en M et de C_1 en M_1, les droites a, b passant per M et les droites a_1, b_1 étant les droites que H leur fait correspondre.

Si ϱ, ϱ_1 sont les rayons de courbure des courbes C, C_1 en M, M_1, on a

$$\frac{1}{\varrho} \frac{MA\cdot MB}{AB} \cdot \frac{\sin(ab)}{\sin(ma)\sin(mb)} = \frac{1}{\varrho_1} \frac{M_1A_1\cdot M_1B_1}{A_1B_1} \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(m_1a_1)\sin(m_1b_1)} \,.$$

On en conclut que si la courbe C_1 passe par M et y touche la courbe C, le rapport $ds : ds_1$, le rapport des angles de contingence $\omega : \omega_1$ et le rapport des courbures $\varrho_1 : \varrho$ sont des invariants projectifs.

Supposons les courbes C, C_1 gauches, μ le plan osculateur à C en M, μ_1 le plan homologue, osculateur à C_1 en M_1. Soient en outre γ le plan mN, γ_1' le plan m_1N_1 qui lui correspond, α, β deux plans passant par m, α_1, β_1 les plans homologues, on a

$$\mu\alpha\gamma\beta \,\overline{\wedge}\, \mu_1\alpha_1\gamma_1\beta_1$$

et, en passant à la limite et en désignant par τ, τ_1 les rayons de torsion de courbes C en M et C_1 en M_1, on a

$$\frac{1}{\tau}\,\frac{MA\cdot MB}{AB}\,\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\sin(\beta\mu)}$$
$$=\frac{1}{\tau_1}\,\frac{M_1A_1\cdot M_1B_1}{A_1B_1}\,\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\sin(\beta_1\mu_1)}.$$

Si la courbe C_1 passe par M et y a même tangente et même plan osculateur que C, on voit que le rapport des torsions est un invariant projectif, relation déjà obtenue par Mehmke par d'autres méthodes.

Servais démontre par des procédés analogues que si deux surfaces ont en un point M même plan tangent, le rapport des courbures totales des deux surfaces en M est un invariant projectif, résultat déjà obtenu également par Mehmke.

Il nous a paru intéressant de faire connaître ces résultats de Servais. Dans la définition de l'invariant de Mehmke-Segre comme limite d'un rapport anharmonique, la priorité appartient sans conteste à Segre. Nous signalerons que dans une note antérieure ([4]), Servais avait utilisé le rapport anharmonique pour établir certaines relations entre les courbes de deux surfaces qui se raccordent le long d'une courbe.

([4]) C. Servais, *Quelques formules sur la courbure des surfaces*, Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1894, pp. 896-904.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 12 luglio 1972